МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “ Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

А.А. Федюков

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института ИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению
подготовки 390301 «Социология»

Нижний Новгород
2016

УДК 517.956
ББК 22.161.6
Ф-16

Ф-16 Федюков А.А. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ: учебно-методическое пособие. – [электронный ресурс]. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 36 с.

Рецензент: ассистент **Р.С. Бирюков**

В учебно-методическом пособии изложен теоретический материал по решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. В каждом разделе поставлена задача и разобраны примеры с подробным алгоритмом решения. Приведены вопросы для самопроверки, которые позволяют закрепить полученные теоретические знания.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 390301 «Социология».

УДК 517.956
ББК 22.161.6

Содержание

Введение

Дифференциальные уравнения описывают множество процессов в физике, химии, биологии, технике, экономике, социологии и изучаются студентами различных направлений подготовки бакалавриата и магистратуры. Учебно-методическое пособие посвящено важному разделу дисциплины – линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами и нацелено на формирование способности выпускников применять в профессиональной деятельности методы математического моделирования.

Пособие разбито на разделы в соответствии с видами дифференциальных уравнений второго порядка. В каждом разделе изложен теоретический материал, который позволяет обучающимся систематизировать знания основных понятий, теорем и методов их практического применения при подготовке к контрольным работам и экзаменам; рассмотрены основные типы задач, разобраны примеры. Пособие содержит комплект заданий, который может быть использован в качестве типового для выработки навыков решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Количество заданий достаточно как для занятий в аудитории, так и для самостоятельной работы студентов.

Данное учебно-методическое пособие может быть полезно преподавателям при проведении практических занятий и формировании индивидуальных заданий обучающихся, а также студентам заочной формы обучения и аспирантам.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$, ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается как:

$$F(x, y, y') = 0,\ F(x, y, y', y'') = 0,\ F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

Порядком дифференциального уравнения называют порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Например, функция $y = \ln x$ является решением дифференциального уравнения первого порядка

$$x \cdot y' - 1 = 0.. \qquad (1)$$

Действительно, т.к. $y'(x) = \dfrac{1}{x}$ то, подставляя производную в уравнение (1), получим тождество.

Интегрированием дифференциального уравнения называется процесс нахождения решения дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения называется функция вида

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n),$$

в которую входит столько независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, каков порядок уравнения.

Видно, что функции $y = \ln x + 1$, $y = \ln x + 5$ также являются решениями дифференциального уравнения (1). Общее решение в данном примере имеет вид

$$y = \ln x + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при различных значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находим при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Например, для случая $y(1)=2$ частное решение дифференциального уравнения (1) будет иметь вид $y=\ln x+2$. Его график приведен на Рис. 1.

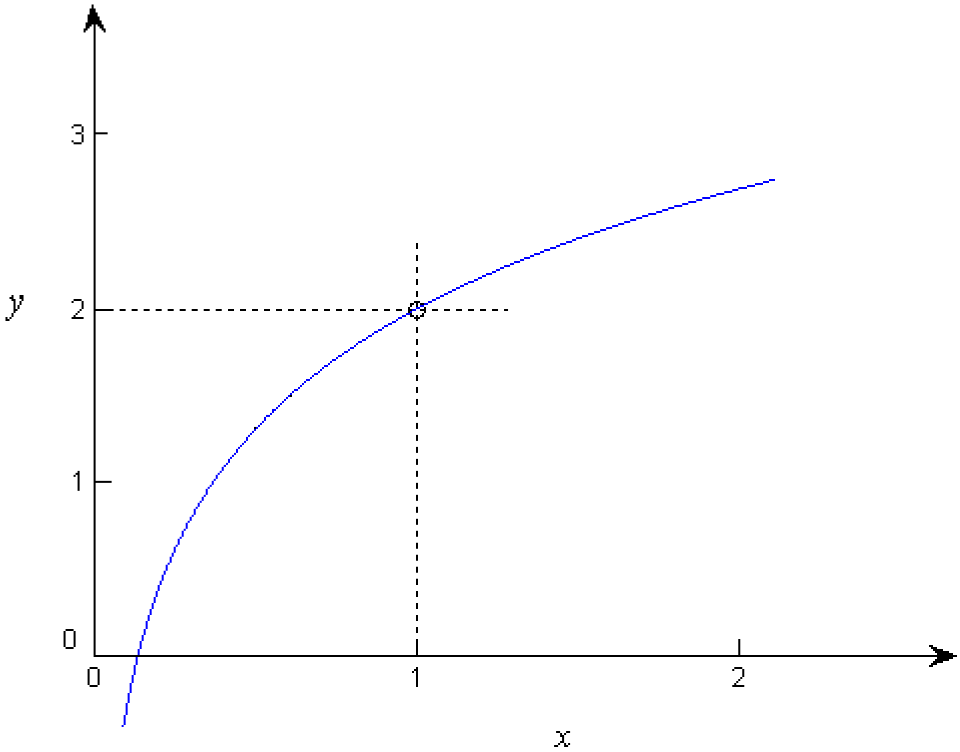

Рис. 1. График интегральной кривой

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{2}$$

где коэффициенты a_1, a_2 – постоянные, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x) = 0$, то уравнение (2) называется однородным. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (2) называется неоднородным.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{3}$$

Общим решением уравнения (3) является функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{4}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (3),
C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Фундаментальной системой решений называется всякая система линейно независимых решений, содержащая столько функций, каков порядок дифференциального уравнения.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале (a,b), если существуют постоянные числа λ_1, λ_2, не равные нулю, такие что $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$ для любых $x \in (a,b)$. Если же указанное тождество выполняется только в случае, когда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале (a,b).

Кратко *критерий линейной независимости* может быть сформулирован следующим образом: функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ являются линейно независимыми, если определитель Вронского

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{5}$$

отличен от нуля для любых $x \in (a,b)$. В противном случае функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно зависимы.

2.1. Алгоритм нахождения общего решения

Эйлер предложил искать частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (3) в виде $y(x)=e^{kx}$, где число $e=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$. Если принять $y(x)=e^{kx}$ частным решением линейного однородного дифференциального уравнения (3), то при подстановке этого решения в уравнение мы должны получить тождество.

Подставим:

$$\left(e^{kx}\right)''+a_1\left(e^{kx}\right)'+a_2\left(e^{kx}\right)=0,$$

$$k^2\left(e^{kx}\right)+a_1k\left(e^{kx}\right)+a_2\left(e^{kx}\right)=0,$$

$$e^{kx}\cdot(k^2+a_1k+a_2)=0,$$

$$k^2+a_1k+a_2=0. \qquad (6)$$

Мы получили так называемое *характеристическое уравнение* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решения квадратного уравнения (6) имеют вид

$$k_1=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^{\,2}-4a_2}}{2},\ k_2=\frac{-a_1-\sqrt{a_1^{\,2}-4a_2}}{2}. \qquad (7)$$

Утверждение 1. В общем виде, решения квадратного уравнения

$$a_0k^2+a_1k+a_2=0. \qquad (8)$$

имеет вид

$$k_1=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^{\,2}-4a_0a_2}}{2a_0},\ k_2=\frac{-a_1-\sqrt{a_1^{\,2}-4a_0a_2}}{2a_0}. \qquad (9)$$

Доказательство. Представим (8) в виде:

$$a_0k^2+a_1k=-a_2. \qquad (10)$$

Умножим обе части уравнения (10) на выражение $4a_0$

$$4a_0^{\,2}k^2+4a_0a_1k=-4a_0a_2$$

и добавим слева и справа в равенстве слагаемое

$$4a_0^{\,2}k^2+4a_0a_1k+a_1^{\,2}=-4a_0a_2+a_1^{\,2}. \qquad (11)$$

Выражение, стоящее в (11) справа, представляет собой полный квадрат

$$\left(2a_0k + a_1\right)^2 = -4a_0a_2 + a_1^{\ 2}. \qquad (12)$$

Учитывая, что уравнение (12) имеет два корня

$$\left(2a_0k_{1,2} + a_1\right) = \pm\sqrt{-4a_0a_2 + a_1^{\ 2}}$$

получим формулы (9).

Утверждение доказано.

Таким образом, полученное квадратное уравнение (6) может иметь, в зависимости от дискриминанта $D = a_1^{\ 2} - 4a_2$, два различных действительных решения, два совпадающих действительных решения (кратный корень) или пару комплексно-сопряженных решений.

В зависимости от корней характеристического уравнения выделяются частные решения (соответствующие корням характеристического уравнения), образующие фундаментальную систему решений и записывается соответствующее общее решение (4). Корни и вид общего решения дифференциального уравнения (3) представлены в Таблице 1.

Таблица 1

	Корни и вид общего решения дифференциального уравнения
1 случай	k_1, k_2 – действительные и различные $k_1 \neq k_2$ $y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
2 случай	k_1, k_2 – действительные и совпадают $k_1 = k_2$ $y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2x \cdot e^{k_1x}$
3 случай	k_1, k_2 – комплексно-сопряженные, т.е. $k_1 = a + i \cdot b$, $k_2 = a - i \cdot b$. $y(x) = C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\sin bx$

В первом случае линейно независимыми частными решениями исходного дифференциального уравнения являются $y_1(x) = e^{k_1x}$, $y_2(x) = e^{k_2x}$. Функции $y_1(x) = e^{k_1x}$, $y_2(x) = e^{k_2x}$ действительно линейно независимые, т.к. для этих функций определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{k_1 x} e^{k_2 x} \neq 0 .$$

Вывод: общее решение дифференциального уравнение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} .$$

Во втором случае одним частным решением является функция $y_1(x) = e^{k_1 x}$. В качестве второго решения берется функция $y_2(x) = x e^{k_1 x}$. Покажем, что функция $y_2(x) = x e^{k_1 x}$ действительно является частным решением дифференциального уравнения (3).

Подставим $y_2(x)$ в уравнение $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Тогда

$$\left(xe^{k_1 x}\right)'' + a_1\left(xe^{k_1 x}\right)' + a_2\left(xe^{k_1 x}\right) = \left(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}\right)' + a_1\left(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}\right) + a_2\left(xe^{k_1 x}\right) =$$
$$= k_1 e^{k_1 x} + k_1\left(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}\right) + a_1\left(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}\right) + a_2\left(xe^{k_1 x}\right) =$$
$$= e^{k_1 x} \cdot \left(2k_1 + k_1{}^2 x + a_1 + a_1 k_1 x + a_2 x\right) = x e^{k_1 x} \cdot \left(k_1{}^2 + a_1 k_1 + a_2\right) + e^{k_1 x} \cdot \left(2k_1 + a_1\right).$$

Заметим, что k_1 является корнем уравнения

$$k_1{}^2 + a_1 k_1 + a_2 = 0,$$

и, что в случае равенства корней уравнения (6), дискриминант $D = 0$, т.е. $k_1 = -\dfrac{a_1}{2}$.

То есть $0 \equiv 0$. Что и требовалось показать.

Таким образом, $y_2(x) = x e^{k_1 x}$ является частным решением дифференциального уравнения (3).

Покажем линейную независимость функций $y_1(x) = e^{k_1 x}$ и $y_2(x) = x e^{k_1 x}$. Для этого вычислим определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x} \end{vmatrix} =$$
$$= e^{k_1 x} \cdot (e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}) - k_1 x e^{k_1 x} e^{k_1 x} = e^{2k_1 x} \neq 0 .$$

Вывод: общее решение дифференциального уравнение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x \cdot e^{k_1 x} .$$

В третьем случае имеем пару комплексных частных решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1(x) = e^{(a+i\cdot b)x}$ и $y_2(x) = e^{(a-i\cdot b)x}$.

Воспользовавшись формулой Эйлера из теории функций комплексного переменного, связывающей комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями

$$e^{i\cdot x} = \cos x + i\cdot\sin x,$$

представим решения в виде

$$y_1(x) = e^{(a+i\cdot b)x} = e^{ax}e^{i\cdot bx} = e^{ax}(\cos bx + i\cdot\sin bx),$$

$$y_2(x) = e^{(a-i\cdot b)x} = e^{ax}e^{-i\cdot bx} = e^{ax}(\cos bx - i\cdot\sin bx).$$

Далее, построим линейные комбинации этих решений следующего вида:

$$y_1^*(x) = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax}\cos bx,$$

$$y_2^*(x) = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{ax}\sin bx.$$

По теореме о линейных свойствах решений данные функции также будут являться решениями исходного дифференциального уравнения. Составим определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1^*(x) & y_2^*(x) \\ y_1^*{}'(x) & y_2^*{}'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ ae^{ax}\cos bx - e^{ax}\sin bx & ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx \end{vmatrix} = be^{ax}.$$

Так как экспоненциальная функция строго положительна, а характеристическое уравнение имеет комплексные корни (значит $b \neq 0$), то этот определитель отличен от нуля. В соответствии с критерием фундаментальности, решения $y_1^*(x) = e^{ax}\cos bx$, $y_2^*(x) = e^{ax}\sin bx$ являются линейно независимыми, и для уравнения второго порядка образуют фундаментальную систему решений.

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\sin bx.$$

Обобщим теорию.

Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

1. Записываем характеристическое уравнение $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.
2. Находим корни характеристического уравнения k_1, k_2.
3. В зависимости от значений корней характеристического уравнения записываем общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в виде:

- $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in R$;
- $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x \cdot e^{k_1 x}$, если $k_1 = k_2$, $k_1, k_2 \in R$;
- $y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$, если $k_1 = a + i \cdot b$, $k_2 = a - i \cdot b$.

Рассмотрим примеры для каждого случая.

2.2. Примеры

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$4y'' - 11y' + 6y = 0 \tag{13}$$

Составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$4k^2 - 11k + 6 = 0.$$

Решим его.

$$k_1 = \frac{11 + \sqrt{11^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4}, \; k_2 = \frac{11 - \sqrt{11^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4}.$$

Откуда

$$k_1 = 2, \; k_2 = \frac{3}{4}.$$

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных решения, т.е. имеем первый случай в Таблице 1. В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{\frac{3}{4}x}$$

и получить общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x}.$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x}.$$

$$y' = \left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right)' = \left(C_1 e^{2x} \right)' + \left(C_2 {}' e^{\frac{3}{4}x} \right)' = 2C_1 e^{2x} + \frac{3}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x},$$

$$y'' = \left(2C_1 e^{2x} + \frac{3}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right)' = \left(2C_1 e^{2x} \right)' + \left(\frac{3}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right)' = 4C_1 e^{2x} + \frac{9}{16} C_2 e^{\frac{3}{4}x}.$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в исходное уравнение (13).

$$4 \cdot \left(4C_1 e^{2x} + \frac{9}{16} C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right) - 11 \cdot \left(2C_1 e^{2x} + \frac{3}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right) + 6 \cdot \left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right) =$$

$$= 16C_1 e^{2x} + \frac{9}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} - 22C_1 e^{2x} - \frac{33}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} + 6C_1 e^{2x} + 6C_2 e^{\frac{3}{4}x} =$$

$$= (16 - 22 + 6) C_1 e^{2x} + \left(\frac{9}{4} - \frac{33}{4} + 6 \right) C_2 e^{\frac{3}{4}x} = 0.$$

То есть $0 \equiv 0$. Что и требовалось показать.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$4y'' - 4y' + y = 0 \tag{14}$$

Составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$4k^2 - 4k + 1 = 0.$$

Решим его.

$$k_1 = \frac{14 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}, \; k_2 = \frac{14 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}.$$

Откуда

$$k_1 = \frac{1}{2},\ k_2 = \frac{1}{2}.$$

Характеристическое уравнение имеет два совпадающих действительных корня (или один действительный корень кратности два), т.е. имеем второй случай в Таблице 1.

В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x},\quad y_2(x) = xe^{\frac{1}{2}x}$$

и получить общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}.$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}.$$

$$y' = \left(C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x} \right)' = \left(C_1 e^{\frac{1}{2}x} \right)' + \left(C_2 x e^{\frac{1}{2}x} \right)' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} C_2 x e^{\frac{1}{2}x},$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 \left(1 + \frac{1}{2}x\right) e^{\frac{1}{2}x} \right)' = \left(\frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} \right)' + \left(C_2 \left(1 + \frac{1}{2}x\right) e^{\frac{1}{2}x} \right)' = .$$
$$= \frac{1}{4} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} C_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} C_2 \left(1 + \frac{1}{2}x\right) e^{\frac{1}{2}x}.$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в исходное уравнение (14).

$$4 \cdot \left(\frac{1}{4} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 \left(1 + \frac{1}{4}x\right) e^{\frac{1}{2}x} \right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 \left(1 + \frac{1}{2}x\right) e^{\frac{1}{2}x} \right) +$$
$$+ \left(C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x} \right) = (1 - 2 + 1) C_1 e^{\frac{1}{2}x} + (4 + x - 4 - 2x + x) C_2 e^{\frac{1}{2}x} = 0.$$

То есть $0 \equiv 0$. Что и требовалось показать.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 37y = 0 \tag{15}$$

Составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$k^2 - 2k + 37 = 0\,. \tag{16}$$

Решим его.

$$k_1 = \frac{2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 37}}{2}\,,\; k_2 = \frac{2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 37}}{2}\,.$$

Откуда

$$k_1 = \frac{2 + \sqrt{-144}}{2}\,,\; k_2 = \frac{2 - \sqrt{-144}}{2}\,,$$

$$k_1 = 1 + 6i\,,\; k_2 = 1 - 6i\,,$$

где

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Характеристическое уравнение (16) имеет два комплексно-сопряженных решения, т.е. имеем третий случай в Таблице 1. В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1(x) = e^x \cos 6x\,,\quad y_2(x) = e^x \sin 6x$$

и получить общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1 e^x \cos 6x + C_2 e^x \sin 6x\,.$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$y(x) = C_1 e^x \cos 6x + C_2 e^x \sin 6x\,.$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(C_1 e^x \cos 6x + C_2 e^x \sin 6x\right)' = \left(C_1 e^x \cos 6x\right)' + \left(C_2 e^x \sin 6x\right)' = \\ &= C_1 e^x \cos 6x - 6 \cdot C_1 e^x \sin 6x + C_2 e^x \sin 6x + 6 \cdot C_2 e^x \cos 6x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\left(C_1 + 6 \cdot C_2\right) \cdot e^x \cos 6x + \left(C_2 - 6 \cdot C_1\right) \cdot e^x \sin 6x\right)' = \\ &= \left(\left(C_1 + 6 \cdot C_2\right) \cdot e^x \cos 6x\right)' + \left(\left(C_2 - 6 \cdot C_1\right) \cdot e^x \sin 6x\right)' = \\ &= \left(C_1 + 6 \cdot C_2\right) \cdot e^x \cos 6x - 6 \cdot \left(C_1 + 6 \cdot C_2\right) \cdot e^x \sin 6x + \\ &+ \left(C_2 - 6 \cdot C_1\right) \cdot e^x \sin 6x + 6 \cdot \left(C_2 - 6 \cdot C_1\right) \cdot e^x \cos 6x. \end{aligned}$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в исходное уравнение (15).

$$
\begin{aligned}
&\left(-35C_1+12\cdot C_2\right)\cdot e^x\cos 6x+\left(-12\cdot C_1-35C_2\right)\cdot e^x\sin 6x-\\
&\ -2\cdot\Big(\left(C_1+6\cdot C_2\right)\cdot e^x\cos 6x+\left(C_2-6\cdot C_1\right)\cdot e^x\sin 6x\Big)+\\
&\ +37\cdot\Big(C_1e^x\cos 6x+C_2e^x\sin 6x\Big)=\\
&=(-35-2+37)C_1\cdot e^x\cos 6x+(-12+12)C_1\cdot e^x\sin 6x+\\
&\ +(12-12)C_2\cdot e^x\cos 6x+(-35-2+37)C_2\cdot e^x\sin 6x=0.
\end{aligned}
$$

То есть $0\equiv 0$. Что и требовалось показать.

3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (2):

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Покажем решение данного дифференциального уравнения двумя методами: методом вариации произвольных постоянных и методом неопределенных коэффициентов.

3.1. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

В общем случае это уравнение может быть решено *методом вариации произвольных постоянных* (методом Лагранжа). Алгоритм нахождения решения методом Лагранжа состоит в следующем:

1. Находим общее решение линейного однородного уравнения (3), соответствующее исходному неоднородному уравнению (2)

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

2. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде общего решения однородного уравнения, считая, что произвольные постоянные являются функциями независимой переменной x, т.е. в виде

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \qquad (17)$$

Таким образом, функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ уравнения (17) могут быть найдены как решения системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x), \end{cases} \qquad (18)$$

которая является линейной системой двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными относительно $C_1(x)$, $C_2(x)$. Представим систему (18) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Так как функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ являются линейно независимыми, то определитель Вронского (5)

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

для любых x. Тогда система (19) имеет единственное решение

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Поэтому и система двух уравнений (18) имеет единственное решение $C_1'(x) = g_1(x)$, $C_2'(x) = g_2(x)$. Интегрируя полученные равенств, найдем функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ и тем самым получим общее решение исходного неоднородного уравнения.(2).

3.2. Пример

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x} \tag{20}$$

Шаг 1. Найдем $y_{одн}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. уравнения

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

Для этого составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$k^2 - 3k - 4 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим корни характеристического уравнения $k_1 = -1$, $k_2 = 4$. Эти корни являются действительными и различными (первый случай), поэтому фундаментальная система решений, соответствующая этим корням, будет иметь вид:

$$y_1(x) = e^{-x},$$

$$y_2(x) = e^{4x}.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой:

$$y_{одн}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Шаг 2. Будем искать общее решение неоднородного линейного уравнения в виде общего решения однородного линейного уравнения, считая, что произвольные постоянные являются функциями независимой переменной x, т.е. в виде

$$y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{4x}. \tag{21}$$

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ могут быть найдены из решения системы (18),

где

$$y_1(x)=e^{-x},\ y_2(x)=e^{4x},\ y_1'(x)=-e^{-x},\ y_2'(x)=4e^{4x},\ f(x)=6xe^{-x}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^{4x}=0, \\ -C_1'(x)e^{-x}+4C_2'(x)e^{4x}=6xe^{-x}. \end{cases} \tag{22}$$

Преобразуем уравнения (22).

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x}=-C_2'(x)e^{4x}, \\ -C_1'(x)e^{-x}+4C_2'(x)e^{4x}=6xe^{-x}, \end{cases} \begin{cases} C_1'(x)e^{-x}=-C_2'(x)e^{4x}, \\ 5C_2'(x)e^{4x}=6xe^{-x}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x}=-C_2'(x)e^{4x}, \\ C_2'(x)=\dfrac{6x}{5}e^{-5x}, \end{cases} \begin{cases} C_1'(x)e^{-x}=-\dfrac{6x}{5}e^{-5x}e^{4x}, \\ C_2'(x)=\dfrac{6x}{5}e^{-5x}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} C_1'(x)=-\dfrac{6x}{5}, \\ C_2'(x)=\dfrac{6x}{5}e^{-5x}. \end{cases}$$

Так как функция $C_1'(x)=-\dfrac{6x}{5}$, то $\int C_1'(x)dx=-\int\dfrac{6x}{5}dx$.

Тогда

$$C_1(x)=-\frac{3}{5}x^2+A,$$

где A – произвольная постоянная.

Так как функция $C_2'(x)=\dfrac{6x}{5}e^{-5x}$, то.

$$\int C_2'(x)dx=\int\frac{6x}{5}e^{-5x}dx. \tag{23}$$

Найдем интеграл (23), применяя формулу интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

где $u=x$, $dv=\dfrac{6}{5}e^{-5x}dx$, $du=dx$, $v=-\dfrac{6}{25}e^{-5x}$.

$$C_2(x)=\int\frac{6x}{5}e^{-5x}dx=-\frac{6}{25}xe^{-5x}-\int-\frac{6}{25}e^{-5x}dx=-\frac{6}{25}xe^{-5x}-\frac{6}{125}e^{-5x}+B,$$

где B – произвольная постоянная.

Подставляя $C_1(x)$, $C_2(x)$ в (21) получим решение дифференциального уравнения

$$y(x)=\left(-\frac{3}{5}x^2+A\right)\cdot e^{-x}+\left(-\frac{6}{25}xe^{-5x}-\frac{6}{125}e^{-5x}+B\right)\cdot e^{4x}. \qquad (24)$$

Раскроем в формуле (24) скобки и сгруппируем элементы

$$y(x)=-\frac{3}{5}x^2e^{-x}+A\cdot e^{-x}-\frac{6}{25}xe^{-5x}e^{4x}-\frac{6}{125}e^{-5x}e^{4x}+B\cdot e^{4x}=$$
$$=-\frac{3}{5}x^2e^{-x}+A\cdot e^{-x}-\frac{6}{25}xe^{-x}-\frac{6}{125}e^{-x}+B\cdot e^{4x}= .$$
$$=\left(A-\frac{6}{125}\right)\cdot e^{-x}+B\cdot e^{4x}+\left(-\frac{3}{5}x^2-\frac{6}{25}x\right)e^{-x}.$$

Обозначив произвольные постоянные

$$C_1=A-\frac{6}{125},\ C_2=B,$$

запишем решение исходного неоднородного линейного уравнения (20) в виде

$$y(x)=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{4x}+\left(-\frac{3}{5}x^2-\frac{6}{25}x\right)e^{-x}. \qquad (25)$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$y'(x)=-C_1\cdot e^{-x}+4C_2\cdot e^{4x}+\left(-\frac{6}{5}x-\frac{6}{25}\right)e^{-x}-\left(-\frac{3}{5}x^2-\frac{6}{25}x\right)e^{-x}=$$
$$=-C_1\cdot e^{-x}+4C_2\cdot e^{4x}+\left(\frac{3}{5}x^2-\frac{24}{25}x-\frac{6}{25}\right)e^{-x}.$$

$$y''(x)=C_1\cdot e^{-x}+16C_2\cdot e^{4x}+\left(\frac{6}{5}x-\frac{24}{25}\right)e^{-x}-\left(\frac{3}{5}x^2-\frac{24}{25}x-\frac{6}{25}\right)e^{-x}=$$
$$=C_1\cdot e^{-x}+16C_2\cdot e^{4x}+\left(-\frac{3}{5}x^2+\frac{54}{25}x-\frac{18}{25}\right)e^{-x}.$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в левую часть исходного уравнения (20)

$$y'' - 3y' - 4y = C_1 \cdot e^{-x} + 16C_2 \cdot e^{4x} + \left(-\frac{3}{5}x^2 + \frac{54}{25}x - \frac{18}{25}\right)e^{-x} -$$

$$-3 \cdot \left(-C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x} + \left(\frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{25}x - \frac{6}{25}\right)e^{-x}\right) -$$

$$-4 \cdot \left(C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x} + \left(-\frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{-x}\right) =$$

$$= (1 + 3 - 4)C_1 \cdot e^{-x} + (16 - 12 - 4)C_2 \cdot e^{4x} +$$

$$+ \left(\left(-\frac{3}{5} - \frac{9}{5} + \frac{12}{5}\right)x^2 + \left(\frac{54}{25} + \frac{72}{25} + \frac{24}{25}\right)x + \left(\frac{18}{25} - \frac{18}{25}\right)\right)e^{-x} =$$

$$= \frac{150}{25}xe^{-x} = 6xe^{-x}.$$

То есть $6xe^{-x} \equiv 6xe^{-x}$. Что и требовалось показать.

3.3. Метод неопределенных коэффициентов

Метод вариации произвольных постоянных достаточно сложен, поэтому в ряде случаев, когда правая часть дифференциального уравнения имеет специальный вид, можно использовать другой метод – *метод неопределенных коэффициентов*. Для этого воспользуемся следующим утверждением о структуре общего решения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения.

Утверждение 2. Общее решение $y(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (2) равно сумме общего решения $y_{одн}(x)$ соответствующего однородного уравнения (3) и частного решения $y_{част}(x)$ исходного неоднородного уравнения.(2)

$$y(x) = y_{одн} + y_{част}.$$

Общее решение $y_{одн}(x)$ линейного однородного уравнения находим по алгоритму, приведенному выше. Далее необходимо найти частное решение $y_{част}(x)$ неоднородного уравнения. В случае, когда правая часть исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right),$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – полиномы степени n, m соответственно, a, b – некоторые постоянные числа, то частное решение неоднородного уравнения будет иметь следующую структуру:

$$y_{част} = x^r e^{ax}\left(N_l(x)\cos bx + M_l(x)\sin bx\right), \qquad (26)$$

где $N_l(x)$, $M_l(x)$ – полиномы степени $l = \max(n, m)$, записанные с неопределенными коэффициентами; величина r равна числу корней характеристического уравнения (8), совпадающих с числом $a + i \cdot b$.

Таким образом,

- $r = 0$, если среди корней характеристического уравнения k_1, k_2 нет числа $a + i \cdot b$;
- $r = 1$, если один корень совпадает с этим числом;
- $r = 2$, если оба корня совпадают с этим числом.

Далее, в соответствии с алгоритмом, зная структуру частного решения неоднородного уравнения (26), неизвестными которого являются коэффициенты полиномов, подставим его вместе с производными в исходное уравнение. Приравниваем коэффициенты подобных членов слева и справа. Получим систему линейных алгебраических уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов.

Таким образом, процесс нахождения частного решения $y_{част}(x)$ неоднородного уравнения сводится к применению таких элементарных операций, как дифференцирование и решение линейных алгебраических уравнений. Заметим, что в этом методе не используется операция интегрирования, которая необходима в методе вариации произвольных постоянных.

3.4. Примеры

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x} \tag{27}$$

Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение $y(x)$ имеет вид:

$$y(x) = y_{одн} + y_{част}, \tag{28}$$

где $y_{одн}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{част}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Шаг 1. Запишем общее решение соответствующего однородного уравнения (получено выше в **Примере 4**):

$$y_{одн}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Шаг 2. Найдем $y_{част}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения. Рассмотрим правую часть исходного неоднородного уравнения

$$f(x) = 6xe^{-x}.$$

Видно, что правая часть исходного уравнения имеет специальный вид

$$f(x) = 6xe^{-x} \equiv e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right),$$

где

$a = -1,\ b = 0$, полином $P_n(x) = 6x$, т.е. $n = 1$, полином $Q_m(x) = 0$, т.е. $m = 0$.

Так как правая часть имеет специальный вид, то структура частного решения в общем случае будет иметь вид:

$$y_{част} = x^r e^{ax}\left(N_l(x)\cos bx + M_l(x)\sin bx\right),$$

где величины r, l и полиномы $N_l(x)$, $M_l(x)$ находятся следующим образом. Так как

$$\left.\begin{array}{r} a=-1 \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a+i\cdot b=-1+0\cdot i=k_1 \Rightarrow r=1,$$

$$\left.\begin{array}{r} P_n(x)=6x \\ Q_m(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow n=1,\;\; m=0 \Rightarrow l=\max(n,m)=1.$$

Значит $N_l(x)=Ax+B$, $M_l(x)=Cx+D$, где A, B, C, D – постоянные. Тогда структура частного решения исходного неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами будет иметь вид:

$$y_{част}=x^1 e^{-1\cdot x}\left((Ax+B)\cdot\cos(0\cdot x)+(Cx+D)\cdot\sin(0\cdot x)\right)=xe^{-x}(Ax+B).$$

Коэффициенты A, B определим методом неопределенных коэффициентов. Для этого подставим частное решение с неопределенными коэффициентами в исходное уравнение, предварительно вычислив первую и вторую производные.

$$y=xe^{-x}(Ax+B),$$

$$y'=-e^{-x}\left(Ax^2+Bx\right)+e^{-x}(2Ax+B)=e^{-x}\left(-Ax^2+(2A-B)\cdot x+B\right),$$

$$\begin{aligned} y''&=-e^{-x}\left(-Ax^2+(2A-B)\cdot x+B\right)+e^{-x}(-2Ax+2A-B)= \\ &=e^{-x}\left(Ax^2+(B-4A)\cdot x+2A-2B\right), \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} y''-3y'-4y&=e^{-x}\left(Ax^2+(B-4A)\cdot x+2A-2B\right)- \\ &-3\cdot e^{-x}\left(-Ax^2+(2A-B)\cdot x+B\right)-4xe^{-x}(Ax+B)= \\ &=e^{-x}\left((-10A)\cdot x+2A-5B\right). \end{aligned}$$

Подставим данное выражение в уравнение (27).

$$e^{-x}\left((-10A)\cdot x+2A-5B\right)=6xe^{-x}.$$

Разделим обе части уравнения на e^{-x} и приравняем коэффициенты при x^0 и x^1. Получим систему

$$\begin{cases} -10A=6, \\ 2A-5B=0, \end{cases}$$

из которой найдем коэффициенты A, B:

$$\begin{cases} A=-\dfrac{3}{5}, \\ B=-\dfrac{6}{25}. \end{cases}$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{част} = xe^{-x}\left(-\frac{3}{5}x - \frac{6}{25}\right),$$

а общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения (27) определяется формулой (28):

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} + xe^{-x}\left(-\frac{3}{5}x - \frac{6}{25}\right).$$

Видно, что общее решение дифференциального уравнения (27), полученное с помощью применения метода неопределенных коэффициентов, совпадает с решением (25), полученным методом вариации произвольных постоянных в **Примере 4**.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x \qquad (29)$$

Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение $y(x)$ имеет вид:

$$y(x) = y_{одн} + y_{част}, \qquad (30)$$

где $y_{одн}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{част}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Шаг 1. Найдем $y_{одн}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Для этого составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$k^2 + 6k + 13 = 0.$$

Решим его.

$$k_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4\cdot 13}}{2}, k_2 = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4\cdot 13}}{2}.$$

Откуда

$$k_1 = -3 + 2i,\ k_2 = -3 - 2i.$$

Мы имеем два комплексно-сопряженных корня (третий случай) поэтому фундаментальная система решений, соответствующая этим корням, будет иметь вид:

$$y_1(x) = e^{-3x}\cos 2x,$$

$$y_2(x) = e^{-3x}\sin 2x.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой:

$$y_{одн}(x) = C_1 e^{-3x}\cos 2x + C_2 e^{-3x}\sin 2x.$$

Шаг 2. Найдем $y_{част}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения. Рассмотрим правую часть исходного неоднородного уравнения

$$f(x) = e^{-3x}\cos 5x.$$

Видно, что правая часть исходного уравнения имеет специальный вид

$$f(x) = e^{-3x}\cos 5x \equiv e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right),$$

где

$a = -3,\ b = 5$, полином $P_n(x) = 1$, т.е. $n = 0$, полином $Q_m(x) = 0$, т.е. $m = 0$.

Так как правая часть имеет специальный вид, то структура частного решения в общем случае будет иметь вид:

$$y_{част} = x^r e^{ax}\left(N_l(x)\cos bx + M_l(x)\sin bx\right),$$

где величины r, l и полиномы $N_l(x)$, $M_l(x)$ находятся следующим образом. Так как

$$\left.\begin{array}{r} a = -3 \\ b = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow a + i\cdot b = -3 + 5\cdot i \neq k_{1,2} \Rightarrow r = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} P_n(x) = 1 \\ Q_m(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow n = 0,\ \ m = 0 \Rightarrow l = \max(n, m) = 0.$$

Значит $N_l(x) = A,\ M_l(x) = B$, где $A,\ B$ – постоянные.

Тогда структура частного решения исходного неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами будет иметь вид:

$$y_{част} = x^0 e^{-3x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right) = e^{-3x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right).$$

Коэффициенты $A,\ B$ определим методом неопределенных коэффициентов. Для этого подставим частное решение с неопределенными коэффициентами в исходное уравнение, предварительно вычислив первую и вторую производные.

$$y = e^{-3x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right),$$

$$y' = -3e^{-3x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right) + e^{-3x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right)' =$$
$$= -3e^{-3x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right) + e^{-3x}\left(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x\right) =$$
$$= e^{-3x}\left(\left(-3A + 5B\right)\cdot \cos 5x - \left(3B + 5A\right)\cdot \sin 5x\right),$$

$$y'' = -3e^{-3x}\left(\left(-3A + 5B\right)\cdot \cos 5x - \left(3B + 5A\right)\cdot \sin 5x\right) +$$
$$+ e^{-3x}\left(\left(-3A + 5B\right)\cdot \cos 5x - \left(3B + 5A\right)\cdot \sin 5x\right)' =$$
$$= -3e^{-3x}\left(\left(-3A + 5B\right)\cdot \cos 5x - \left(3B + 5A\right)\cdot \sin 5x\right) +$$
$$+ e^{-3x}\left(-5\cdot\left(-3A + 5B\right)\cdot \sin 5x - 5\cdot\left(3B + 5A\right)\cdot \cos 5x\right) =$$
$$= e^{-3x}\left(\left(-16A - 30B\right)\cdot \cos 5x + \left(30A - 16B\right)\cdot \sin 5x\right).$$

Тогда

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\left(\left(-16A - 30B\right)\cdot \cos 5x + \left(30A - 16B\right)\cdot \sin 5x\right) +$$
$$+ 6\cdot e^{-3x}\left(\left(-3A + 5B\right)\cdot \cos 5x - \left(3B + 5A\right)\cdot \sin 5x\right) + 13\cdot e^{-3x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right) =$$
$$= e^{-3x}\left(-21A\cdot \cos 5x - 21B\cdot \sin 5x\right).$$

Подставим данное выражение в уравнение (29).

$$e^{-3x}\left(-21A\cdot \cos 5x - 21B\cdot \sin 5x\right) = e^{-3x}\cos 5x.$$

Разделим обе части уравнения на e^{-3x} и приравняем коэффициенты при $\cos 5x$ и $\sin 5x$. Получим систему

$$\begin{cases} -21A = 1, \\ -21B = 0, \end{cases}$$

из которой найдем коэффициенты A, B:

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{21}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{част} = -\frac{1}{21}e^{-3x}\cos 5x,$$

а общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения (29) определяется формулой (30):

$$y(x) = C_1 e^{-3x}\cos 2x + C_2 e^{-3x}\sin 2x - \frac{1}{21}e^{-3x}\cos 5x.$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$y'(x) = -3C_1e^{-3x}\cos 2x - 2C_1e^{-3x}\sin 2x - 3C_2e^{-3x}\sin 2x + 2C_2e^{-3x}\cos 2x +$$

$$+\frac{3}{21}e^{-3x}\cos 5x + \frac{5}{21}e^{-3x}\sin 5x = \left(-3C_1 + 2C_2\right)e^{-3x}\cos 2x -$$

$$-\left(2C_1 + 3C_2\right)e^{-3x}\sin 2x + \frac{3}{21}e^{-3x}\cos 5x + \frac{5}{21}e^{-3x}\sin 5x,$$

$$y''(x) = -3\cdot\left(-3C_1 + 2C_2\right)e^{-3x}\cos 2x - 2\cdot\left(-3C_1 + 2C_2\right)e^{-3x}\sin 2x +$$

$$+3\cdot\left(2C_1 + 3C_2\right)e^{-3x}\sin 2x - 2\cdot\left(2C_1 + 3C_2\right)e^{-3x}\cos 2x - \frac{9}{21}e^{-3x}\cos 5x -$$

$$-\frac{15}{21}e^{-3x}\sin 5x - \frac{15}{21}e^{-3x}\sin 5x + \frac{25}{21}e^{-3x}\cos 5x =$$

$$=\left(5C_1 - 12C_2\right)e^{-3x}\cos 2x + \left(12C_1 + 5C_2\right)C_2e^{-3x}\sin 2x - \frac{30}{21}e^{-3x}\sin 5x +$$

$$+\frac{16}{21}e^{-3x}\cos 5x.$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в левую часть исходного уравнения (29)

$$y'' + 6y' + 13y = \left(5C_1 - 12C_2\right)e^{-3x}\cos 2x + \left(12C_1 + 5C_2\right)e^{-3x}\sin 2x -$$

$$-\frac{30}{21}e^{-3x}\sin 5x + \frac{16}{21}e^{-3x}\cos 5x + +6\cdot\left(\left(-3C_1 + 2C_2\right)e^{-3x}\cos 2x\right) +$$

$$+6\cdot\left(-\left(2C_1 + 3C_2\right)e^{-3x}\sin 2x\frac{3}{21}e^{-3x}\cos 5x + \frac{5}{21}e^{-3x}\sin 5x\right) +$$

$$+13\cdot\left(C_1e^{-3x}\cos 2x + C_2e^{-3x}\sin 2x - \frac{1}{21}e^{-3x}\cos 5x\right) =$$

$$=\left(5C_1 - 12C_2 - 18C_1 + 12C_2 + 13C_1\right)e^{-3x}\cos 2x +$$

$$+\left(12C_1 + 5C_2 - 12C_1 - 18C_2 + 13C_2\right)e^{-3x}\sin 2x +$$

$$+\left(-\frac{30}{21} + \frac{30}{21}\right)e^{-3x}\sin 5x + \left(\frac{16}{21} + \frac{18}{21} - \frac{13}{21}\right)e^{-3x}\cos 5x = e^{-3x}\cos 5x.$$

То есть $e^{-3x}\cos 5x \equiv e^{-3x}\cos 5x$. Что и требовалось показать.

4. Задача Коши

Общее решение любого дифференциального уравнения $y = y(x, C_1, C_2)$, как следует из алгоритма его получения, содержит бесчисленное множество частных решений. Возникает естественный вопрос: как из полученного множества решений выделить интересующее нас частное решение или, другими словами, как выделить нужную интегральную кривую?

Задача Коши – это одна из основных задач теории дифференциальных уравнений. Она состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям (начальным данным).

Задачи Коши обычно возникают при анализе процессов, определяемых законом эволюции и начальным состоянием, математическим выражением которых являются дифференциальные уравнения и начальное состояние. Начальные данные задаются при $x = x_0$, а искомое решение $y(x)$ ищется для $x > x_0$.

4.1. Примеры

Пример 7. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$4y'' - 11y' + 6y = 0 \tag{31}$$

если

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \tag{32}$$

В **примере 1** получено общее решение исходного дифференциального уравнения. Так как

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x},$$

тогда

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + \frac{3}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x}.$$

Учитывая (32), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1, \\ y'(0) = 2C_1 + \frac{3}{4} C_2 = 1. \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ 2C_1 + \dfrac{3}{4}C_2 = 1, \end{cases}.$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ 2 + \left(\dfrac{3}{4} - 2\right)C_2 = 1, \end{cases}.$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{5}, \\ C_2 = \dfrac{4}{5}. \end{cases}.$$

Искомое частное решение дифференциального уравнения (31) имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{4}{5}e^{\frac{3}{4}x}.$$

Пример 8. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x \tag{33}$$

если

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \tag{34}$$

В **примере 6** получено общее решение исходного дифференциального уравнения. Так как

$$y(x) = C_1 e^{-3x}\cos 2x + C_2 e^{-3x}\sin 2x - \frac{1}{21}e^{-3x}\cos 5x,$$

тогда

$$\begin{aligned} y'(x) &= (2C_2 - 3C_1)e^{-3x}\cos 2x - (3C_2 + 2C_1)e^{-3x}\sin 2x + \\ &+ \frac{3}{21}e^{-3x}\cos 5x + \frac{5}{21}e^{-3x}\sin 5x. \end{aligned}.$$

Учитывая (34), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 - \dfrac{1}{21} = 1, \\ y'(0) = 2C_2 - 3C_1 + \dfrac{3}{21} = 1. \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} C_1 = 1\dfrac{1}{21}, \\ C_2 = 2. \end{cases}.$$

Искомое частное решение дифференциального уравнения (33) имеет вид:

$$y(x) = 1\frac{1}{21}e^{-3x}\cos 2x + 2e^{-3x}\sin 2x - \frac{1}{21}e^{-3x}\cos 5x\,.$$

5. Вопросы для самопроверки

1. Какой вид имеет линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
2. Какие функции называются линейно независимыми?
3. Какой вид имеет определитель Вронского?
4. Как связаны линейная независимость системы функций и определитель Вронского для них?
5. Что называют характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
6. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни его характеристического уравнения действительные и различные? Дайте обоснование.
7. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни его характеристического уравнения комплексные? Дайте обоснование.
8. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни его характеристического уравнения действительные и совпадают? Дайте обоснование.
9. Установите линейную зависимость или линейную независимость системы функций: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$.
10. Установите линейную зависимость или линейную независимость системы функций: $y_1 = e^{2x}\cos 3x$, $y_2 = e^{2x}\sin 3x$.
11. Установите линейную зависимость или линейную независимость системы функций: $y_1 = \sin 3x \cdot \cos 3x$, $y_2 = \sin 6x$.
12. В чем состоит метод вариации произвольных постоянных?
13. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов?
14. Что такое задача Коши?

6. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения
   $4y''-3y'-2y=0$.
2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения
   $y''+2y'+2y=0$.
3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения
   $y''-6y'+9y=0$.
4. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения
   $y''-3y'-4y=x$.
5. Найти частное решение дифференциального уравнения
   $y''-3y'-4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Вариант 2.

1. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения
   $3y''-4y'-2y=0$.
2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения
   $y''-y'+2y=0$.
3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения
   $y''-2y'+1y=0$.
4. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения
   $y''-3y'-4y=e^x$.
5. Найти частное решение дифференциального уравнения
   $y''-3y'-4y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

Вариант 3.

1. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+16y'-2y=0$.
2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $4y''-3y'+2y=0$.
3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''-8y'+16y=0$.
4. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y''-3y'-4y=2x$.
5. Найти частное решение дифференциального уравнения $4y''-4y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Вариант 4.

1. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $2y''-3y'+y=0$.
2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $3y''-4y'+2y=0$.
3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''-4y'+4y=0$.
4. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y''-3y'-4y=1$.
5. Найти частное решение дифференциального уравнения $4y''-4y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Литература

1. Креймер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.м., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. 439 с.

2. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1996. 479 с.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. М.: Высшая школа, 1986. 416 с.

4. Барбаумов В.Е., Ермаков В.И., Кривенцова Н.Н. Справочник по математике для экономистов. М.: Высшая школа, 1997. 384 с.

5. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2-х ч. Ч.1. М.: Высшая школа, 1982. 272 с.

6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986. 545 с.

Александр Анатольевич **Федюков**

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.