

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

В.С. Гаврилов
Н.А. Денисова

Задания для решения методом характеристик

Практикум

Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки».

Нижний Новгород
2016

УДК 53:51(075)

ББК В311я7

Г-12

Г-12 Гаврилов В.С., Денисова Н.А. Задания для решения методом характеристик: Практикум — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. — 30с.

Рецензент: д.ф–м.н., профессор **Морозов А.Д.**

В настоящем практикуме приводятся варианты задач для самостоятельной работы студентов над темой «Метод характеристик».

Пособие предназначено для студентов третьего курса Института информационных технологий, математики и механики, и соответствует программе курсов «Уравнения математической физики» и «Уравнения с частными производными».

Ответственный за выпуск:

председатель методической комиссии ИИТММ ННГУ

к.ф.–м.н., доцент **О.А. Кузенков**

УДК 53:51(075)

ББК В161.68я73

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

Содержание

Предисловие	5
1 Вариант 1	5
2 Вариант 2	6
3 Вариант 3	7
4 Вариант 4	8
5 Вариант 5	9
6 Вариант 6	10
7 Вариант 7	11
8 Вариант 8	12
9 Вариант 9	13
10 Вариант 10	14
11 Вариант 11	14
12 Вариант 12	15

13 Вариант 13	16
14 Вариант 14	17
15 Вариант 15	18
16 Вариант 16	19
17 Вариант 17	20
18 Вариант 18	21
19 Вариант 19	22
20 Вариант 20	23
21 Вариант 21	24
22 Вариант 22	25
23 Вариант 23	26
24 Вариант 24	27
25 Вариант 25	28
Список литературы	28

Предисловие

Данный практикум является дополнением к учебно–методическому пособию [1], в котором подробно описывается решение начально–краевых задач для одномерного волнового уравнения методом характеристик. Цель настоящего практикума — предоставить задачи для самостоятельной работы студентов при изучении метода характеристик. А именно, приводится двадцать пять вариантов, по семь задач в каждом варианте. Эти задачи относятся к следующим группам: применение формулы Даламбера для неограниченной струны; построение профиля полуограниченной струны и формул для закона движения заданной точки полуограниченной струны; задачи, в которых колебания полуограниченной струны возбуждены импульсом, переданным заданным точкам струны; решение начально–краевой задачи с предварительным приведением к каноническому виду; задачи на продольные колебания стержня и поперечные колебания ограниченной струны.

Задачи составлены авторами практикума. При составлении задач использовались книги [2, 3].

1. Вариант 1

№1. *Используя формулу Даламбера, найти решение задачи*

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin t, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = x.$$

№2. *Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = \frac{\pi}{2}$. Начальные функции имеют вид*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

№3. *Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{5c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 2h)$, $(3c, \frac{3h}{2})$, $(4c, 0)$.*

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. *Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся*

импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 4x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{3x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 2 - x, \quad u_t|_{t=0} = 2, \\ (u_t + 3u_x)|_{x=0} &= 3t - e^t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, закреплённой на конце $x = 0$ и подверженной на конце $x = l$ действию силы $A \sin \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

2. Вариант 2

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \cos t, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, \frac{3h}{2})$, $(3c, 2h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{3x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned}4u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} &= 1 + \sin t.\end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) движется по заданному закону $u|_{x=0} = A \sin \omega t$, а другой ($x = l$) — свободен. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

3. Вариант 3

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + xt, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{\pi}{4a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 2h)$, $(3c, 2h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = \frac{x_0}{2}$ и $x = x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{3x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned}9u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\ u|_{x=0} &= \sin t.\end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) закреплён жёстко, а другой ($x = \pi$) — свободен. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, свободной на конце $x = 0$ и подверженной на конце $x = l$ действию силы $A \sin \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

4. Вариант 4

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + xt, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{\pi}{4a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{5c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, h)$, $(3c, h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 2x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{3x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned}u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\u|_{t=0} &= x^2, \quad u_t|_{t=0} = 2, \\(u_t + 3u_x)|_{x=0} &= 2.\end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, оба конца которой ($x = 0$, $x = \pi$) — свободны. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны со свободным концом $x = 0$, если на конце $x = l$ задано смещение $u|_{x=l} = A \sin \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

5. Вариант 5

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + 2t, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{1}{a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 2h)$, $(3c, 2h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = l$ и $x = 2l$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{l}{2a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\u|_{t=0} &= x + 1, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\u|_{x=0} &= \cos t.\end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) закреплён жёстко, а другой ($x = \pi$) — свободен. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \sin \frac{x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, свободной на конце $x = l$ и подверженной на конце $x = 0$ действию силы $A \sin \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

6. Вариант 6

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + x, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{3}{4a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & -2 < x < 0, \\ 0, & x < -2 \text{ или } x > 0; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & -2 < x < 0, \\ 0, & x < -2 \text{ или } x > 0. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{5c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 2h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = \frac{3x_0}{2}$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{4a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\ u|_{x=0} &= \sin t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение

и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, если на конце $x = 0$ задан закон движения $u_{x=0} = A \sin \omega t$, а конец $x = l$ — жёстко закреплён. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

7. Вариант 7

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + t, \quad u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{3\pi}{4a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

№3. Построить профиль пологограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 4h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полоугограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = 2x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{4a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 2 \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x + 1, \\ u|_{x=0} &= \sin t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \cos \frac{3x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, свободной на конце $x = l$ и подверженной на конце $x = 0$ действию силы $A \sin \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

8. Вариант 8

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + xt, \quad u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = -\frac{1}{2}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & -2 < x < 0, \\ 0, & x < -2 \text{ или } x > 0; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & -2 < x < 0, \\ 0, & x < -2 \text{ или } x > 0. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 3h)$, $(3c, 2h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 5x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{4x_0}{3a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 2 - x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\ (u_t + 3u_x)|_{x=0} &= 3t - t^2. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) закреплён жёстко, а другой ($x = \pi$) — свободен. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \sin \frac{x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, свободной на конце $x = 0$ и подверженной на конце $x = l$ действию силы $A \sin \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

9. Вариант 9

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + 2xt, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{1}{4a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 4h)$, $(3c, \frac{7h}{2})$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = \frac{3x_0}{2}$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{4a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 2 - x, \quad u_t|_{t=0} = 2, \\ u_x|_{x=0} &= \sin t - 1. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) закреплён жёстко, а другой ($x = \pi$) — свободен. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \sin \frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, подверженной на конце $x = 0$ действию силы $A \sin \omega_1 t$, а на конце $x = l$ — действию силы $A \sin \omega_2 t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{l}{a}$.

10. Вариант 10

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + 2xt, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{1}{2a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin 2\pi x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуграниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 2h)$, $(3c, \frac{3h}{2})$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{c}{2}$.

№4. Полуграниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 4x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{3x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} 4u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= x^3, \quad u_t|_{t=0} = x, \\ u_x|_{x=0} &= \sin t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, оба конца которой ($x = 0$, $x = \pi$) — свободны. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \cos x.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, подверженной на конце $x = 0$ действию силы $A \sin \omega_1 t$. На конце $x = l$ задано смещение $u|_{x=l} = A \sin \omega_2 t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{l}{a}$.

11. Вариант 11

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + 2x, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{1}{a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

№3. Построить профиль пологограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, \frac{3h}{2})$, $(3c, 2h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{3c}{2}$.

№4. Полоуграниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 2x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ (u_x + u)|_{x=0} &= 1 - \cos t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) закреплён жёстко, а другой ($x = \pi$) — свободен. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если к концу $x = 0$ приложена сила At , а к концу $x = l$ — сила $B \sin \omega_2 t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{l}{a}$.

12. Вариант 12

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = \frac{1}{2}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} v_0, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{5c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, h)$, $(3c, \frac{3h}{2})$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = 2c$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 4x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ (u_x + u)|_{x=0} &= 1 - \cos t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) закреплён жёстко, а другой ($x = \pi$) — свободен. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin \frac{3x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если к концу $x = 0$ приложена постоянная сила F , а конец $x = l$ — жёстко закреплён. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

13. Вариант 13

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + 2 \sin t, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{1}{a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 3h)$, $(3c, h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 2x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{3x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ (u_x + u)|_{x=0} &= 1 - \cos t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \cos \frac{5x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если конец $x = 0$ свободен, а к концу $x = l$ приложена сила Bt . Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

14. Вариант 14

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + 2t, \quad u|_{t=0} = x^3, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{5c}{2a}$, если начальное отклонение

отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 2h)$, $(3c, \frac{3h}{2})$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= x^2, \quad u_t|_{t=0} = 2, \\ (u_x + u)|_{x=0} &= 1 - \cos t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, оба конца которой ($x = 0$, $x = \pi$) — свободны. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = \cos 2x.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если конец $x = 0$ жёстко закреплён, а к концу $x = l$ приложена сила Vt . Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

15. Вариант 15

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + x, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 3.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned} 9u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\ (u_x + u)|_{x=0} &= 1. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — жёстко закреплён. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если конец $x = 0$ закреплён жёстко, а на конец $x = l$ действует продольная сила B . Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

16. Вариант 16

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + e^t, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = -\frac{1}{2}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 2h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{3c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара

передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{2x_0}{3a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= x, \quad u_t|_{t=0} = x, \\ (u_x + u)|_{x=0} &= 1. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \cos \frac{5x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если конец $x = 0$ закреплён жёстко, а на конец $x = l$ действует продольная сила Vt . Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

17. Вариант 17

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + x + t, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 3.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = \frac{1}{2}$. Начальные функции имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \begin{cases} x^2 + 2x, & -2 < x < 0, \\ 0, & x < -2 \text{ или } x > 0; \end{cases} \\ \psi(x) &= \begin{cases} x^2 + 2x, & -2 < x < 0, \\ 0, & x < -2 \text{ или } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 2h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = 2c$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 4x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{3x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned} 9u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= x^2 + 1, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\ (u_x + u)|_{x=0} &= 1 + \sin t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) закреплён жёстко, а другой ($x = \pi$) — свободен. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \sin \frac{3x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если конец $x = 0$ закреплён жёстко, а на конец $x = l$ действует продольная сила $A \sin \omega t + Bt$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

18. Вариант 18

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + x, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = -\frac{1}{2}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} x^2 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{5c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = 3c$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся

импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 4x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x, \\ u_x|_{x=0} &= 1. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{5x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если конец $x = 0$ закреплён жёстко, а на конец $x = l$ действует продольная сила $B \cos \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

19. Вариант 19

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + t, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = \frac{1}{2}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} x^2 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, \frac{h}{2})$, $(3c, 2h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = 3c$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{2x_0}{3a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned}u_{tt} - 9u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\u|_{t=0} &= \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\(u_x + u)|_{x=0} &= 1.\end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, оба конца которой ($x = 0$, $x = \pi$) закреплены жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если конец $x = 0$ свободен, а на конец $x = l$ действует продольная сила $B \cos \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

20. Вариант 20

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 3.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = 1$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 3h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{4x_0}{3a}$.

№5. Найти решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\u|_{t=0} &= \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\(u_x + u)|_{x=0} &= 1 + \sin t.\end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = 4 \cos \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \cos \frac{5x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если на конец $x = 0$ действует продольная сила $A \sin \omega t$, а конец $x = l$ — жёстко закреплён. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

21. Вариант 21

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + xt, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 3.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = \frac{1}{2}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{5c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 3h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 5x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{2a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\ (u_x - 2u)|_{x=0} &= 1. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) жёстко закреплён, а другой ($x = \pi$) — свободен. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = 2 \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \sin \frac{5x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если конец $x = 0$ свободен, а на конец $x = l$ действует продольная сила B . Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

22. Вариант 22

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + x, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 3.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x = \frac{1}{2}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} x^2 - x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны со свободным концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{3a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} 9u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \\ (u_x + u)|_{x=0} &= 1. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) закреплён жёстко. Начальное отклонение и

начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 5 \cos \frac{x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, если конец $x = 0$ закреплён жёстко, а на конец $x = l$ действует продольная сила B . Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

23. Вариант 23

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + 2, \quad u|_{t=0} = 3 \cos x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{5\pi}{4a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2 \sin 2x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{5c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 4h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{4a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 2 \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x + 1, \\ u_x|_{x=0} &= \sin t + 2t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = \cos \frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 4 \cos \frac{3x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, свободной на конце $x = l$ и подверженной на конце $x = 0$ действию силы $A \cos \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

24. Вариант 24

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + 4, \quad u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 2 \sin 2x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{3\pi}{4a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} \sin x + v_0, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 4h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = 2x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{4a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} 4u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 2 \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x + 1, \\ u|_{x=0} &= \sin t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = \pi$) свободен, а другой ($x = 0$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = 3 \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 5 \sin \frac{3x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, жёстко закреплённой на конце $x = l$ и подверженной на конце $x = 0$ действию силы $A \cos \omega t$. Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

25. Вариант 25

№1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + t, \quad u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x.$$

№2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в момент времени $t = \frac{3\pi}{4a}$. Начальные функции имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x + (\pi^2 - x^2), & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

№3. Построить профиль полуограниченной струны с жёстко закреплённым концом $x = 0$ в момент времени $t = \frac{3c}{2a}$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c, 0)$, $(2c, 4h)$, $(3c, 3h)$, $(4c, 0)$.

Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x = \frac{5c}{2}$.

№4. Полуограниченной струне со свободным концом $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передаётся импульс I в точках $x = 2x_0$ и $x = 3x_0$. Найти отклонения точек струны в момент времени $t = \frac{5x_0}{4a}$.

№5. Найти решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 2 \sin x + x, \quad u_t|_{t=0} = x + 1, \\ u|_{x=0} &= \sin t. \end{aligned}$$

№6. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x = 0$) свободен, а другой ($x = \pi$) — закреплён жёстко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$u|_{t=0} = 4 \cos \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 3 \cos \frac{3x}{2}.$$

№7. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, свободной на конце $x = l$ и подверженной на конце $x = 0$ действию силы At . Начальные условия — нулевые. Найти решение при всех $0 < t < \frac{3l}{2a}$.

Список литературы

- [1] Гаврилов В.С., Денисова Н.А. Метод характеристик для одномерного волнового уравнения: Учебно–методическое пособие. — Н.Новгород: Изд–во ННГУ, 2014. — 72с.
- [2] Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике: Учебное пособие для студентов университетов. — М.: Наука, 1972. — 687с.
- [3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебник для физико–математических специальностей. М.: изд–во Моск. ун–та; Наука, 2004. — 798с.

Владимир Сергеевич **Гаврилов**, Наталья Андреевна **Денисова**

Задания для решения методом характеристик

Практикум

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23.