МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Е.А. Голубева

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
Часть I

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано
учебно-методической комиссией
Павловского филиала ННГУ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
09.03.03 «Прикладная информатика»,
38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент»

Нижний Новгород
2020

УДК 519.2
ББК 22.17
Г-62

Г-62 Голубева Е.А. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. Часть I: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 51 с.

Рецензент: к.т.н. **И.В. Белянин**

В учебно-методическом пособии в краткой форме излагается теоретический материал и даны примеры решения типовых задач по следующим разделам теории вероятностей и математической статистики: «Комбинаторика», «Случайные события», «Случайные величины». Приведены вопросы для подготовки к экзамену и варианты контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика», 38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент». Оно поможет сориентироваться при написании контрольной работы, подготовке к практическим занятиям и экзамену.

Ответственный за выпуск:
председатель учебно-методической комиссии
Павловского филиала ННГУ
к.э.н., доцент **Н.А. Ягунова**

УДК 519.2
ББК 22.17

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курс теории вероятностей и математической статистики является важной составной частью подготовки бакалавра экономики и бакалавра прикладной информатики в экономике и управлении. Изучение этой дисциплины закладывает фундамент для понимания экономической статистики и является базовым теоретическим и практическим основанием для всех последующих математических и финансово-экономических дисциплин, использующих теоретико-вероятностные и статистические методы анализа.

Настоящее пособие предназначено для помощи студентам, обучающимся по направлениям подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика», 38.03.01 «Экономика», подготовки 38.03.02 «Менеджмент» как очной, так и заочной форм обучения.

В основу структуры пособия положен тематический принцип. Сюда вошёл материал, относящийся к таким разделам дисциплины, как «Комбинаторика», «Случайные события», «Случайные величины». Наряду с изложением основного теоретического материала по вышеперечисленным темам, в пособии приведены примеры решения типовых задач, вопросы для подготовки к экзамену и варианты контрольной работы.

Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – это раздел математики, основной задачей которого является определение числа подчинённых некоторым условиям комбинаций элементов из заданной совокупности.

1.1. Понятие о комбинаторной задаче

Пусть X – некоторое конечное множество, число элементов которого равно $N(X)$.

На практике часто встречаются задачи, в которых требуется из данного множества X выбрать k-элементное подмножество, обладающее определёнными свойствами и которое может быть упорядочено, а может быть нет. Такие задачи называются *комбинаторными*. Рассмотрим примеры описанных задач.

Пример 1. Сколькими способами можно распределить первых три места среди 10 участников соревнований?

Пример 2. Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных среди 10 участников похода?

Несмотря на сходство формулировок, эти задачи различны. В первой речь идёт о числе упорядоченных троек, так как имеет значение, кто именно из 10 участников занял 1, 2, 3 место. Во второй задаче требуется подсчитать число всех трёхэлементных подмножеств из десятиэлементного множества.

Решим эти задачи.

1. Всего 10 участников. Каждый из них может занять первое место. Следовательно, существует 10 возможностей на первое призовое место. На каждую из таких возможностей существует 9 возможностей на второе место, и на каждую из этих возможностей существует 8 возможностей занять третье место. Следовательно, имеется 10*9*8 = 720 различных способов распределения первых трёх мест среди 10 участников соревнований.

2. По условию задачи из десятиэлементного множества нужно выбрать трёхэлементное подмножество, причём неупорядоченное. Если бы мы производили упорядоченный выбор, то, рассуждая как в задаче 1, получили бы 720 способов. Если же в этих выборках не принимать во внимание порядок, то выборки (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a) следует считать за одну. Таким образом, возможно 720:6 или 120 способов выбора дежурных среди 10 участников похода.

1.2. Правила суммы и произведения

Решение большинства комбинаторных задач основано на правилах суммы и произведения.

Правило суммы: если элемент x можно выбрать n_x различными способами, а элемент y – n_y различными способами, то выбор какого-нибудь одного из элементов x или y можно осуществить n_x+n_y способами.

Пример. На столе лежат 5 книг и 7 тетрадей. Сколькими способами можно выбрать один предмет (книгу или тетрадь)?

По правилу суммы получаем, что один предмет можно выбрать 5+7 или 12 способами.

Правило произведения: если элемент x можно выбрать n_x различными способами, и если после его выбора элемент y можно выбрать n_y различными способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) можно осуществить $n_x \cdot n_y$ способами.

Пример. Сколько существует четырёхзначных чисел с различными цифрами?

Четырёхзначное число – это упорядоченный набор из 10 цифр (0, …, 9), но на первом месте 0 стоять не может, поэтому первую цифру можно выбрать девятью способами (1, 2, 3, …, 9), вторую – тоже девятью, так как первая цифра уже выбрана и на втором месте может стоять 0, третью цифру можно выбрать восьмью способами, четвёртую – семью. Таким образом, существует 9*9*8*7=4536 четырёхзначных чисел с различными цифрами.

1.3. Выборки

Наиболее часто в комбинаторных задачах встречаются следующие виды выборок.

1. *Размещения с повторениями (выборки с возвращениями).*

Пусть карточки с цифрами 1, 3, 5, 7, 9 помещены в мешок, из которого мы вынимаем сначала одну из них, записываем цифру и возвращаем карточку обратно. Затем вынимаем вторую цифру, записываем и снова возвращаем. Аналогичные действия производим с третьей карточкой. В результате возникает трёхзначное число, в котором цифры могут повторяться из-за возвращения.

Полученное трёхзначное число – это и есть выборка с возвращением или размещение с повторением.

По правилу произведения данное трёхзначное число с нечётными цифрами можно выбрать 5*5*5=125 способами.

Рассмотрим общий случай.

Определение. *Размещением с повторениями* из n элементов по k называется кортеж (упорядоченный набор), составленный из k элементов n элементного множества X, в котором элементы могут повторяться.

Обозначение: $\overline{A}_n^k$.

Формула для подсчёта числа размещений с повторениями: $\overline{A}_n^k = n^k$.

2. *Размещения без повторений (выборки без возвращения).*

Трёхзначные числа, составленные из попарно различных нечётных цифр, в комбинаторике относятся к размещениям без повторений из 5 элементов по 3.

По правилу произведения упорядоченную тройку различных нечётных цифр можно выбрать 5*4*3=60 способами.

Определение. *Размещением без повторений* из n элементов по k называется <u>кортеж</u> (упорядоченный набор), составленный из k <u>попарно различных</u> элементов n-элементного множества X.

Обозначение: A_n^k

Формула для подсчёта числа размещений без повторений: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$,

где $n!$ – сокращённая запись произведения $1*2*3*\ldots*n$ (n-факториал), причём $1!=1$, $0!=1$.

Таким образом, всего существует $A_5^3 = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5*4*3*2*1}{2*1} = 60$ трёхзначных чисел, составленных из попарно различных нечётных цифр.

3. *Перестановки без повторений.*

Перестановка без повторений – это частный случай размещения без повторений из n элементов по k в случае, когда $\underline{n=k}$.

Определение. *Перестановкой без повторений* n элементов называется <u>размещение без повторений из n элементов по n</u>.

Обозначение: P_n .

Формула для подсчёта числа перестановок: $P_n = n!$.

Действительно, $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$.

Например, число способов, которыми можно составить очередь из 7 человек, равно 7!=5040.

Приведённые выше выборки являются упорядоченными. Приведём пример неупорядоченной выборки.

4. *Сочетания без повторений*.

Определение. *Сочетанием без повторений* из n элементов по k называются <u>группы</u>, включающие k элементов из n возможных и <u>различающиеся только самими элементами</u> (порядок не важен).

Обозначение: C_n^k.

Для нахождения формулы заметим, что все возможные размещения без повторений из n элементов по k можно найти следующим образом: сначала найти все сочетания из n элементов по k (C_n^k), а затем в каждом из них произвести все возможные перестановки ($k!$ перестановок), поэтому $A_n^k = C_n^k \cdot k!$.

Формула для подсчёта сочетаний без повторений: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Таким образом, число способов, которыми можно выбрать трёх дежурных из десяти участников похода (см. пример 2), равно $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$.

Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предпосылки зарождения науки теории вероятностей появились в 15 веке. Исторически одной из причин зарождения теории вероятностей была попытка построения наиболее выгодных стратегий при игре в азартные игры.

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайного события.

Тема 2.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

2.1.1. Понятие случайного события. Виды случайных событий

Событием в теории вероятностей называют все то, что может произойти в результате опыта. Под *опытом* (*испытанием*) понимается осуществление совокупности некоторых условий.

Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называют *пространством элементарных событий* и обозначают через Ω.

Наблюдаемые нами события (явления природы) можно разделить на 3 вида: достоверные, невозможные и случайные.

Определение. *Достоверным* называется событие, которое обязательно произойдет в результате опыта (обозначают Ω).

Например, при температуре, большей 100^0 С, и атмосферном давлении 760 мм. ртутного столба вода в чайнике обязательно закипит.

Определение. *Невозможным* называется событие, которое никогда не произойдет в результате опыта (обозначают V).

Если в книге 200 страниц, то событие «книга открыта на 250-й странице» является невозможным.

Определение. *Случайным* называется событие, которое в результате опыта может произойти или не произойти (случайные события принято обозначать латинскими буквами: $A,\ B,\ C\ldots$).

Выпадение герба при бросании монеты, выигрыш по данному лотерейному билету, попадание в цель при выстреле – случайные события.

Теория вероятностей изучает **закономерности, присущие «массовым» однородным случайным событиям** (случайным событиям, которые многократно повторяются, или которые можно многократно повторять в одних и тех же условиях).

Определение. Два случайных события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

В случае, когда брошена монета, события «появление герба» и «появление решки» являются несовместными.

Определение. Два события называются *равновозможными*, если нет таких объективных условий, которые дают возможность одному событию появиться чаще, чем другому.

Появление герба и появление решки при бросании монеты – равновозможные события.

Определение. События A_1, A_2, …, A_n называются *единственно возможными*, если при испытании одно из них обязательно произойдёт.

В опыте с бросанием монеты события A_1 – выпал орел и A_2 – выпала решка – единственно возможные события.

Определение. Группа событий A_1, A_2, …, A_n называется *полной группой событий*, если все эти события попарно несовместны, равновозможны и единственно возможны.

Например, события A_1 – выпал орел, A_2 – выпала решка составляют полную группу событий для опыта с бросанием монеты, а события B_1 – выпало 1 очко, B_2– выпало 2 очка, …, B_6– выпало 6 очков – полная группа событий для опыта с бросанием игральной кости.

2.1.2. Аксиомы теории вероятностей и следствия из них

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Пусть в урне содержатся 6 одинаковых по форме, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них красные, 3 – синие и 1 белый. Очевидно, что возможность вынуть наудачу красный или синий шар больше, чем возможность извлечь белый. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Да, можно. Это число называют вероятностью случайного события.

Вероятность случайного события – это число, характеризующее степень возможности появления данного события. Если A – случайное событие, $p(A)$ – обозначение вероятности случайного события A.

Основой теории вероятностей являются следующие **три аксиомы**, которые были сформулированы в 1933 году советским математиком, академиком А.Н. Колмогоровым.

Аксиома A$_1$: для любого случайного события $A \in \Omega$ существует неотрицательное число $p(A)$, которое называется вероятностью события A:

$$\left(\forall A \in \Omega\right) \exists\, p(A) \geq 0.$$

Аксиома A$_2$: вероятность достоверного события равна 1: $p(\Omega) = 1$.

Определение. *Суммой двух событий* A и B называют событие C, обозначаемое $C = A + B$, которое состоит в том, что произойдет либо событие A, либо событие B, либо оба вместе.

Определение. *Суммой нескольких событий* A_1, A_2, …, A_n называют событие C, обозначаемое $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Например, если имеется игральная кость с 6 гранями и A_1 – выпадение 1 очка, A_2 – выпадение 2 очков, …, A_6 – выпадение 6 очков, тогда $A_2 + A_4 + A_6$ – выпадение чётного числа очков.

Аксиома А$_3$: Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий (включая и сумму бесконечного числа слагаемых):

– для двух событий:

$$(\forall A, B \in \Omega):\ A \text{ и } B \text{ – несовместные события}$$

$$p(A+B) = p(A) + p(B). \tag{1}$$

– для нескольких событий:

$$(\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Omega):\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \text{ – несовместные события}$$

$$p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n). \tag{1'}$$

Справедливы следующие **следствия из аксиом теории вероятностей**.

Следствие 1. Вероятность события, противоположного A, равна 1 минус вероятность события A:

$$(\forall A \in \Omega)\ p(\overline{A}) = 1 - p(A). \tag{2}$$

Доказательство. События A и $\overline{A}$ несовместны и в сумме составляют достоверное событие, поэтому по формуле (1) с использованием аксиомы А$_2$ имеем

$$p(\overline{A} + A) = p(A) + p(\overline{A}) = 1,$$

откуда и получаем формулу вероятности противоположного события.

Следствие 2. Вероятность невозможного события равна 0:

$$p(V) = 0.$$

Доказательство. Так как противоположным невозможному событию V является достоверное событие Ω, то по формуле (2) с использованием аксиомы А$_2$ имеем

$$p(V) = 1 - p(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

Следствие 3. Вероятность любого события не меньше 0 и не больше 1:

$$(\forall A \in \Omega)\ 0 \le p(A) \le 1.$$

Доказательство. Левая часть неравенства следует из аксиомы А$_1$. Докажем правую:

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) \le 1,$$

так как $p(\overline{A}) \ge 0$ (см. аксиому А$_1$).

В аксиомах не постулируется способ нахождения вероятности, поэтому существует несколько способов непосредственного расчета вероятности случайного события: классический, статистический, геометрический. Рассмотрим их.

2.1.3. Определения вероятности случайного события

Элементарные события, которые влекут за собой данное событие A, называются *благоприятствующими* этому событию.

Если в нашем примере 3 события A_1 – появился белый шар, A_2, A_3 – появился красный шар, A_4, A_5, A_6 – появился синий шар, а событие A – событие появления цветного шара, тогда элементарные события A_2, A_3, …, A_6 благоприятствуют событию A.

Классическое определение вероятности. *Вероятностью* события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных событий к общему числу всех элементарных событий, образующих полную группу:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

где n – общее число всех элементарных событий, образующих полную группу, m – число благоприятствующих элементарных событий.

В нашем примере 3 события A_1, A_2, A_3, …, A_6 образуют полную группу (так как они попарно несовместны, равновозможны в силу того, что шары одинаковы и тщательно перемешаны, и единственно возможны) и $p(A) = \frac{5}{6}$.

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных событий конечно, однако на практике нередко встречаются испытания, в которых число элементарных событий бесконечно. Вместе с тем очень часто бывает так, что результат испытания невозможно представить в виде совокупности элементарных событий (невозможно предвидеть все исходы). Кроме того, бывает трудно указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Поэтому наряду с классическим определением вероятности используются и другие, в частности, статистическое и геометрическое определения вероятности случайного события.

Статистическое определение вероятности случайного события.

Определение. *Относительной частотой* случайного события A называется отношение количества M случаев появления этого события к общему числу N произведенных испытаний.

Обозначается статистическая вероятность $w(A)$ и

$$w(A) = \frac{M}{N},$$

где M – число появлений события A, N – общее число испытаний.

Заметим, что классическое определение вероятности и определение относительной частоты отличаются тем, что по классическому определению вероятность можно вычислить и без опытов, а относительную частоту можно вычислить только после проведения испытаний.

Например, если по цели произвели 24 выстрела и зарегистрировано 19 попаданий, то относительная частота поражения цели рана $w(A) = \frac{19}{24}$.

Относительная частота обладает <u>*свойством устойчивости*</u>, то есть если, например, при большом числе испытаний относительная частота оказалась равной $0{,}2$, то и в любой другой серии из достаточно большого числа испытаний относительная частота будет близка к $0{,}2$.

Определение. *Статистической вероятностью* называется <u>относительная частота</u> случайного события или число, <u>близкое</u> к ней.

Например, по данным швейцарской статистики 1935 года относительная частота рождения девочек в течение года по месяцам характеризовалась следующими числами:

янв.	февр.	март	апр.	май	июнь	июль	авг.	сент.	окт.	нояб.	дек.
0,486	0,489	0,49	0,471	0,478	0,482	0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473

Относительная частота колеблется около числа 0,481, которое принимается за статистическую вероятность рождения девочек.

Важным <u>недостатком</u> статистической вероятности является её <u>неоднозначность</u>. Так за статистическую вероятность рождения девочек можно принять не только 0,481, но и 0,48, и 0,481083, и 0,48108(3).

В случае, когда случайные события связаны с геометрическими фигурами, применяется геометрическое определение вероятности случайного события.

Геометрическое определение вероятности случайного события. *Геометрической вероятностью* события A называется <u>отношение меры</u> области A^*, <u>благоприятствующей</u> появлению события, к мере <u>всей</u> области Ω, то есть

$$p(A) = \frac{mesA^*}{mes\Omega},$$

где в зависимости от ситуации может рассматриваться отношение длин отрезков, площадей фигур, объёмов тел и др.

Пример. Пусть в круг радиуса R наудачу брошена точка. Найдём вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника (см. рис. 1).

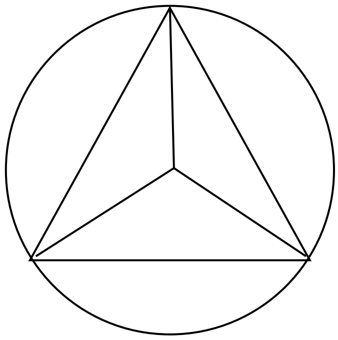

Рисунок 1. Треугольник, вписанный в круг

Решение.

$$S_{круга} = \pi R^2;$$

$$S_{\Delta} = 3S_{мал\Delta} = 3 \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin 120^0 = \frac{3}{2}R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4};$$

$$p(A) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}4135.$$

2.1.4. Условная вероятность. Независимые события

Под случайным событием мы понимаем такое событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти, а может не произойти.

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме этих условий, не налагается, то такую вероятность называют *безусловной*. Если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называется *условной*.

Определение. Вероятность события A, вычисленную в предположении, что произошло событие B, называют *условной вероятностью* A при условии B и обозначают $p(A/B)$.

Например, если в урне 10 шаров среди которых 3 белых и 7 черных и наудачу вынут один шар, а события A – появление белого шара в первом испытании, B – появление белого шара во втором испытании, то условные вероятности равны $p(B/A)=\frac{2}{9}$, $p(B/\overline{A})=\frac{3}{9}$.

Определение. Событие A называется *независимым* от события B, если наступление события B не изменяет вероятности наступления события A, то есть

$$p(A/B)=p(A).$$

В последнем равенстве $p(A)$ называют безусловной вероятностью события A.

Например, при бросании двух монет событие A – выпадение герба на второй монете независимо от события B – выпадение герба на первой монете.

2.1.5. Основные формулы для вычисления вероятностей случайных событий

1. *Формулы вероятности произведения двух событий*

Определение. *Произведением двух событий* A и B называют событие C, обозначаемое $C=A\cdot B$, которое состоит в совместном появлении событий A и B.

Например, если в коробке лежат геометрические фигуры, и события A – вытаскивание прямоугольника, B – вытаскивание ромба, то событие $A\cdot B$ будет обозначать вытаскивание квадрата.

Определение. *Произведением нескольких событий* A_1, A_2, …, A_n называют такое событие C, обозначаемое $C=A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n$, которое состоит в совместном появлении всех этих событий.

Вероятность произведения двух событий A и B может быть вычислена по одной из следующих формул:

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B/A), \tag{3}$$

$$p(A\cdot B)=p(B)\cdot p(A/B). \tag{3'}$$

Докажем формулы с использованием классического определения вероятности.

Пусть n – общее число элементарных исходов, образующих полную группу, среди них:

m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A и не благоприятствующих B,

m_2 – число исходов, благоприятствующих событию B и не благоприятствующих A,

m_3 – число исходов, благоприятствующих и A, и B,

m_4 – число исходов, не благоприятствующих ни A, ни B,

тогда по классическому определению вероятности имеем

$$p(A\cdot B)=\frac{m_3}{n},\ p(A)=\frac{m_1+m_3}{n},\ p(B/A)=\frac{m_3}{m_1+m_3},$$

откуда получаем

$$p(A)\cdot p(B/A)=\frac{m_1+m_3}{n}\cdot\frac{m_3}{m_1+m_3}=\frac{m_3}{n}=p(A\cdot B).$$

Формулу (3’) можно получить аналогично.

Пример. Студент знает 20 из 25 экзаменационных вопросов. Найти вероятность того, что он полностью ответит на экзаменационный билет, состоящий из двух вопросов.

Решение. Пусть событие A – студент знает ответ на первый вопрос билета, событие B – студент знает ответ на второй вопрос билета, тогда событие $A\cdot B$ – студент ответит на билет. По формуле (3), получаем

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B/A)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}=\frac{19}{30}=0{,}6(3).$$

Если события A и B <u>*независимые*</u>, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B). \tag{4}$$

Справедливость последней формулы следует из равенства (3) с учётом того, что в случае независимых событий $p(B/A)=p(B)$.

2. <u>Формула вероятности суммы совместных событий</u>

Если A и B – совместные события, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B). \tag{5}$$

Для доказательства последнего равенства запишем сумму событий A и B в виде суммы несовместных событий:

$$A+B=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot B.$$

По формуле (1’) имеем

$$p(A+B)=p(A\cdot\overline{B})+p(\overline{A}\cdot B)+p(A\cdot B). \tag{6}$$

Запишем события A и B в виде суммы несовместных событий:

$$A=A\cdot\overline{B}+A\cdot B,\ B=B\cdot\overline{A}+A\cdot B,$$

тогда согласно (1)

$$p(A)=p(A\cdot\overline{B})+p(A\cdot B),\ p(B)=p(B\cdot\overline{A})+p(A\cdot B).$$

Складывая последние равенства, с учетом формулы (6) получим

$$p(A)+p(B)=p(A\cdot\overline{B})+p(B\cdot\overline{A})+2p(A\cdot B)=p(A+B)+p(A\cdot B),$$
откуда и приходим к равенству (5).

Пример. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают одну карту. Найти вероятность того, что эта карта семёрка или бубновой масти.

Решение. Введём в рассмотрение события A – извлечена семерка, B – извлечена карта бубновой масти, тогда $A+B$ – извлечена карта семерка или карта бубновой масти, а $A\cdot B$ – извлечена семерка бубновой масти.

События A и B совместны. Найдем $p(A+B)$ по формуле (5):
$$p(A)=\frac{4}{36},\ p(B)=\frac{9}{36},\ p(A\cdot B)=\frac{1}{36},$$
$$p(A+B)=\frac{4}{36}+\frac{9}{36}-\frac{1}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}.$$

3. <u>Формула вероятности появления хотя бы одного события</u>

В некоторых случаях вероятность события удобнее подсчитывать как вероятность противоположного другому событию.

Пусть даны события A_1, A_2, …, A_n, и известны вероятности появления этих событий:
$$p(A_1)=p_1,\ p(A_2)=p_2,\ \ldots,\ p(A_n)=p_n.$$
Тогда вероятности противоположных событий равны
$$p(\overline{A}_1)=q_1=1-p_1,\ p(\overline{A}_2)=q_2=1-p_2,\ \ldots,\ p(\overline{A}_n)=q_n=1-p_n.$$

По формуле вероятности произведения нескольких событий получаем, что вероятность того, что ни одно из событий A_1, A_2, …, A_n в опыте не наступит равна
$$p(B)=p(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n)=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n.$$

В этом случае искомая вероятность, т.е. вероятность появления хотя бы одного события, определяется как вероятность события, противоположного последнему:
$$p(\overline{B})=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n.$$

Пример. Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6 и 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

Решение. $p(A)=1-0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3=1-0{,}06=0{,}94$.

4. <u>Формула полной вероятности</u>

Пусть событие A может произойти с одним и только с одним из n попарно несовместных событий H_1, H_2, … H_n, называемых гипотезами, тогда вероятность события A можно вычислить по формуле:
$$p(A)=p(H_1)p(A/H_1)+p(H_2)p(A/H_2)+\ldots+p(H_n)p(A/H_n) \qquad (7)$$

Доказательство. Событие A можно представить в виде следующей суммы:
$$A=A\cdot H_1+A\cdot H_2+\ldots+A\cdot H_n.$$

Так как гипотезы H_1, H_2, … H_n несовместны, то и события $A \cdot H_1$, $A \cdot H_2$, … $A \cdot H_n$ несовместны, и, следовательно, можно воспользоваться формулой (1’):

$$p(A) = p(A \cdot H_1) + p(A \cdot H_2) + ... + p(A \cdot H_n).$$

Теперь с использованием формулы (3) и получаем искомую формулу (7).

Пример. В группе обучаются 20 девушек и 10 юношей. К занятию не подготовились 4 девушки и 3 юношей. Какова вероятность того, что наудачу вызванный студент окажется неподготовленным?

Решение. Пусть событие A – наудачу вызванный студент неподготовлен к занятию, H_1 – вызвана девушка, H_2 – вызван юноша. Вычислим искомую вероятность по формуле полной вероятности (7). Так как

$$p(H_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},\ p(H_2) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},\ p(A/H_1) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},\ p(A/H_2) = \frac{3}{10},$$

то согласно формуле (7) получаем

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30}.$$

5. *Формулы Байеса*

Пусть событие A может наступить при условии появления одного n образующих полную группу событий H_1, H_2, … H_n. Так как заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами. Вероятность появление события A определяется по формуле полной вероятности (7).

Предположим, что произошло испытание, в результате которого появилось событие A. Определим вероятности гипотез, то есть будем искать $p(H_1/A)$, $p(H_2/A)$, … $p(H_n/A)$.

Найдем $p(H_1/A)$. По теореме о вероятности произведения зависимых событий

$$p(A \cdot H_1) = p(A) \cdot p(H_1/A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1).$$

Следовательно,

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(A)},$$

или, с использованием формулы полной вероятности, имеем

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + ... + p(H_n)p(A/H_n)}.$$

Аналогично можно вывести формулы для подсчета $p(H_2/A)$, … $p(H_n/A)$:

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + ... + p(H_n)p(A/H_n)},$$

где $i = \overline{1,n}$.

Пример. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это: а) сапоги, б) туфли?

Решение. Пусть событие A – пара обуви отремонтирована качественно, H_1 – выбраны сапоги, H_2 – выбраны туфли. Нужно найти $p(H_1/A)$, $p(H_2/A)$.

Согласно формулам Байеса

$$p(H_1/A)=\frac{p(H_1)\cdot p(A/H_1)}{p(H_1)p(A/H_1)+p(H_2)p(A/H_2)},$$

$$p(H_2/A)=\frac{p(H_2)\cdot p(A/H_2)}{p(H_1)p(A/H_1)+p(H_2)p(A/H_2)}.$$

Для введённых нами событий, имеем

$$p(H_1)=\frac{2}{5}=0{,}4,\ p(H_2)=\frac{3}{5}=0{,}6,\ p(A/H_1)=0{,}9,\ p(A/H_2)=0{,}85.$$

Таким образом, искомые вероятности равны

$$p(H_1/A)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}9}{0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}85}=\frac{0{,}36}{0{,}36+0{,}51}=\frac{0{,}36}{0{,}87}\approx 0{,}4,$$

$$p(H_2/A)=\frac{0{,}6\cdot 0{,}85}{0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}85}=\frac{0{,}51}{0{,}36+0{,}51}=\frac{0{,}51}{0{,}87}\approx 0{,}6.$$

6. <u>Формулы Бернулли</u>

Пусть производятся несколько испытаний. При этом вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний и равна p. Такие испытания называются независимыми относительно события A. Тогда вероятность не наступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$.

Пусть требуется вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит ровно k раз, а значит, не наступит ровно $n-k$ раз. При этом не требуется определенная последовательность наступления события A k раз.

Например, если речь идет о трёх появлениях события A в 4-х испытаниях, то возможны следующие варианты: $A\cdot A\cdot A\cdot \overline{A}$, $\overline{A}\cdot A\cdot A\cdot A$, $A\cdot A\cdot \overline{A}\cdot A$, $A\cdot \overline{A}\cdot A\cdot A$.

Обозначим искомую вероятность $p_n(k)$. Она вычисляется по следующей формуле:

$$p_n(k)=C_n^k p^k q^n$$

или

$$p_n(k)=\frac{n!}{(n-k)!k!}p^k q^n,$$

где $k=\overline{1,n}$.

Последние формулы и называются формулами Бернулли.

Пример. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определите вероятности рождения в ней: а) одного мальчика; б) двух девочек.

Решение. Вероятность рождения мальчика или девочки в семье одинакова и равна $p = \frac{1}{2}$. Вероятность появления одного мальчика в семье, имеющей четырёх детей, можно вычислить по формуле Бернулли:

$$p_4(1) = C_4^1 p q^3 = \frac{1}{4}.$$

Вероятность появления в семье двух девочек по той же формуле равна

$$p_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{3}{8}.$$

В ряде случаев требуется определить вероятности появления события A менее k раз $(X < k)$, более k раз $(X > k)$, не менее k раз $(X \le k)$, не более k раз $(X \ge k)$. В этих случаях могут быть использованы следующие формулы:

$$p(X < k) = p_n(0) + p_n(1) + \ldots + p_n(k-1),$$
$$p(X > k) = p_n(k+1) + p_n(k+2) + \ldots + p_n(n),$$
$$p(X \le k) = p_n(0) + p_n(1) + \ldots + p_n(k),$$
$$p(X \ge k) = p_n(k) + p_n(k+1) + \ldots + p_n(n).$$

При больших n и малых p вычисления по формулам Бернулли затруднены. В этих случаях используют формулы Пуассона.

7. *Формулы Пуассона*

При больших n и малых p вероятность наступления события A в n независимых испытаниях ровно k раз равна

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Пример. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажут два, три и пять замков.

Решение. Используем формулу Пуассона. В нашем случае $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$, тогда

$$p_{10000}(2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \approx 0{,}27;$$
$$p_{10000}(3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} \approx 0{,}18;$$
$$p_{10000}(5) = \frac{2^5 e^{-2}}{5!} \approx 0{,}036.$$

Значения функции e^{-x} можно найти в приложении 3.

Тема 2.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.2.1. Понятие случайной величины

Определение. *Случайной* называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное числовое значение, наперёд неизвестное и зависящее от многих причин, которые заранее не могут быть учтены.

Например, при бросании игральной кости могут появиться числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наперёд определить число выпавших очков невозможно, так как оно зависит от многих случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. В этом смысле число выпавших очков есть величина случайная, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 – это возможные значения этой величины.

Случайные величины принято обозначать заглавными латинскими буквами: $X, Y, Z \ldots$, а их возможные значения – прописными латинскими буквами x, $y, z \ldots$

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Определение. *Дискретной случайной величиной* называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные значения, разделенные интервалами.

Число таких значений может быть конечным или бесконечным.

Например, число попаданий при 10 выстрелах – дискретная случайная величина, имеющая 11 возможных значений от 0 до 11, а число космических частиц, попадающих на поверхность спутника, можно рассматривать как дискретную случайную величину с бесконечным числом возможных значений от 0 до $+\infty$.

Определение. *Непрерывной случайной величиной* называется случайная величина, принимающая все возможные значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Например, время ожидания клиента в очереди до момента его обслуживания, величина отклонения снаряда от цели – непрерывные случайные величины.

Заметим, что число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным, а может быть бесконечным. Число возможных значений непрерывной случайной величины всегда бесконечно.

2.2.2. Дискретные случайные величины и их характеристики

Дискретную случайную величину можно описать несколькими способами. К ним относятся:

1. Закон распределения вероятностей

В связи со случайными величинами мы можем рассматривать различные случайные события. Например,

$A=\{X=x_1\}$ – случайное событие, состоящее в том, что в результате опыта случайная величина X принимает значение x_1.

$B=\{x_1<X<x_2\}$ – случайное событие, состоящее в том, что в результате опыта случайная величина X принимает значение в интервале (x_1,x_2).

Определение. *Законом (рядом) распределения вероятностей дискретной случайной величины* называется соответствие между возможными значениями этой величины и вероятностями принять эти значения.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать с помощью таблицы, в которой первая строка содержит её возможные значения, а вторая – вероятности принять эти значения.

Пусть дискретная случайная величина X имеет n возможных значений: x_1, x_2, …, x_n и пусть $p_1=p(X=x_1)$, $p_2=p(X=x_2)$, …, $p_n=p(X=x_n)$, тогда закон распределения дискретной случайной величины X можно представить в виде следующей таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Так как в результате опыта X примет одно и только одно из значений x_1, x_2, …, x_n, то события $(X=x_1)$, $(X=x_2)$, …, $(X=x_n)$ несовместны и в сумме составляют достоверное событие, поэтому

$$p_1+p_2+...+p_n=1.$$

Пример 4. В декабрьской лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается 1 выигрыш по 1000 рублей и 10 выигрышей по 100 рублей. Составим закон распределения вероятности дискретной случайной величины X – размера возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Зададим закон в виде таблицы:

X	0	100	1000
p	0,89	0,1	0,01

В сумме вероятности составляют единицу: 0,01+0,1+0,89=1, следовательно, закон составлен верно.

Закон распределения вероятностей можно изобразить графически, откладывая на горизонтальной оси значения X, а на вертикальной – соответствующие им значения вероятностей. Графическое представление ряда распределения называется *многоугольником распределения.* Для нашего примера он имеет следующий вид (см. рис. 2).

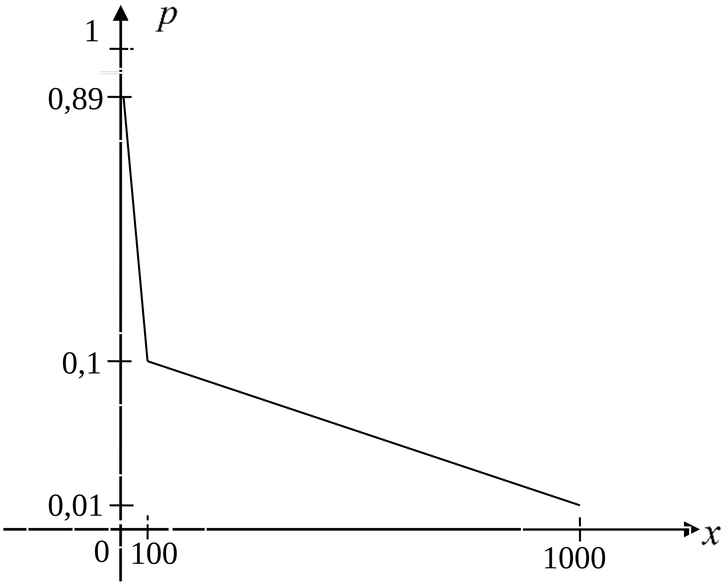

Рисунок 2. Многоугольник распределения случайной величины
X - размера возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета

2. <u>Функция распределения вероятностей</u>

Для дискретной случайной величины можно ввести понятие *функции распределения* $F(x)$, которая равна вероятности случайного события, состоящего в том, что дискретная случайная величина X примет одно из возможных значений, меньших некоторого значения x, то есть $F(x) = p(X < x)$.

Если дискретные значения случайной величины расположены в порядке возрастания $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, то $F(x)$ можно задать в следующем виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad \textit{если} \quad x \le x_1, \\ p_1, \quad \textit{если} \quad x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, \quad \textit{если} \quad x_2 < x \le x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n, \quad \textit{если} \quad x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, \quad \textit{если} \quad x > x_n. \end{cases}$$

Для нашего примера

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad \textit{если} \quad x \le 0, \\ 0{,}89, \quad \textit{если} \quad 0 < x \le 100, \\ 0{,}99, \quad \textit{если} \quad 100 < x \le 1000, \\ 1, \quad \textit{если} \quad x > 1000. \end{cases}$$

Изображённая ниже ступенчатая линия является графиком функции распределения $F(x)$ (см. рис. 3).

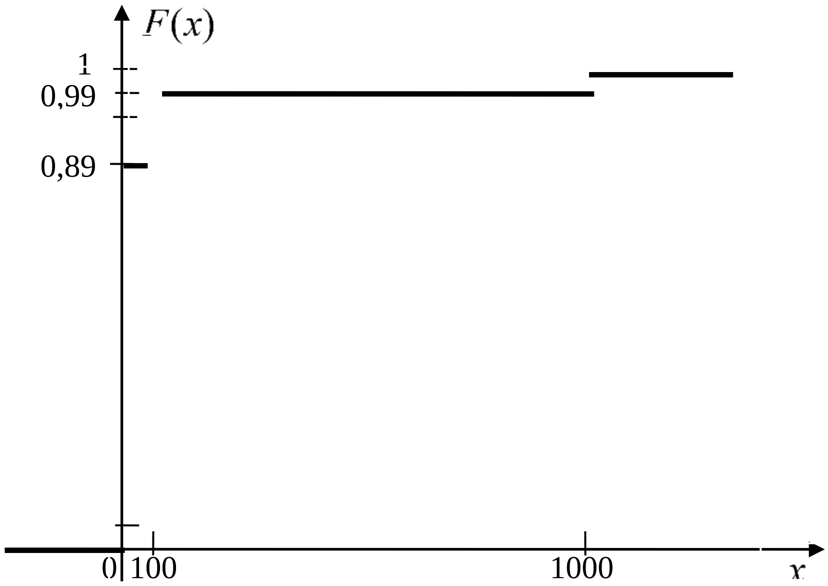

Рисунок 3. График функции распределения случайной величины
X - размера возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета

Пример. Бросают три игральных кубика. Составить закон распределения числа выпавших шестёрок на трёх кубиках. Построить многоугольник распределения, функцию распределения и изобразить её графически.

Решение. Пусть случайная величина X – число выпавших шестёрок. Шестёрка может не выпасть ни разу, может выпасть один раз, два или все три, то есть $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Вероятности будем вычислять по формуле Бернулли, при этом $n = 3$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$:

$$p_1 = p_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216};$$

$$p_2 = p_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216};$$

$$p_3 = p_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216};$$

$$p_4 = p_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Проверяем выполнение соотношения $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$:

$$\frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = 1.$$

Тогда ряд распределения случайной величины X – числа выпавших шестёрок при бросании трёх кубиков таков:

X	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Многоугольник распределения имеет следующий вид (см. рис. 4).

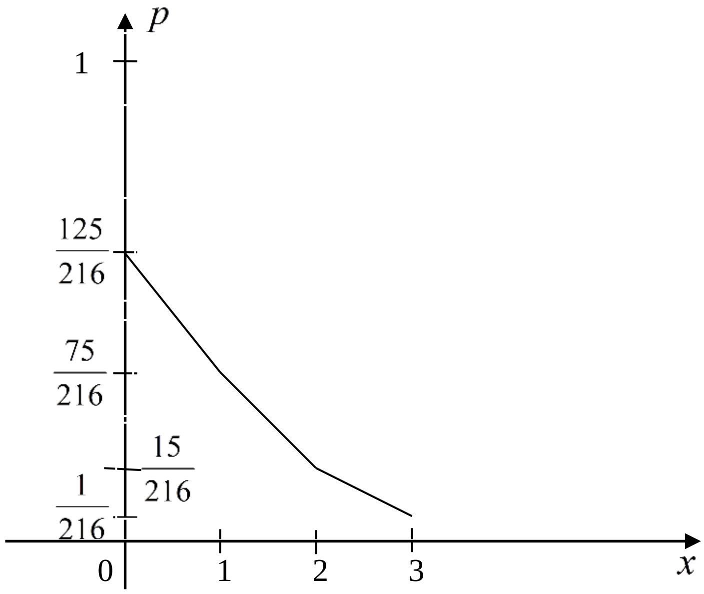

Рисунок 4. Многоугольник распределения случайной величины
X - числа выпавших шестёрок при бросании трёх кубиков

Функция распределения будет следующей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \frac{125}{216}, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ \frac{200}{216}, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ \frac{215}{216}, & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения имеет следующий вид (см. рис. 5)

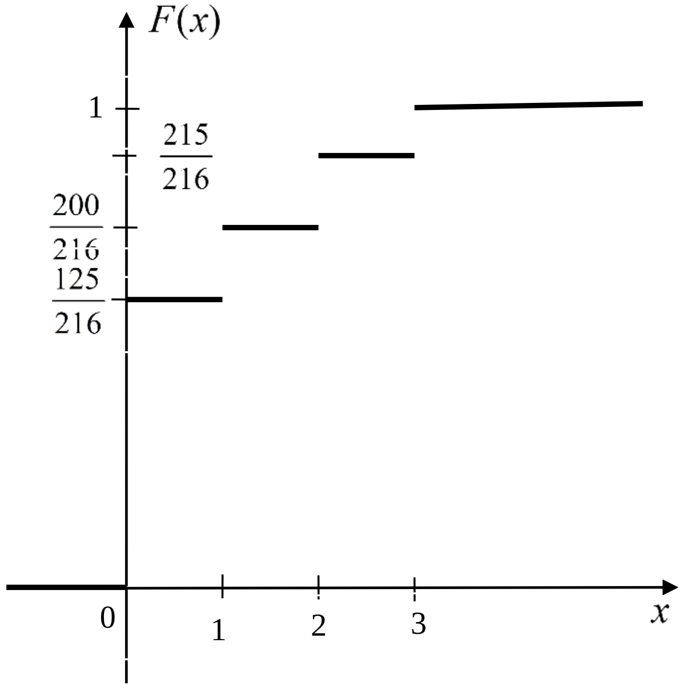

Рисунок 5. График функции распределения случайной величины X - числа выпавших шестёрок при бросании трёх кубиков

3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Закон распределения полностью характеризует дискретную случайную величину, однако он не всегда может быть известен. В таких случаях пользуются числовыми характеристиками случайных величин. К их числу относится математическое ожидание.

Определение. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины*, заданной законом распределения вероятностей, называется сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n . \tag{8}$$

Пример. Для случайной величины X из примера 4 математическое ожидание равно:

$$M(X) = 1000 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}89 = 10 + 10 = 20 .$$

Заметим, что математическое ожидание случайной величины – есть величина постоянная, а не случайная.

Выясним ***вероятностный смысл математического ожидания*** дискретной случайной величины.

Пусть было произведено N испытаний, в которых дискретная случайная величина X приняла M_1 раз значение x_1, M_2 раз значение x_2, …, M_n раз значение x_n, причем $M_1 + M_2 + ... + M_n = N$.

Найдем среднее арифметическое всех значений, принятых X :

$$\bar{x} = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2 + ... + x_n M_n}{N} = x_1 \frac{M_1}{N} + x_2 \frac{M_2}{N} + ... + x_n \frac{M_n}{N} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_n w_n ,$$

где w_1, w_2, …, w_n – соответственно относительные частоты принятия величиной X значений x_1, x_2, …, x_n, которые при достаточно большом числе испытаний N можно рассматривать как вероятности p_1, p_2, …, p_n, а, следовательно,

$$\bar{x} \approx M(X).$$

Таким образом, среднее арифметическое значений случайной величины, полученное по большому числу испытаний, примерно равно математическому ожиданию этой величины.

Справедливы следующие ***свойства математического ожидания:***

1) $M(C) = C$, где $C \in R$.

2) $M(CX) = CM(X)$, где $C \in R$.

3) $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$, если X_1, X_2, …, X_n – взаимно независимые случайные величины.

4) $M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$,

5) $M(X) = np$, где X - дискретная случайная величина с биномиальным законом распределения, n – число испытаний, p – вероятность появления события в одном испытании.

4. Дисперсия дискретной случайной величин.

Математическое ожидание далеко не полностью характеризует случайную величину. Например, случайные величины X и Y, заданные следующими законами распределения:

X	-0,01	0,01
p	0,5	0,5

Y	-100	100
p	0,5	0,5

имеют одинаковые математические ожидания: $M(X) = M(Y) = 0$, но совершенно разные законы распределения. Поэтому наряду с математическим ожиданием вводят и другие числовые характеристики дискретных случайных величин. В частности, дисперсию.

Определение. *Отклонением дискретной случайной величины* называется разность между случайной величиной X и её математическим ожиданием:

$$X - M(X).$$

Заметим, что величина $X - M(X)$ – это тоже случайная величина.

Определение. *Дисперсией дискретной случайной величины* называется математическое ожидание квадрата её отклонения:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (9)$$

Найдем дисперсию дискретной случайной величины X из примера 4. Запишем закон распределения вероятностей квадрата отклонения:

$$(x_1 - M(X))^2 = (1000 - 20)^2 = 960400,$$

$$(x_2 - M(X))^2 = (100 - 20)^2 = 6400,$$

$$(x_3 - M(X))^2 = (0 - 20)^2 = 400;$$

$(X-M(X))^2$	960400	6400	400
p	0,01	0,1	0,89

Следовательно,

$$D(X)=960400\cdot 0{,}01+6400\cdot 0{,}1+400\cdot 0{,}89=9604+640+356=10600 .$$

Заметим, что дисперсия случайной величины, так же, как и математическое ожидание, – есть величина постоянная, а не случайная.

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом её математического ожидания:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2. \qquad (10)$$

Примем эту формулу без доказательства, но покажем её справедливость на примере.

Пример. В нашем примере 4 закон распределения вероятности случайной величины X^2 имеет следующий вид:

X^2	1000000	10000	0
p	0,01	0,1	0,89

Математическое ожидание X^2 равно

$$M(X^2)=1000000\cdot 0{,}01+10000\cdot 0{,}1+0^2\cdot 0{,}89=10000+1000+0=11000.$$

Теперь по формуле (10) имеем

$$D(X)=11000-400=10600,$$

что совпадает с ранее полученным результатом.

Дисперсия дискретной случайной величины ***обладает следующими свойствами***:

1) $D(C)=0$, $C\in R$;

2) $D(CX)=C^2D(X)$, $C\in R$;

3) $D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)$, если X_1, X_2, …, X_n – взаимно независимые случайные величины;

4) $D(X)=npq$, где X – дискретная случайная величина с биномиальным законом распределения, n – число испытаний, p, q – вероятность появления и вероятность не появления события в одном испытании.

Дисперсия характеризует разброс, рассеяние случайной величины относительно среднего значения. Однако $D(X)$ измеряется в квадратных единицах, поэтому вводят ещё одну характеристику разброса случайной величины X.

4. <u>Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины</u>

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины X называется квадратный корень из её дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (11)$$

Для случайной величины X из нашего примера 4 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 102{,}96$

Среднее квадратическое отклонение рассматривается как некоторая средняя величина модуля отклонения X от её среднего значения, тогда как сами отклонения могут быть как положительными, так и отрицательными.

2.2.3. Системы двух случайных величин и их характеристики

Мы рассматривали дискретные случайные величины, значения которых определялись одним числом. Такие величины называются одномерными. Кроме вышеназванных, встречаются также величины, возможные значения которых определяются несколькими числами.

Определение. *Двумерной случайной величиной* называется пара, обозначаемая (X, Y), в которой каждая из компонент представляет собой случайную величину.

Например, при штамповке пластинок их длина и ширина представляет собой двумерную случайную величину.

В случае, когда составляющие двумерной величины являются дискретными, её можно задать так же, как и одномерную дискретную случайную величину, законом распределения вероятностей.

Определение. *Законом распределения* двумерной дискретной случайной величины (X, Y) называют соответствие между возможными её значениями (x_i, y_i) и вероятностями p_{ij}, с которыми она эти значения принимает.

Закон распределения двумерной случайной величины обычно задаётся в виде таблицы, в строках которой перечисляются значения x_i случайной величины X, а в столбцах – значения y_i случайной величины Y. На пересечении строк и столбцов указываются соответствующие вероятности p_{ij}. Если случайная величина X принимает m возможных значений, а Y – n значений, то закон распределения двумерной случайной величины имеет вид

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{in}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mj}	$\cdots$	p_{mn}

где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Заметим, что индексы у вероятностей расставляются аналогично индексам элементов матрицы.

Сумма всех вероятностей в законе распределения (X, Y) должна быть равна единице:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Имея закон распределения вероятностей двумерной случайной величины можно найти законы распределения каждой из случайных компонент. Для нахождения вероятности того, что случайная величина X примет значение x_i, нужно просуммировать все n вероятностей в i-ой строке:

$$p(x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{in}, \tag{12}$$

где $i = \overline{1, m}$.

Аналогично, для нахождения вероятности того, что случайная величина Y примет значение y_j, нужно просуммировать все m вероятностей из j-ого столбца:

$$p(y_j) = p_{1j} + p_{2j} + \ldots + p_{mj}, \tag{13}$$

где $j = \overline{1, n}$.

Пример 5. Задан закон распределения двумерной случайной величины:

$X \backslash Y$	1	4
3	0,12	0,2
5	0,24	0,15
6	0,22	0,07

Найти распределения X и Y.

Решение. Пользуясь формулой (12), находим

$$p(x_1) = 0{,}12 + 0{,}2 = 0{,}32;$$
$$p(x_2) = 0{,}24 + 0{,}15 = 0{,}39;$$
$$p(x_3) = 0{,}22 + 0{,}07 = 0{,}29.$$

То есть закон распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

X	3	5	6
p	0,32	0,39	0,29

Аналогично с использованием формул (13) получаем

$$p(y_1) = 0{,}12 + 0{,}24 + 0{,}22 = 0{,}58;$$
$$p(y_2) = 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}07 = 0{,}42.$$

Откуда следует, что закон распределения Y таков:

Y	1	4
p	0,58	0,42

В случае системы двух случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий компонент используются следующие ***числовые характеристики двумерной случайной величины*:**

1. *Корреляционный момент (ковариация)*

Определение. *Корреляционным моментом (ковариацией)* двумерной случайной величины (X, Y) называется математическое ожидание произведения отклонений её компонент:

$$\mu_{xy} = Cov(X, Y) = M([X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]).$$

Из свойств математического ожидания следует, что последнюю формулу можно записать в виде

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y),$$

а для непосредственного вычисления корреляционного момента используется формула

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j - M(X)M(Y). \tag{14}$$

Корреляционный момент служит для описания связи между случайными величинами X и Y. Из свойств математического ожидания следует справедливость следующей теоремы:

Теорема. Корреляционный момент системы из двух независимых случайных величин равен нулю.

2. *Коэффициент корреляции*

Определение. *Коэффициентом корреляции* системы двух случайных величин X и Y называется отношение их корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{15}$$

Коэффициент корреляции по модулю не превосходит единицы:

$$|r_{xy}| \leq 1 \text{ или } -1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

Определение. Две случайные величины X и Y называются *коррелированными*, если их коэффициент корреляции отличен от нуля, и *некоррелированными*, если он равен нулю.

Коррелированные случайные величины ($r_{xy} \neq 0$) всегда являются зависимыми (т.к. в этом случае $\mu_{xy} \neq 0$), а некоррелированные – независимыми.

Пример 6. Найдём корреляционный момент и коэффициент корреляции для случайных величин X и Y из примера 5, заданных законом распределения вероятностей

X \ Y	1	4
3	0,12	0,2
5	0,24	0,15
6	0,22	0,07

Решение. Закон распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

X	3	5	6

p	0,32	0,39	0,29

Пользуясь формулами (8), (10), (11), имеем

$$M(X)=3\cdot 0{,}32+5\cdot 0{,}39+6\cdot 0{,}29=4{,}65;$$

$$D(X)=3^2\cdot 0{,}32+5^2\cdot 0{,}39+6^2\cdot 0{,}29-4{,}65^2=1{,}4475;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{1{,}4475}\approx 1{,}203.$$

Аналогично для случайной величины Y с законом распределения

Y	1	4
p	0,58	0,42

получаем

$$M(Y)=1\cdot 0{,}58+4\cdot 0{,}42=2{,}26;$$

$$D(Y)=1^2\cdot 0{,}58+4^2\cdot 0{,}42-2{,}26^2=2{,}1924;$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{2{,}1924}\approx 1{,}481.$$

Используя формулу (14), вычисляем корреляционный момент

$$\mu_{xy}=3\cdot 1\cdot 0{,}12+3\cdot 4\cdot 0{,}2+5\cdot 1\cdot 0{,}24+5\cdot 4\cdot 0{,}15+6\cdot 1\cdot 0{,}22+6\cdot 4\cdot 0{,}07-$$

$$-4{,}65\cdot 2{,}26=-0{,}549.$$

Тогда, согласно формуле (15), получаем значение коэффициента корреляции:

$$r_{xy}=\frac{-0{,}549}{1{,}203\cdot 1{,}481}=-0{,}308.$$

В данном случае коэффициент корреляции близок к нулю, что означает слабую коррелированность случайных величин X и Y.

Если случайные величины X и Y, являющиеся компонентами двумерной дискретной случайной величины (X,Y) зависимы, то можно составить связывающее значения этих величин уравнение, которое носит название *уравнение линейной средней квадратической регрессии* и имеет следующий вид:

$$y=M(Y)+r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-M(X)\right). \qquad (16)$$

Последнее уравнение описывает зависимость случайной величины Y от случайной величины X. Аналогичную форму записи имеет уравнение линейной средней квадратической регрессии X на Y:

$$x=M(X)+r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-M(Y)\right).$$

Пример. Найдём линейную среднюю квадратическую регрессию случайной величины Y на случайную величину X из примера 5.

Решение. В примере 6 получено, что

$$M(X)=4{,}65;\ M(Y)=2{,}26;\sigma(X)\approx 1{,}203;\ \sigma(Y)\approx 1{,}481;\ r_{xy}=-0{,}308.$$

Подставив последние величины в уравнение (16), получаем

$$y=2{,}26-0{,}308\frac{1{,}481}{1{,}203}\left(x-4{,}65\right)$$

или

$$y = -0{,}379x + 4{,}023.$$

2.2.4. Функция распределения и функция плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Непрерывные случайные величины характеризуются тем, что их значения могут сколько угодно мало отличаться друг от друга. Пусть X – непрерывная случайная величина, значения которой сплошь заполняют интервал (a, b). Теперь уже нельзя составить перечень всех возможных значений X, как это было сделано в случае дискретной случайной величины, и непрерывные случайные величины нужно задавать по-другому.

Пусть x – некоторое действительное число, а $p(X < x)$ – вероятность того, что X примет значение, меньшее x.

Определение. *Функцией распределения непрерывной случайной величины* X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = p(X < x).$$

Функция распределения обладает ***следующими свойствами***:

1. Область значений функции распределения лежит в отрезке $[0;1]$:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Функция распределения является неубывающей, т.е.

$$(\forall x_1, x_2)\, если\ x_1 < x_2,\, то\ F(x_1) \le F(x_2).$$

3. Если возможные значения случайной величины находятся на интервале (a, b), то $F(x) = 0$ при $x < a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Из перечисленных свойств вытекают следующие ***следствия***:

1. Вероятность того, что случайная величина X примет значения внутри интервала (α, β), равна разности значений, функции распределения на концах этого интервала:

$$p(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определённое значение, равна нулю.

3. Если возможные значения непрерывной случайной величины X расположены на всей числовой оси, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Определение. Производная от функции распределения непрерывной случайной величины X называется *функцией плотности распределения вероятностей*:

$$f(x) = F'(x).$$

Из последнего определения следует, что функция распределения является первообразной для функции плотности распределения или неопределённым интегралом от неё. Таким образом, с учётом следствия 2 из свойств функции распределения вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема. Вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(\alpha; \beta)$, определяется по формуле

$$p(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Связь между функцией распределения и функцией плотности распределения вероятностей, согласно её определению, выражается формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz. \qquad (17)$$

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \textit{ если } x \le 0, \\ \sin x, \textit{ если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \textit{ если } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения.

Решение. Так как функция плотности распределения – это производная от функции распределения, то дифференцируя последнюю по интервалам её задания, получаем

$$f(x) = \begin{cases} 0, \textit{ если } x \le 0, \\ \cos x, \textit{ если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \textit{ если } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решим обратную задачу.

Пример. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \textit{ если } x \le 0, \\ \cos x, \textit{ если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \textit{ если } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения.

Решение. Воспользуемся формулой (17) на интервалах задания функции.

При $x \le 0$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dz=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} 0\cdot dz=\lim_{a\to-\infty} C\Big|_{a}^{x}=\lim_{a\to-\infty}(C-C)=0.$$

При $0<x\le\dfrac{\pi}{2}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dz+\int_{0}^{x}\cos z\cdot dz=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} 0\cdot dz+\int_{0}^{x}\cos z\cdot dz=$$

$$=\lim_{a\to-\infty} C\Big|_{a}^{0}+\sin z\Big|_{0}^{x}=\lim_{a\to-\infty}(C-C)+\sin x-\sin 0=\sin x.$$

При $x>\dfrac{\pi}{2}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dz+\int_{0}^{\pi/2}\cos z\cdot dz+\int_{\pi/2}^{x} 0\cdot dz=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} 0\cdot dz+\int_{0}^{\pi/2}\cos z\cdot dz+\int_{\pi/2}^{x} 0\cdot dz=$$

$$=\lim_{a\to-\infty} C\Big|_{a}^{0}+\sin z\Big|_{0}^{\pi/2}+C\Big|_{\pi/2}^{0}=\lim_{a\to-\infty}(C-C)+\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0+C-C=1.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ x\le 0,\\ \sin x,\ \textit{если}\ 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ \textit{если}\ x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

что совпадает с условием предыдущего примера.

Функция плотности распределения вероятностей обладает следующими ***свойствами***:

1. Несобственный интеграл от функции плотности распределения в пределах интегрирования по всей числовой оси равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1,$$

а в случае если все возможные значения случайной величины X лежат внутри интервала (a,b), то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=1. \qquad (18)$$

2. Функция плотности распределения вероятностей является неотрицательной:

$$(\forall x)\ f(x)\ge 0.$$

Последнее свойство следует из характера функции распределения: она является неубывающей (см. свойство 2 функции распределения), и, значит, её производная неотрицательна.

2.2.5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Определения числовых характеристик дискретных случайных величин распространяются и на непрерывные величины. Разница состоит в том, что в формулах (8), (9) берутся их интегральные аналоги.

1. **Определение.** *Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X, возможные значения которой находятся на отрезке $[a,b]$, называется определённый интеграл

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx. \qquad (19)$$

В случае, когда возможные значения случайной величины X заполняют всю ось Ox, пределы интегрирования a и b бесконечны: $a=-\infty$, $b=+\infty$, а интеграл (19) становится несобственным. Возможны также случаи, когда один из пределов интегрирования бесконечен (возможные значения X лежат на луче).

2. **Определение.** *Дисперсией* непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата её отклонения:

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 dx. \qquad (20)$$

Всё сказанное выше о случаях бесконечных пределов интегрирования остаётся справедливым и для дисперсии.

Для вычисления дисперсии чаще всего употребляется более удобная формула, которая выводится из (20):

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2. \qquad (21)$$

Заметим, что последняя формула является интегральным аналогом формулы (10).

3. *Среднее квадратическое отклонение* непрерывной случайной величины вычисляется, как и прежде, по формуле (11):

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

4. **Определение.** *Модой* $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое значение этой величины, плотность вероятности которого максимальна.

5. **Определение.** *Медианой* $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое её значение, при котором выполняется равенство

$$p(X<M_e)=p(X>M_e).$$

Пример. Найдём числовые характеристики непрерывной случайной величины, заданной функцией плотности распределения вероятностей на отрезке $[0,1]$:

$$f(x)=1,\ x\in[0,1].$$

Решение. Согласно формулам (19), (20), (11) последовательно вычисляем

$$M(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2};$$

$$D(X)=\int_0^1 x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int_0^1 x^2dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\approx 0{,}289.$$

Пример. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4}$ на интервале $(3;5)$. Вне этого интервала $f(x)=0$. Найдём моду, медиану и математическое ожидание.

Решение. Графиком функции плотности распределения является парабола с вершиной в точке $\left(4;\frac{3}{4}\right)$, ветви которой направлены вниз. Плотность вероятности достигает своего максимума в точке 4. Следовательно, $x=4$ – мода случайной величины X. Точка $x=4$ является также и медианой, так как парабола симметрична относительно своей оси. Вычислим теперь математическое ожидание.

$$M(X)=\int_3^5\left(-\frac{3}{4}x^3+6x^2-\frac{45}{4}x\right)dx=\left.\left(-\frac{3}{16}x^4+2x^3-\frac{45}{8}x^2\right)\right|_3^5=$$

$$=-\frac{1875}{16}+250-\frac{1125}{8}+\frac{243}{16}-54+\frac{405}{8}=-102+196-90=4.$$

Пример. Найдём основные числовые характеристики непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения на положительной полуоси Ox: $F(x)=1-e^{-x},\ x\in(0;+\infty)$.

Решение. Найдём сначала функцию плотности распределения:

$$f(x)=F'(x)=e^{-x},\ x\in(0;+\infty).$$

Затем, пользуясь формулами (19), (20), (11), правилом интегрирования по частям для определённого интеграла и правилом Лопиталя, получаем искомые величины:

$$M(X)=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}xd\left(e^{-x}\right)=-\left.xe^{-x}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{e^b}+0\right)-\left.e^{-x}\right|_0^{+\infty}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^b}\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+1\right)=1;$$

$$D(X)=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx-[M(X)]^2=-\int_0^{+\infty}x^2d\left(e^{-x}\right)-1=-\left.x^2e^{-x}\right|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx-1=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b^2}{e^b}+0\right)+2-1=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{2b}{e^b}\right)+1=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{2}{e^b}\right)+1=1;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=1.$$

2.2.6. Основные распределения непрерывных случайных величин

1. <u>*Равномерное распределение*</u>

Определение. Непрерывная случайная величина X называется *равномерно распределённой*, если на интервале возможных значений функция плотности распределения вероятностей является <u>постоянной</u>.

Пусть X равномерно распределена на отрезке $[a;b]$, то есть её плотность распределения постоянна: $f(x)=C$. Значение константы C можно определить с помощью равенства (18):

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b Cdx=C(b-a)=1,$$

откуда получаем

$$C=\frac{1}{b-a}.$$

Таким образом, функция плотности распределения вероятностей равномерно распределённой случайной величины имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если} \quad a<x\le b,\\ 0, & \text{если} \quad x>b.\end{cases}$$

График этой функции будет следующим (см. рис. 6):

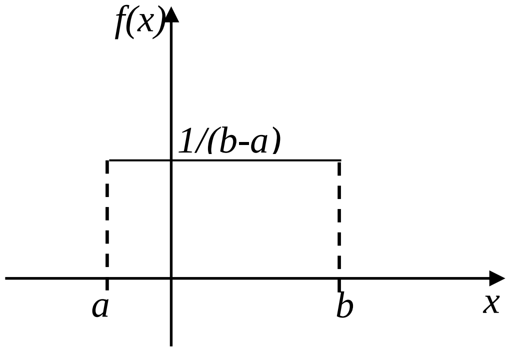

Рисунок 6. График функции плотности распределения вероятностей равномерно распределённой случайной величины

Найдём основные числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$ равномерно распределённой случайной величины X.

$$M(X)=\int_a^b \frac{1}{b-a}xdx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b=\frac{b^2}{2(b-a)}-\frac{a^2}{2(b-a)}=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2};$$

$$\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b=\frac{b^3}{3(b-a)}-\frac{a^3}{3(b-a)}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

таким образом,

$$D(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12};$$

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}.$$

2. _Показательное распределение_

Определение. Распределение непрерывной случайной величины X называется *показательным* (*экспоненциальным*), если функция плотности распределения вероятности этой величины описывается функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad x>0,\end{cases}$$

где λ – положительное число.

Используя (17), можно найти уравнение функции распределения показательно распределённой величины:

при $x\le 0$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dz=C-C=0$;

при $x>0$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dz+\int\limits_{0}^{x}\left(\lambda e^{-\lambda z}\right)dz=C-C-e^{-\lambda z}\Big|_0^x=-e^{-\lambda x}+1.$

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 1-\lambda e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad x>0, \text{где } \lambda>0.\end{cases}$$

С помощью формул (19), (20), (11) можно получить следующие значения основных числовых характеристик показательно распределённой непрерывной случайной величины:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

3. _Нормальное распределение_

Определение. Непрерывная случайная величина X распределена по *нормальному закону*, если функция плотности распределения её вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

где M_x – математическое ожидание,

σ_x – среднее квадратическое отклонение.

График функции плотности распределения вероятностей нормально распределённой случайной величины имеет следующий вид (см. рис. 7):

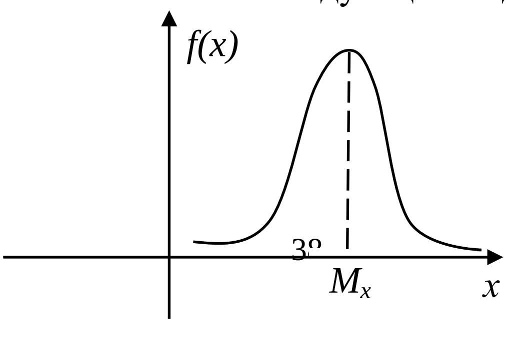

Рисунок 7. График функции плотности распределения вероятностей нормально распределённой случайной величины

Нетрудно видеть, что график плотности нормального распределения симметричен относительно прямой $x = M_x$, и поэтому и мода, и медиана в данном случае совпадают с математическим ожиданием:

$$M_0(X) = M_e(X) = M_x.$$

Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины X в интервал $(\alpha; \beta)$ находится по формуле

$$p(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - M_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \qquad (22)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, значения которой затабулированы, и которые можно найти в приложении 4.

Заметим, что функция Лапласа является **нечётной функцией**, то есть для неё справедливо равенство

$$\Phi(-z) = -\Phi(z).$$

Пример. Случайная величина распределена по нормальному закону и математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равными 10 и 5. Найти вероятность того, что X примет значение на интервале (20; 30).

Решение. Воспользуемся формулой (22). По условию $M_x = 10$, $\sigma_x = 5$, $\alpha = 20$, $\beta = 30$. Следовательно,

$$p(20 < X < 30) = \Phi\left(\frac{30 - 10}{5}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 10}{5}\right) = \Phi(4) - \Phi(2).$$

В приложении 4 находим соответствующие значения функции Лапласа и окончательно получаем

$$p(20 < X < 30) = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275.$$

Пример. Имеется случайная величина X, распределённая по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, а среднее квадратическое отклонение 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью $p = 0{,}9973$ попадёт случайная величина.

Решение. Имеем, $M_x = 20$, $\sigma_x = 3$. Пусть границами симметричного относительно математического ожидания интервала будут точки $\alpha = M_x - y$ и $\beta = M_x + y$.

$$p(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - M_x}{\sigma_x}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{M_x + y - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{M_x - y - M_x}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{y}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{y}{3}\right),$$

что по условию задачи составляет $0,9973$. Таким образом,

$$2\Phi\left(\frac{y}{3}\right) = 0,9972,\ \Phi\left(\frac{y}{3}\right) = 0,49865,$$

откуда, пользуясь таблицей значений нормированной функции Лапласа, получаем, что

$$\frac{y}{3} = 3,\ y = 9,$$

а искомый интервал (11,29).

Приложение 1. ВОПРОСЫ ДЛЯ ЭКЗАМЕНА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Понятие о комбинаторной задаче. Правила суммы и произведения. Примеры.

2. Размещения с повторениями и без повторений. Перестановки. Сочетания без повторений. Основные формулы комбинаторики. Примеры.

3. Виды событий. Полная группа событий. Примеры.

4. Аксиомы теории вероятностей и следствия из них.

5. Классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности. Примеры.

6. Условная вероятность. Независимые события. Теоремы вероятности произведения зависимых и независимых событий. Примеры.

7. Вероятность появления хотя бы одного события. Пример.

8. Теорема вероятности суммы совместных событий. Пример применения.

9. Формулы полной вероятности, Байеса. Примеры применения.

10. Формулы Бернулли, Пуассона. Примеры применения.

11. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Примеры применения.

12. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Примеры.

13. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Многоугольник распределения. Функция распределения дискретной случайной величины. Пример.

14. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины. Их свойства и вероятностный смысл. Пример вычисления.

15. Двумерная дискретная случайная величина. Закон её распределения. Законы распределения компонент двумерной случайной величины. Пример.

16. Корреляционный момент и коэффициент корреляции системы двух случайных величин. Линейная средняя квадратическая регрессия двух случайных величин.

17. Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины. Их свойства.

18. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины. Примеры.

19. Равномерное, нормальное и показательное распределения непрерывных случайных величин.

Приложение 2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. В партии из N изделий n имеют скрытый дефект (табл. 1). Какова вероятность того, что из взятых наугад m изделий k имеют скрытый дефект?

2. В магазине выставлены для продажи n изделий, среди которых k являются некачественными (табл. 2). Какова вероятность того, что взятые случайным образом m изделий будут некачественными?

3. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трёх заводов: n_1 с первого завода, n_2 со второго, n_3 с третьего (табл. 3). Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе p_1, на втором p_2 на третьем p_3. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

4. Дано распределение дискретной случайной величины X (табл. 4). Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

5. В городе имеются N оптовых баз (табл. 5). Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах одинакова и равна p. Составить закон распределения числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент.

6. Найти линейную среднюю квадратическую регрессию случайной величины Y на случайную величину X на основе заданного закона распределения двумерной случайной величины (табл. 6).

7. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Её математическое ожидание равно M_x, среднее квадратическое отклонение равно σ_x (табл. 7). Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (a,b).

Таблица 1. Варианты задания 1

Вариант	N	n	m	k	Вариант	N	n	m	k
1	20	4	5	2	16	20	5	4	1
2	30	5	5	3	17	16	6	5	3
3	20	5	4	2	18	18	5	4	2
4	25	6	5	3	19	14	4	3	1
5	15	4	3	2	20	10	4	3	2
6	20	6	4	1	21	16	5	3	2
7	30	4	3	2	22	20	6	4	3
8	16	4	3	2	23	26	5	4	2
9	18	6	5	3	24	32	8	5	3
10	12	5	4	2	25	34	10	6	4
11	30	10	5	3	26	30	6	5	3
12	26	8	6	4	27	25	5	3	2
13	24	8	5	3	28	24	6	4	3
14	22	6	4	2	29	28	8	5	2

15	20	5	3	2	30	24	6	3	2

Таблица 2. Варианты задания 2

Вариант	n	m	k	Вариант	n	m	k
1	20	6	2	16	15	5	2
2	18	8	3	17	17	6	3
3	16	6	2	18	18	8	4
4	14	5	3	19	20	7	2
5	12	4	3	20	22	6	3
6	10	4	2	21	26	8	2
7	18	6	3	22	28	7	3
8	22	8	2	23	30	10	2
9	24	10	3	24	26	6	2
10	26	6	2	25	28	10	3
11	30	8	3	26	14	5	2
12	25	7	2	27	18	5	3
13	23	6	3	28	16	4	2
14	24	8	2	29	17	3	2
15	30	9	3	30	19	6	3

Таблица 3. Варианты задания 3

Вариант	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3	Вариант	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3
1	25	0,9	35	0,8	40	0,7	16	25	0,9	35	0,8	40	0,7
2	15	0,8	25	0,7	10	0,7	17	15	0,8	35	0,7	20	0,9
3	40	0,9	35	0,7	25	0,9	18	40	0,9	35	0,8	35	0,8
4	25	0,7	10	0,9	15	0,8	19	14	0,8	26	0,6	20	0,7
5	10	0,9	20	0,8	20	0,6	20	18	0,9	32	0,8	30	0,7
6	40	0,8	30	0,8	30	0,9	21	30	0,9	20	0,7	10	0,8
7	20	0,8	50	0,9	30	0,8	22	16	0,9	24	0,8	60	0,9
8	35	0,7	35	0,8	30	0,9	23	30	0,9	10	0,7	10	0,7
9	15	0,9	45	0,8	40	0,9	24	15	0,8	35	0,9	50	0,8
10	40	0,8	15	0,7	45	0,8	25	40	0,8	20	0,8	40	0,9
11	20	0,9	15	0,9	15	0,8	26	10	0,9	20	0,8	10	0,6
12	14	0,8	26	0,9	10	0,8	27	35	0,8	25	0,7	50	0,8
13	16	0,8	40	0,9	44	0,7	28	40	0,8	20	0,9	40	0,8
14	30	0,9	20	0,7	50	0,7	29	30	0,9	40	0,8	30	0,9
15	20	0,8	10	0,9	20	0,9	30	10	0,7	20	0,9	20	0,7

Таблица 4. Варианты задания 4

Вариант	Числовые данные					Вариант	Числовые данные				
1	x_i	-5	2	3	4	16	x_i	4	6	9	
	p_i	0,4	0,3	0,1	0,2		p_i	0,4	0,3	0,3	
2	x_i	0,2	0,5	0,6	0,8	17	x_i	4	6	8	9
	p_i	0,1	0,5	0,2	0,2		p_i	0,3	0,1	0,1	0,5
3	x_i	-6	-2	1	4	18	x_i	3	6	7	9
	p_i	0,1	0,3	0,4	0,2		p_i	0,3	0,2	0,1	0,4
4	x_i	0,2	0,5	0,6		19	x_i	5	10	12	14
	p_i	0,5	0,4	0,1			p_i	0,4	0,2	0,1	0,3
5	x_i	-8	-2	1	3	20	x_i	6	8	14	
	p_i	0,1	0,3	0,4	0,2		p_i	0,2	0,4	0,4	
6	x_i	-2	1	3	5	21	x_i	1	3	4	5
	p_i	0,1	0,3	0,4	0,2		p_i	0,4	0,3	0,1	0,2
7	x_i	-3	2	3	5	22	x_i	4	5	7	8
	p_i	0,3	0,4	0,1	0,2		p_i	0,1	0,5	0,2	0,2
8	x_i	2	3	10		23	x_i	2	4	5	6
	p_i	0,1	0,4	0,5			p_i	0,3	0,1	0,4	0,2
9	x_i	-4	-1	2	3	24	x_i	2	4	8	
	p_i	0,3	0,1	0,4	0,2		p_i	0,1	0,4	0,5	
10	x_i	-3	2	3	5	25	x_i	-3	-1	3	5
	p_i	0,3	0,4	0,1	0,2		p_i	0,4	0,3	0,1	0,2
11	x_i	-6	-2	2	3	26	x_i	2	4	6	9
	p_i	0,2	0,4	0,1	0,3		p_i	0,1	0,3	0,3	0,3
12	x_i	2	5	6		27	x_i	2	4	5	6
	p_i	0,5	0,1	0,4			p_i	0,5	0,1	0,3	0,1
13	x_i	-5	-3	1	3	28	x_i	1	3	8	
	p_i	0,2	0,1	0,1	0,6		p_i	0,2	0,1	0,7	
14	x_i	2	5	6	8	29	x_i	4	6	8	10
	p_i	0,2	0,2	0,4	0,2		p_i	0,3	0,2	0,4	0,1
15	x_i	4	6	8	12	30	x_i	6	8	12	16
	p_i	0,3	0,1	0,3	0,3		p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Таблица 5. Варианты задания 5

Вариант	N	p	Вариант	N	p
1	3	0,2	16	4	0,15
2	4	0,25	17	3	0,24
3	3	0,1	18	2	0,1
4	2	0,2	19	3	0,12
5	4	0,1	20	4	0,14
6	3	0,2	21	4	0,16
7	4	0,3	22	3	0,15
8	3	0,1	23	3	0,13
9	3	0,12	24	2	0,21
10	4	0,3	25	2	0,16
11	3	0,15	26	3	0,19
12	3	0,18	27	4	0,26
13	4	0,24	28	3	0,14
14	2	0,14	29	2	0,15
15	3	0,16	30	3	0,22

Таблица 6. Варианты задания 6

<table>
<tr><th>Вариант</th><th colspan="4">Числовые данные</th><th>Вариант</th><th colspan="4">Числовые данные</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>Y
X</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td rowspan="3">16</td><td>X
Y</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,16</td><td>0,10</td><td>0,28</td><td>4</td><td>0,14</td><td>0,15</td><td>0,21</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,14</td><td>0,20</td><td>0,12</td><td>7</td><td>0,16</td><td>0,20</td><td>0,14</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>Y
X</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td rowspan="3">17</td><td>X
Y</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0,06</td><td>0,18</td><td>0,24</td><td>3</td><td>0,14</td><td>0,12</td><td>0,13</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,12</td><td>0,13</td><td>0,27</td><td>7</td><td>0,13</td><td>0,20</td><td>0,28</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>Y
X</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td rowspan="3">18</td><td>X
Y</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,12</td><td>0,24</td><td>0,22</td><td>2</td><td>0,11</td><td>0,13</td><td>0,26</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,20</td><td>0,15</td><td>0,07</td><td>6</td><td>0,21</td><td>0,06</td><td>0,23</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td>X
Y</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td rowspan="3">19</td><td>X
Y</td><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0,16</td><td>0,10</td><td>0,28</td><td>4</td><td>0,22</td><td>0,09</td><td>0,32</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,14</td><td>0,20</td><td>0,12</td><td>7</td><td>0,14</td><td>0,17</td><td>0,06</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5</td><td>X
Y</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td rowspan="3">20</td><td>X
Y</td><td>8</td><td>9</td><td>12</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,06</td><td>0,18</td><td>0,24</td><td>1</td><td>0,14</td><td>0,11</td><td>0,18</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,12</td><td>0,13</td><td>0,27</td><td>6</td><td>0,23</td><td>0,04</td><td>0,30</td></tr>
</table>

Окончание табл. 6

Вариант	Числовые данные				Вариант	Числовые данные			
6	Y \ X	2	3	4	21	Y \ X	3	6	8
	1	0,16	0,10	0,28		2	0,21	0,07	0,23
	3	0,14	0,20	0,12		8	0,11	0,20	0,18
7	Y \ X	2	4	5	22	Y \ X	3	4	7
	1	0,12	0,13	0,24		4	0,15	0,23	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		8	0,21	0,09	0,17
8	X \ Y	4	5	6	23	Y \ X	4	5	8
	2	0,06	0,18	0,24		3	0,13	0,14	0,19
	3	0,12	0,13	0,27		5	0,24	0,08	0,22
9	X \ Y	2	4	5	24	Y \ X	6	9	12
	1	0,12	0,13	0,24		5	0,23	0,07	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		9	0,17	0,20	0,18
10	X \ Y	1	3	4	25	Y \ X	5	8	10
	3	0,13	0,24	0,12		2	0,11	0,21	0,14
	6	0,18	0,06	0,27		7	0,20	0,09	0,25
11	Y \ X	1	3	4	26	Y \ X	4	7	9
	3	0,13	0,24	0,12		4	0,30	0,12	0,10
	5	0,18	0,06	0,27		10	0,08	0,12	0,28
12	Y \ X	3	5	6	27	Y \ X	2	6	9
	1	0,12	0,24	0,22		5	0,21	0,18	0,14
	3	0,20	0,15	0,07		9	0,08	0,14	0,25
13	Y \ X	4	6	8	28	Y \ X	4	7	9
	3	0,13	0,08	0,12		2	0,09	0,15	0,16
	5	0,20	0,16	0,31		7	0,17	0,23	0,20
14	Y \ X	3	4	7	29	Y \ X	1	4	8
	3	0,30	0,20	0,10		4	0,11	0,24	0,17
	6	0,05	0,12	0,23		8	0,21	0,08	0,19
15	Y \ X	4	6	8	30	Y \ X	4	8	14
	2	0,24	0,30	0,05		3	0,12	0,13	0,20

	5	0,10	0,12	0,19		5	0,23	0,12	0,20

Таблица 7. Варианты задания 7

Вариант	M_x	σ_x	a	b	Вариант	M_x	σ_x	a	b
1	10	1	8	14	16	40	4	36	43
2	12	2	8	14	17	38	2	35	40
3	14	3	10	15	18	42	4	40	43
4	16	2	15	18	19	44	5	41	45
5	18	1	16	21	20	45	5	43	48
6	20	2	17	22	21	46	4	44	48
7	24	1	20	26	22	48	5	45	49
8	26	3	23	27	23	50	6	48	53
9	28	2	24	30	24	52	4	50	55
10	30	1	27	32	25	54	3	53	56
11	32	3	30	35	26	56	4	55	58
12	34	1	30	36	27	58	5	56	61
13	36	2	34	37	28	60	6	58	63
14	38	3	37	41	29	62	5	59	64
15	40	2	39	42	30	64	6	60	66

Приложение 3. ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,20	0,041
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,40	0,033
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,60	0,027
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,80	0,022
0,10	0,905	0,50	0,607	0,90	0,407	4,00	0,018
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,20	0,015
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,40	0,012
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,60	0,010
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,80	0,008
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,00	0,007
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,301	5,20	0,006
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,40	0,005
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,60	0,004
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,80	0,003
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,00	0,002
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,20	0,002
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,40	0,002
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,60	0,001
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,80	0,001
0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050	7,00	0,001

Приложение 4. ЗНАЧЕНИЯ НОРМИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00399	00789	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	38000	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	48180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49430	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	40807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983

3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997									
5,0	49999									

Примечание. В таблице представлены мантиссы значений функции (0,…).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белько И.В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: Учебное пособие / Морозова И.М., Криштапович Е.А. - М.: НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 299 с. (доступно в ЭБС «**Znanium.com**», режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=542521).

2. Бирюкова Л.Г. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Матвеев В.И., - 2-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с. (доступно в ЭБС «**Znanium.com**», режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370899).

3. Бочаров П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика [Электронный ресурс] / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. - 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 296 с. - ISBN 5-9221-0633-3. (доступно в ЭБС «**Знаниум»**, режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=405754)

4. Коган Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. — Москва: ИНФРА-М, 2019. - 250 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - www.dx.doi.org/10.12737/textbook_5cde54d3671a96.35212605. - ISBN 978-5-16-106292-0. - Текст: электронный. - URL: https://new.znanium.com/catalog/product/971766

5. Сапожников П.Н. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах: Учебное пособие. / Сапожников П.Н., Макаров А.А., Радионова М.В. - М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат и магистратура) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-47-8. (доступно в ЭБС «**Знаниум**», режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=548242)

6. Соколов Г.А. Основы теории вероятностей: учебник / Г.А. Соколов. - 2-е изд. - Москва: ИНФРА-М, 2015. - 340 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа https://www.znanium. com]. - (Высшее образование: Бакалавриат). — www.dx.doi. org/10.12737/6649. - ISBN 978-5-16-006728-5 (print); ISBN 978-5-16-101335-9 (online). - Текст: электронный. - URL: https://new.znanium.com/catalog/product/405698

7. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию / Шапкин А.С., Шапкин В.А., - 8-е изд. - Москва: Дашков и К, 2017. - 432 с.: ISBN 978-5-394-01943-2 – Текст: электронный. - URL: https://new.znanium.com/catalog/product/430613

8. Хуснутдинов. Р.Ш. Математическая статистика: Учебное пособие / Р.Ш. Математическая статистика: Учебное пособие / Р.Ш. Хуснутдинов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 205 с.- М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 205 с. (доступно в ЭБС «**Znanium.com**», режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/445667).

Екатерина Александровна **Голубева**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
Часть I

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.