Министерство образования и науки Российской Федерации

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Е.Ю. Грудзинская
А.К. Любимов

Разработка темы «Надежность систем» в активных методах

Электронное методическое пособие

Нижний Новгород
2011

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В вышедших в 2009–2010 годах Федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС) третьего поколения зафиксирована необходимость внедрения активных методов в вузовский учебный процесс для повышения качества образования, мотивации к обучению у студентов и повышения ответственности студентов за результаты их обучения, а также повышения эффективности учебного процесса в целом.

Для студентов–магистров, обучающихся по направлению «Механика и математическое моделирование» предлагается не менее 30% аудиторных занятий проводить в активных и интерактивных методах (Сайт Министерства образования и науки Российской Федерации http://www.edu.ru/db-mon/mo/Data/d_09/prm771-1.pdf).

В методическом пособии представлена разработка темы «Надежность систем» дисциплины «Надежность механических систем». Дисциплина является спецдисциплиной для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010800 «Механика и математическое моделирование», 010400 «Прикладная математика и информатика» на механико-математическом факультете ННГУ.

Актуальность и новизна методического пособия заключается в том, что занятия темы «Надежность систем» (10 часов) разработаны в активных методах.

Курс «Надежность механических систем» изучается в объеме 32 часов, тема «Надежность систем» является заключительной частью данного курса и изучается в течение 10 часов.

При неизменном объеме содержательной части темы чтение лекций заменяется самостоятельным освоением материала студентами в аудитории под руководством преподавателя, активным обсуждением учебного материала. Преподаватель изменяет методы обучения, переходя от репродуктивных к частично-поисковым и проблемно-поисковым методам; меняет форму организации занятий – групповая работа сочетается с индивидуальной и фронтальной формами.

Активная самостоятельная работа студентов над учебным материалом организуется на основе выстраивания занятий в технологии развития критического мышления.

Занятия разрабатывались с использованием различных приемов и стратегий технологии с учетом особенностей изучаемого материала и преследуемых целей.

В таблице представлены распределение материала изучаемой темы по занятиям и цели каждого занятия.

№	Тема занятия (2 часа)	Цели занятия
1.	Надёжность систем Система и её характеристики	Рассмотреть особенности сложных технических систем, способы формализации реальных систем с использованием понятия структурная схема. Основные типы соединения элементов системы. Привести примеры перехода от реальной системы к структурной схеме.
2.	Определение вероятности безотказной работы системы с последовательным соединением элементов	Рассмотреть постановку и методику решения задачи по определению вероятности безотказной работы системы с последовательным соединением элементов. Рассмотреть решение типовых задач.
3.	Определение вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов. Система с нагруженным резервом.	Рассмотреть постановку и методику решения задачи по определению вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов – случай нагруженного резерва. Рассмотреть решение типовых задач.

4.	Определение вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов. Система с ненагруженным резервом	Рассмотреть постановку и методику решения задачи по определению вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов – случай ненагруженного резерва. Рассмотреть решение типовых задач. Рассмотреть модель «гибели» и её применение для расчёта ВБР системы. Выполнить исследования по сравнению надежности систем с различными структурными схемами.
5.	Применение формулы Байеса для расчёта надёжности систем	Показать возможности применения формулы Байеса для расчёта ВБР систем как с типовыми (параллельное, последовательное) типами соединения элементов, так и нестандартными типами соединения.

ХОД ЗАНЯТИЙ

Занятие 1 (12)
Надежность систем. Система и ее характеристики

Необходимые пояснения.
Изучение темы «Надежность систем» в активных методах начинается с вводного слов преподавателя об учебном плане курса, месте изучаемой темы в курсе, особенностях работы в активных методах.

Часть 1. Понятие «система»

ВЫЗОВ

1. 1. Вопросы преподавателя.

1. Что такое система? Где встречается это понятие и чем характеризуется?
Приведите примеры известных вам систем.
(Система здравоохранения, нервная система, отопительная система).
2. Что общего у таких разных объектов, почему мы говорим о системе?
(Система состоит из взаимосвязанных элементов).
3. Приведите примеры технических систем. Из чего они состоят? Может ли элемент системы быть в свою очередь тоже системой? Приведите пример.

1.2. Индивидуальное задание.

Запишите каждый у себя в тетради:

Система – это …
Студенты зачитывают свои определения.

1.3. Организация групп. В группе 4 – 5 человек.
1.4. Задание в группы.

Вам в группы предлагается 6 утверждений. У каждого утверждения поставьте значок: «+» – согласен, «-» – не согласен, «?» – сомневаюсь.

1. Количество элементов системы влияет на надежность системы в целом.
2. Сложная система в процессе эксплуатации самостоятельно переходит в наиболее устойчивое с точки зрения функционирования состояние.
3. Элемент для рассматриваемой системы определяется в зависимости от уровня рассмотрения решаемых целей и задач.
4. Не все элементы системы влияют на ее надежность.
5. Невозможно обеспечить безотказную работу системы при отказе одного из элементов.
6. ВБР системы всегда зависит от ВБР элементов.

1.5. Фиксация результатов группового обсуждения в таблице на доске.

Группа/Утверждение	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	+	?	?	?	+	+
2	-	+	+	-	+	-
3	?	-	-	-	+	?
4						
5						
6						

ОСМЫСЛЕНИЕ.

Чтение текста о системах. Работа индивидуальная.

Система и её характеристики

Подавляющее большинство технических объектов представляют собой сложные большие системы, состоящие из множества взаимодействующих элементов образующих некоторую целостность. В достаточно общем смысле под ***системой*** можно понимать упорядоченную совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, образующих единое функциональное целое, предназначенное для решения определенных задач. Современные системы в различных областях техники (машиностроение, радиоэлектроника и т.д.) представляют собой совокупность десятков, сотен, тысяч взаимодействующих между собой элементов. Широко используется термин «сложная система», понимая под этим многоуровневую систему из взаимодействующих элементов, объединённых в подсистемы различных уровней.

Расчет, прогнозирование поведения систем представляет собой чрезвычайно актуальную, но в то же время и весьма сложную проблему.

С позиции теории надёжности системы обладают рядом особенностей, различным образом влияющих на их надёжность. В своем большинстве системы состоят из значительного числа элементов, что в целом ведет к снижению надёжности системы. При этом за счет разброса свойств и характеристик элементов даже одинаковые системы обладают выраженными свойствами индивидуальности и, как правило, чем сложнее система, тем более ярко проявляется индивидуальность, что, в конечном счете, также влияет на надёжность. Характерной особенностью сложных систем является свойство самоорганизации, т.е. система в процессе эксплуатации самостоятельно переходит в наиболее устойчивое с точки зрения функционирования состояние. Это достигается за счёт внутреннего перераспределения взаимодействия между элементами системы.

Важным понятием при рассмотрении сложных систем является понятие элемента. Под ***элементом*** понимается некоторая часть системы, предназначенная для выполнения определённых функций и неделимая на составные части на данном уровне исследования.

Отсюда следует, что элемент характеризуется индивидуальными входными и выходными параметрами.

Очевидно, что деление системы на элементы является неоднозначной процедурой и, как следует из определения, в значительной степени зависит от поставленных задач и имеющихся возможностей анализа.

Отметим некоторые особенности элементов: во-первых, элемент для рассматриваемой системы определяется в зависимости от уровня рассмотрения решаемых целей и задач, во-вторых, при анализе надёжности системы элемент является неделимой частью системы, в не зависимости от его сложности.

Наличие значительного числа элементов в системе позволяет говорить о различном влиянии различных элементов на надёжность системы в целом. Многие из элементов являются второстепенными и практически не влияют на надёжность системы, а оказывают влияние на ее эффективность.

Функционирование элемента как составляющего системы может следующим образом влиять на систему в целом: изменение выходных параметров элемента влияет лишь на работоспособность самого элемента; отказ элемента ведет к отказу системы; выходные параметры элемента участвуют в формировании выходного параметра системы, определяющего ее работоспособность; выходные параметры системы существенно влияют на работоспособность других элементов системы.

С указанной точки зрения могут быть выделены следующие виды систем:

- расчленённые – отказ элементов системы является независимым событием;
- связанные - отказ элементов является зависимым событием и определяется изменением выходных параметров системы в целом;
- комбинированные – состоящие из более простых систем со связанной структурой и с независимым формированием их показателей надёжности.

Для радиоэлектроники более характерны системы расчлененного вида, а для машиностроения – связанные. В целом же любая система в той или иной степени сочетает черты этих двух видов, т.е. является комбинированной.

При разработке математических методов расчета надёжности систем необходима их классификация по различным признакам, а затем и формализация характеристик для создания математического описания.

Укажем некоторые признаки, в соответствии с которыми может быть выполнена классификация систем.

Системы делятся на две основные группы: восстанавливаемые и невосстанавливаемые.

Восстанавливаемым называется объект, работоспособность которого в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях, т.е. выявляется и устраняется отказ (повреждение). В противном случае объект является невосстанавливаемым, т.е. при возникновении первого отказа он не подлежит восстановлению.

Применяемые конструктивные решения дают возможность восстановления работоспособности системы без прекращения ее функционирования за счет проведения ремонтных работ. Важной характеристикой является время восстановления. Если время восстановления пренебрежимо мало по сравнению со временем жизни элемента, то обычно считают, что восстановление происходит мгновенно, т.е. в момент отказа элемент заменяется новым. Во многих случаях временем восстановления нельзя пренебречь т.к. оно сравнимо со временем жизни системы, т.е. имеем процесс восстановления с конечным временем восстановления.

Часто необходима дальнейшая детализация периода восстановления, например, время обнаружения неисправного элемента и время замены его новым.

Для повышения объекта при отказе надёжности систем применяется резервирование. Под термином ***резервирование*** понимается применение дополнительных средств и (или) возможностей с целью сохранения работоспособного состояния объекта при отказе одного или нескольких его элементов.

Существуют различные виды резервирования: структурное, временное, функциональное и т.д.

Структурное резервирование – резервирование с применением резервных элементов структуры объекта.

Временное резервирование – резервирование с применением резервов времени.

Частным случаем понятия резервирования является ***дублирование*** – в этом случае основному элементу придается один резервный, т.е. элемент, предназначенный для обеспечения работоспособности объекта в случае отказа основного элемента.

При рассмотрении системы предполагается, что ее структура и характер работы известны настолько насколько необходимо, чтобы сделать заключение для любой совокупности элементов – вызывает ли отказ этой группы отказ системы в целом. В связи с этим можно рассматривать надёжность систем с зависимыми и независимыми элементами.

Допущение о том, что отказ элементов происходит независимо друг от друга, т.е. отказ любой группы элементов не изменяет надёжности других элементов, является очень сильным допущением и в реальных системах оно, как правило, не выполняется.

Возможно введение и других классификационных критериев, дающих большую детализацию.

РЕФЛЕКСИЯ.

1. Обсуждение результатов, зафиксированных в таблице до чтения текста. Внесение необходимых исправлений с учетом полученной новой информации.

2. Задание в группы.

Представьте классификацию систем по различным основаниям.

3. Презентация у доски.

4. Индивидуальное задание.

Вернитесь к своему определению системы, и если это необходимо, дополните и исправьте его. Зачитайте свое определение.

Часть 2. Способы формализации реальных систем. Понятие структурных схем.

ВЫЗОВ.

2.1. Беседа преподавателя.

Нас интересует в рамках данного курса надежность систем. Для расчета надежности сложных объектов, состоящих из большого количества элементов, могут использоваться различные подходы, упрощающие расчеты. По-существу, мы создаем модель системы.

2.2. Вопрос.

Нам знакомы различные модели: игрушечный автомобиль, кукла, глобус. Как вы понимаете, что такое модель?

2.3. Задание.

В тетради напишите определение (каждый индивидуально): модель - это

2.4. Вопрос.

Совершенно очевидно, что модели создаются для решения различных задач, например, игрушечный автомобиль для детей – это тоже модель, решающая определенные задачи.

Но что необходимо отразить в этой модели – машине - для того, чтобы рассчитать ее надежность?

2.5. Задание в группы. Изобразите на бумаге модель автомобиля, подходящую для того, чтобы выполнить интересующую нас в рамках данного курса задачу - рассчитать его надежность.

2.6. Презентация рисунков от группы. Обсуждение.

2.7. Индивидуальное задание. Вернитесь к определению модели, исправьте, дополните его, если это необходимо.

2.8. Вопрос.

Мы будем изучать метод структурных схем – модель, которая применяется при расчете надежности систем. Что, на ваш взгляд, должно быть отражено в этой модели? (Количество элементов и способ их соединения)

ОСМЫСЛЕНИЕ

Индивидуальное задание – прочитать текст, делая пометки на полях: + - абсолютно понятно, ? – требуется пояснение.

Под ***структурной схемой*** системы понимается графическое изображение совокупности её структурных элементов и функционально-логических связей между ними, предназначенное для формализации условий работоспособности.

Структурный элемент системы – условный элемент, обладающий количественными характеристиками надёжности некоторой совокупности последовательно соединённых (в функциональном смысле) реальных элементов системы.

Структурные схемы создаются в виде ориентированного, полуориентированного и неориентированного графов. При изображении все элементы системы равноценны, что подчёркивается их одинаковым графическим изображением.

Элементы, отказ которых приводит к отказу системы, соединяются последовательно. Если элементы системы имеют дублирующие элементы, то в этом случае структурные элементы соединяются параллельно.

Необходимо подчеркнуть, что соединение элементов в реальной системе и соединение структурных элементов в структурной схеме необязательно должны совпадать.

На рис. 4.2 на примере системы, обеспечивающей фильтрацию жидкости, показана разница.

Элементом системы в данном случае является фильтр, отказ которого может произойти либо в результате засорения фильтрующей сетки, либо её разрыва. В случае отказа системы из-за засорения сетки схемы соединения структурных элементов и конструктивных элементов совпадают, т.к. отказ любого из фильтров (элементов) приводит к отказу системы. В случае отказа фильтра из-за разрыва сетки структурная схема не совпадает со схемой соединения элементов в системе. При параллельном соединении фильтров отказ любого из них приведет к тому, что неочищенная жидкость пойдет через него и фильтрация не будет выполнена. При последовательном соединении фильтров отказ одного из них не будет означать отказа системы, т.к. оставшийся фильтр будет выполнять свои функции.

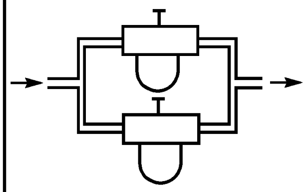
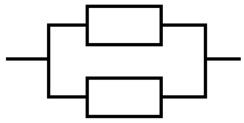
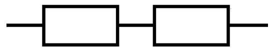
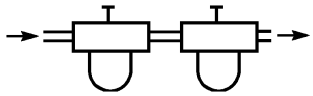
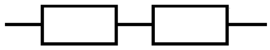
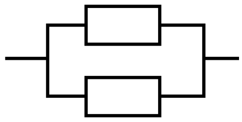
Конструктивная схема	Структурная схема	
	Вид отказа	
	Засорение сетки	Разрыв сетки
		
		

Рис. 4.2. Конструктивная и структурная схемы системы

Разработка структурной схемы реальной системы включает в себя несколько основных этапов.

На первом этапе производится описание работы системы, т.е. рассматривается функционирование системы на конечном промежутке времени, определяется конкретное содержание термина «работоспособное состояние».

На следующем этапе выполняется классификация отказов элементов системы и системы в целом, оценивается влияние отказа каждого элемента на работоспособное состояние системы.

Третий этап посвящен составлению собственно структурной схемы реальной системы. С этой целью изучается поведение системы при отказе каждого из составляющих ее элементов. В ряде случаев при отказе одного элемента происходит отказ всей системы. В тоже время, возможно, что система остается частично или полностью работоспособной при наличии работоспособных и отказавших элементов.

При разработке структурных схем, как правило, применяют три основных способа соединения элементов:

– последовательное соединение (рис. 4.3*а*) соответствует случаю, когда при отказе любого элемента отказывает вся система или система работоспособна только в случае работоспособности всех элементов её составляющих; наработка до отказа системы T равна наработке до отказа того элемента, у которого она оказывается минимальной

$$T = \min\{T_i\}, \quad i = \overline{1,n},$$

где n – число элементов системы;

– параллельное соединение (рис. 4.3*б*) соответствует случаю, когда система остается работоспособной пока работоспособен хотя бы один элемент из n элементов системы; наработка до отказа T системы равна максимальному из значений наработки до отказа элементов

$$T = \max\{T_i\}, \quad i = \overline{1,n};$$

– соединение (рис. 4.3*в*), при котором в случае отказа элемента вместо него включается резервный элемент; наработка системы до отказа T равна сумме наработок до отказа всех элементов системы

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i .$$

Соединения элементов, указанные во втором и третьем способах, несут соответственно название нагруженного и ненагруженного резерва.

При этом под нагруженным резервом понимается резерв, который содержит один или несколько резервных элементов, функционирующих в режиме основного элемента. В случае ненагруженного резерва, резервные элементы находятся в ненагруженном состоянии.

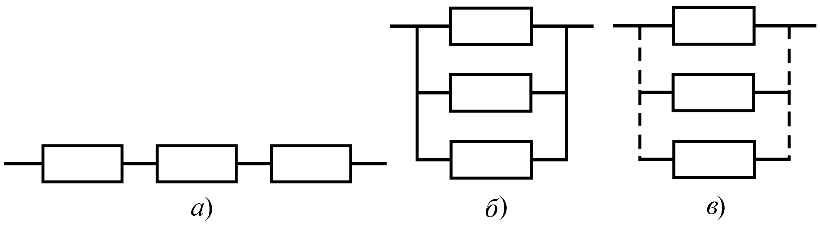


Рис. 4.3. Способы соединения элементов в структурных схемах

Отметим, что не всегда имеется возможность представить систему в виде схемы, состоящей из комбинации последовательного и параллельного соединенных элементов.

Пример системы, структурная схема которой не сводится к подобной комбинации, приведён на рис. 4.4.

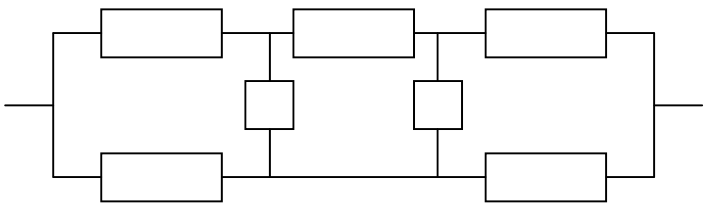


Рис. 4.4. Структурная схема, не сводящаяся к комбинации последовательно и параллельно соединенных элементов

Если структурная схема сложной системы построена и для каждого элемента определена вероятность безотказной работы, то, используя результаты теории вероятностей, можно найти вероятность безотказной работы системы.

Рассмотрим вопросы расчёта схемной надёжности систем.

Предполагаем, что система состоит из n элементов, время жизни i–го элемента T_i есть случайная величина с функцией распределения $F_i(t) = \mathrm{P}\{T_i < t\}$.

Введем следующие предпосылки:

- отказы элементов предполагаются независимыми, т.е. отказ любого элемента не влияет на характеристики остальных, при этом случайные величины T_i независимы;
- состояние элементов системы (работоспособен – неработоспособен) однозначно определяет состояние всей системы;
- после отказа работоспособное состояние элемента не восстанавливается.

РЕФЛЕКСИЯ.

1. В группах обсудить прочитанный материал.

2. Задание в группы.

Составить вопросы на проверку усвоения и понимания материала.

Для этого:

А) Необходимо выделить категории информации, касающиеся структурных схем.

1. Этапы разработки
2. Виды соединений.

Б) Составьте в группе 2 вопроса – один по первой категории, другой по второй категории. Желательно, чтобы вопросы бы были составлены на понимание информации, а не на простое воспроизведение. Главное условие – вы сами должны суметь ответить на заданные вами вопросы.

В) Вопросы зафиксируйте письменно на листке бумаги.

3. Задание в группы

Ответить на вопросы. Каждая группа передает составленные вопросы последующей группе, в свою очередь получает вопросы от предыдущей группы.

Ответы на вопросы фиксируются письменно.

4. Вопросы и ответы поочередно заслушиваются в аудитории.

Все студенты выступают экспертами, оценивая ответы товарищей, при необходимости внося дополнения. Заключительное слово по оценке качества ответа на вопрос предоставляется группе – составителю вопросов.

5. Подведение итогов занятия преподавателем.

Занятие 2 (13)
Определение вероятности безотказной работы системы с последовательным соединением элементов

ВЫЗОВ.

Вопросы преподавателя.

1. Итак, для того, чтобы оценить надежность системы в целом, какие сведения нам необходимы? (ВБР элементов системы, способ их соединения)
2. Что означает для системы последовательное соединение элементов, каковы допущения при математических расчетах?

(В модель вносится допущение – отказ 1-го элемента является независимым событием).

3. Какие показатели надежности существуют? При необходимости фиксируем на доске.

ОСМЫСЛЕНИЕ.

1. Задание.

При чтении текста поставить пометки + ясно, ? - требует разъяснения.

2. Чтение текста (индивидуально).

Система с последовательным соединением элементов

Как уже отмечалось, последовательным, с точки зрения надёжности, является такое соединение элементов в системе, при котором отказ хотя бы одного элемента приводит к отказу всей системы (рис. 4.3*а*).

Если известны ВБР элементов системы, то в предположении их независимости ВБР системы для момента времени t определится

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t). \tag{4.1}$$

Если $\sum_{i=1}^{n} Q_i(t) << 1$, то для величины отказа $Q(t) = 1 - P(t)$ справедлива приближённая формула

$$Q(t) \approx \sum_{i=1}^{n} Q_i(t), \tag{4.2}$$

погрешность, которой не превосходит значения $0{,}5 \cdot \left(\sum_{i=}^{n} Q_i(t) \right)^2$.

Действительно, в случае последовательного соединения имеем

$$Q(t) = 1 - P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - Q_i(t)).$$

По индукции можно доказать неравенство

$$1 - \sum_{i=1}^{n} Q_i(t) < \prod_{i=1}^{n} (1 - Q_i(t)) < 1 - \sum_{i=1}^{n} Q(t) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} Q_{i-1}(t) Q_i(t) < 1 - \sum_{i=1}^{n} Q_i(t) + 0{,}5 \left(\sum_{i-1} Q_i(t) \right)^2.$$

Отсюда следует, что, если $\sum Q_i(t) << 1$, то справедлива приближённая формула (4.2). Из формулы (4.1) следует, что за счёт большого количества даже высоконадёжных элементов, системы с последовательным соединением элементов могут обладать низкой надёжностью.

Например, если в систему входят 50 равнонадёжных элементов, для которых ВБР для заданного промежутка времени равна $P_i(t) = 0{,}99$, то ВБР системы равна

$P(t) \approx 0{,}55$. Увеличив число элементов до 400 будем иметь $P(t) = 0{,}018$, т.е. система является практически неработоспособной.

Используя зависимость между величинами $P(t)$ и $\lambda(t)$ можно записать для системы из n последовательно соединенных элементов

$$P(t) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t}\lambda_i(s)ds\right\} = \exp\left\{-\int_{0}^{t}\lambda(s)ds\right\}, \tag{4.3}$$

где $\lambda(s) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)$.

Для экспоненциального закона, когда $\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}$ имеем $P(t) = \exp\{-\lambda t\}$, где $\lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ – интенсивность отказов системы. Отсюда следует, что ВБР системы в этом случае также будет подчиняться экспоненциальному закону. Величина среднего времени до отказа определиться следующим образом

$$\overline{T} = \lambda^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{T}_i}\right)^{-1}. \tag{4.4}$$

В табл. 4.1. приведены точные и приближенные выражения для основных показателей надёжности системы с последовательным соединением элементов при экспоненциальном распределением времени до отказа ее элементов. Приближенное выражение получено при условии $\lambda t \ll 1$.

Таблица 4.1

Значения показателей надёжности

Показатель надёжности	Точное выражение	Приближённое выражение
$P(t)$	$\exp(-\lambda t)$	$1 - \lambda t$
$\overline{T}$	$1/\lambda$	–

Отметим, что если все элементы, составляющие систему, являются стареющими, т.е. для которых выполняется условие $\lambda(t_2) \geq \lambda(t_1), t_2 > t_1$, то и вся система будет стареющей, и для её характеристик будут иметь место следующие неравенства

$$1 \geq P(t) \geq \exp(-t)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{T}_i}, \qquad \overline{T} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{T}_i}\right)^{-1}.$$

РЕФЛЕКСИЯ

1. Задание в группы. Обсудите прочитанный материал. Если у кого-либо в группе при прочтении текста появились значки «непонятно», постарайтесь вместе разобраться. При необходимости обратитесь за разъяснениями к преподавателю.

2. Задание в группы. В каждую группу выдается таблица. Обсудите результаты оценки надежности систем с последовательным соединением элементов и письменно напишите в правом столбце, что означают эти результаты.

Результаты для оценки надежности систем с последовательным соединением элементов	
1) Вероятность безотказной работы $P(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)$	
2) $1-\sum_{i=1}^{n}Q_i(t) < \prod_{i=1}^{n}(1-Q_i(t)) < 1-\sum_{i=1}^{n}Q(t) + \sum_{i=2}^{n}Q_{i-1}(t)Q_i(t) < 1-\sum_{i=1}^{n}Q_i(t) + 0{,}5\left(\sum_{i-1}Q_i(t)\right)^2.$	
3) ВБР системы в случае подчинения ВБР элементов экспоненциальному закону, также будет подчиняться экспоненциальному закону. Величина среднего времени до отказа определиться следующим образом $\overline{T} = \lambda^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{T}_i}\right)^{-1}.$	
4) $1 \geq P(t) \geq \exp(-t)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{T}_i}, \quad \overline{T} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{T}_i}\right)^{-1}.$	

3. Решение задач.

Необходимые пояснения. На первом этапе организуется работа в парах. Каждая пара решает свою задачу. После того, как пара справляется с задачей, образуется группа из 4-х человек. В группе происходит обсуждение обеих решенных задач.

Задания в группы.

1. Решить задачу в паре.

2. Объединиться в группу и объяснить друг другу решение задач.

3. Проанализировать полученные численные значения и сделать выводы по вероятности безотказной работы системы (число элементов, элементы одинаковой и различной надежности, зависимость надежности системы от самого слабого с точки зрения надежности элемента).

Задача 1.
Найти ВБР системы состоящей из n последовательно соединенных одинаковых элементов в зависимости от их числа для n= 2, 4, 8, 16, 64. ВБР элемента равна 0,99. Дать графическую интерпретацию расчёта. Сравнить результат с расчётом по приближённой формуле.

Задача 2.
Найти ВБР системы состоящей из 3-х последовательно соединенных элементов в предположении о том, что два элемента имеют ВБР равную 0,9999, а третий элемент имеет ВБР равную 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999. Дать графическую интерпретацию расчёта. Сравнить результат с расчётом по приближённой формуле.

4) Презентация решения задач и выводов по ВБР у доски.

5) Каждая группа придумывает собственную задачу и передает задачу последующей группе, получая, в свою очередь, задачу от предыдущей группы. Решают задачи и обмениваются результатом решения с презентацией у доски.

Занятие 3 (14)
Системы с параллельным соединением элементов

Беседа преподавателя.

Мы приступаем к изучению надежности систем с резервированием – это системы с параллельным соединением элементов. Точно так же, как понятие системы, понятие модели, понятие «резервирование» применяется и существует не только в технических системах.

1. Как вы понимаете, что такое резервирование? Обсудить всем вместе. На доске зафиксировать ключевые слова.

2. Приведите примеры резервирования в живых и других системах. (У человека – это уши, ноздри, глаза, уши. Во внутренних органах – это, например, почки, т.е., природа также позаботилась о повышении надежности функционирования различных органов у человека).

3. Нас, конечно, в рамках данной темы интересует повышение надежности в механических системах. Обсудите в группе и составьте определение: резервирование – это…

4. Существует множество методов повышения ВБР системы, например, избыточность. Мы будем их обсуждать, но подробно рассмотрим в рамках данного курса методы резервирования с двумя различными режимами работы резерва: нагруженный и ненагруженный. Преподаватель поясняет разницу между ними.

5. На сегодняшнем занятии мы познакомимся с алгоритмом расчета надежности систем с нагруженным резервом с параллельным соединением элементов.

6. На прошлом занятии мы обсуждали полученные результаты по расчету надежности систем с последовательным соединением.

7. Задание в группу. На прошлом занятии мы получили результаты для оценки надежности систем с последовательным соединением элементов. Они приведены в таблице.Сделайте предположения в группах, справедливы ли эти результаты для систем с параллельным соединением элементов и поставьте соответствующие значки.

+ - да, этот результат используется

- нет, не используется

? – смысловое содержание результата сохраняется, но формула другая

Результаты для оценки надежности систем с последовательным соединением элементов	С параллельным соединением
1) Вероятность безотказной работы $P(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)$	
2) Величина среднего времени до отказа ВБР системы в случае подчинения ВБР элементов экспоненциальному закону, также будет подчиняться экспоненциальному закону. Величина среднего времени до отказа определиться следующим образом $\overline{T} = \lambda^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{T}_i} \right)^{-1}.$	
3) Оценка ВБР для стареющей системы $1 \geq P(t) \geq \exp(-t) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{T}_i}, \quad \overline{T} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{T}_i} \right)^{-1}.$	

8. Преподаватель фиксирует результаты в таблице на доске.

Группа/результат	**1**	**2**	**3**
1	+	?	?
2	-	+	+
3	?	-	-
4			
5			
6			

ОСМЫСЛЕНИЕ.

Чтение текста (индивидуально).

Системы с параллельным соединением элементов

Для повышения надёжности систем применяется резервирование, т.е. помимо основного элемента, обеспечивающего выполнение системой требуемых функций, вводятся резервные элементы, предназначенные для выполнения функций основного элемента в случае отказа последнего.

Применение резервирования для механических систем не носит массового характера. Для повышения надёжности в этом случае более широко используется принцип избыточности. Создание запаса по прочности, жесткости, теплостойкости и т.п. приводит к повышению надёжности объекта, т.к. значения параметров, определяющих его работоспособное состояние, удаляются от допускаемых значений. Для механических систем это выражается в том, что величина ресурса объекта (элементов системы) устанавливается значительно меньше величины среднего срока службы до отказа. Естественно, что при этом в значительной степени не используются потенциальные возможности объекта, но за счет этого повышается ВБР.

Избыточность позволяет непрерывно повышать ВБР системы до требуемого уровня за счет улучшения характеристик отдельных элементов.

Система с нагруженным резервом

При нагруженном резерве все резервные элементы постоянно присоединены к основному и находятся в одинаковом с ним режиме работы (рис.4.3*б*). Отказ системы наступает только тогда, когда отказывают все входящие в систему элементы. Т.к. отказы элементов независимы, то вероятность совместного появления всех отказов равна

$$Q(t) = 1 - P(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - P_i(t)),$$

отсюда получим выражение для ВБР

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P_i(t)). \tag{4.5}$$

Постоянное резервирование предоставляет принципиальную возможность создания надёжных систем из относительно ненадёжных элементов.

Например, если ВБР элементов равны $P_i(t) = 0{,}9,\ i = 1, 2, 3,$ то ВБР системы – $P_i(t) = 0{,}999$ т.е. повышается на два порядка.

Из (4.5) также следует, что если ВБР каждого элемента подчиняется экспоненциальному закону, то ВБР системы с нагруженным резервом уже не будет подчиняться тому же закону. Действительно, в случае системы из n одинаковых элементов с экспоненциальным законом ВБР, для которых $\lambda_i = \lambda$, выражение для ВБР системы примет вид

$$P(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

Среднее время жизни такой системы определиться величиной

$$\overline{T} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty [1-(1-e^{-\lambda t})^n]dt$$

Выполнив замену $1-e^{-\lambda t} = x$ или $t = -\lambda^{-1}\ln(1-x)$ получим

$$\overline{T} = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}dx = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \tag{4.6}$$

Таким образом, полученные результаты для ВБР и среднего времени жизни не совпадают с соответствующими величинами для экспоненциального закона.

При больших n имеет место приближённое выражение

$\overline{T} = \frac{1}{\lambda}\left[\ln n + c + \frac{1}{2n}\right]$, где $c = 0{,}57712...$ – константа Эйлера.

Для экспоненциального закона распределения наработки элементов системы до отказа при малых t справедлива следующая приближённая формула

$$P(t) \approx 1 - t^n \prod_{i=1}^n \lambda_i, \tag{4.7}$$

дающая оценку величины $P(t)$ снизу.

В случае $\lambda = \lambda_i$ будем иметь $P(t) \approx 1-(\lambda t)^n$, при этом погрешность приближённой формулы не превышает величины $0{,}5n(\lambda t)^{n+1}$.

РЕФЛЕКСИЯ

Работа в группах.

1. Возврат к таблице, обсуждение в группе, исправление результатов – при необходимости с презентацией у доски. В любом случае – общее обсуждение полученных результатов.
2. Составить таблицу с правильными результатами.

Часть 2. «Схема гибели»

2.1. Задание (индивидуальное).

Одним из общих методов оценки надежности систем является «схема гибели». Она применима и для систем с нагруженным резервом.

В этом методе используются понятия (запись на доске):

Отказ, «схема гибели», неработоспособная система, модель, интенсивность отказов, изменение свойств системы, вероятность отказа.

Попробуйте индивидуально выстроить связь между понятиями. По желанию прочитайте.

ОСМЫСЛЕНИЕ

1. Индивидуальное задание.

Проставить значки + - понятно, ? – требуются пояснения.

2. Чтение текста. Работа индивидуальная.

«Схема гибели»

Для оценки ВБР системы эффективно может применяться модель, носящая название «схема гибели».

Пусть дана система, состоящая из конечного числа элементов, в которой происходят отказы элементов. Предполагаем, что возникающий поток отказов подчиняется следующим условиям:

1. Если к моменту t произошел $(i-1)$ отказ, то независимо от моментов возникновения этих отказов вероятность того, что на малом участке $(t, t+\Delta t)$ произойдет один отказ, равна $\mu_i \Delta t + o(\Delta t),$ а вероятность, что не произойдет отказ – $1-\mu_i \Delta t + o(\Delta t).$

2. Система становится неработоспособной в момент, когда происходит n-ый отказ и в дальнейшем она уже не меняет своих свойств, т.е. $\mu_{n+1} = 0$.

Эти условия полностью определяют конечный поток отказов и несущественно, какие элементы составляют систему, как они соединены в системе, какие конкретно элементы отказывают, и как влияют одни отказы на другие. Величины μ_i, обычно называемые интенсивностями отказа, неотрицательны и в общем случае могут являться функциями времени.

Если к моменту t произошел $(k-1)$ отказ, то это значит, что система находится в состоянии k. Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент t система находится в состоянии k. Тогда вероятность отказа системы $Q_n(t)$ – есть вероятность того, что она к моменту t будет находиться в $(n+1)$ состоянии т.е. $p_{n+1}(t) = Q_n(t)$.

Для двух близких состояний в моменты t и $t+\Delta t$ по формуле полной вероятности запишем

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k-1}(t)\mu_{k-1}\Delta t + p_k(t)(1-\mu_k \Delta t) + o(\Delta t).$$

При $\Delta t \to 0$ получим систему дифференциальных уравнений для нахождения $p_k(t)$:

$$\begin{aligned} &\dot{p}_1(t) = -\mu_1 p_1(t) \\ &\dot{p}_k(t) = \mu_{k-1} p_{k-1}(t) - \mu_k p_k(t) \quad (k = 2,3,\ldots,n). \\ &\dot{p}_{n+1}(t) = -\mu_n p_n(t) \end{aligned}$$

Начальные условия имеют вид $p_1(0) = 1,\ p_k(0) = 0$ при $k > 1$.

Для случая, когда все величины μ_i различны и не зависят от времени вероятность отказа определиться следующим образом

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu_i t}}{\mu_i\, \omega'(-\mu_i)} \mu_1 \mu_2 \quad \mu_n, \tag{4.8}$$

здесь $\omega(x) = (x+\mu_1)(x+\mu_2)\cdot\cdot(x+\mu_n)$.

В частном случае для $\mu_i = \mu$, будем иметь

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t}.$$

В тех случаях, когда ВБР элементов, составляющих резервную группу, близки к единице, справедлива приближенная формула

$$Q_n(t) \approx \frac{t^n}{n!} \prod_{i=1}^{n} \mu_i, \quad (4.9)$$

причем её относительная ошибка не превосходит величины $\frac{t}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

Выражение (4.9) даёт для вероятности отказа $Q_n(t)$ оценку сверху.

Формула (4.9) справедлива для малых $\mu_i t$, но в этом случае $e^{-\lambda_i t} \approx 1 - \mu_i t$. Из соотношения (4.9) можно сделать вывод, что если ВБР резервных элементов близки к единице, то кратность резервирования бессмысленно делать большой.

В том случае, когда резервная группа состоит из значительного числа элементов невысокой надёжности (величина $\mu_k t -$ конечная, n – велико), будем иметь следующую приближенную формулу

$$Q_n(t) \approx \frac{t^n}{n!} \prod_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{n} t \right), \quad (4.10)$$

главный член относительной ошибки равен $\frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i t)^2$.

РЕФЛЕКСИЯ

1. Обсудите то, что непонятно в «схеме гибели» в группе.

2. Вернитесь к связям, которые вы выстроили между понятиями перед чтением текста. Исправьте, при необходимости дополните. В группе создайте наиболее полную схему. Презентация от групп у доски.

Часть 3. Использование модели расчета «схема гибели» для оценки ВБР систем с различной структурой и учетом различных факторов.

ВЫЗОВ.
3.1. Вопрос.
Модели расчета «схема гибели» универсальна и может использоваться для оценки ВБР систем с различной структурой и учетом различных факторов. Назовите, для каких структур она, по вашему мнению, применима и какие факторы могут изменяться и учитываться при расчетах?

ОСМЫСЛЕНИЕ.
3.2. Работа в паре по вариантам.
1 вариант. Текст для 1-го студента из пары.

1) Рассмотрим возможность применения схемы гибели в случае системы с нагруженным резервом, ВБР всех элементов которой подчиняются экспоненциальному закону $P_i(t) = e^{-\lambda t}, i = \overline{1,n}$.

Для конкретизации модели гибели необходимо определить величины μ_i. На участке времени до первого отказа работоспособными являются n элементов. Выделим на этом участке малый отрезок времени $(t, t+\Delta t)$. ВБР одного элемента на этом отрезке равна $e^{-\lambda \Delta t}$, а ВБР всех элементов системы $e^{-n\lambda\Delta t} = 1 - n\lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

Вероятность появления двух и более отказов на этом временном отрезке имеет порядок малости $(\Delta t)^2$ и, следовательно, вероятность появления ровно одного отказа для всей системы равна $n\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Отсюда следует, что $\mu_1 = n\lambda$.

На участке между первым и вторым отказами работоспособными являются $(n-1)$ элементов, поэтому $\mu_2 = (n-1)\lambda$. Для произвольного участка будем иметь

$$\begin{aligned} &\mu_i = (n-i+1)\lambda, i = \overline{1,n}, \\ &\mu_{i+1} = 0 \end{aligned}.$$

Ввиду того, что отказы элементов независимы и подчиняются экспоненциальному закону, появление отказа элемента не зависит от того, сколько он времени проработал и когда произошли отказы других элементов, т.е. рассматриваемый поток отказов есть поток отказов типа гибели.

Применяя формулу (4.8) получим для вероятности отказа системы следующее выражение

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{n!\, e^{-i\lambda t}}{i!(n-1)!}(-1)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n} C_n^k (-1)^i e^{-i\lambda t} = (1 - e^{-\lambda t})^n, \quad (4.11)$$

а для средней наработки до отказа – $\mathbf{E}T = \overline{T} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.

Для случая, когда ВБР для рассматриваемого промежутка времени мало отличаются от единицы, а число элементов системы велико из приближенной формулы (4.9) получим $Q_n(t) \approx (\lambda t)^n$.

Данные результаты совпадают с результатами, полученными непосредственным применением формул теории вероятностей для параллельного соединения элементов системы.

2 вариант (Текст для 2-го из пары)

Рассмотренные выше методы оценки ВБР системы справедливы для случая, когда отказы элементов её составляющих являются независимыми событиями. В реальных системах данное предложение выполняется редко. Как правило, отказы элементов могут существенно влиять на ВБР других элементов системы за счёт изменения параметров, определяющих их работоспособность. Например, система состоит из n одновременно работающих элементов, выполняющих одну и ту же функцию. Если один или несколько элементов отказали, то на остальные будет приходиться большая нагрузка, меняются параметры их функционирования и, следовательно, изменяются ВБР оставшихся функционирующих элементов.

Рассмотрим случай нагруженного резерва, когда отказы одних элементов влияют на параметры оставшихся работоспособных элементов: система состоит из n одинаковых элементов, при отказе одного элемента оставшиеся начинают работать в более интенсивном режиме, что в конечном счёте влияет на их ВБР.

Предположим, что на временных интервалах между соседними отказами интенсивность отказа любого элемента системы постоянна, но зависит от числа работоспособных элементов системы. Обозначим через π_k интенсивность отказов k работоспособных элементов. Тогда параметры схемы гибели примут вид

$$\mu_1 = n\pi_n, \ldots.., \mu_k = (n-k+1)\pi_{n-k+1}, \mu_{n+1} = 0.$$

Вероятность отказа системы определиться согласно (4.8). Согласно приближенной формуле (4.9) будем иметь

$$Q_n(t) \approx t^n \prod_{i=1}^{n} \pi_i. \quad (4.12)$$

Среднее время до отказа системы равно

$$\mathbf{E}T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i+1)\pi_i}. \quad (4.13)$$

РЕФЛЕКСИЯ

Задание 1. В паре вы разбирали различные случаи применения схемы гибели для оценки. Расскажите друг другу о тех конкретных случаях применения «схемы гибели», которые вы рассмотрели.

Задание 2. Заполните таблицу (от группы)

Структура системы и ее свойства (условия отказа системы, условия работоспособности элементов)	Коэффициенты в «схеме гибели»

1) Сделайте вывод (структура системы определяет вид коэффициентов).
2) Презентация таблиц, обсуждение
3) Решение задач в группе.

Задача
Система состоит из 3-х параллельно соединенных элементов, ВБР которых подчиняются экспоненциальному закону. Определить ВБР систем:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$
2. $\lambda_1 = 10\lambda$ $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$
3. $\lambda_1 = 0.1\lambda$ $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

Сравнить результаты и дать объяснение полученным результатам.
6) Презентация от групп.

Занятие 4 (15)

Определение вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов. Система с ненагруженным резервом

Рассмотреть постановку и методику решения задачи по определению вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов – случай ненагруженного резерва. Рассмотреть решение типовых задач. Рассмотреть модель «гибели» и её применение для расчёта ВБР системы. Выполнить исследования по сравнению надежности систем с различными структурными схемами.

Часть 1. Система с ненагруженным резервом.

ВЫЗОВ

1.1. Вопрос.

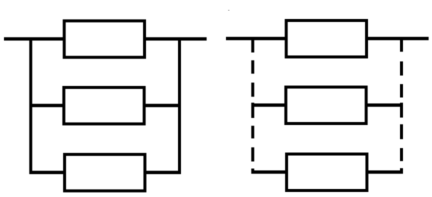
Сегодня мы остановимся на системах с ненагруженным резервом. Вы уже имеете представление об этих системах. Чем характеризуются эти системы? Ответы с места.

1.2. Задание (в пары, затем в группы).

Вам в пары выдан набор понятий, рисунков, формул, и некоторых характеристик, которые относятся к системам с нагруженным и ненагруженным резервом. Поместите их в соответствующий столбец таблицы.

Система с нагруженным резервом	Система с ненагруженным резервом

Наличие контрольных приборов, переключающие устройства, резервный элемент, отказ системы, кратность резервирования, резервные элементы имеют меньшую надежность, постоянное резервирование, резервные элементы находятся в одинаковом с основным режиме работы, «схема гибели», интенсивность отказа, среднее время до отказа.



б) *в)*

$$T = \max\{T_i\}, \quad i = \overline{1,n}; \quad T = \sum_{i=1}^{n} T_i .$$

Объединитесь в группы. Обсудите в группах полученные результаты. Группы на доске представляют свои результаты.

1.3. Задание.

В каждую группу выдан пакет вопросов. Ваша задача – выделить вопросы, на которые вы знаете ответ. Поставьте около них значок «+». Отвечать на них не надо. Главное - определить те вопросы, на которые вы пока ответить не можете, около этих вопросов поставьте значок «-».

Вопросы в группы.

1. Приведите пример системы, выделите элементы её составляющие.
2. Приведите пример восстанавливаемой системы.
3. Приведите пример конкретной системы с последовательным соединением структурных элементов.
4. Приведите пример конкретной системы с параллельным соединением структурных элементов.
5. Приведите пример конкретной системы с другим видом резервирования структурных элементов.
6. Какова размерность величин μ_i, используемых в схеме гибели?
7. Учитывается ли в схеме гибели возможность появления двух и более отказов в малый промежуток времени?
8. Как влияет наличие переключающего элемента на ВБР системы с ненагруженным резервом?
9. Как оценивается выигрыш надежности при резервировании систем?
10. Как классифицируются системы по способу подсоединения резервных элементов?
11. В каких режимах могут работать резервные элементы в системах?
12. Если ВБР элементов подчиняется экспоненциальному закону, подчиняется ли ВБР системы с нагруженным резервом экспоненциальному закону?
13. Если ВБР элементов подчиняется экспоненциальному закону, подчиняется ли ВБР системы с ненагруженным резервом экспоненциальному закону?
14. Можно ли утверждать, что чем больше кратность резервирования, тем значительнее преимущества системы с ненагруженным резервом? Почему?
15. Можете ли Вы определить понятие «резервирование».

1.4. От группы зачитайте вопросы, на которые вы в данный момент ответить не можете. На доске преподаватель фиксирует ответы.

Вопрос/группа	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	+	-	+	+	+	+
2	-	+	+	-	+	-
3	+	-	-	-	+	-
4						
5						
6						
7						
8						
9						

10						
11						
12						
13						
14						
15						

ОСМЫСЛЕНИЕ.
1. Задание. При чтении текста ваша задача – найти ответы на те вопросы, на которые вы не смогли ответить.
2. Чтение текста (индивидуально).

Система с ненагруженным резервом

Возможна система с ненагруженным резервом (рис. 4.3*в*), т.е. когда система содержит один или несколько резервных элементов, находящихся в ненагруженном режиме до начала выполнения ими функций основного элемента.

Отметим, для работы системы с ненагруженным резервом требуется наличие контрольных приборов, обнаруживающих отказ функционирующих элементов, и переключающих устройств, включающих резервные элементы.

Предполагаем, что резервный элемент не может отказать, находясь в ненагруженном состоянии, и что пребывание в ненагруженном состоянии не изменяет его характеристик в нагруженном состоянии. Считаем также, что отказавший элемент заменяется резервным мгновенно и переключающее устройство абсолютно надёжно.

Рассмотрим систему, состоящую из основного элемента и $(n-1)$ резервных элементов. Обозначим через $P_i(t)$ – ВБР i-го элемента, а через $Q_i(t)=1-P_i(t)$ – вероятность отказа i-го элемента. Основной элемент системы, проработав некоторое случайное время T_1, становится неработоспособным и мгновенно заменяется первым резервным элементом, который функционирует в течение времени T_2, и т.д. Отказ последнего резервного элемента, проработавшего в течение времени T_n будет означать отказ всей системы.

Время жизни такой системы определяется величиной $T_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$, где случайные величины T_i независимы. Вероятность отказа системы $Q_n(t)$ определяется как закон распределения суммы n независимых слагаемых и находится из соотношений

$$Q_n(t) = \int_0^t q_n(t-\tau) Q'_{n-1}(t) d\tau, \qquad (4.17)$$

где $Q_1(t) = q_1(t)$, $q_i(t) = \mathbf{P}\{T_i < t\}$.

Последовательное применение этой формулы позволяет получить вероятность отказа системы для заданного n.

Среднее время жизни системы равно

$$\overline{T}_n = \mathbf{E}T_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}T_i. \qquad (4.18)$$

Приведем результаты применения формулы (4.17) для случая, когда ВБР элементов системы подчиняются экспоненциальному закону т.е. $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, $i = \overline{1,n}$.

В случае одинаковых элементов, т.е. $\lambda_i = \lambda, i = \overline{1,n}$, будем иметь

$$Q_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i t^i}{i!}, \ \overline{T}_n = \mathbf{E}T_n = \frac{n}{\lambda}. \tag{4.19}$$

В общем случае для различных λ_i получим

$$\begin{aligned} Q_n(t) = {} & \frac{\lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\cdots(\lambda_n - \lambda_1)} + \\ & + \frac{\lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)\cdots(\lambda_n - \lambda_2)} + \\ & + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{i-1} \lambda_{i+2} \cdots \lambda_n e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_1 - \lambda_i)\cdots(\lambda_{i-1} - \lambda_1)(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\cdots(\lambda_n - \lambda_i)} + \\ & + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} e^{-\lambda_n t}}{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\overline{T}_n = \mathbf{E}T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}.$$

Так же как и в случае нагруженного резерва, вероятность безотказной работы системы с ненагруженным резервом не подчиняется экспоненциальному закону.

РЕФЛЕКСИЯ.
Вопрос.

1. Удалось ли после прочтения текста ответить на какие-либо вопросы? Какие?
2. Задание в группы. В группе обсудите и отметьте вопросы, на которые удалось получить ответ. Зачитайте их. Преподаватель фиксирует ответы на доске в таблице.

Часть 2. Сравнение систем с нагруженным и ненагруженным резервами с точки зрения надежности.

ВЫЗОВ.

2.1. Вопросы.

1. Какая система более выигрышная с точки зрения надежности?

2. Какие величины необходимо сравнивать, чтобы получить однозначный ответ?

Фронтальное обсуждение.

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста.

Сравнение систем с нагруженным и ненагруженным резервами с точки зрения надёжности.

Выполним сравнение систем с нагруженным и ненагруженным резервами с точки зрения надёжности**.**

Обозначим через $\{T_i\},\ i=\overline{1,n}$ – случайные величины, равные времени до отказа элементов системы. Случайное время работы системы с нагруженным резервом равно $T_{n1}=\max\{T_i\},\ i=\overline{1,n}$, а системы с ненагруженным резервом - $T_{n2}=\sum_{i=1}^{n}T_i$. Очевидно, что $T_{n1}\le T_{n2}$ т.е. система с ненагруженным резервом выгоднее системы с нагруженным резервом.

Получим количественную оценку выигрыша системы с ненагруженным резервом по сравнению с системой с нагруженным резервом. Представим приближённую формулу (4.9) для системы с ненагруженным резервом в виде

$$Q_{n2}(t)\approx\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}Q_i(t),$$

что возможно в силу справедливости приближенного соотношения $\mu_i t\approx 1-\exp(-\mu_i t)=Q_i(t)$ в случае если $\mu_i t$ мало.

Применяя полученное приближенное выражение для величины $Q_{n2}(t)$ и формулу (4.5) для $Q_{n1}(t)$ получим

$$\alpha=Q_{n1}(t)/Q_{n2}(t)\approx n!$$

т.е. при переходе к системе с ненагруженным резервом вероятность отказа уменьшается в $n!$ раз.

Пусть ВБР элементов, входящих в систему с ненагруженным резервом, описываются экспоненциальным законом $P_i(t)=e^{-\lambda_i t}$. Считая, что все элементы одинаковы, т.е. $\lambda_i=\lambda$, можем найти согласно (4.6) величину среднего времени до отказа для систем с нагруженным резервом $\overline{T}_{n1}=\bar{t}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\approx\bar{t}(\ln n+c)$, и согласно (4.19) с ненагруженным резервом $\overline{T}_{n2}=n\bar{t}$. Отсюда следует $\beta=\overline{T}_{n1}/\overline{T}_{n2}\approx(\ln n+c)/n$.

Например, при дублирование имеем $n=2-\beta\approx1{,}3, \alpha=2,$ а при многократном резервирование – $n=10-\beta\approx3{,}4,\ \alpha=3628800$. Таким образом, чем больше кратность резервирования, тем значительнее преимущества системы с ненагруженным резервом.

Однако подчеркнём, что преимущества систем с ненагруженным резервом легко утрачиваются т.к. ВБР переключающего устройства меньше единицы.

С этой целью рассмотрим систему, состоящую из основного и одного резервного элементов, и найдем ВБР для $t=10$ час. Примем, что для обоих элементов $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=0{,}01$ час$^{-1}$. Тогда согласно (4.8) ВБР для системы с ненагруженным резервом получим

$$P\ (t)=e^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\cdot\lambda t=0{,}995324,$$

а ВБР для системы с нагруженным резервом согласно (4.5) равна 0,990945.

Если в системе с ненагруженным резервом имеется переключающий элемент и его ВБР определяется функцией $P_*(t)$, то ВБР системы определиться

$$P\ (t)=e^{-\lambda t}+P_*(t)e^{-\lambda t}\cdot\lambda t. \tag{4.21}$$

Тогда при $P_*(t=10)=0{,}99$ будем иметь $P\ (t=10)=0{,}99441$, а при $P_*(t=10)=0{,}9$ – $P(t=10)=0{,}98627$.

Отметим, что предположение о том, что интенсивности отказов резервного и основного элементов равны, скорее является исключением, чем правилом. Обычно резервные элементы имеют меньшую надежность, чем основные.

Рассмотрим вышеприведённый пример, предполагая, что λ_1 – интенсивность отказа основного, а λ_2– резервного элементов. Считаем также, что подключение резервного элемента происходит мгновенно. Для определения ВБР можно воспользоваться формулой (4.20), но для наглядности применим соотношение (4.17). Пусть основной элемент отказал в момент t_1, а резервный элемент в момент $t_2=t-t_1$. Здесь время работы резервного элемента t_2 отсчитывается от момента t_1 отказа основного элемента. Очевидно, что величины t_1, t_2 являются случайными величинами. Для основного элемента функция распределения времени до отказа имеет вид $f_1(t_1)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}$, а для резервного - $f_2(t_2)=\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_1)}$. Вероятность отказа первого элемента на интервале (t_1, t_1+dt_1) равна $\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1$, а второго – $\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_1)} dt$.

Вероятность отказа системы на интервале $(t, t+dt)$ с учетом независимости отказов элементов равна $\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2(t-t_1)} dt$. Интегрируя по t_1, получим совместную функцию плотности распределения времени до отказа системы из двух элементов

$$f(t)=\int_0^t f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 = \lambda_1\lambda_2\left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\right). \qquad (4.22)$$

ВБР системы получим из соотношения

$$P\ (t)=\int_t^\infty f(t)dt = e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}).$$

Средняя наработка равна $\overline{T}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$.

В случае, когда переключающее устройство не абсолютно надёжно с учётом (4.22) будем иметь

$$P(t)=e^{-\lambda_1 t}+P_*(t)\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}), \qquad (4.23)$$

где $P_*(t)$ ВБР переключающего элемента.

РЕФЛЕКСИЯ.

1. Задание в группы. Вам в группы выданы таблицы. Заполните их, вписывая формулы. Дайте аргументированный ответ на вопрос: какая система более выигрышная с точки зрения надежности и почему?

Система/Параметры	Среднее время до отказа	ВБР системы	Выигрыш системы	Комментарии
С нагруженным резервом				
С ненагруженным резервом				

Вывод:

____

____

____

2. Презентация таблиц. Общее обсуждение полученных выводов.
3.Задание.
Каждая группа должна ответить письменно на вопросы 5, 6, 11, 12, 13 списка и ответы сдать преподавателю.

Часть 3.
Решение задач

Задача 1.
Дана система состоящая из одного основного и одного ненагруженного резервного элементов. ВБР элементов подчиняются экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 10^{-4} сек^{-1}$. Найти параметры элементов системы из двух параллельных нагруженных элементов из условия равенства ВБР для $t = 10^2$ сек . ВБР элементов искомой системы подчиняются экспоненциальному закону

Задача 2.
Решить задачу 1 в предположении о том, что исходная система состоит из одного основного и двух резервных ненагруженных элементов

Занятие 5 (16)
Применение формулы Байеса при расчёте надёжности систем

ВЫЗОВ.
1. Вопрос.
Пользуясь логико-вероятностными методами для оценки надежности, мы оценивали надежность различных систем. Каких конкретно систем? (С последовательным соединением, параллельным соединением/ нагруженным резервом, параллельным соединением/ ненагруженным резервом).

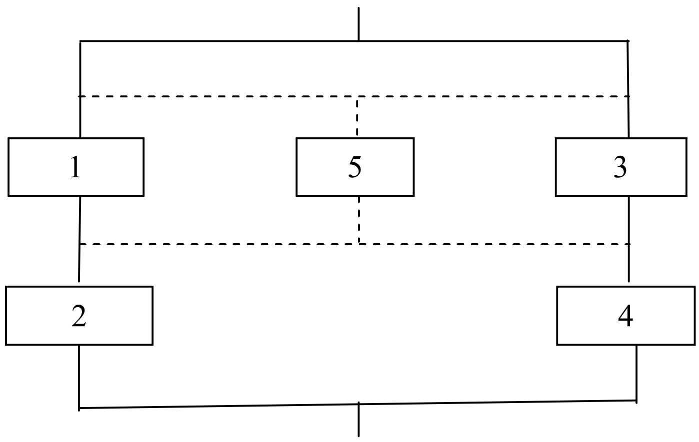
2. Задание в группы. Обобщите результаты в таблице.

Системы	Методы оценки надежности	Используемые показатели надежности элементов	Комментарии
С последовательным соединением			

С параллельным соединением/ нагруженным резервом			
С параллельным соединением/ ненагруженным резервом			

3. Презентация у доски с общим обсуждением.

4. Вопросы.
1. Существуют ли системы, структурные схемы которых не могут быть сведены к комбинации последовательно и параллельно соединенных элементов? Придумайте пример.
2. Как оценить надежность системы, структурная схема которой не может быть сведена к комбинации последовательно и параллельно соединенных элементов? (Рисунок ниже). Ваши предложения. Общее обсуждение.



ОСМЫСЛЕНИЕ.

Чтение текста (индивидуально)

Применение формулы Байеса при расчёте надёжности систем

Для систем, которые имеют более сложную структуру, чем комбинация последовательного и параллельного соединений элементов применяются другие методы оценки ВБР. В частности широко используется частный случай формулы Байеса – формула полной вероятности:

$$P(X)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(X\,|\,H_i)\,, \tag{4.24}$$

здесь $\{H_i\},\ i=\overline{1,n}$ – полная группа событий.

Формула полной вероятности дает один из наиболее мощных методов оценки ВБР сложных систем.

При использовании формулы полной вероятности для расчёта ВБР системы выбирается определённая группа элементов структурной схемы и формируются гипотезы о том, что происходит с этой группой элементов в течение заданной наработки. В каждой из гипотез учитывается, что для любого элемента рассматриваемой группы возможными исходами являются либо безотказная работа, либо отказ.

При вычислении условной вероятности безотказной работы системы при гипотезе H_i предполагается, что произошли соответствующие события (безотказная работа или отказ одного или нескольких элементов) и рассматриваются соответствующие структурные схемы.

Выразим формулу (4.24) в терминах теории надёжности для $n = 2$. Обозначим через X – событие, соответствующее отказу системы, через H_1 и H_2 соответственно безотказную работу и отказ некоторого элемента, от которого зависит работоспособность системы. Тогда можем записать: вероятность отказа системы равна вероятности отказа системы при условии, что некоторый выделенный элемент работоспособен, умноженной на вероятность того, что этот элемент исправен, плюс вероятность отказа системы при условии, что тот же самый элемент неработоспособен, умноженной на вероятность того, что этот элемент неработоспособен, т.е. P(отказа системы) = P(отказа системы при работоспособном элементе X)×P(элемент X – работоспособен) + P(отказ системы при неработоспособном элементе X) ×P (элемент X неработоспособен).

В качестве примера использования формулы Байеса (4.24) рассмотрим расчет ВБР системы, структурная схема которой приведена на рис. 4.5

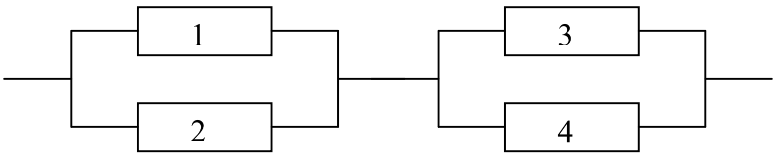


Рис. 4.5. Структурная схема с последовательным и параллельным соединением элементов

Выберем группу элементов, состоящую из первого и третьего элементов. Для них возможна следующая полная группа из четырёх событий, т.е. $n = 4$: оба элемента работоспособны; первый элемент работоспособен, третий отказал; первый отказал, третий работоспособен; оба элемента неработоспособны.

Обозначим через X – событие, соответствующее безотказной работе системы, знаком 1 – работоспособные состояния элементов, знаком 0 – неработоспособные состояния. В табл. 4.2 определены составляющие формулы полной вероятности (4.24).

После подстановки данных из табл. 4.2 в формулу (4.24) получим ВБР системы

$$P(t)=P_1(t)P_3(t)+P_2(t)P_3(t)+P_1(t)P_4(t)+P_2(t)P_4(t)-P_1(t)P_2(t)P_3(t)+$$
$$+P_1(t)P_3(t)P_4(t)+P_1(t)P_2(t)P_4(t)+P_2(t)P_3(t)P_4(t)+P_1(t)P_2(t)P_3(t)P_4(t).$$

Данную формулу можно получить путем применения формул (4.1) и (4.5) для последовательного соединения двух подсистем с параллельно соединёнными элементами.

Таблица 4.2

Составляющие формулы полной вероятности

Событие	Элементы		$P(H_i)$	$P(X\|H_i)$
	1	3		
H_1	1	1	P_1P_3	1
H_2	0	1	$(1-P_1)P_3$	P_2

H_3	1	0	$P_1(1-P_2)$	P_4
H_4	0	0	$(1-P_1)(1-P_2)$	P_2P_4

На рис. 4.6 приведена структурная схема, которая не может быть сведена к комбинации последовательно и параллельно соединённых элементов.

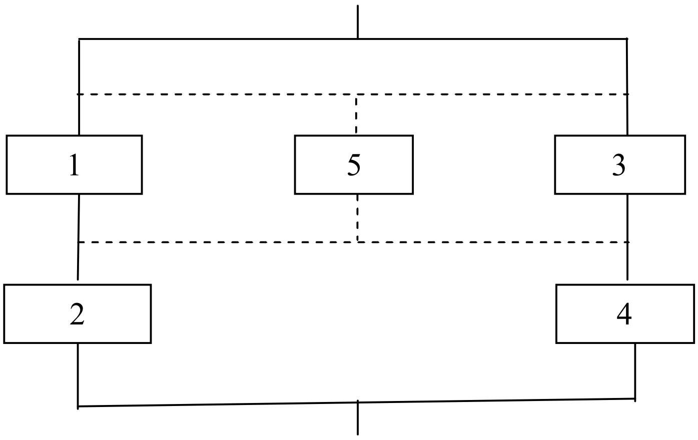


Рис. 4.6. Структурная схема, не сводящаяся к комбинации последовательно и параллельно соединённых элементов.

Система из двух последовательно соединенных элементов 1 и 2 дублирована аналогичной системой из элементов 3 и 4. Кроме того предусмотрен дополнительный элемент 5, являющийся дублирующим или для элемента 1, или для элемента 3. Таким образом, система будет работоспособной в следующих комбинациях: 12, 34, 52 и 54

Применим формулу (4.24) для нахождения ВБР данной сложной системы. С этой целью выберем группу элементов, состоящую из одного элемента 5. В этом случае полная группа событий состоит всего из двух событий: H_1 – элемент 5 работоспособен и H_2 – элемент 5 неработоспособен. Формула (4.24) примет вид

$$Q(t) = P_5Q_2Q_4 + Q_5(1-P_1P_2)(1-P_3P_4),$$

или для ВБР

$$P(t) = 1 - P_5(1-P_1)(1-P_2) + (1-P_5)(1-P_1P_2)(1-P_3P_4).$$

Для систем, имеющих большое количество элементов, целесообразно, использовать формулу полной вероятности в несколько этапов.

РЕФЛЕКСИЯ.
1. Вопрос.
1.1. В чем суть данного подхода к оценке надежности?
1.2. Каков алгоритм применения формулы Байеса? Общее обсуждение.
2. Задание в группы.
Заполнить таблицу «Сравнение методов расчета надежности».

Сравнение методов расчета надежности

Метод	В каких случаях применяется	Допущения при расчетах	Достоинства	Комментарии
«Схема гибели»				

Формула Байеса				
Формула теории вероятности				

3. Презентация у доски.

4. Задание в группы.

4.1. Вам в пару выдана задача. Для решения примените поочередно известные вам 3 метода расчета надежности систем.
4.2. Вторая пара в вашей группе решала другую задачу. Обсудите в группе решение задач, полученные результаты, сделайте выводы.

Задача 1. Применить формулу полной вероятности для расчета системы, состоящей из двух одинаковых последовательно соединенных элементов.
Задача 2. Применить формулу полной вероятности для расчета системы, состоящей из двух одинаковых параллельно соединенных элементов.

5. Презентация у доски.

Литература

1. Арасланов А.М. Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях – М.: Машиностроение, 1987. -128 с.

2. Базовский И. Надежность. Теория и практика (пер. с англ.) - М.: Мир, 1965. -375 с..

3. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расч□тах сооружений - М.: Стройиздат, 1981. -351 с.

4. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций - М.: Машиностроение, 1990. -448 с.

5. Герцбах И.Б., Кордонский Х.Б. Модели отказов - М.: Советское радио, 1966. -167 с.

6. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности- М.: Наука, 1965. -524 с.

7. ГОСТ 27 002-89. Надежность и эффективность в технике – М.: Из-во стандартов, 1990.- 35 с.

8. Гусев А.С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках – М.: Машиностроение, 1989. -248 с.

9. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных систем. М., Энергия, 1977. -536 с.

10. Зорин В.А., Любимов А.К. Асимптотические оценки функции надежности и первых моментов ресурса для объектов с учетом процесса накопления повреждений//Прикладные проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. / Нижегородский ун-т. 1992. Вып. 50. С. 76-82.

11. Любимов А.К. Механика разрушения и надежность конструкций. Учебное пособие – Горьк. ун-т; Горький. 1989. -96 с.

12. Надежность и эффективность в технике. Справочник в 10 т. Ред. совет: Авдуевский (пред.) и др. Т.2. Математические методы в теории надежности и эффективности/Под ред. Б.В. Гнеденко – М.: Машиностроение, 1987.- 367 с. 13. Надежность технических систем. Справочник/Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др.; Под ред. И.А. Ушакова- М.: Радио и связь, 1985. -608 с.

14. Проников А.С. Надежность машин - М.: Машиностроение, 1978. 592 с.

15. Райншке К. Модели надежности и чувствительности систем (пер. с немецкого) – М.: Мир. 1979. -456 с.

16. Решетов Д.Н., Иванов А.С., Фадеев В.З. Надежность машин. Учебное пособие- М.: Высш. шк., 1988. -238 с.

17. Сборник задач по теории надежности. Под ред. А.М. Половко, И.М. Маликова – М.: Изд-во Советское радио, 1972. -408 с.