МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

Е.Л. Панкратов
Е.А. Булаева

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие
по курсу «Математический анализ»

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент»

Нижний Новгород
2015

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: Автор: Панкратов Е.Л., Булаева Е.А. учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. - 25 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **М.И. Сумин.**

Учебно-методическое пособие «Интегральное исчисление» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.03.02 «Менеджмент», с соответствующим разделом курса «Математический анализ». Оно содержит основные понятия интегрального исчисления, а также основные методы вычисления и приложения интегрального исчисления. Для закрепления теоретических знаний по интегральному исчислению в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, **Е.Н. Летягина**.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

Введение

В настоящее время имеется большое количество экономических приложений, для описания которых необходимо использовать дифференциальное и интегральное исчисление. В данном пособии приведен обзор методов вычисления неопределенных и определенных интегралов, а также некоторых их приложений. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОК-15 и ОК -16 образовательного стандарта специальности 38.03.02 «Менеджмент». В результате изучения раздела математики “Интегральное исчисление” курса “Математический анализ” студенты должны знать основные понятия интегрального исчисления; уметь использовать основные методы вычисления определенных и неопределенных интегралов, а также уметь применять интегральное исчисление в рамках его основных приложений.

1. Первообразная функции

Определение 1

Функция $F(x)$ называется первообразной (функцией) для функции $f(x)$ на интервале $x\in(a,b)$, если в любой точке x интервала (a,b) функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$. Частным случаем интервала (a,b) могут быть бесконечная прямая или полупрямая.

Пример 1

Функция $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ является первообразной для функции $f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $x\in(-1,1)$, т.к. в любой точке данного интервала $\dfrac{d\sqrt{1-x^2}}{d\,x}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 2

Функция $F(x)=sin(x)$ является первообразной для функции $f(x)=cos(x)$ на интервале $x\in(-\infty,+\infty)$, т.к. в любой точке данного интервала $\dfrac{d\sin(x)}{d\,x}=\cos(x)$.

Пример 3

Функция $F(x)=ln(x)$ является первообразной для функции $f(x)=1/x$ на интервале $x\in(0,+\infty)$, т.к. в любой точке данного интервала $\dfrac{d\ln(x)}{d\,x}=\dfrac{1}{x}$.

Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $x\in(a,b)$, то функция $F(x)+C$ является первообразной функции $f(x)$ на рассматриваемом интервале, а C – любая постоянная (интегрирования) величина. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – любые первообразные для функции $f(x)$ на интервале $x\in(a,b)$, то они отличаются на постоянную величину.

2. Неопределённый интеграл

Определение 2

Совокупность всех первообразных функцией для функции $f(x)$ на интервале $x\in(a,b)$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на рассматриваемом интервале и обозначается символом

$$\int f(x)d\,x.$$

В данном обозначении $\int$ называется знаком интеграла, выражение $f(x)\,dx$ называется подынтергальным выражением, а функция $f(x)$ подыинтергальной функцией. Если $F(x)$ - одна из первообразных функций для функции $f(x)$ на интервале $x\in(a,b)$, тогда в силу постоянства разницы между первообразными функциями можно записать

$$\int f(x)d\,x=F(x)+C,$$

где C – любая постоянная величина (постоянная интегрирования).

Замечание 1

Если первообразная (а значит, и неопределённый интеграл) для функции $f(x)$ на интервале $x\in(a,b)$ существует, то подынтегральное выражение является дифференциалом любой из первообразных.

Пример 4

$\int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}+C$ на интервале $x\in(-1,1)$, т.к. функция $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ является одной из первообразных для функции $f(x)=-x\Big/\sqrt{1-x^2}$ на рассматриваемом интервале.

Пример 5

$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+C$ на интервале $x\in(-\infty,\infty)$, т.к. функция $sin(x)$ является одной из первообразных для функции $cos(x)$ на рассматриваемом интервале.

Свойства неопределённого интеграла

1) $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$. Это свойство показывает, что знаки d и $\int$ взаимно сокращаются в случае, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла.
2) $\int d\,F(x)=F(x)+C$. Это свойство показывает, что знаки $\int$ и d взаимно сокращаются в случае, если знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, но в этом случае к $F(x)$ необходимо добавить произвольную постоянную C.
3) $\int[f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ - свойство линейности интеграла относительно подынтегрального выражения.
4) $\int A\,f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ ($A=const$).

Замечание 2

Данные равенства понимаются с точностью до постоянного слагаемого.

3. Основные методы интегрирования

Наиболее простым способом интегрирования является преобразование подынтегральных соотношений таким образом, что бы можно было использовать таблицу интегралов.

3.1. *Интегрирование заменой переменных (подстановкой)*

Пусть функция $t=\varphi(x)$ определена и дифференцируема на интервале $x\in(a,b)$ (a и b могут принимать конечные или бесконечные значения). Пусть для функции $g(t)$ существует первообразная $G(t)$, т.е.

$$\int g(t)\,dt = G(t)+C.$$

Тогда для функции $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ существует первообразная функция, равная $G[\varphi(x)]$, т.е.

$$\int g\,[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = G[\varphi(x)]+C.$$

Иногда удаётся выбрать в качестве новой переменной такую функцию $t=\varphi(x)$, что выполняется равенство

$$f(x)=g\,[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

причём функция $g(t)$ легко интегрируется, т.е. интеграл

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C$$

просто вычисляется. В таком случае можно записать следующее соотношение для интеграла

$$\int f(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C\,.$$

Рассмотренный способ интегрирования и называется интегрированием путём замены переменных.

Замечание 3

Не всегда удаётся подобрать такую замену переменных, которая приводит к упрощению вычисления интеграла.

Пример 6

Вычислим интеграл $\int \sin(3x)\,dx$. Воспользуемся следующей заменой переменных: $t=3x$, $dt=3dx$. В результате такой замены получаем

$$\int \sin(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(t)\,dt = -\frac{1}{3}\cos(t) + C = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C\,.$$

Пример 7

Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{x+a}$. Для этого воспользоваться следующей заменой переменных: $t=x+a$, $dt=dx$. В результате такой замены получаем

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln(t) + C = \ln|x+a| + C \quad (x \neq -a).$$

Пример 8

Вычислим интеграл $\int e^{\cos(x)} \sin(x)\,dx$. Воспользуемся тригонометрической заменой переменных: $t=cos(x)$, $dt=-sin(x)\,dx$. Такая замена приводит к следующему результату

$$\int e^{\cos(x)} \sin(x)\,dx = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\cos(x)} + C\,.$$

Пример 9

Вычислим интеграл $\int [arctg(x)]^{100} \frac{dx}{1+x^2}$. Воспользуемся следующей заменой переменных: $t=arctg(x)$, $dt=dx/(1+x^2)$. В результате данной замены получаем

$$\int [arctg(x)]^{100} \frac{dx}{1+x^2} = \int t^{100}\,dt = \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{[arctg(x)]^{101}}{101} + C\,.$$

Пример 10

Вычислим интеграл $\int (5x-6)^{1984}\,dx$. Замена переменных: $t=5x-6$, $dt=5\,dx$ позволяет получить

$$\int (5x-6)^{1984}\,dx = \frac{1}{5}\int t^{1984}\,dx = \frac{t^{1985}}{5 \cdot 1985} + C = \frac{(5x-6)^{1985}}{9925} + C\,.$$

Пример 11

Рассмотрим интеграл $\int \frac{d\,x}{\cos(x)}$. Преобразуем его к следующему виду

$$\int \frac{d\,x}{\cos(x)} = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} d\,x = \int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} d\,x\,.$$

Для вычисления данного интеграла воспользуемся заменой: $t = sin(x)$, $dt = cos(x)d\,x$. В результате такой замены получаем

$$\int \frac{d\,x}{\cos(x)} = \int \frac{d\,t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C\,.$$

Пример 12

Вычислим интеграл $\int \sqrt{\left(x^2+a^2\right)^{-3}}\,d\,x$. Замена переменных: $t = arctg(x/a)$, $x = a\cdot tg(t)$, $dx = a\cdot dt/cos^2(t)$ позволяет получить

$$\int \frac{d\,x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int \cos(t)\,d\,t = \frac{1}{a^2}\sin(t) + C = \frac{tg(t)}{a^2\sqrt{1+tg^2(t)}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C\,.$$

Пример 13

Вычислим интеграл $\int \frac{d\,x}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}$. Замена переменных: $t = arcsin(x/a)$, $x = a\cdot sin(t)$, $d\,x = a\cdot cos(t)\,d\,t$. В результате такой замены получаем

$$\int \frac{d\,x}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{d\,t}{\cos^2(t)} = \frac{tg(t)}{a^2} + C = \frac{\sin(t)}{a^2\sqrt{1-\sin^2(t)}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C\,.$$

Пример 14

Вычислим интеграл $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,d\,x$. Данный интеграл может быть вычислен с помощью следующей замены: $2t = arccos(x/a)$, $x = a\cdot cos(2t)$, $d\,x = -2a\cdot sin\,(t)\,d\,t$. В результате такой замены получаем

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,d\,x = -4a\int \cos^2(t)\,d\,t = -4a\int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right]d\,t = -2a\,t - 2a\int \cos(2t)\,d\,t =$$

$$= -2a\,t - a\sin(2t) + C\,.$$

3.2. *Усложнение дифференциала*

При вычислении интеграла $\int f(x)\,d\,x$ иногда возможно подынтегральное выражение представить в виде следующего произведения $\int g(x)\,h'(x)\,d\,x$. Тогда возможно усложнить дифференциал: $\int g(x)\,d\,h(x)$. В некоторых случаях интеграл $\int g(x)\,d\,h(x)$ вычислить проще, чем интеграл $\int f(x)\,d\,x$.

Пример 8*a*

Вернёмся к рассмотрению интеграла $\int e^{\cos(x)}\sin(x)d\,x$. Усложним дифференциал и вычислим данный интеграл

$$\int e^{\cos(x)}\sin(x)d\,x = -\int e^{\cos(x)}d\left[\cos(x)\right] = C - e^{\cos(x)}.$$

Пример 9*a*

Вернёмся к рассмотрению интеграла $\int \frac{\left[arctg(x)\right]^{100}}{1+x^2}d\,x$. Усложним дифференциал и вычислим интеграл

$$\int \frac{\left[arctg(x)\right]^{100}}{1+x^2}d\,x = \int \left[arctg(x)\right]^{100} d\,arctg(x) = \frac{\left[arctg(x)\right]^{101}}{101} + C.$$

Пример 15

Вычислим интеграл $\int \frac{x^5 d\,x}{(3\,x)^{12}+1}$. Для вычисления такого интеграла можно усложнить дифференциал $\frac{1}{6}\int \frac{d\,x^6}{(3\,x)^{12}+1}$ и воспользоваться следующей заменой: $t=(3x)^6$, $dt=4374x^5\,dx$. В результате такой замены получаем

$$\int \frac{x^5 d\,x}{(3\,x)^{12}+1} = \frac{1}{4374}\int \frac{d\,t}{t^2+1} = \frac{arctg(t)}{4374} + C = \frac{arctg\left[(3\,x)^6\right]}{4374} + C.$$

3.3. *Интегрирование по частям*

Рассмотрим дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Пусть произведение $u'(x)v(x)$ имеет некоторую первообразную. Тогда существует первообразная для произведения $u(x)v'(x)$ и справедливо соотношение

$$\int u(x)v'(x)d\,x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)d\,x$$

Пример 16

Вычислим интеграл $\int x\cdot arctg(x)d\,x$. Полагая $u(x)=arctg(x)$, $dv(x)=x\,dx$, получаем $du(x)=dx/(x^2+1)$, $v(x)=x^2/2$. Тогда

$$\int x\,arctg(x)d\,x = \frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}d\,x = \frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}d\,x =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{1}{2}\int d\,x - \frac{1}{2}\int \frac{d\,x}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{2}arctg(x) - \frac{x}{2} + C.$$

Пример 17

Вычислим интеграл $\int x^2\cdot\cos(x)d\,x$. Полагая $u(x)=x^2$, $dv(x)=cos(x)\,dx$, получаем $du(x)=2x\,dx$, $v(x)=sin(x)$. Тогда

$$\int x^2\cos(x)d\,x = x^2\sin(x) - 2\int x\cdot\sin(x)d\,x.$$

Далее вторично применяем интегрирование по частям, но при этом вычисляем интеграл $\int x \cdot \sin(x) d\,x$. На этот раз $u(x)=x$, $dv(x)=sin(x)dx$, получаем $du(x)=\ dx$, $v(x)=-cos(x)$. В результате вторичного интегрирования по частям получаем следующее значение интеграла

$$\int x^2 \cos(x) d\,x = x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - \int \cos(x) d\,x = \left(x^2 - 2\right)\sin(x) + 2x\cos(x) + C .$$

Интеграл $\int x^n \cos(x) d\,x$ вычисляется аналогично, но после n-кратного интегрирования по частям.

<u>Пример 18</u>

Рассмотрим интеграл $\int e^{a\,x} \cos(b\,x) d\,x$ ($a=const$, $b=const$). Полагая $u(x)=e^{ax}$, $dv(x)=cos(bx)dx$, получаем $du(x)=a\,e^{ax}dx$, $v(x)=sin(bx)/b$. Тогда

$$\int e^{a\,x} \cos(b\,x) d\,x = \frac{e^{a\,x}}{b} \sin(b\,x) - \frac{a}{b} \int e^{a\,x} \sin(b\,x) d\,x .$$

Далее вторично применяем интегрирование по частям, вычисляя при этом интеграл $\int e^{ax} \sin(bx) dx$, выбирая $u(x)=e^{ax}$, $dv(x)=sin(bx)dx$, получаем $du(x)=a e^{ax}dx$, $v(x)=-cos(bx)/b$. Тогда

$$\int e^{ax} \cos(b\,x) d\,x = \frac{e^{ax}}{b} \sin(b\,x) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(b\,x) - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos(b\,x) d\,x .$$

Таким образом, двухкратное интегрирование по частям позволило получить линейное алгебраическое уравнение относительно искомого интеграла, решением которого является следующее соотношение

$$\int e^{ax} \cos(b\,x) d\,x = \left[\frac{e^{ax}}{b} \sin(b\,x) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(b\,x) \right] \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^{-1} + C .$$

Подобные интегралы иногда называются циклическими.

3.4. *Интегрирование рациональных функций*

Рассмотрим дробно-рациональную функцию $R(x)$, являющуюся отношением двух полиномов $Q(x)$ и $P(x)$, не имеющих общих множителей, т.е.

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_0} .$$

Если степень $Q(x)$ не меньше степени $P(x)$, то делением $Q(x)$ на $P(x)$ выделяют целую часть $Q(x)/P(x)=Q_0(x)+Q_1(x)/P(x)$. Далее проводится интегрирование.

<u>Пример 19</u>

Вычислим интеграл $\int \frac{x^3 d\,x}{x^2 + 1}$. Для этого выделим у подынтегрального соотношения целую часть. Далее проинтегрируем, используя метод усложнения дифференциала и таблицу интегралов

$$\int \frac{x^3 dx}{x^2+1} = \int x\,dx - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Если деление выполнено, то слагаемое $Q_1(x)/P(x)$ может быть разложено на простейшие дроби. Далее полученное соотношение интегрируется.

Пример 20

Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{x^2-1}$. Преобразуем данный интеграл к следующему виду

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}.$$

Разложение подынтегрального выражения на простейшие дроби позволяет получить

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

где A и B – неопределённые пока коэффициенты. Для их определения приведём правую часть последнего соотношения к общему знаменателю, а также приведём подобные в числителе т.е.

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

Приравнивание друг другу в подынтегральной функции до разложения на простейшие множители и после приведения подобных позволяет получить: для x^1 - $A+B=0$; для x^0 - $A-B=1$. Таким образом, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}.$$

Решением данной системы уравнений являются следующие значения неизвестных постоянных: $A=1/2$; $B=-1/2$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}.$$

Последние интегралы могут быть сведены к табличному с помощью замены переменных $y=x-1$ и $y=x+1$, т.е.

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|x-1| + C,$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|x+1| + C.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

Ещё одним методом интегрирования рациональных функций является выделение полного квадрата. Рассмотрим следующий пример применения такого метода.

Пример 21

Вычислим интеграл $\int\frac{dx}{x^2-4x+4}$. Выделим полный квадрат в знаменателе и усложним дифференциал. Тогда

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+4}=\int\frac{dx}{(x-2)^2}=\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2}=\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2-x}+C.$$

3.5. *Интегрирование иррациональных функций*

1) Рассмотрим интеграл $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$. В результате замены переменной $t=\sqrt[n]{ax+b}$, т.е. $x=\left(t^n-b\right)/a$, получаем

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx=\frac{n}{a}\int t^{n-1}R\left(\frac{t^n-b}{a},t\right)dt.$$

Пример 22

Вычислим интеграл $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$. Подстановка $t=\sqrt{x+1}$ приводит к следующему результату

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx=2\int\frac{t+2}{t^3-1}dt=\int\frac{2(t+2)dt}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=2\int\frac{dt}{t-1}+2\int\frac{(3t+1)dt}{t^2+t+1}=$$

$$=2\ln|t-1|+2\int\frac{(3t+1)dt}{t^2+t+1}=2\ln|t-1|+3\int\frac{(t+0,5)d(t+0,5)}{(t+0,5)^2+0,75}-\frac{1}{2}\int\frac{d(t+0,5)}{(t+0,5)^2+0,75}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(t+0,5)^2}{(t+0,5)^2+0,75}+2\ln|t-1|-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2+0,75}=\left[y=\sqrt{\frac{3}{4}}tg(z)\right]=2\ln|t-1|-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{4}{3}\int\frac{dz}{0,75\cos^2(z)\left[tg^2(z)+1\right]}+\ln\left[(t+0,5)^2+0,75\right]+C=2\ln|t-1|+$$

$$+\ln\left[(t+0,5)^2+0,75\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(2t+1)\right]+C.$$

2) Вычислим интеграл $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b}\right)dx$. В результате замены переменной $t=\sqrt[r]{ax+b}$, т.е. $x=\left(t^r-b\right)/a$ (r – наименьшее общее кратное) удаётся преобразовать рассматриваемый интеграл в интеграл от рациональной функции.

3) Вычислим интеграл $\int R\left(x,\sqrt[n]{x^2+a^2}\right)d\,x$. В данном случае полезны замены переменных $x=a\cdot sh(t)$ и $x=a\cdot tg(t)$.

4) Вычислим интеграл $\int R\left(x,\sqrt[n]{x^2-a^2}\right)d\,x$. Такой интеграл может быть вычислен с помощью замены переменных $x=a\cdot ch(t)$ и $x=a/cos(t)$.

5) Вычислим интеграл $\int R\left(x,\sqrt[n]{a^2-x^2}\right)d\,x$. Для вычисления данного интеграла может быть использована замена переменных $x=a\cdot sin(t)$ и $x=a\cdot cos(t)$.

3.6. *Интегрирование тригонометрических функций*

1) Вычислим интеграл $\int \sin^n(x)d\,x$.

а) Если $n=2m+1$, проведём следующие преобразования

$$\int \sin^n(x)d\,x=\int\left[1-\cos^2(x)\right]^m\sin(x)d\,x=\left[t=\cos(x)\right]=-\int\left(1-t^2\right)^m d\,t.$$

б) Если $n=2m$, тогда воспользуемся похожим способом вычисления интеграла

$$\int \sin^n(x)d\,x=\int\left\{\frac{1}{2}\left[1-\cos(2x)\right]\right\}^m d\,x=\frac{1}{2^{m+1}}\int\left[1-\cos(t)\right]^m d\,t.$$

В данном случае степень снижается вдвое. Раскрывая $[1\text{-}\cos(t)]^m$, интегрируем каждый член аналогично. Такие же преобразования применимы при вычислении интеграла $\int \cos^n(x)d\,x$.

2) Вычислим интеграл $\int \sin^n(x)\cos^m(x)d\,x$ один из показателей степени нечётный, другой – произвольный. Тогда преобразования аналогичны преобразованиям, рассмотренным в предыдущем пункте.

<u>Пример 23</u>

Вычислим интеграл $\int \sin^2(x)\cos^5(x)d\,x$. Воспользуемся рассмотренными ранее преобразованиями и заменой переменных $x=sin(t)$. Тогда

$$\int \sin^2(x)\cos^5(x)d\,x=\int\sin^2(x)\left[1-\sin^2(x)\right]^2\cos(x)d\,x=\left[t=\sin(x)\right]=\int t^2\left[1-t^2\right]^2 d\,t=$$

$$=\int\left(t^2-2t^4+t^6\right)d\,t=\int\left(\frac{t^3}{3}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right)d\,t=\frac{t^4}{12}-\frac{t^6}{15}+\frac{t^8}{56}+C=\frac{\arcsin^4(x)}{12}-$$

$$-\frac{\arcsin^6(x)}{15}+\frac{\arcsin^8(x)}{56}+C.$$

3) Вычислим интеграл $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)d\,x$. Подынтегральное выражение можно представить как сумму синусов суммарного и разностного аргументов, т.е. $\int\left\{\sin\left[(\alpha+\beta)x\right]+\sin\left[(\alpha-\beta)x\right]\right\}d\,x$. Тогда преобразования аналогичны преобразованиям, рассмотренным в предыдущем пункте.

4) Вычислим интеграл $\int tg^n(x)d\,x$. Проведём следующие преобразования

$$\int tg^n(x)d\,x=\int tg^{n-2}(x)\left[\frac{1}{\cos^2(x)}-1\right]d\,x=\int tg^{n-2}(x)d\,tg\,(x)-$$

$$-\int tg^{n-2}(x)d\,x = \frac{tg^{n-1}(x)}{n-1} - \int tg^{n-2}(x)d\,x\,.$$

Интеграл $\int ctg^{n}(x)d\,x$ вычисляется аналогично.

4. *Определённый интеграл*

Определение 3

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором интервале $x\in(a,b)$. Будем считать, что данный интервал имеет некоторое разбиение $a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$. Пусть $Z=\Delta x$ наибольший размер элемента разбиения $\Delta\, x_i=x_i-x_{i-1}$. Число

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta\, x_i\,.$$

называется интегральной суммой, соответствующей выбранному разбиению. Функция $f(x)$ называется интегрируемой на интервале (a,b), если существует число I со следующим свойством

$$\lim_{\Delta\, x\to 0}\sigma(\mathrm{Z}) = I\,.$$

В данном случае величина I называется определённым интегралом. Можно выбрать различные разбиения, но последовательность соответствующих интегральных сумм всегда сходится независимо от выбора промежуточных точек к одному и тому же значению, которое и является интегралом. Определённый интеграл обозначается следующим образом: $I = \int\limits_a^b f(x)d\,x$, где a и b соответственно нижний и верхний пределы интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $x\in(a,b)$. Если функция $F(x)$ является произвольной первообразной функции $f(x)$ на рассмотренном интервале, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)d\,x = F(b) - F(a).$$

Свойства определённого интеграла

1) $I = \int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]d\,x = \int\limits_a^b f_1(x)d\,x + \int\limits_a^b f_2(x)d\,x$ - аддитивность относительно подынтегральных соотношений;
2) $I = \int\limits_a^b f(x)d\,x = \int\limits_a^c f(x)d\,x + \int\limits_c^b f(x)d\,x$ - аддитивность относительно областей ($a<c<b$);
3) $I = \int\limits_a^b A\,f(x)d\,x = A\int\limits_a^b f(x)d\,x$ - постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

4) $\int\limits_a^b f_1(x)dx \le \int\limits_a^b f_2(x)dx$ - выполняется при условии $f_1(x) \le f_2(x)$, если для каждой точки $x \in (a,b)$;

5) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$ - выполняется при условии, что $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на (a,b);

5) $I = \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ - перестановка пределов интегрирования.

Методы вычисления определённого интеграла

4.1. Замена переменных в определённом интеграле

Рассмотрим две непрерывные на интервале $x \in (a,b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(t)$. Пусть $\varphi'(t)$ также непрерывна для всех $t \in (\alpha,\beta)$ и выполняется неравенство $a < \varphi(t) < b$. Тогда, если $\alpha_0 \in (\alpha,\beta)$, $\beta_0 \in (\alpha,\beta)$, $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$, то

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} f(x)dx = \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Пример 24

Вычислим интеграл $\int\limits_0^2 x\exp\left(x^2\right)dx$. На первом этапе воспользуемся методом усложнения дифференциала. Далее может быть использовано интегрирование с помощью таблицы интегралов

$$\int\limits_0^2 x\exp\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \exp\left(x^2\right)dx^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \exp(y)dy = \frac{1}{2}[\exp(4) - \exp(0)] = \frac{1}{2}[\exp(4) - 1].$$

Пример 25

Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\ln(2)} \sqrt{\exp(x) - 1}\,dx$. Выберем следующую замену переменных $t = \sqrt{\exp(x) - 1}$, т.е. $x = \ln\left(1 + t^2\right)$. Тогда $dx = \frac{2t\,dt}{1 + t^2}$. Пределы интегрирования пересчитываются следующим образом: $0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le ln(2)$. Далее воспользуемся стандартным алгоритмом замены переменных, т.е.

$$\int\limits_0^{\ln(2)} \sqrt{\exp(x) - 1}\,dx = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2\,dt}{1 + t^2} = 2\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right)dt = 2[t - arctg(t)]_0^1 = \frac{4 - \pi}{2}.$$

Пример 26

Вычислим интеграл $\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$. Воспользуемся тригонометрической заменой переменной $x = r\cos(\varphi)$. Тогда

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,d\,x=\left[x=r\cos(\varphi)\right]=r^2\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2(\varphi)}\,d\cos(\varphi)=r^2\int_0^{\pi}\sin^2(\varphi)\,d\,\varphi=$$

$$=\frac{r^2}{2}\int_0^{\pi}\left[1-\cos(2\varphi)\right]\,d\,\varphi=\frac{r^2}{2}\pi\,.$$

Следует заметить, что значение данного интеграла является половиной площади круга радиуса r с центром в начале координат.

4.2. Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)\,d\,v(x)=\left[v(x)u(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,d\,u(x).$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям для определённого интеграла.

Пример 27

Вычислим интеграл $\int_1^2 \ln(x)\,d\,x$. Воспользуемся стандартным алгоритмом интегрирования по частям. В данном случае $u(x)=ln(x)$ и $v(x)=1$, т.е.

$$\int_1^2 \ln(x)\,d\,x=\begin{bmatrix} u(x) & d\,u(x)\\ d\,v(x) & v(x)\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\ln(x) & d\,x/x\\ 1 & x\end{bmatrix}=x\ln(x)-\int_1^2 d\,x=2\ln(2)-1\,.$$

5. *Геометрические приложения определённых интегралов*

5.1. *Вычисление площадей фигур в декартовой системе координат*

Рассмотрим функцию $f(x)$ на интервале $x\in(a,b)$ и определим площадь фигуры (часто используется термин “площадь криволинейной трапеции”), ограниченной данной функцией, осью абсцисс, а также прямыми $x=a$ и $x=b$ (см. рис. 1). Искомая площадь, определяется соотношением

$$S=\int_a^b f(x)\,d\,x\,.$$

Если функция $f(x)$ на интервале $x\in(a,b)$ является знакопеременной (например, $f(x)=cos(x)$, $b\text{-}a>\pi/2$), тогда площадь фигуры, ограниченной данной кривой, является суммой площадей фигур на каждом из участков функции, на котором она не меняет знак. В данном случае площади функции на ряде участков могут быть отрицательными. У таких функций необходимо сменить знак.

Пример 28

Найдём площадь фигуры, ограниченной гиперболой $f(x)=1/x$, осью Оx, а также отрезками прямых $x=1$ и $x=2$. В данном случае площадь фигуры определяется следующим соотношением

$$S=\int_1^2\frac{d\,t}{t}=\ln(t)\Big|_1^2=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2).$$

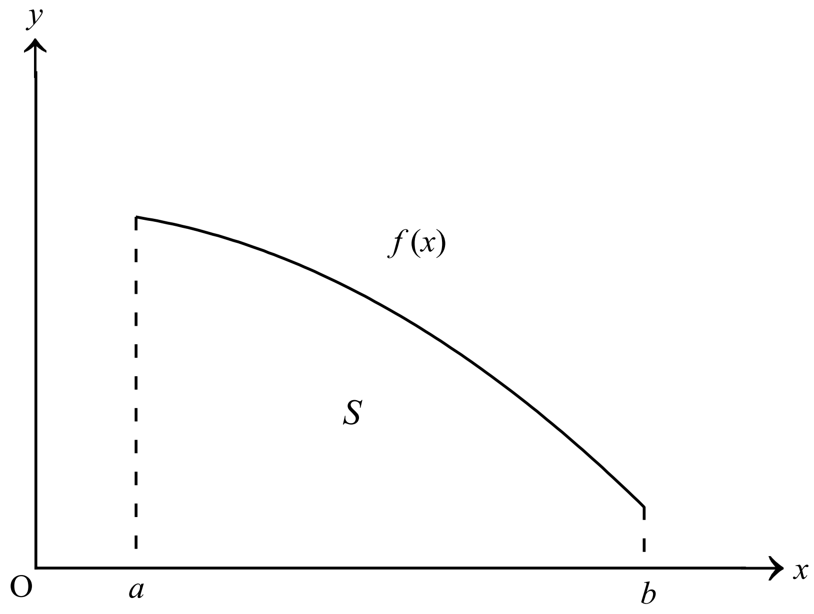

Рис. 1.

Пример 29

Найдём площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^{\alpha}$ и $x=y^{\alpha}$, $\alpha\geq 1$. В данном случае искомая площадь фактически является разностью площадей двух фигур. Но соответствующие данным двум площадям интегралы являются расходящимися. По этой причине вычислим искомую площадь как интеграл от разности функций, ограничивающих рассматриваемую фигуру, т.е.

$$S=\int\limits_0^1\left(\sqrt[\alpha]{x}-x^{\alpha}\right)d\,x=\left(\frac{1}{1/\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1}-\frac{1}{\alpha}x^{\alpha-1}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{1/\alpha}-\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}.$$

Пример 30

Найдём площадь фигуры, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Лежащий выше оси абсцисс полуэллипс описывается уравнением $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Площадь первой четверти искомой площади определяется следующим соотношением

$$\frac{1}{4}S=\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,d\,x=\left[x=a\sin(t)\right]=\frac{b}{a}\int\limits_0^{\arcsin(1)}a\sqrt{1-\sin^2(t)}\,a\cos(t)\,d\,t=a\,b\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2(t)\,d\,t=$$

$$=\frac{a\,b}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left[1-\cos(2t)\right]d\,t=\frac{a\,b}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin(2\,t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{a\,b}{4}\left[\pi-\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right)+\sin(0)\right]=\pi\frac{a\,b}{4}.$$

Полная площадь фигуры определяется следующим соотношением: $S=\pi a b$.

5.2. *Длина дуги*

Рассмотрим на плоскости кривую AB. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ (t_0\leq t\leq T).$$

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предполагаются непрерывными. Будем считать, что точке A соответствует значение t_1, точке B соответствует значение t_2. Будем также считать, что кратных точек нет. Длину AB кривой можно определить с помощью следующего соотношения

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\,t = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, d\,t. \qquad (1)$$

Данное соотношение может быть преобразовано к следующему виду

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, d\,x. \qquad (2)$$

Пример 31

Определим длину линии

$$y(x)=x^2/2p,\ x\in[0,x_0].$$

Воспользуемся соотношением (2). Данное соотношение после замены переменных $x=p\cdot sh(t)$

$$s=p[2x_0+arsh(x_0)]/2.$$

Пример 32

Определим длину линии

$$x=a\cdot cos(t),\ y=a\cdot sin(t),\ t\in[t_1,t_2].$$

Соотношение (2) позволяет получить

$$s = a^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\, d\,t = a^2(t_2 - t_1).$$

Пример 33

Определим длину линии

$$x=a\cdot t^2+b,\ y=a\cdot t,\ t\in[t_1,t_2].$$

Использование соотношения (1) приводит к следующему результату

$$s = 2a \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{t^2 + 1}\, d\,t = [t = sh(\varphi)] = 2a\, ch(\varphi)\Big|_{arsh(t_1)}^{arsh(t_2)} = 2a\sqrt{1 + sh^2(\varphi)}\Big|_{arsh(t_1)}^{arsh(t_2)} =$$

$$= 2a\left(\sqrt{1+t_2^2} - \sqrt{1+t_1^2}\right).$$

5.3. *Объём и площадь поверхности тел вращения*

Пусть имеется функция $y=f(x)$, непрерывная на интервале (a,b). Объём V тела F, образованного вращением вокруг оси Оx криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=|f(x)|$, ординатами в точках a и b, а также отрезком оси Оx от a до b может быть определён по формуле

$$V = \pi \int_{a}^{b} f^2(x)\, d\,x. \qquad (3)$$

Площадь S тела F, образованного вращением вокруг оси Оx криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=|f(x)|$, ординатами в точках a и b, а также отрезком оси Оx от a до b может быть определена по формуле

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sqrt{x_t'^2(t) + f_t'^2(t)}\, dt = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f_x'^2(x)}\, dx. \qquad (4)$$

Пример 34

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ на интервале $x \in [-r, r]$ (см. рис. 2). Подстановка такой функции в соотношение (3) позволяет получить

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-r}^{r} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

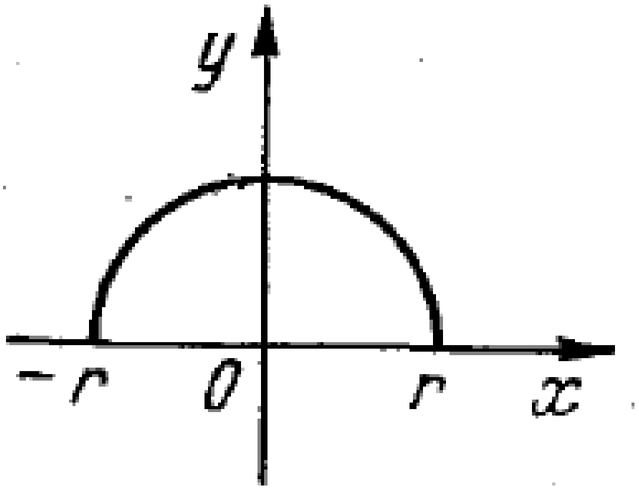

Рис. 2.

Вычисление площади поверхности данного тела вращения с помощью соотношения (4) приводит к следующему результату

$$S = -\frac{\pi}{4} \int_{-r}^{r} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[x = r\sin(t)\right] = -\frac{\pi r^2}{4} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(t)\cos(t)\, dt}{\sqrt{1 - \sin^2(t)}} = -\frac{\pi r^2}{4} \int_0^{\pi} \sin^2(t)\, dt =$$

$$= -\frac{\pi r^2}{4} \int_0^{\pi} \left[1 - \cos^2(t)\right] dt = \frac{\pi r^2}{8} \left| \int_0^{\pi/2} \cos(2t)\, dt \right| + \frac{\pi r^2}{8} \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(2t)\, dt \right| = \frac{\pi r^2}{16}.$$

Пример 35

Найдём объём прямого кругового конуса с высотой, равной h, и радиусом основания, равным r (рис. 3). В данном случае функция $f(x)$ имеет следующий вид: $f(x)=rx/h$. Подстановка такой функции в соотношения для объёма тела вращения и площади его поверхности позволяет получить соответствующие результаты

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = \pi \frac{r^2 x^3}{3h^2} \Bigg|_0^h = \pi r^2 \frac{h}{3}, \quad S = 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \int_0^h x\, dx = \pi h \frac{r}{2} \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}.$$

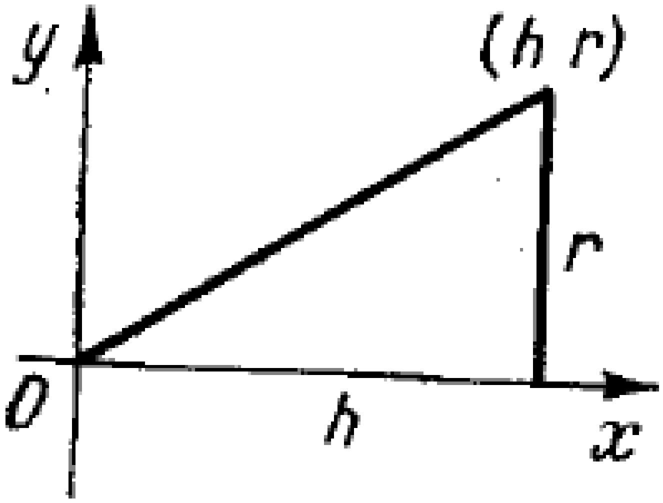

Рис. 3.

Пример 36

Найдём объём тела, полученного вокруг оси абсцисс синусоиды $f(x)$=sin (x) (рис. 4). Функция $f(x)$ определена на интервале $[0,\pi]$. Подстановка такой функции в соотношение для объёма тела приводит к следующему результату

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2(x)\,d\,x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi [1-\cos(2x)]\,d\,x = \frac{\pi}{2}[x-\sin(2x)]\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

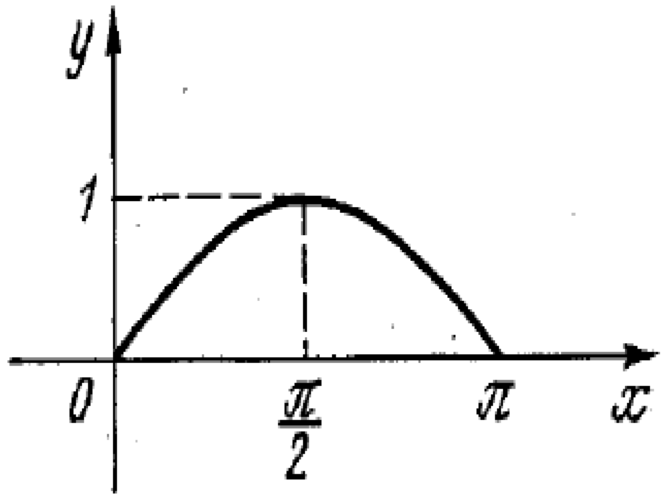

Рис. 4.

Вычисление площади поверхности данного тела позволяет получить

$$S = 2\pi \int_0^\pi \sin(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\,d\,x =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2}arsh[\cos(x)] - \frac{1}{2}\cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\right\}_0^\pi = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$

5. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы являются обобщением рассмотренных ранее определённых интегралов как на случай функций, определённых на неограниченных промежутках, так и на случай функций, определённых на ограниченных промежутках, но неограниченных на них. Данное обобщение делается с помощью рассматриваемых далее предельных переходов.

Определение 4

Несобственный интеграл первого рода (типа) является следующим пределом

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx=\int_a^\infty f(x)\,dx. \tag{5}$$

Определение 5

Пусть $f(x)$, $x\in[a,b]$ – функция, неограниченная в точке $x=A$, $A\in[a,b]$. Несобственный интеграл второго рода (типа) является следующим пределом

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,\ (A=a) \tag{6а}$$

или

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,\ (A=b) \tag{6б}$$

или

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{A-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{A+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]=\int_a^b f(x)\,dx,\ (A\in[a,b]). \tag{6с}$$

Если пределы в (5) и (6) существуют и сходятся, то говорят, что рассмотренные интегралы сходится. В противоположном случае то говорят, что данные интегралы расходятся.

Пример 37

Определим значение следующего интеграла $I=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$, $(\lambda>0)$. Его вычисление позволяет получить $I=\lim\limits_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{(\lambda-1)x^{\lambda-1}}\Bigg|_a^A\right]=\begin{cases}+\infty, & \lambda<1\\ -\frac{1}{(\lambda-1)a^{\lambda-1}}\end{cases}$, т.е. при $\lambda>1$ данный интеграл сходится к величине $I=-\frac{1}{(\lambda-1)a^{\lambda-1}}$. В противоположном случае интеграл расходится.

Пример 38

Вычислим следующий интеграл $I=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}$, $(a>0)$. Использование таблиц первообразных приводит к следующему результату

$I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{(\lambda-1)x^{\lambda-1}}\Bigg|_{a+\varepsilon}^b\right]==\begin{cases}+\infty, & \lambda<1\\ -\frac{1}{(\lambda-1)\left(b^{\lambda-1}-a^{\lambda-1}\right)}\end{cases}$, т.е. при $\lambda<1$ и $a>0$ данный интеграл сходится к величине $I=-\frac{1}{(\lambda-1)\left(b^{\lambda-1}-a^{\lambda-1}\right)}$. В противоположном случае интеграл расходится.

Пример 39

Вычислим следующий интеграл $I=\int\limits_a^b \frac{d\,x}{(b-x)^\lambda}$, ($a$>0). С помощью таблиц первообразных можно получить следующий результат $I=\lim\limits_{\varepsilon\to -0}\left[-\frac{1}{(\lambda-1)x^{\lambda-1}}\Big|_a^{b-\varepsilon}\right]=$

$=\begin{cases}+\infty,\ \lambda<1\\ -\frac{1}{(\lambda-1)\left(b^{\lambda-1}-a^{\lambda-1}\right)}\end{cases}$, т.е. при λ<1 и a>0 данный интеграл сходится к величине $I=-\frac{1}{(\lambda-1)\left(b^{\lambda-1}-a^{\lambda-1}\right)}$. В противоположном случае интеграл расходится.

6. Приложения интегрального исчисления в экономике

В данном разделе рассмотрим несколько приложений интегрального исчисления в экономике.

Пример 40

Проведем оценку объема выпускаемой продукции, произведенной за время T. Пусть функция $y=f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени t. Найдем объем продукции u, произведенной за промежуток времени $[0,T]$.

Отметим, что если производительность не изменяется с течением времени ($f(t)$ - постоянная функция), то объем продукции Δu, произведенной за некоторый промежуток времени $[t,t+\Delta t]$, задается формулой $\Delta u=f(t)\Delta t$.

Построим интегральную сумму. Разобьем отрезок $[0,T]$ на промежутки времени точками: $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$. Для величины объема продукции Δu_i, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1},t_i]$, имеем

$$\Delta u_i=f(c_i)\Delta t_i,\text{ где } c_i\in[t_{i-1},t_i],$$
$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^n \Delta u_i=\sum\limits_{i=1}^n f(c_i)\Delta t_i$. Перейдя к пределу при $\max\Delta t_i\to 0$, найдем объем произведенной продукции

$$u=\lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta t_i\ .$$

По определению определенного интеграла

$$\lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta t_i=\int_0^T f(t)dt\,,$$

таким образом

$$u=\int_0^T f(t)\,dt.$$

Итак, если $f(t)$ – производительность труда в момент t, то $\int_0^T f(t)\,dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток $[0,T]$.

Пример 41

В данном примере вычислим дисконтированную сумму. Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t при годовом проценте p, называется дисконтированием. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть K_t - конечная сумма полученная за t лет, и K – дисконтируемая сумма, которую в финансовом анализе называют также современной суммой. Если проценты простые, то $K_t=K(1+it)$, где $i=p/100$ - удельная процентная ставка. Тогда $K=\dfrac{K_t}{(1+it)}$. В случае сложных процентов $K_t=K(1+it)^t$ и поэтому $K=\dfrac{K_t}{(1+i)^t}$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной i, процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K=\int_0^T f(t)e^{-it}dt.$$

Пример 42

Определим дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн. руб.

Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t)=10+1\cdot t=10+t$. Тогда по формуле:

$$K=\int_0^T f(t)e^{-it}dt$$

дисконтированная сумма капиталовложений равна:

$$K=\int_0^3 (10+t)e^{-0,08t}dt.$$

Вычислим интеграл по частям

$$\int_0^3(10+t)\,e^{-0,08t}d\,t=\begin{bmatrix} u=10+t & d\,u=d\,t \\ dv=e^{-0,08t}d\,t & v=-\dfrac{1}{0.08}e^{-0,08t}\end{bmatrix}=\frac{(10+t)e^{-0,08t}}{-0.08}\Bigg|_0^3-\int_0^3\frac{-e^{-0,08t}}{0.08}d\,t=$$

$$=\frac{13\cdot e^{-0,24}}{-0.08}+\frac{10\cdot e^{0}}{0.08}+\frac{1}{0.08}\cdot\frac{1}{(-0.08)}e^{-0,08t}\Bigg|_0^3=-\frac{1300}{8\cdot e^{0,24}}+\frac{10\cdot 100}{8}+\frac{1}{(0.08)^2}-$$

$$-\frac{1}{(0.08)^2\cdot e^{0,24}}\approx 31$$

Итак, получили $K=31$ млн. руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн. руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 31 млн. руб. при той же, начисляемой непрерывно, процентной ставке.

Пример 43

Найдем среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1=100$ до $x_2=121$ изделий. Для этого используем формулу

$$t_{cp}=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}t(x)dx,$$

полагая в формуле $t=ax^{-b}$, где a - затраты времени на первое изделие, b - показатель производственного процесса, a=600 (мин.), b=600.

Искомое среднее время с учетом заданных параметров определяется следующим интегралом, являющимся в данном случае табличным

$$t_{cp}=\frac{1}{121-100}\int_{100}^{121}600x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{600}{21}2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121}=\frac{400}{7}\approx 57{,}2 \text{ (мин.)}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Вычислить интегралы. Результат проверить дифференцированием

01.01	$\int\frac{\sin^2(2x)dx}{1-\cos(2x)}$;	$\int\frac{x\,dx}{x^2+9}$;	$\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$;
01.02	$\int\sin^5(3x)dx$;	$\int x^2e^x\,dx$;	$\int\sqrt{5-6x}\,dx$;
01.03	$\int x^3\cos^2(x)dx$;	$\int ctg^2(x)dx$;	$\int\frac{1}{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^3dx$;
01.04	$\int\frac{1}{x}\sqrt{1+\ln(x)}dx$;	$\int\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$;	$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$;
01.05	$\int\sqrt[3]{5-6x}\,dx$;	$\int(3-2x)^4\,dx$;	$\int\sin(3x)\sin(5x)dx$;
01.06	$\int\frac{dx}{x^2-25}$;	$\int\frac{1-\sin^3(x)}{\sin^3(x)}dx$;	$\int\frac{3x+2}{3x-4}dx$;
01.07	$\int\frac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}dx$;	$\int\frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}dx$;	$\int\frac{dx}{x^2+25}$;
01.08	$\int x\,arctg(x)dx$;	$\int\frac{4x+3}{4x-1}dx$;	$\int\frac{x\,dx}{\sin^2(x)}$;

01.09	$\int x^3 e^{-x} d\,x$;	$\int \sin^2(x) d\,x$;	$\int \frac{x^3 d\,x}{x-2}$;
01.10	$\int e^x \ln\left(1+e^x\right) d\,x$;	$\int \sin^3(x)\cos^3(x) d\,x$;	$\int e^{\cos^2(x)} \sin(2x) d\,x$;
01.11	$\int \frac{(x+1)d\,x}{(x-2)(x-3)}$;	$\int \frac{(x+1)d\,x}{x^3-2x^2+x}$;	$\int \frac{5x-1}{5x+4} d\,x$;
01.12	$\int x\cos(2\,x) d\,x$;	$\int x\sqrt{a-x}\, d\,x$;	$\int x^2 e^{5x}\, d\,x$;
01.13	$\int \frac{x-1}{\sqrt{2\,x-1}} d\,x$;	$\int \frac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1} d\,x$;	$\int \frac{4x\,d\,x}{4+x^2}$;
01.14	$\int x\ln(x) d\,x$;	$\int [1+3\cos(2x)]^2\, d\,x$;	$\int \sin^2(x)\cos^5(x) d\,x$;
01.15	$\int \frac{\sqrt{x}\,d\,x}{\sqrt{x}+1}$;	$\int \frac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2} d\,x$;	$\int \frac{\sqrt{3+\ln(x)}}{x} d\,x$;
01.16	$\int \ln(x)\frac{d\,x}{x}$;	$\int \frac{4x+1}{4x-3} d\,x$;	$\int \frac{x^2 d\,x}{\left(x^3+4\right)^6}$;
01.17	$\int \frac{\left(x^3-1\right)d\,x}{5x^2-4x-1}$;	$\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) d\,x$;	$\int \frac{\left(x^2+4x\right)d\,x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;
01.18	$\int \sin^4(x) d\,x$;	$\int \sin(3x)\sin(x) d\,x$;	$\int \frac{x^2+2x-8}{8-x^3} d\,x$;
01.19	$\int \sqrt{2a\,x-x^2}\, d\,x$;	$\int [1-\sin(2\,x)]^2\, d\,x$;	$\int \sin^2(x)\cos^2(x) d\,x$;
01.20	$\int \frac{1-x}{1+x} d\,x$;	$\int \frac{arctg(x)}{1+x^2} d\,x$;	$\int \frac{x-2}{x+3} d\,x$;
01.21	$\int \frac{d\,x}{\sin(x)}$;	$\int \frac{2\sin(x)}{\cos^2(x)} d\,x$;	$\int \frac{d\,x}{x^4+x^2}$;
01.22	$\int x\cos^2(x) d\,x$;	$\int x\; tg^2(x) d\,x$;	$\int x^3 \ln(x) d\,x$;
01.23	$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2} d\,x$;	$\int \frac{x^2}{e^{2x}} d\,x$;	$\int \frac{x\,d\,x}{x^4-x^2-2}$;
01.24	$\int tg(x) d\,x$;	$\int \sin^4(x)\cos(x)\, d\,x$;	$\int [\ln(x)]^2 d\,x$;
01.25	$\int \frac{(5\,x-8)d\,x}{x^3-4x^2+4x}$;	$\int \frac{(5\,x-14)d\,x}{x^3-x^2-4x+4}$;	$\int \frac{d\,x}{\sqrt{x^2-4}}$;

01.26 $\int x\,tg\left(x-\pi\right)d\,x$; $\int\left(3-2\,x\right)^4 d\,x$; $\int x^2\, e^{-3x} d\,x$;

01.27 $\int\frac{x^3 d\,x}{\sqrt{x^8-1}}$; $\int\frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}d\,x$; $\int\frac{\cos\left(2\,x\right)d\,x}{\sin\left(x\right)\cos\left(x\right)}$;

01.28 $\int\frac{x^2-9}{x^4-81}d\,x$; $\int\frac{e^{2\,x}d\,x}{1-3\,e^{2\,x}}$; $\int\frac{d\,x}{x\left[1+\ln\left(x\right)\right]}$;

01.29 $\int x\ln\left(x^2\right)d\,x$; $\int\sin^4\left(x\right)\cos\left(x\right)\,d\,x$; $\int\ln\left(x^2+1\right)d\,x$;

01.30 $\int\frac{\cos\left(x\right)}{\sin^4\left(x\right)}d\,x$; $\int\frac{x^3+2x^2+x}{x+1}d\,x$; $\int x\,e^{-x^2}\,d\,x$.

II) Вычислить интегралы

02.01 $\int\limits_0^1\frac{d\,x}{\sqrt{4-x^2}}$; 02.02 $\int\limits_a^{a\sqrt{3}}\frac{d\,x}{a^2+x^2}$; 02.03 $\int\limits_0^5\frac{x^2+5x-1}{4-3\,x}d\,x$;

02.04 $\int\limits_0^{\pi/4} tg^3\left(x\right)d\,x$; 02.05 $\int\limits_0^1 x\,arctg\left(x\right)d\,x$; 02.06 $\int\limits_1^2\frac{\ln\left(x\right)}{x}d\,x$;

02.07 $\int\limits_0^1 x\ln\left(x+1\right)d\,x$; 02.08 $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos\left(x\right)d\,x$; 02.09 $\int\limits_0^1\frac{d\,x}{x^2+x+1}$;

02.10 $\int\limits_0^{3\pi/4}\sin^2\left(x\right)d\,x$; 02.11 $\int\limits_0^3 x^3 e^x\,d\,x$; 02.12 $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^5\left(3\,x\right)d\,x$;

02.13 $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/6}\frac{d\,x}{\cos^2\left(2\,x\right)}$; 02.14 $\int\limits_0^3\frac{x^2 d\,x}{x^3+27}$; 02.15 $\int\limits_2^5\frac{3x+2}{3x-4}\,d\,x$;

02.16 $\int\limits_0^{\pi/2} x^3\cos^2\left(x\right)d\,x$ 02.17 $\int\limits_0^{3\pi/4}\sin^2\left(x\right)d\,x$; 02.18 $\int\limits_0^1\left(3-2\,x\right)^4\,d\,x$;

02.19 $\int\limits_0^1 x^3 e^{-x^2}\,d\,x$; 02.20 $\int\limits_0^1 x^2 e^x\,d\,x$; 02.21 $\int\limits_0^{\pi}\sin^2\left(x\right)d\,x$;

02.22 $\int\limits_3^5\frac{x^5 d\,x}{x-2}$; 02.23 $\int\limits_0^1\frac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}d\,x$; 02.24 $\int\limits_0^{\pi} x^2\cos\left(2\,x\right)d\,x$;

02.25 $\int\limits_0^{\pi/2}\sin\left(x\right)\cos^2\left(x\right)\,d\,x$ 02.26 $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\left(x\right)\cos^2\left(x\right)d\,x$; 02.27 $\int\limits_0^{\pi}\left[1+3\cos\left(2x\right)\right]^3\,d\,x$;

02.28 $\int_0^1 [1+\sin(2x)]^3\, dx$; 02.29 $\int_2^5 \frac{x^4-1}{x^3-x}\, dx$; 02.30 $\int_0^1 tg^2(x)\, dx$.

III) Найти площадь и периметр фигуры, ограниченной следующими линиями

03.01 $y=2-x^2$, $y=x^2$;
03.02 $y=2px^2$, $x=h$, $y=0$;
03.03 $y=4x$, $x=1$, $x=4$, $y=0$;
03.04 $y^2=4x^2$, $x=1$;
03.05 $y=(4-x)^2$, $x=0$, $y=0$;
03.06 $y=4-x^2$, $y=x^2$;
03.07 $y=3-2x-x^2$, $y=0$;
03.08 $y^2=x^2$, $y=8$, $x>0$;
03.09 $x^2-2y^2=0$, $y=-8$, $2x-y-3=0$;
03.10 $2x^2-8y^2=0$, $2x-y-6=0$, $x=0$;
03.11 $x^2+2y=0$, $5x+2y-4=0$;
03.12 $x^2-2y=0$, $x+2y-6=0$;
03.13 $x^2-6y=18$, $x-6y-12=0$;
03.14 $x^2+2y=0$, $2x-y-3=0$;
03.15 $2x+y^2=0$, $2x+5y-6=0$;
03.16 $2x-y^2=0$, $2x-y-6=0$;
03.17 $4x^2-y^2=0$, $2x-y-6=0$, $y=0$;
03.18 $y^2=3x$, $5x+y-6=0$;
03.19 $6x-y^2=0$, $6x+y+1=0$;
03.20 $x+y^2=0$, $x-2y-3=0$;
03.21 $y=x^2$, $y=2-x^2$;
03.22 $x=1$, $y=x^2$, $y=1$;
03.23 $y=x$, $y=x^2$;
03.24 $y=x^2$, $y=x$;
03.25 $y=-x^2$, $y=x$;
03.26 $y=2$, $y=x^2$;
03.27 $y=3x$, $y=x^2$;
03.28 $y=1-5x$, $y=-x^2$;
03.29 $y=5x$, $y=x$, $x=1$;
03.30 $y=2-x$, $y=x^2$.

IV) Найти объём и площадь поверхности тела вращения, полученного вращением вокруг оси абсцисс функции $f(x)$. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$.

04.01 $y=4-x^2$, [0,2]
04.02 $y=2px^2$, $[p,2p]$
04.03 $x+y^2=4$, [1,3]
04.04 $y=2x^2+1$, [-5,5]
04.05 $y=4-(4-x)^2$, [2,6]
04.06 $y=4-x^2$, [-2,2]
04.07 $y=3-2x-x^2$, [-3,1]
04.08 $y=x^2$, [2,4]
04.09 $x^2-2y=0$, [1,3]
04.10 $2x^2-3y=0$, [0,2]
04.11 $x^2+2y=0$, [1,2]
04.12 $y=\sqrt{x}$, [0,5]
04.13 $x^2-6y=0$, [0,5]
04.14 $2x-y-3=0$, [2,5]
04.15 $2x+y^2=0$, [-3,-1]
04.16 $2x-y-6=0$, [4,6]
04.17 $2x-y^2=0$, [4,6]
04.18 $6x-y^2=0$, [0,3]
04.19 $6x+y-12=0$, [0,2]
04.20 $x-2y+3=0$, [-2,1]
04.21 $y=2-x^2$, [-1,1]
04.22 $y=x$, [0,2]
04.23 $y=x^3$, [0,2]
04.24 $y=\sqrt{x}$, [0,1]
04.25 $y=-x^2$, [0,1]
04.26 $x^2y=1$, [1,2]
04.27 $y=4-x^2$, [-2,2]
04.28 $y=\sqrt{x}$, [0,2]
04.29 $x-3y^2=0$, [0,1]
04.30 $y=x^2$, [-1/4,1/4].

V) Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость.

05.01 $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, dx$

05.02 $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

05.03 $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$

05.04 $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

05.05 $\int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x/2}\, dx$

05.06 $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

05.07 $\int\limits_0^{\infty} x^4 \cdot e^{-x/2}\, dx$

05.08 $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

05.09 $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\, dx$

05.10 $\int\limits_0^{\infty} x \cdot \ln(x)\, dx$

05.11 $\int\limits_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-x^4}\, dx$

05.12 $\int\limits_0^{\infty} \sin(x) \cdot e^{-x/2}\, dx$

05.13 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2}$

05.14 $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$

05.15 $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

05.16 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

05.17 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$

05.18 $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

05.19 $\int\limits_0^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

05.20 $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\, dx}{(1-x)^3}$

05.21 $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x\, dx}{x^4+9}$

05.22 $\int\limits_0^{\infty} \frac{arctg(x)}{1+x^2}\, dx$

05.23 $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

05.24 $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

05.25 $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$

05.26 $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{x^2+2x-8}{8-x^3}\, dx$

05.27 $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} \cdot \left(1+\frac{e^x}{x^2}\right) dx$

05.28 $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^{x}\, dx$

05.29 $\int\limits_0^{\infty} x \cdot e^{-x}\, dx$

05.30 $\int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3}\, dx$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Шилов, Г.Е. Математический анализ / Г.Е. Шилов. - М.: Издательство “Лань”, 2015. 912 с.

2. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа (в двух томах) / Г. М. Фихтенгольц. - М.: Издательство “Лань”, 2015. 912 с.

Дополнительная литература

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. - М.: Юнити, 2008. 480 с.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004. 336 с.

3. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2005. 336 с.

Евгений Леонидович **Панкратов**
Елена Алексеевна **Булаева**

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд.л.
Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603000, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01