МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГООБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

О.В. Гордеева
И.И. Олюнина
Н.А. Сизова

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Практикум

Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.02
«Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород
2020

УДК 517
ББК 22.161

Г-68

Г-68 Гордеева О.В., Олюнина И.И., Сизова Н.А. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 30 с.

Рецензент: д. ф-м. н., профессор **А.В. Зорин**

Методическая разработка содержит комплекс тестовых контрольных заданий по теме «Криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля». Предназначена для студентов 2-3 курсов очной и очно-заочной формы обучения и преподавателей, ведущих практические занятия по дисциплинам «Математический анализ», «Дополнительные главы математического анализа». Может быть использована при проведении коллоквиумов, зачетов и экзаменов.

УДК 517
ББК 22.161

Вариант 1

1. Вычислить

$$\int\limits_L |y|\,ds,\;\; L = \{(x,y,z):\; x^2+y^2=z^2,\;\; x^2+y^2=ax\}$$

2. Вычислить

$$\iint\limits_S (x-y)\,dS$$

где S - часть цилиндра $x^2+y^2=a^2$, лежащая внутри цилиндрической поверхности $z^2=a(a-x)$.

3. Вычислить

$$\int\limits_\Gamma (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz$$

где Γ - граница части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащей в первом октанте, пробегаемая по ходу часовой стрелки, если смотреть из точки $(0;0;0)$.

4. Вычислить

$$\int\limits_L xyz\,dx + y^2z\,dy + zx^2\,dz$$

где L - кривая $x^2+z^2=a^2,\;\; y^2+z^2=a^2,\;\; x\geq 0$, положительно ориентированная на внешней стороне первого цилиндра.

5. Вычислить

$$\iint\limits_S (4x^2+z^2)\,dydz + 4xy\,dzdx + z^2\,dxdy$$

где S - часть поверхности $4x^2-y^2=a^2$, лежащая внутри конуса

$x=\sqrt{y^2+z^2}$.

6. Найти поток поля $\bar{\boldsymbol{a}}$=$(z-y)\boldsymbol{i}$+$(x-z)\boldsymbol{j}$+$(y-x)\boldsymbol{k}$ через полную поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$x+y+z=1,\ x+y-z=1,\ x=0,\ y=0$$

в направлении внешней нормали.

Вариант 2

1. Вычислить

$$\int_L (x+y)\,ds,$$

где L - правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

2. Вычислить

$$\iint\limits_S (x-y^2+z^3)\,dS,$$

где S - часть цилиндра $x^2+y^2=a^2,\ x \geq 0$, лежащая между плоскостями $x+z=0,\ x-z=0$.

3. Вычислить

$$\int_L xy\,dx - x^3y^3\,dy,$$

где L - контур квадрата $|x-y|+|x+y|=1$ с отрицательным направлением обхода.

4. Вычислить

$$\int_L (z-x^2-y)\,dx + (x+y+z)\,dy + (y+2x+z^3)\,dz,$$

где L - кривая $x^2+y^2+z^2=2az,\ y^2+z^2=x^2,\ x \geq 0$, положительно ориентированная на внешней стороне правой $(x \geq 0)$ полусферы.

5. Вычислить

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy,$$

где S - правая сторона части цилиндра $y^2 + x = 1,\ 0 \le z \le 2,\ x \ge 0.$

6. Вычислить

$$\iint\limits_S yz^2\,dydz + zy^2\,dzdx + yx^2\,dxdy,$$

где S - внешняя сторона поверхности тела

$$V = \{(x, y, z) :\ 0 \le z \le x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

.

Вариант 3

1. Вычислить

$$\int\limits_L x\,ds$$

где L - верхняя половина кривой $r = 1 + \cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi)$

2. Вычислить

$$\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,dS$$

где $S = \{(x, y, z) : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 < 2ax\}$.

3. Вычислить

$$\int_L (x + y)\,dx - xy\,dy$$

где L - дуга кривой $x^{1/4} + y^{1/4} = a^{1/4}$ от точки $A = (0, a)$ до точки $B = (a, 0)$.

4. Вычислить

$$\int_L (xy + z)\,dx + (yz + x)\,dy + (zx + y)\,dz$$

где L - окружность $\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0\}$, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

5. Вычислить

$$\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dzdx$$

где S - часть внешней стороны конуса $y=\sqrt{x^2+z^2},\ 0\le y\le b.$

6. Найти поток поля $\boldsymbol{a}{=}2x\boldsymbol{i}{-}y\boldsymbol{j}{+}z\boldsymbol{k}$ через поверхность тела

$x^2+y^2+z^2\le 4,\ 3z\le x^2+y^2$ в направлении внешней нормали.

Вариант 4

1. Вычислить длину кривой, заданной уравнением $r=a\sin^3(\varphi/3)$.

2. Определить координаты центра масс однородной поверхности

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le x.$$

3. Вычислить

$$\int_L xy^2\,dx+yz^2\,dy-zx^2\,dz$$

где L - отрезок $AB,\ A(3,-6,0),\ B(-2,4,5).$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}{=}x^2y^3\boldsymbol{i}{+}\boldsymbol{j}{+}z\boldsymbol{k}$ вдоль кривой $x^2+y^2=R^2,\ z=x.$

5. Вычислить

$$\iint\limits_S (x^2+z^2)\,dydz$$

где S - часть внешней стороны цилиндра $x=\sqrt{9-y^2},\ 0\le z\le 2.$

6. Вычислить

$$\iint\limits_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$$

где S - внутренняя сторона поверхности тела V,

$$V=\{(x,y,z):x+2y+3z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}.$$

Вариант 5

1. Вычислить
$$\int_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$$
где Γ - окружность $\{x^2+y^2+z^2=a^2,\ x=y\}$.

2. Вычислить
$$\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z-\frac{1}{2}\right)\,dS$$
где S - часть параболоида $2z=2-x^2-y^2,\ z\geq 0$.

3. Вычислить
$$\int_L 2x\,dx-(x+2y)\,dy$$
где L - периметр треугольника $ABC,\ A(-1,0),\ B(0,2),\ C(2,0)$, пробегаемый против часовой стрелки.

4. Вычислить
$$\int_L (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(y^2+x^2)\,dz$$
где L - верхняя $(z\geq 2)$ петля кривой $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2+z^2=4z$, положительно ориентированная на внешней стороне верхней $(z\geq 2)$ полусферы.

5. Вычислить
$$\iint\limits_S (x^4+y^4+2a^2z^2)\,dxdy$$
где S - часть нижней стороны параболоида $az=xy$, лежащая в первом октанте и внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2=bxy$.

6. Вычислить
$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dydz+(y^2+z^2)\,dzdx+(z^2+x^2)\,dxdy$$

где S - внутренняя сторона поверхности тела V,

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 0\}.$$

Вариант 6

1. Вычислить

$$\int_L (x^3 + y^3)\, ds$$

где $L = \{(x, y) :\ (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

2. Вычислить

$$\iint\limits_S z^3xy^2\, dS$$

где S - часть цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax,\ z > 0$, лежащая внутри конуса $y^2 + z^2 = x^2$.

3. Вычислить

$$\int_\Gamma y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$$

где Γ - линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ $(R > 0,\ z \geq 0)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 0)$.

4. Вычислить

$$\int_L 2xy\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$$

где L - эллипс $2x^2 + 2y^2 = z^2,\ x + z = a$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

5. Вычислить

$$\iint\limits_S y^2\, dydz + z^2\, dzdx - x^2\, dxdy$$

где S - внешняя сторона части поверхности тела $2x^2 + 2y^2 \leq az \leq x^2 + y^2 + a^2$, удовлетворяющей условию $y \geq 0$.

6. Вычислить

$$\iint\limits_S xz^2\,dydz + yx^2\,dzdx + zy^2\,dxdy$$

где S - внешняя сторона поверхности тела V,

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 2az,\ x^2 + y^2 \ge 3z^2,\ x \ge y\}.$$

Вариант 7

1. Найти центр тяжести дуги астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ (x \ge 0).$$

2. Вычислить

$$\iint\limits_S xyz\,dS$$

где S - часть конуса $z^2 = 2xy,\ x^2 + y^2 \le a^2,\ z \ge 0$.

3. Вычислить

$$\int\limits_L y^{5/3}\,dx - x^{5/3}\,dy$$

где L - положительно ориентированная кривая $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}{=}xz\boldsymbol{i}{-}yz^2\boldsymbol{j}{+}xy\boldsymbol{k}$ вдоль кривой

$$x^2 + y^2 = a^2,\ z = x^2 - y^2 + 2a^2.$$

5. Вычислить

$$\iint\limits_S (x + y^2)\,dydz + (y + z^2)\,dzdx + (z + x^2)\,dxdy$$

где S - часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2, 0 \le z \le H$.

6. Вычислить

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$$

где S внешняя сторона поверхности, образованной вращением вокруг оси OZ кривой $y = 2 - |z - 1|,\ z \in [0, 2]$.

Вариант 8

1. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (x^{4/3} + y^{4/3})\, ds$$

где Γ - астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

2. Вычислить

$$\iint\limits_{S} xyz\, dS$$

где S - часть конуса $z^2 = 2xy,\ z \geq 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

3. Вычислить

$$\int\limits_{\Gamma} (y^2 + z^2)\, dx + (z^2 + x^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$$

где Γ - линия пересечения поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,\ x^2 + y^2 = 2rx,\ 0 < r < R,\ z \geq 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Oz.

4. Вычислить

$$\int_{L} \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2} + z\, dz$$

где L - окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x + y + z = 0$, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

5. Вычислить

$$\iint\limits_{S} xy\, dydz + yz\, dzdx + xz\, dxdy$$

где S - часть внешней стороны конуса $x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq H$.

6. Найти поток поля $\boldsymbol{a}{=}x\boldsymbol{i}{-}xy\boldsymbol{j}{+}z\boldsymbol{k}$ через часть цилиндра $x^2+y^2=R^2,\ z\geq 0,\ x+z\leq R$ в направлении внешней нормали.

Вариант 9

1. Вычислить

$$\int_L y^3\,ds$$

где L - петля кривой $r=a\cos 4\varphi$, пересекающая положительную ось OX.

2. Вычислить

$$\iint\limits_S xz\,dS$$

где S - часть цилиндра $x^2+y^2=2ax$, лежащая между конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и параболоидом $z=\frac{x^2+y^2}{2a}$.

3. Вычислить

$$\int_L xy^2\,dx+(y^2-x^2)\,dy$$

где L - положительно ориентированная кривая $r=a(1+\cos\varphi)$.

4. Вычислить

$$\int_L z^2\,dx+x^2\,dy+y^2\,dz$$

где L - кривая $x^2+y^2=2ax,\ z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, положительно ориентированная на внешней стороне конуса.

5. Вычислить

$$\iint\limits_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$$

где S - верхняя сторона части гиперболического параболоида $z=x^2-y^2,\ |y|\leq x\leq a$.

6. Вычислить

$$\iint\limits_S (xy^2 + z^2)\, dydz + (yz^2 + x^2)\, dzdx + (zx^2 + y^2)\, dxdy$$

где S - внешняя сторона верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0$.

Вариант 10

1. Найти координаты центра тяжести кривой

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ (0 \leq x \leq a).$$

2. Вычислить

$$\iint\limits_S \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}}\, dS$$

где S - часть параболоида $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q},\ x \geq 0$, лежащая внутри цилиндра $\left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right)^2 = a^2\left(\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}\right)$.

3. Вычислить

$$\int\limits_{AB} xy^2\, dx + yz^2\, dy - zx^2\, dz$$

где AB - дуга окружности $\{x^2 + y^2 + z^2 = 45,\ 2x + y = 0\}$ от точки $A\,(3, -6, 0)$ до точки $B\,(-2, 4, 5)$.

4. Вычислить

$$\int\limits_L (x^2 + y)\, dx + (y^2 + z)\, dy + (z^2 + x)\, dz$$

где L - эллипс $\{x^2 + y^2 = 4,\ x + z = 2\}$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

5. Вычислить

$$\iint\limits_S (a^2 x + by^2 + cz^2)\, dydz$$

где S - правая сторона части цилиндра $y^2 = 2px,\ 0 \le z \le q,\ x \le 2p$.

6. Найти поток поля $\boldsymbol{a}{=}(x-y+z)\boldsymbol{i}{+}(y-z+x)\boldsymbol{j}{+}(z-x+y)\boldsymbol{k}$ через поверхность $|x|+|y|+|z|=1$ в направлении внешней нормали.

Вариант 11

1. Вычислить

$$\int_L (x+4y)\,ds$$

где L - правая петля кривой $r^2 = \cos 2\varphi$ $(x \ge 0)$.

2. Определить массу части гиперболического параболоида $x^2 - y^2 = 2z$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, с плотностью $\rho = |z|$.

3. Вычислить

$$\int_L (4xy - 15x^2y)\,dx + (2x^2 - 5x^3 + 7)\,dy$$

где L - часть кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ от точки $A = (1-\sqrt{3}, 0)$ до точки $B = (1, 0)$.

4. Вычислить

$$\int_L (z - x^2 - y)\,dx + (x+y+z)\,dy + (y + 2x + z^3)\,dz$$

где L - кривая $x^2+y^2+z^2 = 2az,\ y^2+z^2 = x^2,\ x \ge 0$, положительно ориентированная на внешней стороне правой $(x \ge 0)$ полусферы.

5. Вычислить

$$\iint\limits_S (x+y^2)\,dydz + (y+z^2)\,dzdx + (z+x^2)\,dxdy$$

где S - часть внешней стороны цилиндра $x^2+y^2 = a^2, 0 \le z \le H$.

6. Вычислить

$$\iint\limits_S (xy^2+z^2)\,dydz + (yz^2+x^2)\,dzdx + (zx^2+y^2)\,dxdy$$

где S - внешняя сторона верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geq 0$.

Вариант 12

1. Вычислить
$$\int_L |y|\,ds,$$
где L - кривая $r=a(2+\cos\varphi)$.

2. Вычислить
$$\iint\limits_S \sqrt{x}\,dS,$$
где S - часть цилиндра $x^2+y^2=2ax$, лежащая вне гиперболоида $x^2+y^2-z^2=a^2$.

3. Вычислить
$$\int_L yz\,dx+ay\,dz-az\,dy,$$
где L - часть кривой $\{x^2+y^2=z^2,\ y^2+x^2=ax,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$ от точки $A=(0,0,0)$ до точки $B=(a,0,a)$.

4. Вычислить
$$\int_L (xy+z)\,dx+(yz+x)\,dy+y\sqrt{a^2-x^2}\,dz,$$
где L - кривая $\{x^2+y^2+z^2=2ax,\ x^2+y^2=a^2\}$, положительно ориентированная на внутренней стороне сферы.

5. Вычислить
$$\iint\limits_S x^3\,dydz+y^3\,dzdx+z^3\,dxdy,$$
где S - верхняя сторона части параболоида $x^2+y^2=2-z,\ z\geq 0$.

6. Найти поток поля $\boldsymbol{a}=x^2y\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}+xyz\boldsymbol{k}$ через поверхность S в направлении внешней нормали,
$$S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}.$$

Вариант 13

1. Найти момент инерции однородной дуги L плотности ρ относительно оси OX.

$L = \{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ 0 \le x \le a\}$

2. Вычислить
$$\iint\limits_S (x + y + z)\, dS,$$
где S - часть конуса $x^2 = y^2 + z^2$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

3. Вычислить
$$\int_L x^2 y\, dx - y^2 x\, dy,$$
где L - верхняя $(y \ge 0)$ часть правой петли $(x \ge 0)$ лемнискаты

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ от точки $A = (0, 0)$ до точки $B = (a, 0)$.

4. Вычислить
$$\int_L (z^2 - y^2)\, dx + (x^2 - z^2)\, dy + (y^2 - x^2 + x)\, dz$$
где L - эллипс $\{x^2 + y^2 = 8x,\ x + y + z = 0\}$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

5. Вычислить
$$\iint\limits_S y\, dydz - x\, dzdx + z\, dxdy,$$
где S - часть верхней стороны геликоида

$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = av,\ 0 \le v \le 2\pi,\ 0 \le u \le 1.$

6. Найти поток поля $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2,\ z \ge 0,\ x + z \le R$ в направлении внешней нормали.

Вариант 14

1. Вычислить

$$\int_{\Gamma} x\sqrt{x^2-y^2}\,ds,$$

где Γ - правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

2.Найти массу части цилиндра $x^2+z^2=2az$, лежащей внутри конуса $x^2+y^2=z^2$, если плотность $\rho=|y|$.

3. Вычислить

$$\int_{L} x^2\,dy - xy\,dx,$$

где L - часть кривой $x^4-y^4=6x^2y$ от точки $A=(-4\sqrt{2},4)$ до точки $B=(0,0)$.

4. Вычислить

$$\int_{L} 2xy\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$$

где L - эллипс $2x^2+2y^2=z^2,\ x+z=a$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

5. Найти поток поля $\boldsymbol{a}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2+y^2+z^2=9,\ z\geq 2$.

6. Вычислить

$$\iint\limits_{S} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy,$$

где S внешняя сторона поверхности, образованной вращением вокруг оси OZ кривой $x=1+\sin z,\ z\in[0,\pi]$.

Вариант 15

1 Найти координаты центра масс однородной кривой

$$L=\{(x,y): x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\ x\geq 0, y\geq 0\}.$$

2. Вычислить

$$\iint\limits_S y^2\,dS,$$

где S получена при вращении кривой $y=\cos x,\ |x|\le \pi/2$ вокруг оси OX.

3. Вычислить

$$\int_\Gamma \frac{xy^2\,dx-x^2y\,dy}{x^2+y^2},$$

где Γ - правый лепесток лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

4. Вычислить

$$\int_\Gamma y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz,$$

где Γ - линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ и цилиндра $x^2+y^2=Rx$ $(R>0,\ z\ge 0)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0;0;0)$.

5. Вычислить

$$\iint\limits_S (x-1)^3\,dydz,$$

где S - внешняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=2x,\ z\le 0$.

6. Найти поток поля $\boldsymbol{a}=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(y-x)\boldsymbol{k}$ через полную поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x+y+z=1,\ x+y-z=1,\ x=0,\ y=0$ в направлении внешней нормали.

Вариант 16

1. Найти координаты центра масс однородной кривой

$$L=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=a^2,\ |y|=x,\ z\ge 0\}.$$

2. Вычислить

$$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS,$$

где S - полная поверхность тела V, где

$$V = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}\}.$$

3. Вычислить

$$\int_L x\,dy - y\,dx,$$

где L - петля кривой $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ с положительным направлением обхода.

4. Вычислить

$$\int_\Gamma (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz,$$

где Γ - граница части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащей в первом октанте, пробегаемая по ходу часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 0)$.

5. Вычислить

$$\iint_S x\,dydz - y\,dzdx + z\,dxdy,$$

где S - верхняя сторона части конуса $x^2 + y^2 = z^2,\ z \ge 0$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

6. Найти поток поля $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2x,\ z \ge 0$.

Вариант 17

1. Найти центр тяжести дуги астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ (x \ge 0)$.

2. Вычислить

$$\iint_S \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}\,dS,$$

где S - часть параболоида $ax = yz$, лежащая внутри цилиндра $(y^2 + z^2)^2 = 2b^2yz$.

3. Вычислить

$$\int_\Gamma \frac{xy^2\,dx - x^2y\,dy}{x^2+y^2},$$

где Γ - правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

4. Вычислить

$$\int_L y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

где L - окружность $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x+y+z=0$, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

5. Вычислить

$$\iint\limits_S x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy,$$

где S - верхняя сторона части параболоида $x^2+y^2=2-z,\ z\geq 0$.

6. Вычислить

$$\iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy,$$

где S - внешняя сторона полной поверхности тела
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq\frac{z^2}{c^2},\ 0\leq z\leq c$.

Вариант 18

1. Вычислить

$$\int_L (x+4y)\,ds,$$

где L - правая петля кривой $r^2=\cos 2\varphi$ $(x\geq 0)$.

2. Вычислить

$$\iint\limits_S \sqrt{a^2+y^2+z^2}\,dS,$$

где S - часть параболоида $ax=yz$, лежащая внутри цилиндра
$(y^2+z^2)^2=2b^2yz$.

3. Вычислить
$$\int_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy,$$
где L - часть окружности $x^2 + y^2 = ax$ $(y \le 0)$ от точки $A = (0,0)$ до точки $B = (a, 0)$.

4. Вычислить
$$\int_L y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$
где L - контур сечения куба, построенного на единичных положительных векторах осей координат, плоскостью, проходящей через точки $O = (0,0,0)$, $B = (0,0,1)$, $A = (1,1,0)$, положительно ориентированный на правой стороне плоскости.

5. Вычислить
$$\iint\limits_S z^2\,dxdy,$$
где S - внутренняя сторона полусферы
$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = R^2, z \ge 0$.

6. Вычислить
$$\iint\limits_S (1 + 2x)\,dydz + (2x + 3y)\,dzdx + (3y + 4z)\,dxdy,$$
где S - внутренняя сторона поверхности
$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = a$.

Вариант 19

1 Найти координаты центра масс однородной кривой
$$L = \{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}\}.$$

2. Определить массу части гиперболического параболоида $x^2 - y^2 = 2z$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, с плотностью $\rho = |z|$.

3. Вычислить
$$\int_L xy\,dx - x^3y^3\,dy,$$
где L - контур квадрата $|x-y|+|x+y|=1$ с отрицательным направлением обхода.

4. Вычислить
$$\int_L (z^2-y^2)\,dx + (x^2-z^2)\,dy + (y^2-x^2+x)\,dz,$$
где L - эллипс $x^2+y^2=8x,\ x+y+z=0$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

5. Вычислить
$$\iint\limits_S x^6\,dydz + y^4\,dzdx + z^2\,dxdy,$$
где S - нижняя сторона части эллиптического параболоида $z=x^2+y^2, z\le 1$.

6. Вычислить
$$\iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy,$$
где S - внешняя сторона полной поверхности конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{z^2}{c^2},\ 0\le z\le c.$

Вариант 20

1. Вычислить
$$\int_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,ds,$$
где Γ - окружность $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x=y.$

2. Вычислить
$$\iint\limits_S \sqrt{x}\,dS,$$

где S - часть цилиндра $x^2+y^2=2ax$, лежащая вне гиперболоида $x^2+y^2-z^2=a^2$.

3. Вычислить

$$\int_L (x+y)\,dx - xy\,dy,$$

где L - дуга кривой $x^{1/4}+y^{1/4}=a^{1/4}$ от точки $A=(0,a)$ до точки $B=(a,0)$.

4. Вычислить

$$\int_L (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz,$$

где L - окружность $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0$, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

5. Найти поток поля $\boldsymbol{a}{=}x^3\boldsymbol{i}{+}y^3\boldsymbol{j}{+}z^3\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону полусферы $x^2+y^2+z^2=2x,\ z\geq 0$.

6. Вычислить

$$\iint\limits_S (x^2+z^2)\,dydz,$$

где S - часть внешней стороны цилиндра $x=\sqrt{9-y^2},\ 0\leq z\leq 2$.

Вариант 21

1. Найти момент инерции однородной дуги L плотности ρ относительно оси OY, где

$$L=\{(x,y): x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\ x\geq 0, y\geq 0\}.$$

2. Вычислить

$$\iint\limits_S \frac{dS}{x+\sqrt{y^2+z^2}},$$

где S получена при вращении дуги $x=a\cos^4 t,\ y=a\sin^4 t,\ 0\leq t\leq \pi/2$ вокруг оси OX.

3. Вычислить

$$\int_L (e^{-x}\cos y - y^2)\,dx + (e^{-x}\sin y - x^2)\,dy,$$

где L - правая ($x \geq a$) полуокружность $x^2 + y^2 = 2ax$ от точки $A = (a, a)$ до точки $B = (a, -a)$.

4. Вычислить

$$\int_L 2xy\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$

где L - эллипс $2x^2 + 2y^2 = z^2,\ x + z = a$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

5. Вычислить

$$\iint_S (x^2 + 6z - 2y^2)\,dxdy,$$

где S - часть нижней стороны цилиндра $y^2 = 6z,\ 0 \leq x \leq 2,\ z \leq 6$.

6. Найти поток поля $\boldsymbol{a}{=}(z-y)\boldsymbol{i}{+}(x-z)\boldsymbol{j}{+}(y-x)\boldsymbol{k}$ через полную поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1,\ x + y - z = 1,\ x = 0,\ y = 0$ в направлении внешней нормали.

Вариант 22

1. Вычислить

$$\int_\Gamma z\ ds,$$

где Γ - дуга кривой $x^2 + y^2 = z^2,\ y^2 = ax$ от точки $(0; 0; 0)$ до точки $(a; a; a\sqrt{2})$, $a > 0$.

2. Вычислить

$$\iint_S yz\,dS,$$

где S - часть поверхности, полученной вращением кривой $y = \cos x,\ |x| \leq \pi/2$, относительно оси OX, удовлетворяющая условию $z > y > 0$.

3. Вычислить
$$\int_L x\,dy - y\,dx,$$
где L - часть кривой $x(x-y)^2+y=0$ от точки $A=(0,0)$ до точки $B=(2/5,-8/5)$.

4. Вычислить
$$\int_L y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$
где L - контур сечения куба, построенного на единичных положительных векторах осей координат, плоскостью, проходящей через точки $P=(1,0,0),\ Q=(0,1,0),\ R=(1,0,1)$, положительно ориентированный на правой стороне плоскости.

5. Вычислить
$$\iint\limits_S x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z\,dxdy,$$
где S - часть внутренней стороны гиперболоида
$$x^2+y^2-z^2=1,\ 0\le z\le 3.$$

6. Вычислить
$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dydz + \sqrt{x^2+y^2}\,dzdx + \sqrt{z}\,dxdy,$$
где S - правая сторона части поверхности тела
$$V=\{(x,y,z): x^2+y^2\le z^2,\ x^2+y^2\le 2-z,\ z\ge 0\},$$
удовлетворяющей условию $x\ge 0$.

Вариант 23

1. Вычислить
$$\int_L (x+y)\,dS,$$
где $L=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=R^2;\ y=x;\ (x>0,\ y>0,\ z>0)\}$.

2. Вычислить

$$\int_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy,$$

где C - эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, пробегаемый против часовой стрелки.

3. Вычислить

$$\iint\limits_S (y+z+\sqrt{a^2-x^2})\,dS,$$

где S - поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$, заключенная между плоскостями $z=0;\ z=h$.

4. Вычислить

$$\iint\limits_S x^2y^2z\,dxdy,$$

где S - положительная сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z<0$.

5. Используя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ по контуру C против часовой стрелки, где C - пересечение поверхности $z^2=4-x-y$ с координатными плоскостями.

6. Используя формулу Остроградского, вычислить

$$\iint\limits_S xz\,dxdy + xy\,dydz + yz\,dxdz,$$

где S - внешняя сторона пирамиды, составленной из плоскостей

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$$

Вариант 24

1. Вычислить

$$\int_L xyz\,dS,$$

где L - четверть окружности

$$x^2+y^2+z^2=R^2;\ x^2+y^2=R^2/4;\ (x>0,\ y>0,\ z>0).$$

2. Вычислить

$$\int_C (2a-y)\,dx + x\,dy,$$

где $C:\ x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$.

3. Вычислить

$$\iint_S \frac{dS}{r},$$

где S - часть поверхности $z=xy$, отсеченная цилиндром $x^2+y^2=R^2$, r - расстояние от точки поверхности до оси OZ.

4. Вычислить

$$\iint_S 2\,dxdy + y\,dxdz - x^2z\,dydz,$$

где S - внешняя сторона части эллипсоида

$$4x^2+y^2+4z^2=4,\ (x>0,\ y>0,\ z>0).$$

5. Используя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}$=$(x-2)\boldsymbol{i}$ +$(x+y)\boldsymbol{j}$ $-2z\boldsymbol{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(0,0,1)$.

6. Используя формулу Остроградского, вычислить

$$\iint_S y^2z\,dxdy + xz\,dydz + x^2y\,dxdz,$$

где S - внешняя сторона поверхности, ограничивающей тело V,

$$V=\{(x,y,z): x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1,\ 0<z<x^2+y^2\}.$$

Вариант 25

1. Вычислить

$$\int_L \operatorname{arctg}(y/x)\,dS,$$

где L - часть спирали Архимеда $\rho = 2\varphi$, заключенная внутри круга с центром в начале координат радиуса R.

2. Вычислить

$$\int_C (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy,$$

где $C : x^2 + y^2 = ax$ (против часовой стрелки).

3. Вычислить

$$\iint\limits_S (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\,dS,$$

где S - часть поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсекаемая цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$.

4. Вычислить

$$\iint\limits_S (y^2 + z^2)\,dydz,$$

где S - внешняя сторона части параболоида $x = a^2 - y^2 - z^2$, отсеченная плоскостью yOz.

5. Используя формулу Стокса, вычислить

$$\int_L x^2y^3\,dx + dy + z\,dz,$$

где L - пересечение поверхности $x^2 + y^2 = R^2$ с плоскостью $z = x$.

6. Используя формулу Остроградского, вычислить

$$\iint\limits_S z^2\,dxdy,$$

где S - внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Вариант 26

1. Вычислить

$$\int_L x\sqrt{x^2 - y^2}\,dS,$$

где L - линия, заданная уравнением $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2);\ (x>0)$.

2. Вычислить

$$\int_C e^x((1-\cos y)\,dx - (y-\sin y)\,dy),$$

где C - пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0<x<\pi;\ 0<y<\sin x$.

3. Вычислить

$$\iint\limits_S x^2y^2\,dS,$$

где S - полусфера $x^2+y^2+z^2=r^2;\ z>0$.

4. Вычислить

$$\iint\limits_S yz\,dxdy + xz\,dydz + xy\,dxdz,$$

где S - внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и плоскостей $x=0,\ y=0,\ (0<z<h)$.

5. Используя формулу Стокса, вычислить

$$\int_L (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz,$$

где L - окружность $x^2+y^2+z^2=R^2;\ z=y$, пробегаемая против часовой стрелки.

6. Используя формулу Остроградского, найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}{=}x^3\boldsymbol{i}\ {+}y^3\boldsymbol{j}\ {+}z^3\boldsymbol{k}$ через полную поверхность конуса $x^2+y^2\le z^2;\ 0<z<h$. (изнутри этой поверхности).

Список литературы

[1] Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды.-3-е изд.-М.: Физматлит, 2002.

[2] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3-х томах. Том 3. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.-М.: МЦНМО, 2018.

[3] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II.-М.: Физматлит, 2009.

[4] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2016.

Ольга Владимировна **Гордеева**
Ирина Игоревна **Олюнина**
Наталья Алексеевна **Сизова**

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.