МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

О.А. Кузенков
Е.А. Рябова
К.Р. Круподерова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ОТБОРА

Электронное учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета вычислительной математики и кибернетики для студентов ННГУ, обучающихся по следующим направлениям:
010400.62 „Прикладная математика и информатика“, 010300.62 „Фундаментальная информатика и информационные технологии“, 230700.62 „Прикладная информатика“

Нижний Новгород
2012

УДК 517
ББК В161.6
К-89

К-89 Кузенков О.А., Рябова Е.А., Круподёрова К.Р. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ОТБОРА: Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 133 с.

Рецензент: кандидат ф.-м. н., доцент **В.П. Савельев**

Настоящее пособие выполнено в рамках инновационного проекта развития Нижегородского государственного университета, как национального исследовательского университета (Мероприятие 2.2. Развитие сетевой интеграции с ведущими университетами страны, научно-исследовательскими институтами Российской академии наук, предприятиями-партнерами, создание новых форм взаимодействия). Издание направлено на совершенствование подготовки бакалавров и магистров прикладной математики и информатики, сближение современных достижений науки с образовательным процессом, эффективное освоение методов математического моделирования на примере актуальных процессов отбора, имеющих важнейшее значение в изучении окружающей реальности и перспективы практического использования.

Включение этого пособия в электронные образовательные ресурсы ННГУ имеет цель способствовать сетевой интеграции ведущих университетов России.

Пособие создано для поддержки следующих учебных дисциплин: общих курсов „Математические модели естествознания“, „Концепции современного естествознания“, специального курса „Математические модели процессов отбора“ в рамках следующих направлений: „Прикладная математика и информатика“, „Фундаментальная информатика и информационные технологии“, „Прикладная информатика“

УДК 517
ББК В161.6

Оглавление

Введение

Учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применима в ней математика.

Иммануил Кант

В настоящее время математика проникает во все более широкие области знаний, эффективно используется в тех дисциплинах, где ее применение до определенного момента не представлялось возможным. Математические модели позволяют описывать и исследовать явления, происходящие в живой природе и социальной сфере. При этом обогащается и сама математика, в рамках ее разрабатываются новые методы, необходимые для изучения специфических моделей, появляются новые разделы. По словам А.Энштейна, "математика обязана своим происхождением необходимости узнать что-либо о реально существующих объектах".

Эти слова целиком можно отнести к новому направлению в области математического моделирования – теории отбора. При построении и исследовании самых разнообразных процессов в биологии, химии, экономике был обнаружен ряд единых закономерностей, которые впоследствии получили общую математическую формулировку и послужили основой для создания синтетической теории, описывающей явления отбора.

Отбор (по толкованию "Нового объяснительного словаря синонимов русского языка"[79]) – это процесс сортировки или выделения по некоторому признаку элементов из заданного набора однородных объектов [1]. В отличие от выбора, который всегда является проявлением воли некоторого субъекта, процессы отбора могут протекать спонтанно, например, хорошо известен естественный отбор наиболее приспособленных видов в живой природе [15]. В случае отбора всегда присутствует некоторый внешний критерий – формальный признак, определяющий, какие именно элементы будут отобраны в конечном итоге, в то время как при выборе такой критерий может отсутствовать, и выбор может осуществляться произвольно или случайно.

Отбор – это динамический процесс, развернутый во времени. Искомые элементы выделяются не единовременно, как это бывает при выборе, а постепенно, происходит уточнение множества отбираемых элементов, последовательное сужение его до нужных пределов. Результатом выбора является, как правило, один элемент, а при отборе могут выделяться несколько элементов. Таким образом, отбор – это постепенное сужение исходного множества объектов до некоторого подмножества отбираемых элементов.

Процессы отбора широко распространены в окружающей действительности. Среди физико-химических процессов к ним можно отнести всевозможные процессы разделения смесей, очистки веществ: фильтрации, ректификации, абсорбции, экстракции. Примером процесса отбора может служить возникновение волны определенной частоты из шума, что соответствует концентрации энергии колебаний на одной гармонике (или на комбинации гармоник) при начальном хаотическом распределении энергии по всему спектру частот [129, 135]. В живой природе существует уже упоминавшийся естественный отбор, а также искусственный отбор. В экономике известны процессы концентрации средств у наиболее эффективно работающего предприятия, укрепление его позиций среди множества конкурирующих фирм, вытеснение одних товаров другими с общего рынка сбыта. В технической сфере происходит постепенная смена одних технических решений другими,

[1] См. также: "Отбор – выделение кого-, чего-нибудь из какой-нибудь среды. Отобранный – лучший по качеству. Отобрать – выделить из общего числа."[80]

более совершенными. Частными случаями отбора также являются процессы классификации, распознавания образов, обучения и т.п.

Поскольку процессы отбора связаны с появлением устойчивых упорядоченных структур в первоначально хаотических распределениях, то они интересны для современной теории синергетики – науки о самоорганизации, которая выясняет причины возникновения порядка из хаоса [107]. Одновременно эти процессы рассматриваются и в современной теории информации [78].

Исходя из приведенного выше понятия отбора, можно дать его математическое описание. Одна из его возможных формализаций осуществляется в терминах динамики вероятностей. Определяется множество, из которого будет выделено более узкое подмножество отбираемых элементов. Каждому элементу исходного множества в каждый момент времени ставится в соответствие вероятность принадлежности итоговому подмножеству. Процесс отбора состоит в том, что с течением времени эта вероятность для одних элементов стремится к нулю, для других – к единице.

Аналогично можно определить каким-либо другим образом количественный неотрицательный показатель принадлежности элемента итоговому подмножеству: если этот показатель равен нулю, то элемент не принадлежит данному подмножеству. В зависимости от природы рассматриваемого процесса таким показателем могут служить количества вещества или энергии, соответствующие каждому элементу, частота использования данного элемента. В частности, если элементами выступают биологические виды, таким показателем может быть численность особей каждого вида. Отбор будет иметь место тогда, когда происходит концентрация этого показателя (вещества или энергии) на одних элементах – для них его значения имеет некоторый положительный предел, а для других его значение стремится к нулю.

В случае, когда рассматриваемое множество состоит из конечного числа элементов, а количественные показатели непрерывно изменяются с течением времени, математическая модель для описания процессов отбора может быть задана в виде системы дифференциальных уравнений относительно вектор-функций, принимающих значения из стандартного симплекса – подмножества конечномерного евклидова пространства, состоящего из векторов с неотрицательными координатами, сумма которых равна единице. Системы, обладающие таким свойством, называются системами на стандартном симплексе.

В частности для конечного набора альтернатив сумма вероятностей принадлежности отбираемому подмножеству, состоящему из одного элемента, в каждый момент времени равна единице. Условие сохранения постоянной суммы фазовых координат может также означать, что общее количество вещества или энергии в системе остается постоянным и с течением времени происходит лишь их перераспределение среди разных элементов. В случае, когда это не так, можно легко перейти к удельным количествам и взять их за показатели принадлежности. Для удельных количеств общая сумма уже всегда будет равна единице.

Системы на стандартном симплексе наиболее удобны для изучения процессов отбора в конечном множестве элементов, так как там сохраняется постоянной сумма значений показателей принадлежности к отбираемому подмножеству, вследствие чего увеличение преимуществ одного элемента возможно только за счет ослабления других, и ярче всего проявляются сравнительные качества разных элементов.

Отбор в системах на стандартном симплексе будет иметь место тогда, когда часть компонент решения системы дифференциальных уравнений стремится к нулю. Таким образом, теория систем на стандартном симплексе является простейшей математической основой для исследования процессов отбора.

При изучении процессов отбора основной проблемой является восстановление критериев по наблюдаемому процессу отбора: почему, в силу каких признаков одни элементы получают преимущество перед другими, как от первоначального хаотического распределения вещества или энергии по целому спектру разнообразных структур осуществляется переход к упорядоченному распределению, то есть к возникновению порядка, появлению устойчивой структуры.

Первоначально математическая теория отбора разрабатывалась для описания эволюционных процессов в биологии. В конце 20-х годов прошлого века оформилось научное направление, которое получило название математической теории естественного отбора или математической теории эволюции. Дж. Холдейн [123] ввел понятие коэффициента селекции, скорости отбора и др. Одновременно с ним над математической интерпретацией эволюционной микроизменчивости работали еще два крупных исследователя: Р. Фишер в Англии и С. Райт в США [119]. Они пытались определить, чем обусловлено селективное преимущество особей одного типа перед другими. Большую роль в создании основ теории естественного отбора сыграла разработка моделей динамики популяций в виде систем дифференциальных уравнений (моделей Вольтерра [11], Лотки [128] и т. п.). А.Д. Базыкин, изучая модели взаимодействия видов [8], математически описал процессы вытеснения одних видов из сообщества другими, более приспособленными (например, в модели "хищник – две жертвы"). Обобщая эти результаты на случай межвидового взаимодействия в трофических пирамидах [2], В.В.Алексеев доказал факт выживания лишь одного вида продуцентов с наименьшим отношением коэффициента смертности к коэффициенту роста в результате конкурентной борьбы при отсутствии консументов.

При исследовании общих моделей динамики численности популяции Ю.А. Пых успешно использовал переход с помощью нормирующей замены к системам динамики удельных численностей [88], которые представляют собой системы на стандартном симплексе. Он ввел понятие функции перехода, играющей важнейшую роль в таком преобразовании, и наглядно продемонстрировал преимущества использования систем на стандартном симплексе в изучении процессов конкуренции. Впоследствии было установлено [14], что любую систему на стандартном симплексе можно представить через функции перехода, которые допускают однородное продолжение на множество точек с неотрицательными координатами в евклидовом пространстве. Каждой такой системе можно поставить во взаимно-однозначное соответствие однородную систему дифференциальных уравнений, решение которой связано с решением исходной через нормирующую замену.

Впервые системы на стандартном симплексе стали употреблять в XIX веке при описании процессов химической кинетики. Выполнение закона сохранения массы приводило к тому, что модели химической кинетики математически задавались посредством систем дифференциальных уравнений на симплексе – выпуклом многограннике с вершинами на осях координат, который с помощью линейной замены проектируется на стандартный симплекс. Затем было установлено, что многие процессы иной природы (биологические, экономические и т.п.) протекают подобно некоторым гипотетическим химическим реакциям. Например, была обнаружена связь между классической моделью Вольтера "хищник – жертва"и химической моделью Лотки [73]. Разнообразные процессы: коагуляции, самосборки вирусов [99] и т.п. - можно интерпретировать как химические реакции. В результате было выделено семейство систем, названных термодинамическими, которые обладают таким свойством. Б.Г. Заславский и Р.А. Полуэктов, классифицируя модели динамики популяций [17], определили класс систем с интегральным линейным типом лимитирования, которые при дополнительных предположениях линейности лимитирующего фактора также являются системами на стандартном симплексе.

Наряду с детерминированными моделями для изучения биологических процессов с середины XX века начали активно использоваться стохастические модели: модель "размножения – гибели"[103], конечные автоматы [106] и т.д. Фазовыми переменными в них являются вероятности нахождения системы в одном из нескольких состояний. Очевидно, что при этом все фазовые переменные неотрицательны и их сумма равна единице, т.е. любая такая модель опять-таки представляет собой систему на стандартном симплексе.

Начиная с работ М. Нагумо [131], неослабевающий интерес вызывала проблема определения условий, при которых фазовые траектории системы с течением времени остаются в некотором ограниченном замкнутом множестве. По аналогии с биологическими системами эта задача была названа задачей выживания. В ряде случаев ее можно также свести к задаче вывода условий принадлежности фазовой траектории стандартному симплексу.

Независимо от этого рассматривались процессы отбора в экономике, математической основой для которых служила классическая модель многоотраслевой экономики Вальраса-Леонтьева. Экономическая теория полезности ставила задачей описать предпочтения одних товаров другими, что приводило к вытеснению одних товаров другими с общего рынка сбыта [133]. В исследовании экономических моделей одним из основных являлось понятие устойчивого сбалансированного роста, введенное Л. Вальрасом. Наличие такого роста, как было показано в работах [75, 17], математически соответствует существованию устойчивого состояния равновесия на стандартном симплексе.

При изучении волновых процессов в физике были обнаружены явления, которые также можно было интерпретировать как процессы отбора [135]. Д.С. Чернавский исследовал разнообразные процессы отбора в химии, биологии, демографии, высказал гипотезу происхождения жизни, основываясь на концепцию отбора [107].

В середине XX-го века был разработан математический аппарат, позволяющий описывать процессы, происходящие в самых разнообразных предметных областях: теория дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, в частности уравнений динамики распределений и положительных мер, были получены условия неотрицательности решения задачи Коши для таких уравнений как условие инвариантности конуса в банаховом пространстве. Опираясь на этот аппарат и обобщая известные к тому времени модели отбора, в 80-х годах XX-го века А.Н. Горбань ввел понятие системы с наследованием как частный случай дифференциального уравнения в семействе положительных мер, дал важнейшее определение отбора вдоль фазовой траектории для таких систем и сформулировал критерий отбора, позволяющий объяснить наблюдаемые процессы в биологии, экономике, физике с позиций идеи оптимальности[14]. При этом была установлена связь между критерием отбора и средневременным коэффициентом воспроизводства. Эти результаты легли в основу математической теории отбора. Свойство наследования впоследствии было сформулировано как основной постулат современной теории информации.

С другой стороны модели отбора послужили основой для создания целого комплекса современных численных методов – генетических алгоритмов. Генетические алгоритмы – это стохастические, эвристические оптимизационные методы, впервы предложенные Холландом в 1975 году [124]. Они основываются на идее эволюции с помощью естественного отбора, выдвинутой Дарвиным. Сейчас генетические алгоритмы составляют область искусственного интеллекта, в которой с равным успехом могут решаться задачи биотехнологий, медицины, синтеза электронных устройств, виртуальных миров. Возникнув в области биологии, модели отбора позволяют изучать явления, происходящие в самых различных сферах природы и техники.

Рассмотрению изложенных выше вопросов посвящен специальный курс "Математическое моделирование процессов отбора". Он предназначен для студентов 3-го курса, обучающихся по специальности 010501.62 "Прикладная математика и информатика" в рамках специализации "Оптимизация и оптимальное управление" и по образовательному направлению 010400.62 "Информационные технологии", а также для магистрантов, обучающихся по направлению 010500.62 "Прикладная математика и информатика" в рамках магистерской программы "Оптимизация и оптимальное управление".

Цель данного курса – изучение моделей процессов отбора, на примере которых демонстрируются методы и средства математического моделирования, основанные на применении знаний, полученных при изучении базовых математических дисциплин, что соответствует целям обучения студентов по данной специальности и данныммм направлениям.

Материал курса хорошо согласуется с учебным планом подготовки специалистов по прикладной математике и информатике и опирается на знание основных курсов: математического анализа, геометрии и алгебры, функционального анализа, дифференциальных уравнений, методов оптимизации, теории управления, теории вероятности, математических методов естествознания. Важной особенностью курса является то, что его материал содержит большое количество примеров, которые могут быть использованы при изучении указанных курсов.

Настоящий учебник представляет собой переработку учебного пособия О.А. Кузенкова, Е.А. Рябовой "Математические модели процессов отбора", вышедшего в 2007 году в издательстве ННГУ. При его подготовке был учтён ряд предложений и замечаний, высказанных при использовании указанного пособия в учебном процессе. Кроме того, после выхода пособия был обнаружен ряд важных новых фактов в области отбора, которые нашли отражение на страницах данного издания. Материал пособия также был расширен за счёт примеров и задач.

Глава 1. Математические модели

1.1. Динамические системы

Термин "*модель*" происходит от латинского слова modulus, которое первоначально употреблялось в смысле "образец для подражания". В этом значении мы используем его сейчас, когда говорим о топ-моделях, фотомоделях или о новых моделях машин, запускаемых в производство. Также это слово означало "уменьшенная копия чего-то", по которой, как по образцу, можно было воссоздать объект полностью – парусник, дворец, карету. В выпущенной в начале XX века энциклопедии издателей Ф.А. Брокгауза и И.А. Эфрона сказано, что модель – это "подобие какого-либо предмета, сделанное из дерева, пробки, картона, воска, глины, металла или другого вещества, воспроизводящее этот предмет с точностью, но в уменьшенном виде".

С течением времени возрастала значимость таких моделей в технических экспериментах. Первое издание Большой советской энциклопедии (30-е годы XX века) сообщает, что модель – это ценный инструмент авиаконструктора: движение уменьшенных моделей самолетов можно изучать в воздушном потоке, а затем учитывать результаты при конструировании больших машин.

Постепенно значение термина "модель" расширилось. Сейчас под моделью некоторого естественного объекта, явления или процесса мы понимаем другой объект, который в силу своей природы или конструкции обладает теми же существенными признаками и свойствами, что и первый. Набор признаков, выделяемых как "существенные" и отображаемых в модели, вообще может быть произвольным и обычно определяется целью исследования. Различают модели "натурные" (естественные) и "знаковые". Например, аквариум является натурной моделью водной экосистемы. К знаковым моделям, в частности, относятся условный или мысленный образ исходного объекта, его упрощенное описание в виде рисунка, чертежа, карты, таблицы, схемы, плана и т.п.

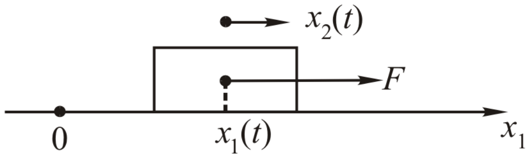
Моделирование – это процесс создания модели и установление взаимно-однозначного соответствия между наиболее важными свойствами исходного моделируемого объекта и его модели.

При *математическом моделировании* реальный процесс описывается с помощью математических понятий, т.е. происходит установление соответствия между свойствами некоторого математического объекта (например, системы уравнений) и свойствами реального. При этом отражаются логико-количественные характеристики последнего.

Для того чтобы изучать количественные соотношения, присущие объекту, необходимо в первую очередь определить параметры, которые его характеризуют. Таких параметров может быть очень много. Например, техническое описание современного самолета включает десятки, а иногда и сотни тысяч параметров и их числовых значений. Учет тех или иных параметров приводит к различным математическим моделям. При построении модели нет необходимости учитывать сразу все параметры реального объекта. Зачастую более простая модель позволяет лучше и глубже исследовать реальную систему, чем более сложная и, формально, "более правильная", поэтому достаточно ограничиться наиболее существенными параметрами.

Если изучается поведение объекта с течением времени, то целесообразно в первую очередь следить за теми числовыми величинами, которые зависят от времени и характеризуют состояние объекта в каждый момент.

Рассмотрим объект, систему или процесс, *состояние* которого в любой момент времени t однозначно характеризуется некоторым набором переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти переменные называются *фазовыми координатами* или *фазовыми переменными*. Упорядоченный набор фазовых координат $x = (x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *фазовым вектором*, *вектором состояния* или *точкой состояния*.



Пример 1.1.1. Пусть по прямолинейному пути скользит твердое тело (брусок). Выберем систему координат, ось которой направлена вдоль движения. Если рассматривать брусок как материальную точку, то его состояние однозначно определяется двумя переменными – координатой и скоростью. Обозначим координату как x_1, а скорость как x_2. Тогда набор переменных $x = (x_1, x_2)$ характеризует состояние бруска.

Совокупность X всевозможных фазовых векторов x называется *фазовым пространством*. Очевидно, фазовое пространство является подмножеством упорядоченных наборов из n действительных чисел (n-мерного евклидова пространства[1] $\mathbf{R}^n$). Совокупность всех наборов (t, x), где $x \in X$, а t – переменная времени, называется *расширенным фазовым пространством*.

Если в предыдущем примере считать, что движение бруска осуществляется в рамках ньютоновской механики, то никаких физических ограничений на переменные его состояния не накладывается и фазовым пространством будет двумерное евклидово пространство $\mathbf{R}^2$ – совокупность упорядоченных пар действительных чисел, геометрическим образом которого является плоскость. Но ситуация, когда ограничения на значения фазовых переменных отсутствуют, имеет место далеко не всегда.

Пример 1.1.2. Рассмотрим процесс распада радиоактивного вещества. Состояние этого процесса в любой момент времени однозначно характеризуется одной переменной – количеством вещества x. Очевидно, что фазовая переменная x в этом случае принимает лишь неотрицательные значения. Фазовым пространством является множество неотрицательных действительных чисел $x \geqslant 0$, его геометрическим образом – луч, расширенным фазовым пространством – множество пар $\{(t, x) : x \geqslant 0\}$, его геометрическим образом – полуплоскость.

Так как состояние объекта меняется с течением времени t, то его переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут функциями времени $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Каждому моменту времени t соответствует точка $x(t)$ в фазовом пространстве X. Таким образом, переменная времени t определяет в фазовом пространстве однопараметрическое семейство точек. Если каждая фазовая координата меняется с течением времени непрерывно, то это семейство будет непрерывной кривой в пространстве $\mathbf{R}^n$. Эта кривая называется *фазовой траекторией*.

[1] $\mathbf{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство – совокупность всевозможных упорядоченных наборов n действительных чисел, для которых определены операции сложения: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, то $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$; умножения на число α: $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$, а также операция скалярного произведения: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Совокупность фазовых траекторий, характеризующая состояния и движения динамической системы, отражающая качественные черты поведения системы, называется *фазовым портретом*.

В евклидовом пространстве с прямоугольными координатами $x_1, ..., x_n$ вектор-функция $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ определяет закон движения точки по некоторой траектории в зависимости от изменения параметра t, который мы считаем временем. При такой интерпретации производная $\dot{x}$ будет скоростью движения точки, а $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ – координатами скорости этой точки.

Пусть задано состояние объекта в некоторый начальный момент времени t_0, т.е. известен вектор состояния

$$x^0 = x(t_0) \in X.$$

Рассмотрим последующий момент времени $t > t_0$. Обозначим $\Delta t = t - t_0$, очевидно, $\Delta t > 0$. Если по любому известному начальному состоянию объекта в произвольный фиксированный момент времени t_0 можно однозначно определить состояние объекта в любой последующий момент времени $t > t_0$, то говорят, что для данного объекта выполняется *принцип детерминированности*. Иными словами, в случае выполнения принципа детерминированности каждому вектору начального состояния $x^0 = x(t_0) \in X$ и моменту времени $t > t_0$ можно поставить в соответствие вектор $x(t) \equiv x(t_0 + \Delta t)$. Это соответствие называется *законом движения объекта*.

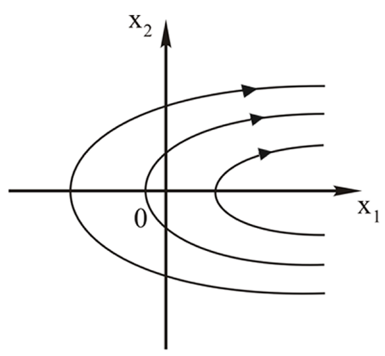
Вернемся к рассмотрению примера 1.1.1. Пусть скольжение бруска осуществляется без трения под действием постоянной силы тяги F, направленной вдоль движения, масса бруска равна единице. Тогда, согласно второму закону Ньютона, $\ddot{x}_1 = F$ или

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = F. \tag{1.1}$$

Пусть в момент времени t_0 известен вектор состояния $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, тогда, интегрируя уравнения (1.1), имеем

$$\begin{array}{rcl} x_2(t) & = & x_2^0 + F(t - t_0), \\ x_1(t) & = & x_1^0 + x_2^0(t - t_0) + F(t - t_0)^2/2. \end{array} \tag{1.2}$$

Таким образом, по вектору начального состояния x^0 и моменту времени t однозначно определяется вектор состояния $x(t)$.



Фазовый портрет системы (1.1)

Следовательно, в рассмотренном примере выполняется принцип детерминированности. Закон движения выражается соотношениями (1.2), которые, в свою очередь, определяются дифференциальными уравнениями (1.1). Учитывая, что $t = t_0 + \Delta t$, соотношения (1.2) можно переписать следующим образом

$$x_2(t_0 + \Delta t) = x_2^0 + F\Delta t, \quad x_1(t_0 + \Delta t) = x_1^0 + x_2^0\Delta t + F\Delta t^2/2.$$

Отсюда видно, что для определения вектора $x(t_0+\Delta t)$ совсем не обязательно знать величину t_0; он однозначно определяется лишь вектором начального состояния x^0 и промежутком времени Δt, которое прошло от начального момента.

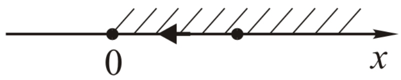
Система, состояние которой однозначно определяется начальным состоянием и промежутком времени, прошедшим от начального момента, называется *динамической системой*[2]. При этом очевидно, что если динамическая система из состояния x^0 за время Δt_1 переходит в состояние x, а из состояния x за время Δt_2 в состояние $\bar{x}$, то за время $\Delta t_1+\Delta t_2$ она перейдет из состояния x^0 в состояние $\bar{x}$.

Динамические системы, описывающие изменение состояния объекта с течением времени, наиболее распространены среди различных математических моделей.

Вернемся к примеру 1.1.2. Известно [109], что скорость распада $\dot{x}$ радиоактивного вещества пропорциональна его количеству. Тогда

$$\dot{x} = -ax, \tag{1.3}$$

где постоянная $a > 0$ является коэффициентом пропорциональности и называется постоянной распада.



Фазовое пространство
и фазовые траектории системы (1.3)

Если задано начальное состояние x^0, то интегрируя уравнение (1.3), получаем

$$x(t) = x(t_0 + \Delta t) = x^0 e^{-a(t-t_0)} = x^0 e^{-a\Delta t}. \tag{1.4}$$

Соотношения (1.4) описывают закон изменения состояния данной системы. Отсюда видно, что состояние $x(t_0 + \Delta t)$ определяется только начальным состоянием и промежутком времени Δt, истекшим от начального момента. Следовательно, данная система является динамической[3]. Пусть за время Δt_1 из состояния x^0 система переходит в состояние x, согласно (1.4) $x = x^0 e^{-a\Delta t_1}$; за время Δt_2 из состояния x система переходит в состояние $\bar{x}$, т.е. $\bar{x} = xe^{-a\Delta t_2}$, тогда

$$\bar{x} = x^0 e^{-a\Delta t_1} e^{-a\Delta t_2} = x^0 e^{-a(\Delta t_1+\Delta t_2)},$$

т.е. за время $\Delta t_1 + \Delta t_2$ из состояния x^0 система переходит в состояние $\bar{x}$.

Обратим внимание также на то, что при положительном начальном условии x^0 решение уравнения (1.3) положительно в любой момент времени, что согласуется с физическим смыслом переменной $x(t)$.

[2]Более точно понятие динамической системы определяется следующим образом: пусть задано некоторое множество состояний – топологическое пространство X [21]. Пусть задан оператор $T(\Delta t)$, зависящий от параметра $\Delta t \geqslant 0$, ставящий в соответствие каждой точке $x \in X$ точку $\bar{x} \in X$: $\bar{x} = T(\Delta t)x$, удовлетворяющий при любых $\Delta t_1 \geqslant 0$, $\Delta t_2 \geqslant 0$ групповому свойству: $T(\Delta t_1 + \Delta t_2) = T(\Delta t_2)T(\Delta t_1)$, где под выражением $T(\Delta t_2)T(\Delta t_1)$ понимается действие оператора $T(\Delta t_2)$ на результат действия оператора $T(\Delta t_1)$. Эта пара: оператор $T(\Delta t)$ и пространство X – называется динамической системой.

[3]В данном случае оператор T определяется экспонентой $e^{-a\Delta t}$. Очевидно, оператор T обладает групповым свойством:

$$e^{-a(\Delta t_1+\Delta t_2)} = e^{-a\Delta t_1}\, e^{-a\Delta t_2}.$$

1.2. Модели популяционной динамики

Рассмотрим некоторые модели, описывающие динамику численности популяций живых организмов. Такие модели широко используются в биофизике.

Пример 1.2.1. Модель роста популяции. Рассмотрим популяцию бактерий одного вида. Состояние популяции в каждый момент времени t можно характеризовать численностью или количеством бактерий — $z(t)$. Очевидно, $z(t) \geqslant 0$. Величина z в действительности имеет лишь целые значения, но при построении модели можно допустить следующую математическую идеализацию: считать, что значением величины z может быть любое действительное число, при этом она непрерывно изменяется с течением времени. Эта идеализация оправдывает себя в ситуации, когда численность популяции велика и проследить за изменением количества особей с точностью до единицы трудно.

Если условия существования бактерий не меняются, то их деление происходит с одинаковой частотой; количество делений a за единицу времени, приходящееся на одну особь, постоянно. Если промежуток времени Δt мал, то количество делений на отрезке времени $[t, t+\Delta t]$ будет равно $az(t)\Delta t$. Тогда

$$z(t+\Delta t) = z(t) + az(t)\Delta t.$$

Отсюда $\Delta z = z(t+\Delta t) - z(t) = az(t)\Delta t$, $\Delta z/\Delta t = az$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем дифференциальное уравнение роста популяции бактерий:[4]

$$\dot{z} = az. \tag{1.5}$$

Оно совпадает с уравнением (1.3) распада радиоактивного вещества с точностью до знака. Так же как и в случае уравнения распада радиоактивного вещества, его решение при начальном условии $z(t_0) = z^0$ имеет вид $z(t) = z^0 e^{a(t-t_0)}$, следовательно, данная система является динамической. Ее фазовым пространством, как и в примере 1.1.2, является множество неотрицательных действительных чисел.

Фазовое пространство
и фазовые траектории системы (1.5)

Аналогичное уравнение может описывать динамику численности не только бактерий, но и других живых организмов. Пусть в популяции количество рождений r и количество смертей s в единицу времени, приходящиеся на одну особь, постоянны. Число r называется коэффициентом рождаемости, число s – коэффициентом смертности. Их разность $a = r - s$ называется коэффициентом размножения. В благоприятных условиях этот коэффициент для амбарного долгоносика (Calandra) составляет 39,6, для полевой мыши – 4,5, для человека – 0,02. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, приходим к уравнению для численности популяции: $\dot{z} = rz - sz$ или $\dot{z} = az$.

Если в популяции сосуществуют n видов с разными коэффициентами размножения, z_i – численность i-го вида, a_i – коэффициент размножения i-го вида, то уравнения динамики численности популяции имеют вид

$$\dot{z}_i = a_i z_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.6}$$

[4]Отметим, что коэффициент a в этом случае является логарифмической производной численности или относительной скоростью роста численности, т.е. отношением абсолютной скорости роста численности к общему количеству: $a = \dot{z}/z$. Коэффициент a называют также коэффициентом воспроизводства.

Решение системы (1.6) при начальных условиях $z_i(t_0) = z_i^0$, $i = \overline{1,n}$, выражается формулой $z_i(t) = z_i^0 e^{a_i(t-t_0)}$, $i = \overline{1,n}$. Данная система также является динамической. Ее фазовое пространство – подмножество евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, состоящее из точек с неотрицательными координатами. Если $a_i < 0$, то i-й вид вымирает, при $a_i = 0$ его численность не изменяется с течением времени, если $a_i > 0$, то наблюдается быстрый неограниченный рост численности i-го вида.

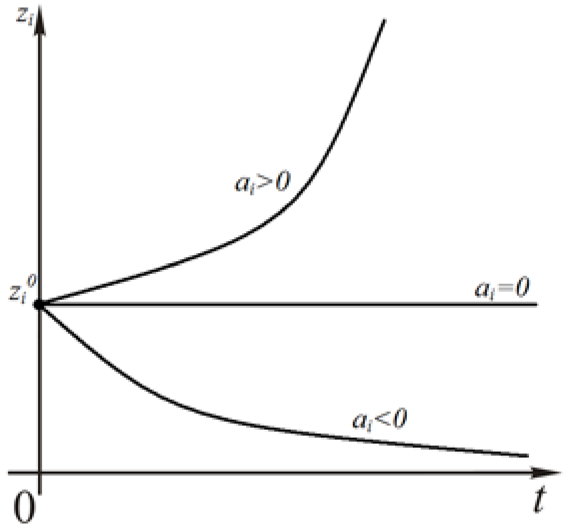
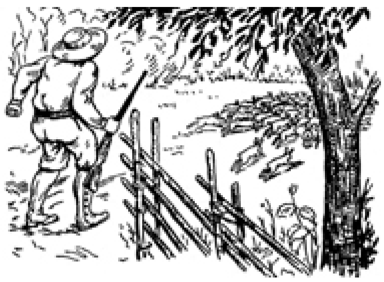


График решения уравнения (1.6)
при разных значениях коэффициента a_i.

Известны реальные примеры быстрого роста численности живых организмов, поставленных в благоприятные условия. Один из наиболее известных – размножение кроликов в Австралии.



В Австралии не существовало кроликов, когда этот материк был открыт европейцами. Кроликов завезли с собой колонисты в 1859 году, и те за 50 лет заселили юго-восточный район Австралии по площади превышающий половину Европы, причиной чему послужила кроличья плодовитость (одна самка за год рождает до 40 крольчат) и отсутствие естественных врагов. Кролики съели растительность, которой питались местные виды животных и выселили их из нор, что привело к исчезновению многих представителей местной фауны. Сильно пострадали и леса, поскольку кролики поедали молодые побеги, не давая деревьям вырасти. На борьбу с этим бичом сельского хозяйства были брошены огромные средства. Правительство Австралии было вынуждено ассигновать крупную сумму денег на строительство специального проволочного заграждения. Только благодаря энергичным мерам удалось справиться с данной проблемой.

В 1884 году в Техас из Венесуэллы на выставку хлопка был завезен водяной гиацинт (эйхорния толстокожая) – водное растение с красивыми сиренево-лиловыми цветами. Завезенное издалека, это растение в новых условиях абсолютно ничем не повреждалось и никем не поедалось. Оно обладало высокими темпами вегетативного размножения: одна розетка за 30 суток образовывала до тысячи отпрысков, каждый из которых вновь начинал делиться. За 3 месяца одно растение превращалось в миллион, а за полгода в триллион экземпляров.

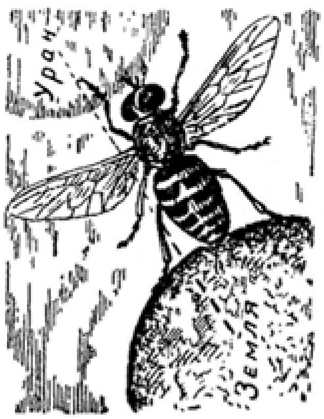
Его бурное размножение и способность жить, не только прикрепившись к грунту, но и свободно плавая на зеркале вод, привели к тому, что на юге США оно быстро покрыло поверхность множества водоемов: медленно текущих рек, прудов, озер и даже огромных водохранилищ. Экзотическое растение стало препятствием для навигации, рыбной ловли, ирригации, буквально забивая оросительные каналы. Попадая на рисовые чеки, оно покрывало их сплошным ковром, облекая крестьян на голод. За несколько десятков лет оно распространилось по всем тропическим и субтропическим регионам и заполнило водоемы Австралии, Африки, Азии.

Необходимо было принять меры противодействия этому растению, получившему новое название "водная чума". В Африке надеялись, что его будут выедать гиппопотамы, но даже эти гигантские пожиратели растений не оправдали ожиданий – скорость размножения эйхорнии превышала темпы ее поглощения. Не дали ощутимых результатов механические средства борьбы: скашивание, выдергивание. Только использование гербицида 2,4-Д, распыляемого с самолетов или специальных судов, позволяло на короткое время очищать водоемы. Но применение этого опасного препарата вскоре было повсеместно запрещено.

Справиться с "водной чумой" помог метод биологической борьбы. В Южной Америке (на родине эйхорнии) нашли несколько видов жука долгоносика, растительноядного клеща, бабочку огневку, которые ничем, кроме эйхорнии, не могли питаться. Их развезли по всем странам, где буйствовала эйхорния и выпустили в водоемы. Обнаружив несметные запасы корма, прожорливые насекомые и клещи стали бурно размножаться и расселяться. Буквально на глазах среди плотных зарослей эйхорнии начали появляться "дыры", растение явно слабело и постепенно отступало.

Другой пример роста численности мы видим в быстром распространении колорадского жука в Европе.

Я.И. Перельман в книге „Живая математика" приводит следующие подсчёты: если бы выживали все потомки одной мухи, то за лето общее количество потомков было бы таково, что их общая длина превышала бы в 18 раз расстояние от земли до Солнца [82].

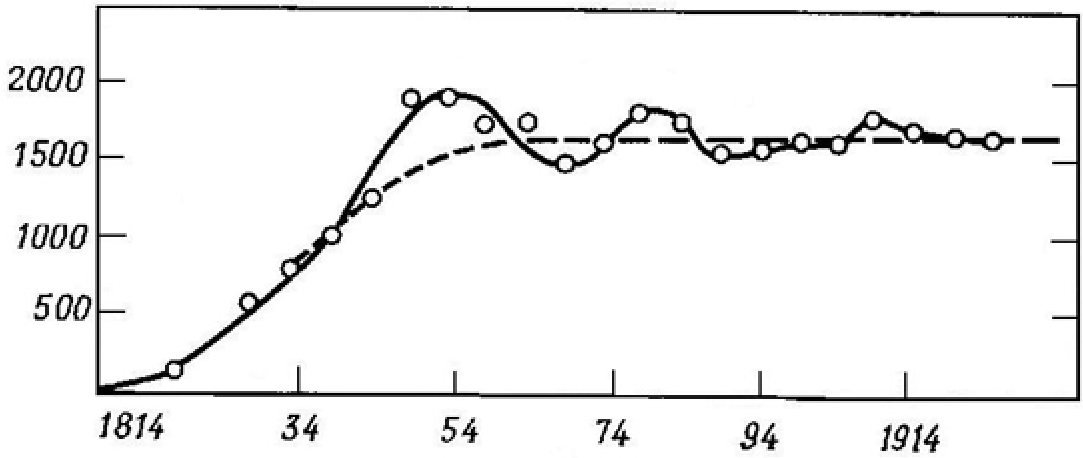


Потомство мухи за одно лето можно было бы вытянуть в линию от Земли до Урана.

Ясно, что экспоненциальный рост не может продолжаться неограниченно долго. Он неизбежно, рано или поздно, ограничивается недостатком пищевых ресурсов, воды, света, жизненного пространства и т.п.

„Если бы на одну муху в следующем поколении приходилось много мух (заметно больше, чем одна), то численность этих насекомых возрастала бы в геометрической прогрессии, и они быстренько заполнили бы всю землю. Если бы, с другой стороны, на одного слона приходилось бы в следующем поколении заметно меньше одного, то их численность также быстро в геометрической прогрессии упала бы до нуля... Одна муха за жизнь может дать огромное число потомков, но у значительной части мух в естественных условиях потомство вообще не выживает” [15].

Итак, у всех существующих, не вымирающих, видов (и слонов, и мух) среднее количество выживших потомков, приходящихся на одного предка, равно единице. Это соответствует тому, что среднее значение коэффициента размножения в нормальных условиях равно нулю. Локально, на некоторое время, оно может принимать положительные значения, и в это время численность будет нарастать, это характерно, например, для популяций леммингов или саранчи, но этот период неизбежно сменяется периодом не менее быстрого вымирания, когда значение коэффициента размножения отрицательно. Среднее значение всё равно будет нулевым.



Динамика численности популяции овец, завезенных на Тасманию.
С 1814 по 1845 год наблюдается экспоненциальный рост
численности в благоприятных условиях.

Пример 1.2.2. Модель роста популяции с учетом полового размножения. Другую модель роста популяции предложил С.П. Капица в связи с изучением роста человечества [18]. Пусть z – численность популяции, $z/2$ – численность особей мужского пола, $z/2$ – численность особей женского пола. Предположим, что скорость прироста популяции (размножения) пропорциональна количеству встреч особей мужского и женского пола, которое, в свою очередь, пропорционально произведению их численностей, т.е.

$$\dot{z} = k(z/2)(z/2).$$

Это предположение называется гипотезой ”эффективных встреч”. Обозначим $k/4 = a$, тогда

$$\dot{z} = az^2. \tag{1.7}$$

При начальном условии $z(t_0) = z^0$ решение данного уравнения имеет вид

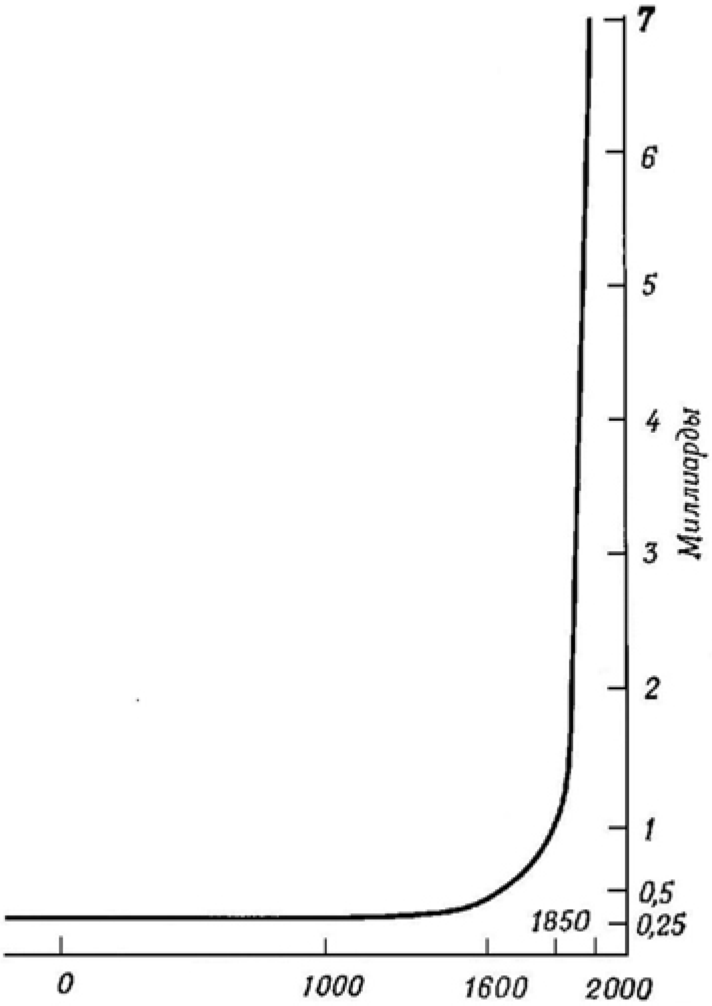
$$z(t) = -\frac{1}{a(t-t_0) - 1/z^0}.$$

Отсюда видно, что в момент времени $t^* = t_0 + 1/(az^0)$ решение обращается в бесконечность. Следовательно, по начальному состоянию z^0 и моменту времени t состояние $z(t)$ можно однозначно определить лишь до момента t^*. Моменту времени t^* никакого конечного значения $z(t^*)$ не соответствует. По начальному состоянию z^0 и промежутку времени $\Delta t^* = t^* - t_0$, прошедшему с начального момента, состояние системы определить уже нельзя. Таким образом, данная система динамической не является.

Если в популяции из n групп численностью z_i, $i = \overline{1,n}$, размножение каждого вида осуществляется в соответствии с гипотезой "эффективных встреч", то уравнения динамики приобретают форму

$$\dot{z}_i = k_i z_i^2/4, \tag{1.8}$$

где k_i – коэффициент пропорциональности для i-го вида. Очевидно, система (1.8) также не является динамической, т.к. в ней фазовые координаты возрастают до бесконечности за конечное время.



Рост численности человечества с начала нашей эры до 2000 г.
Оценка по данным Freye [120], 1978 год.

Замечание 1.2.1. Если хотя бы одна фазовая координата по абсолютной величине неограниченно возрастает за конечное время, то говорят, что система обладает *взрывной неустойчивостью*. Такие системы к динамическим не относятся.

Пример 1.2.3. Модель роста популяции с учетом полового размножения и смертности. Рассмотрим модель С.П. Капицы с учетом смертности [18]

$$\dot{x} = ax^2 - bx.$$

Здесь x – численность популяции, a – коэффициент размножения, b – коэффициент смертности.

При начальном условии $x(t_0) = x_0$ решение данного уравнения имеет вид

$$x = \frac{bx_0}{ax_0 - (ax_0 - b)e^{b(t-t_0)}}$$

В момент времени $t = t_0 + \dfrac{1}{b}\ln(1 - \dfrac{b}{ax_0})$ решение данной системы обращается в бесконечность, следовательно система обладает взрывной неустойчивостью и не является динамической.

Неограниченный рост численности популяции, который имел место в рассмотренных моделях, в реальных условиях практически не наблюдается. Как правило, жизненно важные ресурсы: пища, воздух, вода, жизненное пространство – всегда ограничены и между особями возникает конкуренция, которая приводит к повышению смертности. Учет этой конкуренции приводит к построению других моделей динамики численности.

Пример 1.2.4. Модель Ферхюльста роста биомассы. Рассмотрим модель Ферхюльста роста биомассы:

$$\dot{z} = rz(1 - \frac{z}{W}). \tag{1.9}$$

Здесь z – общее количество особей (биомасса), обитающих на некоторой территории, W – максимальное количество особей, которые могут сосуществовать на этой территории, не мешая друг другу (емкость среды), r – коэффициент размножения в благоприятных условиях. Величины W и r положительны.

При начальном условии $z(t_0) = z_0$ решение данного уравнения имеет вид

$$z = \frac{Wz_0}{z_0 + (W - z_0)e^{-r(t-t_0)}}. \tag{1.10}$$

Это решение всегда ограничено. При t, стремящемся к бесконечности, численность популяции приближается к величине W, т.е. к емкости среды.

Пусть за время Δt_1 из состояния z^0 система переходит в состояние z, согласно (1.10)

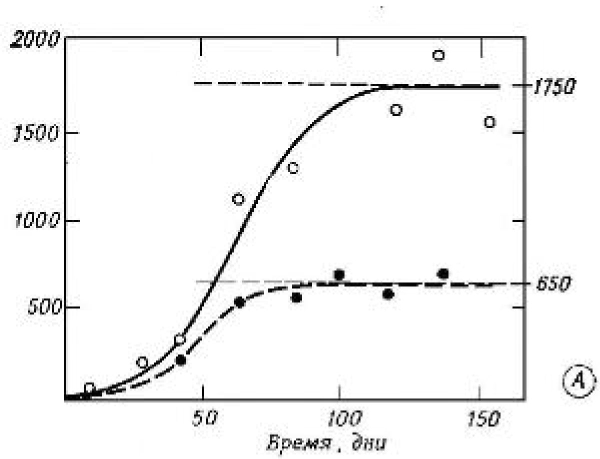
$$z = \frac{Wz_0}{z_0 + (W - z_0)e^{-r(\Delta t_1)}};$$

за время Δt_2 из состояния z система переходит в состояние $\bar{z}$, т.е.

$$\bar{z} = \frac{Wz}{z + (W - z)e^{-r(\Delta t_2)}} = \frac{W\dfrac{Wz_0}{z_0 + (W - z_0)e^{-r(\Delta t_1)}}}{\dfrac{Wz_0}{z_0 + (W - z_0)e^{-r(\Delta t_1)}} + (W - \dfrac{Wz_0}{z_0 + (W - z_0)e^{-r(\Delta t_1)}})e^{-r(\Delta t_2)}} =$$

$$= \frac{W^2 z_0}{Wz_0 + (W(z_0 + (W - z_0)e^{-r(\Delta t_1)}) - Wz_0)e^{-r(\Delta t_2)}} = \frac{Wz_0}{z_0 + (W - z_0)e^{-r(\Delta t_1 + \Delta t_2)}},$$

т.е. за время $\Delta t_1 + \Delta t_2$ из состояния z^0 система переходит в состояние $\bar{z}$. Следовательно, данная система является динамической.



Рост популяции малого мучного хрущака (Tribolium)
при 64 г. (вверху) и 16 г. (внизу) муки на жука

1.3. Системы дифференциальных уравнений

Во всех рассмотренных примерах закон движения системы определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений [5]. Эта ситуация не является исключительной. Очень часто движение динамической системы описывается именно системой дифференциальных уравнений относительно фазовых переменных. В связи с этим рассмотрим такие уравнения более подробно.

Пусть задана система дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.11}$$

относительно функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Если ввести вектор-функции

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_n(t, x)),$$

то уравнения (1.11) можно переписать в векторной форме $\dot{x} = F(t, x)$.

Система (1.11) в заданный момент времени t определяет в каждой точке пространства $\mathbf{R}^n$ вектор скорости движения $\dot{x}$ с координатами $(F_1, \dots, F_n)$, или, другими словами, определяет поле скоростей $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$. Если вектор-функция F не зависит явно от t, то поле скоростей стационарно, т.е. не изменяется с течением времени, и движение точки будет установившимся. Система (1.11) в этом случае называется *автономной*. В противном случае, когда F зависит явно от t, система называется *неавтономной*.

Пусть заданы начальные условия

$$x(t_0) = x^0, \quad x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0). \tag{1.12}$$

Решением системы (1.11) при начальных условиях (1.12) называется непрерывно дифференцируемая вектор-функция $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, удовлетворяющая при $t > t_0$ уравнениям (1.11) и начальным условиям (1.12).

Задача отыскания решения $x(t)$ системы (1.11), удовлетворяющего начальным условиям (1.12), называется *задачей Коши* для системы (1.11).

[5]Если набор переменных, характеризующих состояние системы, конечный, как в ранее рассмотренных примерах, то система называется *сосредоточенной*. Существуют процессы, когда набор переменных, характеризующих систему, бесконечен. Такую систему называют *распределенной* . Простейшим примером распределенной системы является твердое тело, различные участки которого по-разному нагреваются с течением времени. Распределенные процессы описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных, системами интегродифференциальных уравнений.

Из курса дифференциальных уравнений [109] известно, что если в некоторой окрестности начальных условий (t_0, x^0) функции F_i непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют *условию Липшица*[6] по аргументам x_i, $i = \overline{1,n}$, то в достаточно малой окрестности точки t_0 существует единственное решение[7] задачи Коши[8] (1.11), (1.12).

Пример 1.3.1. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\dot{x} = \sqrt{x}.$$

Оно является частным случаем уравнения с разделяющимися пременными. Интегрируя его, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dt, \quad 2\sqrt{x} = t + C, \quad x = \frac{(t+C)^2}{4},$$

где C – некоторая константа, определяющаяся из начальных условий. Если $x(0) = 0$, то $C = 0, x(t) = \frac{t^2}{4}$. Но, очевидно, $x(t) \equiv 0$ также удовлетворяет уравнению при нулевых начальных условиях. Следовательно, задача Коши имеет два различных решения. Это происходит из-за того, что правая часть уравнения $\sqrt{x}$ не является липшицевой функцией в окрестности нуля.

Замечание 1.3.1. Всюду в дальнейшем, рассматривая систему вида (1.11), будем считать, что функции F_i непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условию Липшица по аргументам x_i, $i = \overline{1,n}$, если не оговорено противное.

При определенных условиях (если например, функции F_i удовлетворяют условию Липшица по аргументам x_i во всем пространстве переменных t, x) решение может быть продолжено[9] для любых значений параметра $t > t_0$. Если при этом уравнения (1.11) описывают движение некоторого объекта, то для него выполняется принцип детерминированности. В этом случае, если система (1.11) автономна, то, как известно из теории дифференциальных уравнений, ее решение в момент времени t зависит только от начальных условий x^0 и промежутка времени Δt, прошедшего с момента t_0, поэтому объект, движение которого

[6]Функция $F_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой области G изменения переменных t, x, если найдется константа L, такая, что для любых точек (t, x), $(t, \bar{x}) \in G$ справедливо неравенство

$$|F_i(t, x_1, \ldots, x_n) - F_i(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)| \leqslant L \sum_{j=1}^{n} |x_j - \bar{x}_j|.$$

[7]Этот факт называется теоремой существования и единственности решения, причем это решение непрерывным образом зависит от начальных данных. Иными словами, пусть выполнены условия теоремы и через точку (t_0, x^0) проходит решение $x(t)$ системы (1.11), определенное на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta$, $|\tilde{x}_i^0 - x_i^0| < \delta$, $i = \overline{1,n}$, решение $\tilde{x}(t)$ системы (1.11), проходящее через точку $(\tilde{t}_0, \tilde{x}^0)$, существует на отрезке $[\alpha, \beta]$ и отличается там от $x(t)$ меньше чем на ε:

$$|\tilde{x}_i(t) - x_i(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [\alpha, \beta], \quad i = \overline{1,n}.$$

[8]Условие Липшица можно заменить более сильным, потребовав существования ограниченных по модулю частных производных $\partial F_i / \partial x_j$, $i, j = \overline{1,n}$.

[9]В примере 1.2.2 правая часть уравнения (1.7) удовлетворяет условию Липшица лишь в любой ограниченной окрестности начальных условий, но не удовлетворяет этому условию во всем пространстве R^1. Поэтому задача Коши имеет единственное решение при любых начальных условиях в некоторой окрестности начального момента времени t_0, но это решение нельзя продолжить на неограниченно большие значения времени t.

описывается автономной системой (1.11), есть динамическая система. При этом через любую точку в фазовом пространстве будет проходить единственная фазовая траектория. Действительно, если предположить обратное, то задача Коши с начальными условиями, взятыми в этой точке, будет иметь два различных решения, что невозможно.

Если же система (1.11) неавтономная, то через точку в фазовом пространстве X может проходить не одна фазовая траектория, поскольку момент попадания в эту точку для разных решений системы (1.11) может быть разным. Но если рассмотреть расширенное фазовое пространство (t, X), то через каждую точку в нем будет проходить единственная кривая, соответствующая решению системы (1.11). Если к набору переменных x, характеризующих в этом случае объект, добавить еще один формальный параметр $\tau = t$ и дополнить систему (1.11) уравнением $\dot{\tau} = 1$, то состояние объекта (τ, x) в расширенном пространстве переменных снова будет однозначно определяться лишь начальным состоянием (τ_0, x^0) и промежутком времени Δt, прошедшим от начального момента. Тогда неавтономная система дифференциальных уравнений будет определять динамическую систему в расширенном фазовом пространстве.

Для построения математических моделей отбора используются как автономные, так и неавтономные системы дифференциальных уравнений.

1.4. Устойчивость автономных систем

Если некоторый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (1.11) с начальными условиями (1.12), которые обычно являются результатом измерений и, следовательно, получены с некоторой погрешностью, то естественно возникает важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых достаточно малое изменение начальных значений вызывает сколь угодно малое изменение решения.

Если время t изменяется на конечном отрезке $t_0 \leq t \leq T$, то ответ дает теорема о непрерывной зависимости решения от начальных значений[10]. Если же переменная времени t может принимать сколь угодно большие значения, то эта проблема относится к теории устойчивости, созданной А.М. Ляпуновым [72].

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.13}$$

Точка $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ фазового пространства X, в которой одновременно обращаются в ноль все правые части уравнений (1.13):

$$F_i(x_1^*, \ldots, x_n^*) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

называется *состоянием равновесия* (точкой покоя) данной системы.

Обозначим через $S^*(R)$ шар: $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2 < R^2$.

Состояние равновесия x^* системы (1.13) называется устойчивым в смысле Ляпунова, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что любая траектория системы, начинающаяся в начальный момент $t = t_0$ в точке $M_0 \in S^*(\delta)$, все время затем остается в шаре $S^*(\varepsilon)$.

Состояние равновесия x^* называется асимптотически устойчивым , если оно устойчиво в смысле Ляпунова, и существует такое $\delta_1 > 0$, что каждая траектория системы, начинающаяся в точке M_0 области $S^*(\delta_1)$, стремится к состоянию равновесия x^*, когда время t неограниченно растет.

[10] Смотри с. 21

1.4.1. Устойчивость по первому приближению

Для дальнейшего исследования будем считать, что функции F_i дифференцируемы, для значений частных производных этих функций в состоянии равновесия будем использовать следующие обозначения

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^*), \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \tag{1.14}$$

Состояние равновесия x^* системы (1.13), для которого определитель

$$\Delta(x^*) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

отличен от нуля, называется *простым* [10].

При исследовании на устойчивость простого состояния равновесия x^* динамической системы (1.13), где нелинейные функции $F_i(x)$ дифференцируемы в окрестности точки покоя x^* достаточное число раз, часто применяется метод, который называется исследованием на устойчивость по первому (линейному) приближению [98], [109], [22].

Суть этого метода состоит в том, что функции $F_i(x)$ раскладываются в окрестности состояния равновесия x^* по формуле Тейлора, после чего, с учетом принятых обозначений (1.14) система (1.13) приводится к виду

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^*) + R_i(x_1 - x_1^*, \dots, x_n - x_n^*), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.16}$$

где слагаемые R_i содержат члены не ниже второго порядка малости относительно $x_1 - x_1^*, \dots, x_n - x_n^*$. Затем вместо точки покоя x^* системы (1.16) исследуется на устойчивость та же точка покоя линейной системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^*), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.17}$$

называемой системой уравнений первого приближения для системы (1.16).

Очевидно, что исследование на устойчивость состояния равновесия x^* динамической системы (1.16) может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения – точки покоя, расположенной в начале координат[11]. Перенося начало координат в точку x^*, т.е., другими словами, полагая $x_j - x_j^* = \xi_j$, $j = \overline{1,n}$, уравнения (1.16) можно привести к виду

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + R_i(\xi), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.18}$$

и вместо точки покоя $\xi_i \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$, системы (1.18) исследовать на устойчивость ту же точку покоя соответствующей системы уравнений первого приближения:

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.19}$$

[11] На практике для исследования состояния равновесия x^* динамической системы (1.13) сначала переносят начало координат в исследуемую точку, а затем раскладывают правые части системы в окрестности нового начала координат по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (1.13) принимает вид (1.18).

Условия применимости метода исследования на устойчивость по первому приближению были детально исследованы А.М. Ляпуновым и в дальнейшем расширены трудами многих других математиков.

Теорема 1.4.1. *Если все корни характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.20}$$

имеют отрицательные действительные части, то состояние равновесия x^* динамических систем (1.16), (1.17) асимптотически устойчиво. Если хотя бы один корень характеристического уравнения (1.20) имеет положительную действительную часть, то состояние равновесия x^* системы (1.16) и системы (1.17) неустойчиво.

При выполнении условий теоремы возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

В критическом случае, когда все действительные части корней характеристического уравнения неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, на устойчивость состояния равновесия x^* системы (1.16) начинают влиять нелинейные члены R_i и исследование на устойчивость по первому приближению становится невозможным.

Естественно, аналогичные выводы справедливы и для тривиального состояния равновесия систем (1.18), (1.19).

1.4.2. Состояния равновесия системы второго порядка

Рассмотрим нелинейную автономную динамическую систему второго порядка

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \tag{1.21}$$

имеющую простое состояние равновесия x^*.

Введем обозначения: $P'_x(x^*) = a_{11}$, $P'_y(x^*) = a_{12}$, $Q'_x(x^*) = a_{21}$, $Q'_y(x^*) = a_{22}$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \sigma = a_{11} + a_{22}.$$

Тогда характеристическое уравнение (1.20), может быть записано в виде квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

имеющего корни $\lambda_{1,2} = \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}$, причем $\Delta \neq 0$. Возможны следующие случаи.

1. $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta > 0$, корни характеристического уравнения действительные одинаковых знаков: $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Состояние равновесия является узлом: устойчивым, когда $\lambda_1 < 0$, и неустойчивым, когда $\lambda_1 > 0$.

2. $\Delta < 0$, корни характеристического уравнения действительные разных знаков: $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Состояние равновесия является седлом.

3. $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, $\sigma \neq 0$, корни характеристического уравнения комплексные сопряженные: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, причем $\alpha \neq 0$. Состояние равновесия является фокусом: устойчивым, когда $\alpha < 0$, и неустойчивым, когда $\alpha > 0$.

4. $\Delta > 0$, $\sigma = 0$, корни характеристического уравнения чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Исследование на устойчивость по первому приближению невозможно. Требуются дополнительные исследования.

Состояния равновесия вида 1-3 называют *грубыми* состояниями равновесия [10].

В случае 4 система первого (линейного) приближения для системы (1.21) имеет состояние равновесия типа центр в точке x^*, для нелинейной же системы это состояние равновесия, вообще говоря, имеет характер фокуса (его называют сложным фокусом), хотя случай, когда все траектории нелинейной системы, расположенные в окрестности состояния равновесия x^*, остаются замкнутыми (x^* – центр) все же возможен в виде исключения [10].

Наиболее типичным считается случай, при котором лишь некоторые (может быть и ни одной) кривые остаются замкнутыми, а остальные превращаются в спирали. Такие замкнутые траектории, в окрестности которых все траектории являются спиралями, называются *предельными циклами*. Различают устойчивые, неустойчивые и полуустойчивые предельные циклы.

1.4.3. Построение фазового портрета для системы второго порядка.

Чтобы построить траектории системы (1.21) на фазовой плоскости x, y, можно, разделив одно уравнение на другое, свести ее к уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}. \tag{1.22}$$

Естественно наряду с уравнением (1.22) рассматривать также уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \tag{1.23}$$

Если оба эти уравнения имеют смысл, то они эквивалентны. Если же в некоторых точках одно из уравнений (1.22), (1.23) теряет смысл, то в таких точках его заменяют другим из этих уравнений.

Траектории системы (1.21) будут интегральными кривыми уравнения (1.22) (и (1.23)). Их можно построить или решая уравнение (1.22) (часто оно решается проще, чем система (1.21)), или используя *метод изоклин* [22], при этом сначала необходимо исследовать на устойчивость состояния равновесия системы (1.21). Геометрическое место точек плоскости x, y, в которых наклон касательных к решениям уравнения (1.22) один и тот же, называется *изоклиной*. Следовательно, уравнение изоклины имеет вид $Q(x,y)/P(x,y) = k$, где k – постоянный параметр.

Метод изоклин состоит в том, что придавая параметру k близкие числовые значения, рисуем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых приближенно строим интегральные линии дифференциального уравнения (1.22), т.е., кривые, которые в точках пересечения с изоклинами имеют касательные с соответствующим угловым коэффициентом k.

Приравнивая к 0 правые части уравнения (1.21) получаем уравнения главных изоклин. $P(x,y) = 0$ – уравнение изоклины вертикальных касательных, $Q(x,y) = 0$ – уравнение изоклины горизонтальных касательных.

1.4.4. Пример качественного исследования динамической системы

В качестве примера качественного исследования динамической системы рассмотрим простейшую модель химической реакции [92].

Пусть некоторое вещество A с постоянной скоростью k_1 поступает в химический реактор. Концентрацию вещества A в реакторе обозначим x. Там оно превращается в вещество B со скоростью, пропорциональной концентрации x. Постоянный коэффициент пропорциональности обозначим k_2. Концентрацию вещества B обозначим y. После этого полученное вещество B выводится из реактора со скоростью, пропорциональной его концентрации y. Коэффициент пропорциональности для скорости выведения B обозначим k_3. Константы k_1, k_2, k_3 положительны. Динамика данного процесса описывается системой двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x, \tag{1.24}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y. \tag{1.25}$$

Здесь производные $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{dy}{dt}$ имеют смысл скоростей изменения концентраций веществ A и B в реакторе, величина $k_2 x$ – скорость превращения вещества A в вещество B, $k_3 y$ – скорость выведения вещества B из реактора. Первое уравнение описывает изменение концентрации вещества A, второе – вещества B.

Состояние равновесия (x^*, y^*) находится путем приравнивания правых частей системы (1.24), (1.25) к нулю:

$$k_1 - k_2 x^* = 0, \quad x^* = \frac{k_1}{k_2},$$

$$k_2 x^* - k_3 y^* = 0, \quad y^* = \frac{k_2}{k_3}.$$

Характер состояния равновесия определяется по методу Ляпунова. Здесь характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k_2 - \lambda & 0 \\ k_2 & -k_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 + (k_2 + k_3)\lambda + k_2 k_3 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения выражается следующим образом

$$\mathcal{D} = (k_2 + k_3)^2 - 4k_2 k_3 = (k_2 - k_3)^2 \geqslant 0.$$

Следовательно корни уравнения всегда действительны и определяются по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-(k_2 + k_3) \pm \sqrt{\mathcal{D}}).$$

Так как $\sqrt{\mathcal{D}} < k_2 + k_3$, то оба корня характеристического уравнения отрицательны, поэтому состояние равновесия представляет собой устойчивый узел.

Поделив второе уравнение системы на первое, приходим к уравнению первого порядка

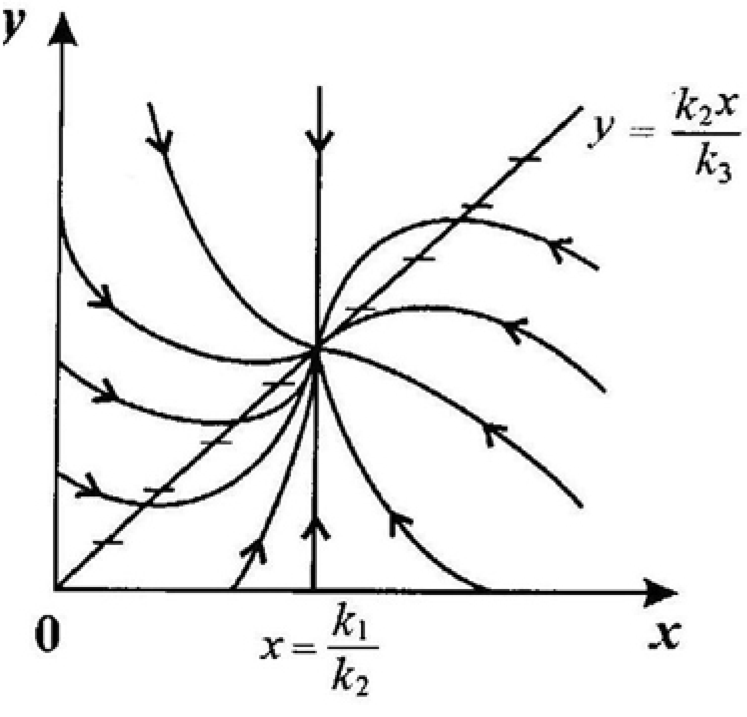
$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 x - k_3 y}{k_1 - k_2 x}.$$

Изоклины вертикального наклона находятся из условия $k_1 - k_2 x = 0$, откуда $x = \dfrac{k_1}{k_2}$; изоклины горизонтального наклона находятся из условия $k_2 x - k_3 y = 0$, откуда $x = \dfrac{k_2 x}{k_3}$.

Определим, под каким углом пересекаются координатные оси с фазовыми траекториями. Если $x = 0$, то $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{k_3}{k_1} y$. Таким образом, тангенс угла наклона касательной к фазовым траекториям системы (1.24), (1.25), пересекающим ось координат $x = 0$, отрицателен в верхней полуплоскости. При этом величина тангенса угла наклона касательной увеличивается с удалением от начала координат.

Если $y = 0$, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{k_2 x}{k_1 - k_2 x}$. При $0 < x < \dfrac{k_1}{k_2}$ тангенс угла наклона фазовой траектории, пересекающей ось абсцисс, положителен и увеличивается от нуля до бесконечности с увеличением x. Затем при дальнейшем увеличении тангенс угла наклона уменьшается по абсолютной величине, оставаясь отрицательным, и стремиться к -1 при x, стремящемся к бесконечности.

Зная направление касательных к фазовым траекториям на главных изоклинах и на осях координат, легко построить всю картину фазовых траекторий. При этом концентрация вещества A стремится к стационарному состоянию всегда монотонно, а концентрация вещества B может проходить через минимальное или максимальное значения.



Глава 2.
Системы с неотрицательными решениями

2.1. Неотрицательное решение задачи Коши

Нередко постановка задачи требует, чтобы фазовые переменные $x_1, \ldots, x_n$ модели принимали лишь неотрицательные значения. Так, в физических процессах неотрицательными остаются энергии частиц, в химических – концентрации и количества реагирующих веществ, в биологических – численность особей различных видов, в экономических – величины производств, капиталы, а также цены на продукцию. Это можно было видеть в примерах 1.1.2, 1.2.1 – 1.2.4.

Фазовым пространством таких динамических систем является подмножество евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, состоящее из точек с неотрицательными координатами[1]. Если закон движения является следствием системы (1.11), то ее решение $x(t)$, соответствующее любой фазовой траектории, должно иметь неотрицательные компоненты $x_i(t)$ в каждый момент времени $t \geqslant t_0$.

Будем говорить, что задача Коши (1.11), (1.12) имеет *неотрицательное решение* $x(t)$, если все его компоненты $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ неотрицательны для любых рассматриваемых значений параметра t. Также будем называть начальные условия $x(t_0) = x^0$ неотрицательными, если все координаты вектора x^0 неотрицательны. Очевидно, что для неотрицательности решения необходимо, чтобы начальные условия были неотрицательны. Но это условие не является достаточным.

В связи с этим возникает вопрос: какие условия необходимо наложить на правые части системы уравнений (1.11), чтобы ее решение было неотрицательным при неотрицательных начальных условиях? Этот вопрос для разных классов дифференциальных уравнений исследовался в работах С.Г. Крейна, М.Г. Крейна, М.А. Рутмана, М.А. Красносельского, Е.Ф. Сабаева и др. [25, 24, 23, 26, 96]. Для нашего случая ответ содержится в следующей теореме [23].

Теорема 2.1.1. *Для того чтобы решение системы* (1.11) *при любых начальных условиях с неотрицательной i-й координатой*

$$x_i(t_0) \geqslant 0 \tag{2.1}$$

имело соответствующую неотрицательную компоненту $x_i(t) \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция F_i удовлетворяла условию квазиположительности:

$$F_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0, \tag{2.2}$$

при любых переменных x_j, $j \neq i$.

[1] Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в пространстве $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условию $x_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, называется положительным n-мерным октантом.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть при начальных условиях с неотрицательной i-й координатой решение системы (1.11) имеет соответствующую неотрицательную компоненту $x_i(t) \geqslant 0$. Возьмем начальные условия в момент времени τ так, чтобы i-я фазовая координата была равна нулю:

$$x_i(\tau) = 0.$$

В последующие моменты времени $\tau + \Delta t$, $\Delta t > 0$, справедливо неравенство $x_i(\tau + \Delta t) \geqslant 0$. Отсюда

$$\dot{x}_i(\tau) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{x_i(\tau + \Delta t) - x_i(\tau)}{\Delta t} \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\dot{x}_i(\tau) = F_i(\tau, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0.$$

Так как момент времени τ может быть любым, то это доказывает выполнение условия квазиположительности (2.2).

Достаточность. Сначала рассмотрим случай, когда условие квазиположительности выполняется в виде строгого неравенства:

$$F_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) > 0. \tag{2.3}$$

Предположим, что при начальных условиях с неотрицательной i-й координатой существует решение $x(t)$ системы (1.11), в котором i-я компонента становится отрицательной в некоторый момент времени t. Пусть τ – точная нижняя грань моментов времени, в которых $x_i(t) < 0$. Тогда $x_i(t) \geqslant 0$ при $t < \tau$ и в любой правой полуокрестности точки τ существует точка $t > \tau$ такая, что $x_i(t) < 0$. В силу непрерывности функции $x_i(t)$ отсюда следует, что в точке τ эта функция равна нулю: $x_i(\tau) = 0$. Решение $x(t)$ в момент времени τ имеет нулевую i-ю компоненту, и по условию теоремы в этот момент времени имеет место неравенство $F_i(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)) > 0$. Так как функции $x(t)$ и F_i непрерывны, то существует окрестность точки τ, в которой суперпозиция $F_i(t, x(t))$ сохраняет строго положительные значения. Поскольку $\dot{x}_i = F_i(t, x(t))$, то i-я компонента решения в этой окрестности строго монотонно возрастает. Следовательно, в некоторой правой полуокрестности точки τ имеет место неравенство $x_i(t) > x_i(\tau) = 0$ при $t > \tau$, но это противоречит тому, что в любой правой полуокрестности точки τ есть точка t, в которой $x_i(t) < 0$. Тем самым достаточность для первого случая доказана.

Теперь обратимся к общему случаю, когда условие квазиположительности выполняется в виде (2.2). Рассмотрим вспомогательную систему, зависящую от положительного параметра ε:

$$\dot{x}_i = F_i(t, x) + \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.4}$$

Правые часть i-го уравнения этой системы удовлетворяет условию квазиположительности в виде строгого неравенства, т.е. система (2.4) имеет решение $x(t, \varepsilon)$ с неотрицательной компонентой

$$x_i(t, \varepsilon) \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Очевидно, пределы правых частей уравнений (2.4) при ε, стремящемся к нулю, соответственно равны правым частям уравнений (1.11). В силу непрерывной зависимости решения от параметра предел решения системы (2.4) при ε, стремящемся к нулю, является решением системы (1.11):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_i(t, \varepsilon) = x_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Поскольку знак неравенства (2.5) в пределе сохраняется, то $x_i(t) \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 2.1.2. *Пусть для правой части i-го уравнения системы (1.11) условие квазиположительности выполняется в виде равенства*

$$F_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0. \tag{2.6}$$

Если при этом в начальный момент времени задано условие

$$x_i(t_0) = 0, \tag{2.7}$$

то для всех $t > t_0$ справедливо равенство $x_i(t) = 0$.

Доказательство. Условия (2.6), (2.7) являются частным случаем условий теоремы 2.1.1, гарантирующих неотрицательность i-й компоненты решения: $x_i(t) \geqslant 0$. Сделав замену $x_i = -y_i$ в уравнениях (1.11), приходим к системе

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_j = F_j(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, -y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq i, \\
&\dot{y}_i = -F_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, -y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Так как

$$y_i(t_0) = -x_i(t_0) \geqslant 0, \; -F_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

то i-я компонента решения этой системы неотрицательна: $y_i(t) = -x_i(t) \geqslant 0$. Отсюда $x_i(t) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 2.1.3. *Пусть для правой части i-го уравнения системы (1.11) выполнено условие (2.6). Если при этом i-я координата начальных условий (1.12) удовлетворяет строгому неравенству*

$$x_i(t_0) > 0, \tag{2.8}$$

то для всех $t > t_0$ справедливо неравенство $x_i(t) > 0$.

Доказательство. Из теоремы 2.1.1 вытекает неотрицательность i-й компоненты решения $x(t)$. Так как в начальный момент времени выполнено (2.8), то компонента $x_i(t)$ отлична от тождественного нуля.

Предположим, что в некоторый момент времени $\tau_0 > t_0$ компонента $x_i(t)$ решения задачи (1.11), (1.12) обращается в ноль:

$$x_i(\tau_0) = 0, \tag{2.9}$$

в то время как

$$x_j(\tau_0) = x_j^*, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq i. \tag{2.10}$$

Сделав в системе (1.11) замену переменных $t = -\tau$, $\tilde{x}(\tau) = x(-t)$ приходим к системе

$$\dot{\tilde{x}}_i = -F_i(-\tau, \tilde{x}), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.11}$$

Так как функции F_i удовлетворяют условию Липшица по переменным x, то и правые части полученной системы (2.11) удовлетворяют условию Липшица по переменным $\tilde{x}$. Если рассмотреть начальные условия $\tilde{x}_i(-\tau_0) = 0$, $\tilde{x}_j(-\tau_0) = x_j^*$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq i$, то задача Коши для системы (2.11) будет иметь единственное решение, по крайней мере, на отрезке $[-\tau_0, t_0]$. В силу (2.6) для (2.11) имеет место равенство

$$-F_i(-\tau, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{i-1}, 0, \tilde{x}_{i+1}, \ldots, \tilde{x}_n) = 0,$$

тогда по следствию 2.1.2 для решения поставленной задачи Коши имеет место равенство $\tilde{x}_i \equiv 0$. Это решение связано с решением исходной задачи Коши соотношением $\tilde{x}_i(\tau) = x_i(-t)$, причем $\tilde{x}_i(-t_0) = x_i(t_0) > 0$. Полученное противоречие доказывает следствие.

Очевидно, условие квазиположительности выполняется для правой части уравнений (1.3), (1.5), (1.6), (1.7), которые описывают модели примеров 1.1.2 – 1.2.2.

Пусть заданы функции $\Phi_i(t, z, y)$, где $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $i = \overline{1, n}$. Функции Φ_i будем называть квазиположительными по переменным z, если выполняются неравенства

$$\Phi_i(t, z_1, \ldots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \ldots, z_n, y) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.12}$$

при неотрицательных компонентах z и произвольных компонентах y.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{rcll} \dot{z}_i & = & \Phi_i(t, z, y), & i = \overline{1, n}, \\ \dot{y}_j & = & R_j(t, z, y), & j = \overline{1, m}, \end{array} \tag{2.13}$$

где функции Φ_i, R_j непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условию Липшица по переменным z и y. Начальные условия для системы (2.13)

$$z_i(t_0) = z_i^0, \ i = \overline{1, n}, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \ j = \overline{1, m}, \tag{2.14}$$

будем называть неотрицательными по переменным z, если $z_i^0 \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$.

Решение задачи Коши (2.13), (2.14) будем называть *неотрицательным* по переменным z, если при любом $t > t_0$ справедливы неравенства $z_i(t) \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$. Имеет место

Следствие 2.1.4. *Для того чтобы решение задачи Коши* (2.13), (2.14) *было неотрицательным по переменным z при неотрицательных по z начальных условиях, необходимо и достаточно, чтобы для функций Φ_i выполнялись условия квазиположительности* (2.12) *по переменным z при неотрицательных компонентах z и произвольных компонентах y.*

Доказательство. *Необходимость.* Если решение задачи Коши неотрицательно по переменным z, то это означает, что каждая компонента $z_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, неотрицательна. Тогда по теореме 2.1.1 необходимо выполнение неравенств (2.12) при любых (а тем более и при неотрицательных) значениях компонент z.

Достаточность. Предположим от противного, что некоторые компоненты решения задачи Коши (2.13), (2.14) при неотрицательных начальных условиях могут принимать строго отрицательные значения. Пусть t^* – точная нижняя грань моментов времени, в которых хотя бы одна компонента решения отрицательна. Тогда $z_i(t) \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, при $t < t^*$ и в любой правой полуокрестности точки t^* существует точка $t > t^*$ такая, что по крайней мере одна компонента $z_i(t) < 0$. В силу непрерывности функции $z_i(t)$ отсюда следует, что в точке t^* эта функция равна нулю: $z_i(t^*) = 0$. Как следует из теоремы 2.1.1 для того чтобы компонента $z_i(t)$ принимала отрицательные значения в сколь угодно малой правой полуокрестности точки t^*, необходимо, чтобы в точке t^* выполнялось неравенство

$$\Phi_i(t^*, z_1, \ldots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \ldots, z_n, y) < 0,$$

но в момент времени t^* все компоненты z неотрицательны. Следовательно, выполняются противоположные неравенства (2.12). Полученное противоречие доказывает теорему.

Начальные условия (2.14) будем называть нетривиальными по переменным z, если хотя бы одна компонента z_i^0 не равна нулю.

Решение задачи Коши (2.13), (2.14) будем называть *нетривиальным* в момент времени t по переменным z, если хотя бы одна из компонент $z_i(t)$ не равна нулю.

Следствие 2.1.5. *Если в системе (2.13) функции Φ_i удовлетворяют условию квазиположительности в виде равенства*

$$\Phi_i(t, z_1, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \dots, z_n, y) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.15}$$

при неотрицательных компонентах z и произвольных компонентах y, начальные условия (2.14) нетривиальны и неотрицательны по z, то решение задачи Коши (2.13), (2.14) будет нетривиальным и неотрицательным по переменным z. Нулевым компонентам $z_i^0 = 0$ в начальных условиях будут соответствовать нулевые компоненты $z_i(t) \equiv 0$ в решении.

Следствие 2.1.5 обобщает следствия 2.1.2, 2.1.3 на случай нескольких компонент решения. Другими словами, нулевым компонентам z_i^0 в начальных условиях (2.14) будут соответствовать нулевые компоненты $z_i(t)$ решения задачи (2.13), (2.14), а положительным компонентам z_k^0 в начальных условиях (2.14) будут соответствовать положительные компоненты $z_k(t)$ решения задачи (2.13), (2.14).

Следствие 2.1.6. *Для того чтобы решение системы (1.11) при любых неотрицательных начальных условиях было неотрицательным*[2]*, необходимо и достаточно, чтобы функции F_i для всех индексов $i = \overline{1, n}$, удовлетворяли условию квазиположительности (2.2) при неотрицательных компонентах x.*

Пример 2.1.1. Модель Вольтерра – Лотки. Рассмотрим n биологических видов, сосуществующих в общей среде обитания, численности которых соответственно равны $z_1, z_2, \dots, z_n$, тогда $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_n$ – скорости изменения численностей этих видов. Если не учитывать взаимное влияние особей различных видов друг на друга, то динамика численностей, как уже было показано в примере 1.2.1, задается уравнениями (1.6).

Решение этих уравнений при положительных коэффициентах размножения – неограниченно возрастающие показательные функции. В действительности, как уже отмечалось, наблюдать такую динамику можно очень редко, лишь тогда, когда отсутствуют ограничения на жизненно необходимые ресурсы – питание, воду, воздух, жизненное пространство и т.п.[3] Обычно эти ресурсы ограничены и между особями существует конкуренция, которая приводит к повышению смертности[4]. В этом случае динамика численностей задается уравнениями

$$\dot{z}_i = a_i z_i - p_i z_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.16}$$

где p_i – коэффициент дополнительной смертности особей i-го вида в результате конкуренции. Пусть существование каждого j-го вида вносит вклад в повышение смертности i-го вида с коэффициентом p_{ij}, при этом величина p_i определяется следующим образом[5]

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j, \quad i = \overline{1, n}.$$

---

[2]Иными словами, следствие 2.1.6 говорит о том, что фазовая траектория системы (1.11), начинающаяся в положительном n-мерном октанте, никогда его не покидает. Точки этого октанта в силу закона движения, определяемого дифференциальными уравнениями (1.11), переходят в точки этого же октанта. В этом случае говорят, что положительный октант инвариантен относительно преобразования, определяемого уравнениями (1.11). Термин ”инвариантен” применяется не только для октанта, но и для любого другого множества, обладающего аналогичным свойством сохранения.

[3]Например, размножение кроликов в Австралии.

[4]Внешние факторы, ограничивающие размножение особей, такие как недостаток питательного ресурса или наличие хищников в зоне обитания и т.п., называются лимитирующими.

[5]В модели Вольтерра – Лотки существование каждого j-го вида является лимитирующим фактором для каждого i-го.

Тогда уравнения (2.16) примут вид

$$\dot{z}_i = a_i z_i - z_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.17}$$

Эта модель называется моделью Вольтерра – Лотки[6]. Она является обобщением модели Ферхюльста на случай n сосуществующих видов.

Проверим условия теоремы 2.1.6. Действительно, функции

$$F_i = a_i z_i - z_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j, \quad i = \overline{1, n},$$

являются квазиположительными: каждая из функций F_i обращается в ноль, как только станет равной нулю соответствующая переменная z_i. Следовательно, при любых неотрицательных начальных условиях решение системы (2.17) будет неотрицательным, что соответствует смыслу переменных z_i. Из следствия 2.1.2 вытекает, что нулевым координатам в начальном условии будут соответствовать нулевые компоненты в решении. Положительным координатам в начальном условии согласно следствию 2.1.3 будут соответствовать строго положительные компоненты в решении.

Примером модели Вольтерра – Лотки служит система

$$\dot{z}_i = a_i z_i - z_i \sum_{j=1}^{n} z_j, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.18}$$

Здесь коэффициент дополнительной смертности каждого вида пропорционален общей численности популяции – чем больше особей существует в общей среде с ограниченным ресурсом, тем выше их смертность.

Пример 2.1.2. Обобщенная модель Вольтерра – Лотки Пусть при отсутствии ограничений на жизненные ресурсы размножение каждого i-го вида подчиняется следующему закону

$$\dot{z}_i = \varphi_i(z_i), \quad i = \overline{1, n},$$

где функции φ_i – непрерывные, строго монотонно возрастающие, $\varphi_i(0) = 0$. Пусть вклад каждого j-го вида в повышение коэффициента дополнительной смертности i-го вида выражается функцией $\psi_{ij}(z_j)$, где ψ_{ij} – непрерывные, строго монотонно возрастающие, $\psi_{ij}(0) = 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$; при этом коэффициент p_i дополнительной смертности i-го вида равен $\sum\limits_{j=1}^{n} \psi_{ij}(z_j)$, $i = \overline{1, n}$. Тогда уравнения динамики численностей z_i в условиях конкуренции имеют вид

$$\dot{z}_i = \varphi_i(z_i) - z_i \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(z_j), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.19}$$

Такая модель называется обобщенной моделью Вольтерра – Лотки. Очевидно, модель примера 2.1.1 является частным случаем этой модели при $\varphi_i = a_i z_i$, $\psi_{ij} = p_{ij} z_j$.

Для правых частей уравнений (2.19) также выполняются условия квазиположительности в виде равенств (2.6).

[6]Данная модель описания динамики численности групп, составляющих биологическое сообщество, впервые была предложена В. Вольтерра [11]. Несколько ранее такие же уравнения были получены в работе А. Лотки при рассмотрении кинетики химических реакций [128].

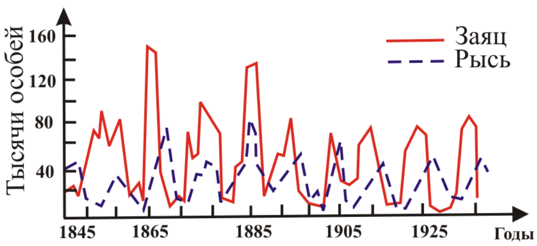
Пример 2.1.3. Модель Вольтерра "хищник – жертва". Предположим, что в некоторой общей области обитания сосуществуют вид хищников численностью y и вид особей (назовем их жертвой), которыми питаются хищники. Пусть численность жертвы равна z. В отсутствие хищников численность жертвы меняется согласно закону (1.5). Наличие хищников меняет эту динамику. Появляется коэффициент p дополнительной смертности, пропорциональный количеству встреч жертвы с хищником, $p = ky$. Допустим, что коэффициент рождаемости хищников прямо пропорционален количеству жертв: $r = bz$ (чем больше пищи, тем благоприятнее условия для размножения) – и погибают хищники только в результате естественной смертности (s – коэффициент естественной смертности хищников). Тогда динамика численностей жертвы и хищника описывается системой уравнений вида (2.13):

$$\begin{cases} \dot{z} &= az - kyz, \\ \dot{y} &= bzy - sy, \end{cases} \tag{2.20}$$

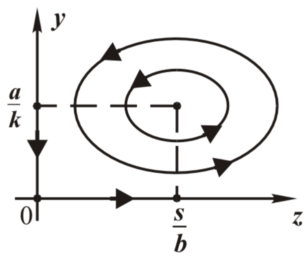
где a, k, b, s – положительные константы. Очевидно, правая часть первого уравнения (2.20) квазиположительна по z, а правая часть второго – по y. Причем условие квазиположительности выполняется в виде равенства (2.15), согласно следствию 2.1.5 нетривиальным неотрицательным начальным условиям будет соответствовать нетривиальное неотрицательное решение. Разделив второе уравнение системы (2.20) на первое, приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, интегрируя которое, получаем первый интеграл системы (2.20)

$$bz + ky - s\ln z - a\ln y = const. \tag{2.21}$$

Выражение (2.21) в неявном виде дает уравнение фазовых траекторий системы (2.20). Они представляют собой концентрические кривые, расположенные в первой четверти координатной плоскости (z, y), охватывающие состояние равновесия $(s/b, a/k)$, которое является центром.



Статистические данные по численности североамериканского зайца и рыси в Канаде



Фазовый портрет системы (2.20)

Таким образом, система (2.20) имеет решения, периодически изменяющиеся во времени. Статистические данные по численности североамериканского зайца и рыси в Канаде за период с 1845 по 1935 годы качественно подтверждают существование колебательных режимов в реальной системе совместного сосуществования хищников и жертв.

2.2. Ограниченность решения

Большое значение в исследовании многих систем с неотрицательными фазовыми координатами имеет вопрос неограниченного роста решения: возможно ли с течением времени стремление к бесконечности хотя бы одной фазовой координаты или же все их значения равномерно ограничены? В частности, в моделях роста популяции, как правило, общее количество особей ограничено сверху из-за ограниченности жизненных ресурсов. Это приводит к тому, что скорость роста популяции неизбежно становится отрицательной (или хотя бы равной нулю) при достижении ею некоторого предельно большого значения.

Теорема 2.2.1. *Пусть задана гладкая функция $G(z_1, \ldots, z_n)$ и константа M. Чтобы для решения системы*

$$\dot{z}_i = F_i(t, z_1, \ldots, z_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.22}$$

при любых начальных условиях

$$z_i(t_0) = z_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.23}$$

удовлетворяющих неравенству $G(z_1^0, \ldots, z_n^0) \leqslant M$, в любой момент времени $t > t_0$ выполнялось неравенство

$$G(z_1(t), \ldots, z_n(t)) \leqslant M, \tag{2.24}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial G}{\partial z_1} F_1 + \ldots + \frac{\partial G}{\partial z_n} F_n \leqslant 0 \tag{2.25}$$

в точках z, удовлетворяющих равенству

$$G(z_1, \ldots, z_n) = M. \tag{2.26}$$

Доказательство. Введем новую переменную $y = M - G(z_1, \ldots, z_n)$. В начальный момент времени справедливо условие

$$y(t_0) = M - G(z_1^0, \ldots, z_n^0) \geqslant 0.$$

Очевидно,

$$\dot{y} = -\dot{G}(z_1, \ldots, z_n) = -(\frac{\partial G}{\partial z_1} F_1(t, z) + \ldots + \frac{\partial G}{\partial z_n} F_n(t, z)).$$

Обозначим $Q(t, z, y) = -\dot{G}(z_1, \ldots, z_n)$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{z}_i = F_i(t, z), \ i = \overline{1, n}, \\ \dot{y} = Q(t, z, y). \end{cases} \tag{2.27}$$

Заметим, что равенству $y = 0$ соответствует равенство (2.26).

Как следует из теоремы 2.1.1 необходимым и достаточным условием неотрицательности переменной y является следующее условие квазиположительности: $Q \geqslant 0$ при $y = 0$. С учетом введенных обозначений оно эквивалентно следующему условию

$$\frac{\partial G}{\partial z_1} F_1(t, z) + \ldots + \frac{\partial G}{\partial z_n} F_n(t, z) \leqslant 0$$

для тех точек z, в которых выполняется равенство (2.26).

В свою очередь неотрицательность переменной y эквивалентна выполнению неравенства

$$G(z_1(t), \ldots, z_n(t)) \leqslant M.$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

Непосредственно из теоремы 2.2.1 вытекает следующая

Теорема 2.2.2. *Для того чтобы решение системы* (2.22) *удовлетворяло неравенству*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i(t) \leq M$$

при любых начальных условиях (2.23)*, сумма компонент которых не превосходит постоянной* M*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(t, z) \leq 0$$

в точках z*, удовлетворяющих условию* $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i = M$.

Доказательство. Теорема 2.2.2 есть частный случай теоремы 2.2.1, если в качестве функции G взять $G = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i$.

Следствие 2.2.3. *Пусть задана гладкая функция* $G(z_1, \ldots, z_n)$ *и константа* M*. Чтобы для решения системы* (2.22) *при любых начальных условиях* (2.23)*, удовлетворяющих равенству* $G(z_1^0, \ldots, z_n^0) = M$*, в любой момент времени* $t > t_0$ *выполнялось тождество* $G(z_1(t), \ldots, z_n(t)) \equiv M$*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\frac{\partial G}{\partial z_1} F_1 + \ldots + \frac{\partial G}{\partial z_n} F_n = 0$$

во всех точках z*, удовлетворяющих равенству* (2.26).

Доказательство. Применяя теорему 2.2.1 для вывода необходимых и достаточных условий выполнения неравенства

$$-G(z_1(t), \ldots, z_n(t)) \leqslant -M$$

и объединяя их с результатами теоремы 2.2.1, убеждаемся в справедливости следствия.

2.3. Интегрирование некоторых классов уравнений

Как видно из примера 2.1.1, нередко при изучении моделей реальных систем приходится сталкиваться с уравнениями типа

$$\dot{z} = F(z) - z f(t, z),$$

где $F(t, z)$ – векторная функция, $f(t, z)$ – скалярная функция. Если $F(t, z)$ квазиположительна по переменным z, то правая часть этого уравнения обладает свойством квазиположительности по z. Для уравнений такого типа можно доказать теорему об интегрировании.

Функция $f(t, z)$ называется *однородной порядка* $k > 0$, если для любого λ выполняется равенство:

$$f(t, \lambda z) = \lambda^k f(t, z).$$

При $k = 1$ функция называется однородной.

Теорема 2.3.1. *Пусть задана система*

$$\dot{z}_i = \Phi_i(t, z) - z_i f(t, z), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.28}$$

с некоторыми начальными условиями (2.23)*. Если функции* $\Phi_i(t,z)$ *однородные по* z*, функция* $f(t,z)$ *непрерывная по совокупности аргументов, однородная порядка* k *по* z*, и существует непрерывная функция* $p(t)$*:*

$$p = \begin{cases} \Bigl(\int\limits_{t_0}^{t} kf(\tau,\xi(\tau))d\tau + 1\Bigr)^{\frac{1}{k}}, & \text{\textit{если} } k > 0, \\ \exp\Bigl(\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,\xi(\tau))d\tau\Bigr), & \text{\textit{если} } k = 0, \end{cases}$$

где ξ *– решение вспомогательной системы*

$$\dot{\xi}_i = \Phi_i(t,\xi), \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.29}$$

с начальными условиями $\xi_i(t_0) = z_i^0$*, тогда при* $p \neq 0$ *решение задачи* (2.28)*,* (2.23) *имеет вид*

$$z_i = \frac{\xi_i}{p}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.30}$$

Доказательство. Так как по условию теоремы $p(t)$ – непрерывная функция, причем $p(t_0) = 1$, то функции z_i, $i = \overline{1,n}$, определенные формулой (2.30), являются непрерывными, удовлетворяющими начальным условиям:

$$z_i(t_0) = \frac{\xi_i(t_0)}{p(t_0)} = z_i^0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Найдем производную по времени от функции $p(t)$:

$$\dot{p} = \begin{cases} \frac{1}{k}\Bigl(\int\limits_{t_0}^{t} kf(\tau,\xi)d\tau + 1\Bigr)^{1/k-1} kf(t,\xi(t)), & \text{если } k > 0, \\ \exp\Bigl(\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,\xi)d\tau\Bigr) f(t,\xi(t)), & \text{если } k = 0, \end{cases}$$

следовательно, $\dot{p} = \dfrac{p}{p^k} f(t,\xi)$. Так как функция f является однородной порядка k по переменным ξ, верно равенство

$$\dot{p} = pf\Bigl(t, \frac{\xi}{p}\Bigr) = pf(t,z). \tag{2.31}$$

Покажем, что функции (2.30) удовлетворяют системе (2.28). Учитывая однородность функций Φ_i и равенство (2.31), имеем

$$\dot{z}_i = \frac{\dot{\xi}_i p - \xi_i \dot{p}}{p^2} =$$

$$= \frac{\dot{\xi}_i}{p} - \frac{\xi_i}{p}\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\Phi_i(t,\xi)}{p} - z_i f(t,z) = \Phi_i(t,z) - z_i f_i(z).$$

Это доказывает, что вектор-функция $z(t)$, составляющие которой определяются формулой (2.30), является решением задачи (2.28), (2.23).

Следствие 2.3.2. *Пусть в системе* (2.28)

$$f(t,z) \equiv \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(t,z), \tag{2.32}$$

при этом функции $\Phi_i(t,z)$ *однородные по* z*, и система* (2.29) *при начальных условиях* $\xi_i(t_0) = z_i^0$ *имеет решение, для которого справедливо условие*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) - \sum_{i=1}^{n} z_i^0 + 1 \neq 0,$$

тогда решение задачи (2.28), (2.23), (2.32) *определяется формулой*

$$z_i(t) = \frac{\xi_i(t)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^0 + 1}. \tag{2.33}$$

Доказательство. Из тождества (2.32) вытекает, что функция $f(t,z)$ является однородной первого порядка относительно переменных z. В этом случае, как следует из теоремы 2.3.1, решение системы (2.28), (2.32) имеет вид (2.30), где функция $p(t)$ определяется формулой

$$p(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\tau, \xi(\tau))\, d\tau + 1.$$

Учитывая вспомогательную систему (2.29) и начальные условия, преобразуем функцию $p(t)$:

$$p(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{d\,\xi_i}{d\,\tau}\, d\tau + 1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) - \sum_{i=1}^{n} z_i^0 + 1.$$

Следствие доказано.

Пример 2.3.1. Рассмотрим систему (2.18), в которой a_i – положительные константы, $i = \overline{1,n}$. Это система вида (2.28), где функции $\Phi_i(t,z) = a_i z_i$, $f(t,z) = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j$ – положительно однородные первого порядка ($k = 1$). Решение данной системы при некоторых начальных условиях (2.23) определяется формулой (2.30), где ξ_i – решение вспомогательной системы

$$\dot{\xi}_i = a_i \xi_i, \quad i = \overline{1,n},$$

оно определяется равенствами

$$\xi_i(t) = z_i^0 \exp(a_i(t - t_0)),$$

а функция $p(t)$ принимает следующие значения

$$p(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} z_j^0 e^{a_j(\tau - t_0)}\, d\tau + 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^0}{a_j}\left(e^{a_j(t - t_0)} - 1\right) + 1.$$

Следовательно,

$$z_i = \frac{z_i^0 \exp(a_i(t - t_0))}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{z_j^0}{a_j}\left(e^{a_j(t - t_0)} - 1\right) + 1}. \tag{2.34}$$

Пример 2.3.2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида (2.28), (2.32) при $\Phi_1 = x_2$, $\Phi_2 = -x_1$, $\Phi_3 = x_1 + x_2$, $f = x_1 + 2x_2 + x_3$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1x_2 - 2x_2^2 - x_2x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3 - x_3^2 \end{cases} \tag{2.35}$$

с начальными условиями $x(t_0) = x^0$. Данная система является частным случаем обобщенной модели Вольтерра-Лотки (2.19) при $\varphi_i = \Phi_i$, $i = \overline{1,3}$, $\psi_{i1} = \psi_1 = x_1$, $\psi_{i2} = \psi_2 = 2x_2$, $\psi_{i3} = \psi_3 = x_3$. Для того чтобы проинтегрировать ее, рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_1 + \xi_2 \end{cases} \tag{2.36}$$

с начальными условиями $\xi(t_0) = x^0$. Из первых двух уравнений системы (2.36) получаем уравнение

$$\ddot{\xi}_1 = -\xi_1,$$

решение которого имеет вид

$$\xi_1(t) = A\sin(t + \Theta),$$

где A и Θ – константы, определяемые из начальных условий, тогда

$$\xi_2(t) = A\cos(t + \Theta);$$

$$\dot{\xi}_3 = A\sin(t + \Theta) + A\cos(t + \Theta);$$

$$\xi_3(t) = -A\cos(t + \Theta) + A\sin(t + \Theta) + C,$$

где C – константа, определяемая из начальных условий.

Согласно теореме 2.3.1 решение исходной системы (2.35) находится по формуле (2.30), где знаменатель имеет вид

$$p = \int\limits_{t_0}^{t} (\xi_1(\tau) + 2\xi_2(\tau) + \xi_3(\tau))d\tau + 1 = -2A\cos(t + \Theta) + A\sin(t + \Theta) + Ct + D,$$

здесь $D = 2A\cos(t_0 + \Theta) - A\sin(t_0 + \Theta) - Ct_0 + 1$. Отсюда при $p \neq 0$

$$x_1 = A\sin(t + \Theta)/p,$$

$$x_2 = A\cos(t + \Theta)/p,$$

$$x_3 = (-A\cos(t + \Theta) + A\sin(t + \Theta) + C)/p.$$

2.4. Системы авторепродукции

Одним из важных случаев систем с неотрицательными решениями являются модели самовоспроизводства. Самовоспроизводящимися будем считать объекты, которые обладают свойством генерировать свои копии в процессе существования. Это свойство не нужно понимать только как непосредственную способность самих объектов конструктивно производить другие объекты, похожие на себя, например, путем рождения. В экономике каждая денежная единица, занятая в производстве, приносит доход в виде новых денежных единиц, идущих на поддержание и расширение производства, поэтому ее также можно считать "самовоспроизводящейся" [7]. В процессе обучения учитель – носитель информации – передает ее своим ученикам, тем самым создавая свою информационную копию. В области инженерных разработок свойством воспроизводства, наследования обладают технические решения. Если какое-то техническое решение (возможно, запатентованное) эффективно, то оно применяется при конструировании все новых и новых изделий, воспроизводится в новых конструкциях, число его повторений и есть число его копий. Этим объясняется возможность получения дохода владельцем патента. Если же техническое решение неудачно, то оно используется все реже и реже, число его копий сходит на нет. В научной деятельности удачная идея впоследствии используется в серии работ, о чем обычно свидетельствует количество ссылок на первоисточник.

Другими словами, самовоспроизведение (авторепродукция) – это способность передавать другим объектам качественные признаки исходных образцов, определяющие условия их существования в системе, в частности, это может быть тот или иной способ поведения.

Явления самовоспроизводства широко распространены в окружающем мире. Их универсальность утверждается как один из постулатов современной теории информации: "Всякая информационная структура обладает способностью размножаться, то есть копировать свою конструкцию в сравнительно большом количестве экземпляров"[78]. Такие явления привлекали внимание исследователей еще на заре возникновения кибернетики. Математическое изучение самовоспроизводящихся объектов было начато Дж. фон Нейманом [77]. Различные аспекты математических моделей самовоспроизводства рассматривались также в [14, 94] и др.

В процессе самовоспроизводства может иметь место создание абсолютно точных копий ("строгое наследование"), а может осуществляться создание элементов, несколько отличающихся от исходных – самовоспроизведение "с ошибками", когда элементы одного типа создают элементы других типов. Примером строгого наследования может быть процесс размножения бактерий, здесь в процессе деления появляются две точные копии исходной особи. Примерами самовоспроизводства "с ошибками"являются скрещивание разных особей, когда в результате появляется особь, частично наследующая признаки одного из родителей, а частично – признаки второго; мутагенез, когда в результате мутаций в потомстве искажаются признаки родителей; химическая реакция, когда из молекулы одного вещества появляются молекулы другого и т. д. [94]

2.4.1. Случай простого воспроизводства

Основные гипотезы строгого наследования, необходимые для построения адекватной математической модели, были сформулированы Розоноэром и Седых [94]. Рассмотрим множество однотипных объектов, способных к самовоспроизведению. Пусть каждый объект может порождать подобные себе; объекты могут также "гибнуть". Предположим сначала, что все объекты в точности одинаковы и воспроизводят в точности подобных себе (идеальное "наследование"), причем "размножение"и "гибель"каждого объекта никак не зависят от того, что происходит с другими (т. е. взаимодействие между объектами полностью отсутствует). Пусть $z(t)$ – количество самовоспроизводящихся объектов в системе в момент времени t или какая-либо другая аддитивная характеристика системы, например, суммарная масса или энергия, если такая характеристика в изучаемом случае

[7]Свойство самовоспроизводства, присущее денежным единицам, вложенным в экономическое предприятие, было понятно уже классикам политической экономии. Так, К. Маркс определяет капитал как самовозрастающую стоимость. Это самовозрастание мы замечаем и в банковском проценте, и в земельной ренте.

имеет смысл. Очевидно, $z(t) \geqslant 0$. Величина z, как правило, принимает лишь целые значения, но при построении модели можно допустить следующую идеализацию: считать, что значением величины z может быть любое действительное число, и при этом она непрерывно изменяется с течением времени. Эта идеализация оправдывает себя в ситуации, когда число объектов велико и проследить за изменением их количества с точностью до единицы трудно. Так поступают, например, при построении моделей популяционной динамики. Изменение $z(t)$ со временем определяется конкретными особенностями процесса рождения и гибели, например $z(t)$ может быть случайным процессом. Обозначим $g(t)$ – разность между количеством вновь появившихся объектов и количеством разрушившихся в единицу времени, приходящуюся на один объект. Величина g является средним относительным приростом числа объектов в единицу времени. Она может зависеть от времени в соответствии с внешним воздействием на систему. Тогда аналогично дифференциальному уравнению роста популяции бактерий (1.5) выводится дифференциальное уравнение для величины $z(t)$:

$$\dot{z} = gz. \tag{2.37}$$

Коэффициент g, непрерывно зависящий от z и t, называется коэффициентом воспроизводства. Он является логарифмической производной количества по времени или относительной скоростью роста, т.е. отношением абсолютной скорости роста к общему количеству: $g = \dfrac{\dot{z}}{z}$. При моделировании динамики биологических популяций коэффициент g называется коэффициентом размножения. В экономических моделях, если z – это капитал, занятый в производстве, то коэффициент g имеет смысл прибыли в единицу времени на единицу вложенных средств.

Уравнение (2.37) называется уравнением с наследованием. Оно имеет смысл лишь при достаточно большом количестве объектов и при рассмотрении процесса на промежутках времени, существенно больших, чем характерные промежутки между актами рождения и гибели. В нем не учитываются случайные флуктуации системы, в частности, уравнение (2.37) не может отразить таких статистических эффектов, как, например, "вырождение"системы – случайную гибель всех объектов (что возможно даже при $g > 0$). Кроме того, использование такого уравнения предполагает следующую идеализацию: как бы ни было мало количество объектов в системе, если оно не равно нулю, то оно будет положительным в любой другой момент времени и может стать сколь угодно большим в последующем при благоприятных условиях ($g > 0$). "Для дерева есть надежда, что оно, если и будет срублено, снова оживет, и отрасли от него выходить не перестанут: если и устарел в земле корень его, и пень его замер в пыли, но, лишь почуяло воду, оно даёт отпрыски и пускает ветви, как бы вновь посаженное". Конечно, такая гипотеза не всегда имеет место, нередко при достижении определенного минимального уровня численности популяция необратимо гибнет за конечное время (при $z(t_0) < c_0$ имеет место $z(t) = 0$ для $t > t_0 + c_1$), но в качестве первого приближения эту гипотезу можно принять как рабочую. Далее будут рассматриваться только детерминированные ("усредненные") модели типа уравнения (2.37), так как они позволяют (с соответствующими оговорками) просто и вместе с тем достаточно полно иллюстрировать все основные идеи.

Уравнение (2.37) описывает простейшую модель авторепродукции. В более сложных случаях в системе авторепродукции могут быть объекты различных видов. Тогда общая система распадается на множество связанных друг с другом подсистем. Пусть имеется несколько видов самовоспроизводящихся элементов, отличающихся один от другого какими-либо признаками. Если z_i – численность элементов i-го вида, а g_i – его коэффициент самовоспроизведения, то для каждого вида элементов можно написать уравнение типа (2.37):

$$\dot{z}_i = g_i(t)z_i, \ \ i = \overline{1,n}, \tag{2.38}$$

где n – число видов. Предположим теперь, что акты рождения и гибели отдельных объектов зависят от состояния системы в целом, т. е. вероятности гибели и рождения определяются численностями объектов различных типов. Тогда в детерминированном описании (2.38) коэффициенты самовоспроизведения являются функциями численностей и времени:

$$g_i = g_i(t, z_1, \dots, z_n), \ \ i = \overline{1,n},$$

Динамика системы описывается при этом системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = g_i(t, z_1, \dots, z_n)z_i, \ \ i = \overline{1,n}, \tag{2.39}$$

отражающих как дифференцированный характер самовоспроизведения (т. е. различие коэффициентов самовоспроизведения для объектов различных видов), так и взаимовлияние объектов (зависимость коэффициентов самовоспроизведения от численностей).

Для обеспечения существования и единственности решения системы (2.39) при фиксированных начальных условиях достаточно потребовать выполнения условия Липшица для функций g_i по переменным z_i и непрерывности по переменной t.

Замечание 2.4.1. Если требовать от функций g_i только непрерывности по всем аргументам, то правые части системы (2.39) могут не удовлетворять условию Липшица по z_i.

При отсутствии в некоторый момент t самовоспроизводящихся объектов, т. е. при условии $z(t) = 0$, они более не появляются в последующие моменты времени (самозарождение невозможно).

Каждое уравнение системы (2.39) является уравнением с наследованием, система (2.39) называется системой уравнений с наследованием. Системы с наследованием широко используются в моделях биофизики, в частности, к ним относятся рассмотренные в примерах 2.1.1, 2.1.3 модель Вольтерра и модель Вольтерра – Лотки.

Очевидно, для системы (2.39) выполняются условия квазиположительности в виде равенств (2.6). Это означает, что объекты i-го вида могут появляться только от объектов i-го вида. Ясно, что выполнение условий квазиположительности в виде равенств является необходимым условием того, чтобы система типа (2.22) была системой уравнений с наследованием. Но это условие не является достаточным. Приведем достаточные условия, когда система (2.22) является системой с наследованием.

Теорема 2.4.1. *Систему* (2.22), *в которой функции $F_i(t,z)$, $i = \overline{1,n}$, непрерывны по совокупности переменных, удовлетворяют условию Липшица по переменным z, имеют частные производные $\dfrac{\partial F_i}{\partial z_i}$, непрерывные в точках, где $z_i = 0$, и удовлетворяют условию квазиположительности в виде равенства* (2.6), *можно представить в форме* (2.39), *где функции $g_i(t,z)$ непрерывны.*

Доказательство. Функции $g_i(t,z)$, $i = \overline{1,n}$, определим следующим образом

$$g_i(t,z) = \begin{cases} \dfrac{F_i(t,z)}{z_i}, & \text{если} \quad z_i \neq 0, \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial z_i}(t,z), & \text{если} \quad z_i = 0. \end{cases} \tag{2.40}$$

При $z_i \neq 0$ выполняется равенство

$$F_i(t,z) = g_i(t,z)z_i. \tag{2.41}$$

Если $z_i = 0$, то в силу (2.6) левая и правая части равенства (2.41) обращаются в ноль, поэтому (2.41) справедливо при любых значениях z_i. Функция $g_i(t,z)$, определенная формулой (2.40), непрерывна при $z_i \neq 0$. Проверим ее непрерывность в точках, где $x_i = 0$. Введем обозначение: $M_i^0 = (t, z_1, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \dots, z_n)$ – точка, у которой координата z_i равна нулю. В силу условий (2.6)

$$F_i(M_i^0) = 0,$$

тогда из существования частной производной $\dfrac{\partial F_i}{\partial z_i}$ из формулы конечных приращений Лагранжа следует равенство

$$F_i(t,z) = F_i(t,z) - F_i(M_i^0) = \frac{\partial F_i}{\partial z_i}(M_i) z_i,$$

$$M_i = (t, z_1, \dots, z_{i-1}, \xi, z_{i+1}, \dots, z_n), \quad 0 < \xi < z_i,$$

откуда

$$g_i(t,z) = \frac{\partial F_i}{\partial z_i}(M_i) \quad \text{если} \quad z_i \neq 0. \tag{2.42}$$

Из представления (2.42) и непрерывности частной производной $\dfrac{\partial F_i}{\partial z_i}$ в точке M_i^0 следует, что функция $g_i(t,z)$, определенная равенством (2.40), будет непрерывной и при $z_i = 0$, что и требовалось доказать.

2.4.2. Случай сложного воспроизводства

Процессы рождения и гибели объектов могут иметь более сложный характер и включать в себя, например, процесс "скрещивания", при котором каждый объект порождается не одним, а двумя или несколькими "родительскими" объектами. Особенно важен учет скрещивания в биологии и химии (в химии, кроме того, "гибель" каждого "элемента" – молекулы – всегда сопровождается "рождением" других).

Может иметь место случай сложного воспроизводства: объекты вида A порождают объекты вида B, а объекты вида B порождают объекты вида A и т. п. Так, например, в моделях авторепродукции можно учитывать явления мутагенеза.

Пусть в системе есть n видов объектов, количество объектов i-го вида обозначим z_i. Пусть величины z_i непрерывно зависят от времени и имеют непрерывные производные, тогда их динамику можно задать системой дифференциальных уравнений (2.22), в которой функции F_i непрерывны по t и липшицевы по z.

Поскольку количество объектов любого вида в любой момент времени неотрицательно, то на функции F_i нужно наложить условия квазиположительности (2.2).

Но для того, чтобы система (2.22) описывала процесс самовоспроизводства, этого условия недостаточно. Необходимо выполнение дополнительного требования: если общее количество объектов всех видов в некоторый момент времени равно нулю, то в последующие моменты времени ни один объект больше не появится. Математически это приводит к условию: если в момент времени t справедливо равенство

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} z_i(t) = 0, \tag{2.43}$$

то имеют место равенства

$$F_i(t,z) = 0, \;\; i = \overline{1,n}. \tag{2.44}$$

Правые части системы, удовлетворяющей этому требованию, допускают специальное представление.

Теорема 2.4.2. *Пусть функции $F_i(t,z)$ в системе (2.22) являются непрерывными по t и липшицевыми по z, удовлетворяют по z условиям квазиположительности, имеют частные производные $\dfrac{\partial F_i}{\partial z_j}$, непрерывные в точках, где $z_j = 0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$. Для того чтобы при выполнении равенств (2.43) имели место равенства (2.44), необходимо и достаточно, чтобы функции $F_i(t,z)$ можно было представить в виде*

$$F_i(t,z) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t,z)z_j, \tag{2.45}$$

где функции $b_{ij}(t,z)$ являются непрерывными по переменным t, z.

Доказательство. Достаточность представления (2.45) для выполнения равенства (2.44) при условии (2.43) очевидна. Докажем необходимость представления (2.45).

Введем в рассмотрение следующие функции

$$b_{ij}(t,z) = \begin{cases} \dfrac{F_i(t,0,\ldots,0,z_j,z_{j+1},\ldots,z_n) - F_i(t,0,\ldots,0,0,z_{j+1},\ldots,z_n)}{z_j}, & \text{если} \quad z_j \neq 0, \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial z_j}(t,0,\ldots,0,0,z_{j+1},\ldots,z_n), & \text{если} \quad z_j = 0. \end{cases}$$

Поскольку функции F_i непрерывны, то и функции b_{ij} непрерывны всюду, кроме, может быть, точек, где $z_j = 0$. Исследуем на непрерывность функцию b_{ij} в произвольной точке M_j^0 с нулевой j-й координатой. Так как функции F_i дифференцируемы, то по теореме Лагранжа имеет место представление

$$F_i(t,0,\ldots,0,z_j,z_{j+1},\ldots,z_n) - F_i(t,0,\ldots,0,0,z_{j+1},\ldots,z_n) = \frac{\partial F_i}{\partial z_j}(t,0,\ldots,0,\xi,z_{j+1},\ldots,z_n)z_j,$$

где $0 < \xi < z_j$. Отсюда $b_{ij}(t,z) = \dfrac{\partial F_i}{\partial z_j}(t,0,\ldots,0,\xi,z_{j+1},\ldots,z_n)$ при $z_j \neq 0$. Если устремить точку z к точке M_j^0 с нулевой j-й координатой, то, соответствующая компонента z_j будет стремиться к нулю, величина ξ также будет стремиться к нулю. В силу того, что производные $\dfrac{\partial F_i}{\partial z_j}$ непрерывны в точках, где $z_j = 0$, следует, что

$$\lim_{z \to M_j^0} b_{ij}(t,z) = b_{ij}(t, M_j^0).$$

Непрерывность функций b_{ij} в точках, где $z_j = 0$ доказана.

Поскольку $F_i(t,0) = 0$, то функция F_i допускает следующее представление

$$F_i(t,z) = F_i(t,z) - F_i(t,0) = F_i(t,z_1,z_2,\ldots,z_n) - F_i(t,0,z_2,\ldots,z_n) + \ldots +$$
$$+F_i(t,0,\ldots,0,z_j,z_{j+1},\ldots,z_n) - F_i(t,0,\ldots,0,0,z_{j+1},\ldots,z_n) + F_i(t,0,\ldots,0,z_n) - F_i(t,0,\ldots,0,0) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{F_i(t,0,\ldots,0,z_j,z_{j+1},\ldots,z_n) - F_i(t,0,\ldots,0,0,z_{j+1},\ldots,z_n)}{z_j} z_j = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t,z)z_j,$$

что и требовалось доказать.

Частным случаем сложного воспроизводства является процесс наследования с "ошибками" [94], определяющийся следующей системой уравнений

$$\dot{z}_i = g_i(z_1,\ldots,z_n)z_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}z_j, \quad i=\overline{1,n}, \quad b_{ij} \geqslant 0 \ \text{при} \ i \neq j, \tag{2.46}$$

причем

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0 \tag{2.47}$$

т. е. $b_{ii} = -\sum_{j\neq i} b_{ij}$. Коэффициенты b_{ij}, характеризующие темп порождения объектов i-го вида объектами j-то вида ($j \neq i$), могут, вообще говоря, зависеть от численностей. Уравнения типа (2.39) широко используются в связи с задачами динамики биологических популяций (см. [11]). Уравнения (2.46) для ряда специальных случаев были рассмотрены в [108] в связи с вопросами эволюции макромолекул.

Приведем некоторые другие примеры сложного воспроизводства.

Пример 2.4.1. Модель популяции насекомых с неполным метаморфозом. Рассмотрим популяцию насекомых с неполным метаморфозом: взрослые особи производят на свет личинки, личинки со временем превращаются во взрослые особи. Обозначим x – количество личинок, y – количество взрослых особей. Пусть r – количество личинок, появляющихся от одной взрослой особи, s – коэффициент смертности личинок, p – доля личинок, доживающих до превращения во взрослые особи, q – коэффициент смертности взрослых особей. Кроме того, предполагается, что есть дополнительная смертность, вызванная взаимной конкуренцией особей друг с другом, коэффициент дополнительной смертности равен как для личинок, так и для взрослых особей и пропорционален общему количеству особей в популяции. Тогда уравнения динамики будут иметь вид:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & ry - sx - px - x(x+y), \\ \dot{y} & = & px - qy - y(x+y). \end{array}\right. \tag{2.48}$$

Очевидно, что правые части системы (2.48) имеют вид (2.45). Отметим, что данная система уравнений не является системой с наследованием, она представляет пример сложного воспроизводства: особи отдельных подгрупп (личинок и взрослых) не порождают непосредственно свои копии, воспроизводство осуществляется для всей системы в целом.

Пример 2.4.2. Двухвозрастная модель клеточной популяции. Приведем еще одну модель типа (2.45). Рассмотрим простейшую двухвозрастную модель клеточной популяции [92]. Популяция разбита на две группы клеток: молодые и старые. Молодыми будем считать клетки, в которых синтезируется белок, а старыми – все остальные. На поздних стадиях существования клетки выделяют ингибирующие кейлоны, угнетающе действующие на скорость деления. Клетки первой группы интенсивно растут, но не достигают физиологической зрелости и не способны делиться. Клетки второй группы могут делиться, но процесс деления может быть задержан под влиянием ингибиторов. С учетом действия ингибиторов уравнения динамики этой модели принимают вид

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & 2\dfrac{\sigma y}{1+y^{\alpha}} - (\delta+1)x, \\ \dot{y} & = & x - \delta y - \dfrac{\sigma y}{1+y^{\alpha}}. \end{array}\right. \tag{2.49}$$

Здесь x – количество молодых клеток, y – количество старых клеток, δ – смертность в популяции (или скорость протока), $\dfrac{\sigma}{1+y^{\alpha}}$ – коэффициент скорости деления, зависящий от количества выделяемого ингибитора (и, соответственно, от количества старых клеток y), α – порядок ингибирования, σ – константа ингибирования, δ, σ, α – положительные константы. Коэффициент 2 в первом уравнении показывает, что при делении одной старой клетки возникают две молодые.

Заметим, что правые части системы (2.49) имеют вид (2.45), кроме того, система (2.49) не является системой с наследованием.

Система авторепродукции может взаимодействовать с окружающей средой. При этом она будет подсистемой в общей модели взаимодействия. Если обозначить z – вектор переменных, характеризующих состояние системы ауторепродукции, а y – m-мерный вектор переменных, характеризующих состояние окружающей среды, то динамику взаимодействия можно описать системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{z}_i &= \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}(t,z,y)z_j, \quad i=\overline{1,n}, \\ \dot{y} &= R(z,t,y). \end{cases} \tag{2.50}$$

Здесь R – m-мерная вектор-функция, непрерывная по t и липшицевая по z и y.

Пример 2.4.3. Модель Моно размножения микроорганизмов в культиваторе. Рассмотрим модель Моно размножения микроорганизмов в культиваторе. Пусть x – концентрация клеток в культиваторе, y – концентрация питательного субстрата. Модель описывается следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dfrac{yx}{1+y} - Dx, \\ \dot{y} &= -\dfrac{yx}{1+y} + D(y_0 - y). \end{cases} \tag{2.51}$$

Здесь y_0 – концентрация субстрата, поступающего в культиватор, D – скорость протока, $\dfrac{y}{1+y}$ – коэффициент усвоения субстрата клетками.

Первое уравнение описывает динамику системы авторепродукции, второе – изменения окружающей среды (концентрации субстрата).

Отметим, что в случае, когда система авторепродукции распадается на совокупность подсистем авторепродукции, то может быть интересным следить за динамикой отдельной подсистемы, а воздействие остальных рассматривать как внешнее.

В более общем случае динамика системы авторепродукции может зависеть от пространственного распределения (уравнение типа "реакция-диффузия"), возрастного состава (уравнение фон Ферстера) и т. п.

2.5. Вырождение системы

Во многих прикладных задачах большое значение имеет вопрос о возможности попадания фазовой точки в начало координат в фазовом пространстве (за конечное или бесконечное время). Так, например, ставится задача управляемости [71]. Для систем авторепродукции попадание в начало координат соответствует вырождению системы – ее необратимому разрушению. Определим, когда точка в фазовом пространстве не может неограниченно близко подходить к началу координат, т.е. когда вырождение системы невозможно, и когда его можно гарантированно исключить.

Пусть задана автономная система дифференциальных уравнений (1.11), правые части которой удовлетворяют условию квазиположительности (2.2). Пусть, кроме того, точка с нулевыми координатами является состоянием равновесия системы (1.11). Очевидно, что фазовая траектория, соответствующая любым неотрицательным нетривиальным начальным условиям, не будет неограниченно близко подходить к началу координат тогда, когда существует окрестность начала координат, из которой выходит любая фазовая траектория, соответствующая начальным условиям с неотрицательными компонентами. Следовательно состояние равновесия в начале координат не должно быть асимптотически устойчивым.

Очевидно, что для существования такой окрестности достаточно, чтобы действительные части всех собственных чисел матрицы линеаризованной системы были положительными. Необходимым условием существования такой окрестности является наличие хотя бы одного собственного числа матрицы линеаризованной системы с неотрицательной действительной частью.

Рассмотрим систему (2.22), правые части которой имеют вид (2.45). Пусть функции b_{ij} дифференцируемы по z и не зависят от t. Тогда компоненты матрицы линеаризованной системы в окрестности точки $z = 0$ имеют вид $b_{ij} = b_{ij}(0)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. Для того, чтобы вырождение было невозможно, необходимо, чтобы эта матрица имела хотя бы одно собственное число с неотрицательной действительной частью, и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы имели положительные действительные части.

Для системы (2.39), в которой функции g_i дифференцируемы по z и не зависят от t, матрица линеаризованной системы в окрестности начала координат будет диагональной, ее диагональные компоненты имеют вид $g_{ii} = g_i(0)$. Очевидно, эти компоненты являются ее собственными числами. Тогда для невозможности вырождения системы, необходимо, чтобы хотя бы одно число $g_i(0)$ было неотрицательным, и достаточно, чтобы все числа $g_i(0)$ были положительными.

Пример 2.5.1. Исследуем возможность вырождения популяции насекомых с неполным метаморфозом, модель которой приведена в примере 2.2.1. Рассмотрим систему (2.48). Линеаризованная система в окрестности состояния равновесия (0,0) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & ry - px - sx, \\ \dot{y} & = & px - qy. \end{array} \right. \tag{2.52}$$

Собственные числа матрицы линеаризованной системы выражаются следующим образом $\lambda_{12} = \dfrac{1}{2}(-p - s - q \pm \sqrt{(s+q+p)^2 - 4q(s+p) + 4pr})$. Из анализа данного выражения видно, что эти числа всегда действительны, одно из них отрицательно, второе может быть как положительным, так и отрицательным. Случай положительного собственного числа возможен при выполнении неравенства $rp > q(s+p)$. При этом состояние равновесия является седлом. Чтобы найти коэффициент k наклона сепаратрис седла, подставим уравнение сепаратрис $y = kx$ в систему (2.52), в результате чего получим равенство $k(rk - s - p) = p - qk$, откуда $k_{12} = \dfrac{1}{2r}(s + p - q \pm \sqrt{(s+p-q)^2 + 4rp})$. Отсюда следует, что знаки коэффициентов наклона всегда разные; сепаратриса, выходящая из седла (α-сепаратриса), проходит через первую координатную четверть. Следовательно, существует окрестность начала координат, из которой выходит любая фазовая траектория, соответствующая начальным условиям с неотрицательными компонентами, взятым в этой окрестности. Если же имеет место случай обоих отрицательных собственных чисел, то состояние равновесия будет устойчивым узлом, и у него не будет окрестности с указанными свойствами. Более того, предел величины $Z = x + y$ вдоль любой фазовой траектории в окрестности начала координат будет равен нулю, так как в этой окрестности все фазовые траектории стремятся к началу координат.

Пример 2.5.2. Исследуем возможность вырождения в двухвозрастной модели клеточной популяции, приведенной в примере 2.2.2. Рассмотрим модель (2.49)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2\dfrac{\sigma y}{1+y^n} - (\delta+1)x, \\ \dot{y} & = & x - \delta y - \dfrac{\sigma y}{1+y^n}. \end{array} \right.$$

Точка $(0,0)$ является состоянием равновесия этой системы. Матрица линеаризованной системы в окрестности начала координат имеет вид

$$\begin{vmatrix} -(\delta+1) & 2\sigma \\ 1 & -(\delta+\sigma) \end{vmatrix}.$$

Так как сумма диагональных элементов $-(2\delta+\sigma+1)$ всегда отрицательна, то при $\Delta \equiv (\delta+1)(\delta+\sigma) - 2\sigma > 0$ состояние равновесия устойчиво, при $\Delta < 0$ – неустойчиво и является седлом, α-сепаратриса которого идет в первую четверть фазовой плоскости. В этом случае $\lim(x+y) \neq 0$. Если $\delta < 1$, то неравенство $\Delta < 0$ эквивалентно условию $\sigma > \dfrac{\delta(\delta+1)}{1-\delta}$.

Пример 2.5.3. Рассмотрим систему (2.51). Эта система имеет два состояния равновесия с координатами $x_{01} = 0$, $y_{01} = y_0$ и $x_{02} = y_0 - \dfrac{D}{1-D}$, $y_{02} = \dfrac{D}{1-D}$. Второе состояние равновесия попадает в область неотрицательных значений переменной x лишь в случае, когда $D \le \dfrac{y_0}{1+y_0} = D_0$. Исследуем устойчивость первого состояния равновесия. Корни характеристического уравнения имеют вид $\lambda_1 = -D$, $\lambda_2 = D_0 - D$. При $D < D_0$ состояние равновесия будет седлом. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что ω-сепаратрисы идут по прямой $x = 0$, при этом α-сепаратриса идет внутрь полуплоскости $x > 0$. Фазовая траектория, попавшая в малую ε-окрестность прямой $x = 0$ из положительной полуплоскости $x > 0$, сначала движется вдоль ω-сепаратрисы к седлу, а затем уходит от седла в положительную полуплоскость $x > 0$ вдоль α-сепаратрисы. Таким образом, существует окрестность точки $x = 0$ в подпространстве переменных x такая, что проекция на это подпространство любой фазовой траектории, соответствующей начальным условиям с положительной координатой x, покидает эту окрестность.

При $D > D_0$ состояние равновесия будет устойчивым узлом, следовательно возможен случай, когда $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Глава 3.
Системы на стандартном симплексе

3.1. Сохранение суммы фазовых координат

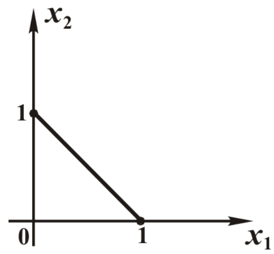
Важный частный случай систем дифференциальных уравнений с неотрицательными решениями представляют системы, в которых в течение всего процесса сохраняется постоянной сумма значений фазовых координат:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = const, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

В химии, например, условие (3.1) выражает закон Ломоносова – Лавуазье сохранения вещества, в экологии – сохранение емкости среды обитания. С помощью нормирующего коэффициента исследование системы (1.11), фазовые координаты которой удовлетворяют (3.1), всегда можно свести к исследованию системы (1.11), фазовым пространством которой является *стандартный симплекс*[1]

$$S = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Стандартный симплекс
в пространстве $\mathbf{R}^1$

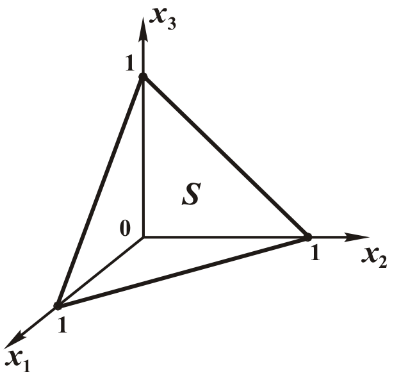


Стандартный симплекс
в пространстве $\mathbf{R}^2$

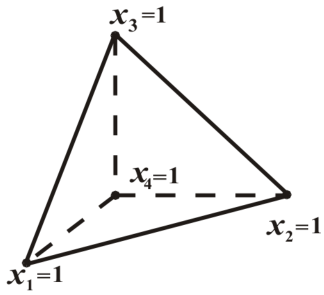
[1]Пусть $x^0, x^1, \ldots, x^n$ – точки евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ такие, что векторы $x^1 - x^0, x^2 - x^0, \ldots, x^n - x^0$ линейно независимы. Тогда n-мерный симплекс с вершинами $x^0, x^1, \ldots, x^n$ есть совокупность всех точек x, которые можно представить в виде

$$x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k, \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1.$$

Нульмерный симплекс с вершиной x^0 – это одна точка x^0. Одномерный симплекс с вершинами x^0, x^1 – совокупность точек, представимых в виде $x = (1-\lambda_1)x^0 + \lambda_1 x^1$, где $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, $\lambda_0 = 1 - \lambda_1$, т.е. отрезок $[x^0, x^1]$. Двумерный симплекс с вершинами x^0, x^1, x^2 – совокупность точек $x = (1-\lambda_1-\lambda_2)x^0 + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1, 2$, $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ – есть треугольник с соответствующими вершинами. Между точками на симплексе и набором коэффициентов λ_k, $k = \overline{1,n}$, может быть установлено взаимно-однозначное соответствие. Коэффициенты λ_k называются симплициальными координатами. Вершины у симплексов одной размерности могут быть разные, а симплициальные координаты одни и те же, т.е. симплициальные координаты инвариантны при отображении одного симплекса в другой.



Стандартный симплекс в пространстве $\mathbf{R}^3$



Стандартный симплекс в пространстве $\mathbf{R}^4$

Систему (1.11), решение которой в каждый момент времени принадлежит множеству S при любых начальных условиях из S, будем называть *системой на стандартном симплексе*[2].

Следующая теорема дает критерий сохранения суммы фазовых координат системы (1.11).

Теорема 3.1.1. *Для того чтобы решение системы* (1.11) *удовлетворяло тождеству*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \equiv 1 \tag{3.2}$$

при любых начальных условиях $x(t_0)$*, принадлежащих стандартному симплексу* S*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(t, x) = 0 \tag{3.3}$$

в точках x*, удовлетворяющих условию* $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Доказательство. Справедливость теоремы непосредственно вытекает из следствия 2.2.3, если в нем в качестве функции G выбрать $G = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, а в качестве константы M единицу.

Замечание 3.1.1. **Совокупность критериев неотрицательности решения системы дифференциальных уравнений и сохранения суммы фазовых координат дает необходимые и достаточные условия принадлежности решения системы дифференциальных уравнений стандартному симплексу**[3].

[2] В теории динамических систем сложилась терминология, согласно которой систему, область изменения фазовых координат которой представляет собой некоторое многообразие, называют системой на этом многообразии. Так рассматриваются системы на сфере, торе, цилиндре и т.п. Введенное множество S – это аналог симплициальных координат $(n-1)$-мерного симплекса.

[3] В более общей форме вопрос о принадлежности решения дифференциального уравнения стандартному симплексу формулируется как задача выживания: найти условия, при которых решение этого уравнения в течение некоторого времени не покидает заданного множества. Начало исследования этой задачи было положено в работах Нагумо [131].

Во многих моделях биофизики [88] встречается система уравнений вида

$$\dot{x}_i = \Phi_i(t,x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,x), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.4}$$

На основе теоремы 3.1.1 можно показать, что при определенных условиях такие системы являются системами на стандартном симплексе.

Следствие 3.1.2. *Пусть функции $\Phi_i(t,x)$ для всех значений индексов $i = \overline{1,n}$ непрерывны по совокупности переменных, удовлетворяют условию Липшица по переменным x на симплексе S и условию квазиположительности*

$$\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq 0 \tag{3.5}$$

при любых $x_j \geqslant 0$, $j \neq i$. Тогда система уравнений (3.4) является системой на стандартном симплексе, при этом ее правые части будут непрерывными, удовлетворяющими условию Липшица по переменным x на симплексе S.

Доказательство. Непрерывность правых частей системы (3.4) очевидна. Проверим выполнение условия Липшица для них по переменным x на симплексе S. Пусть x и $\bar{x}$ – две произвольные точки симплекса S, тогда по условию теоремы существует константа L такая, что

$$|\Phi_i(t,x) - \Phi_i(t,\bar{x})| \leq L \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k|, \quad i = \overline{1,n}.$$

Кроме того, поскольку функции Φ_i непрерывны,то при фиксированном t существует константа M такая, что $|\Phi_i(t,\bar{x})| \leq M$, $i = \overline{1,n}$, при любом выборе точки $\bar{x}$ из симплекса S. С учетом этого

$$|\Phi_i(t,x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,x) - (\Phi_i(t,\bar{x}) - \bar{x}_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,\bar{x}))| \leq$$

$$\leq |\Phi_i(t,x) - \Phi_i(t,\bar{x})| + |\bar{x}_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,\bar{x}) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,x)| \leq$$

$$\leq L \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k| + |\bar{x}_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,\bar{x}) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,\bar{x}) + x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,\bar{x}) -$$

$$- x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,x)| \leq L \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k| + |\bar{x}_i - x_i| \sum_{j=1}^{n} |\Phi_j(t,\bar{x})| +$$

$$+ x_i \sum_{j=1}^{n} |\Phi_j(t,\bar{x}) - \Phi_j(t,x)| \leq L \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k| + nM|\bar{x}_i - x_i| +$$

$$+ nL \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k| \leq (L + nM + nL) \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k|.$$

Отсюда следует выполнение условия Липшица для правых частей системы (3.4).

Очевидно, что если функции Φ_i обладают свойством квазиположительности, то и правые части уравнений (3.4) – функции $F_i(t,x) = \Phi_i(t,x) - x_i \sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j(t,x)$, $i = \overline{1,n}$, – также обладают этим свойством. При этом сумма функций

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \sum_{j=1}^{n} \Phi_j$$

будет равна нулю, если будет справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Следовательно, выполнены все требования теоремы 3.1.1, и система (3.4) является системой на стандартном симплексе, что и требовалось доказать.

Следствие 3.1.3. *Пусть функции $\psi(x_i)$, $\varphi(\alpha_i, x_i)$, $i = \overline{1,n}$, где параметры α_i – некоторые постоянные или непрерывно зависящие от времени, являются непрерывными по совокупности переменных и удовлетворяют условию Липшица по аргументам x на симплексе S для каждого фиксированного момента времени t. Если правые части системы уравнений*

$$\dot{x}_i = \varphi(\alpha_i, x_i) \sum_{j=1}^{n} \psi(x_j) - \psi(x_i) \sum_{j=1}^{n} \varphi(\alpha_j, x_j), \ i = \overline{1,n}, \tag{3.6}$$

удовлетворяют условию квазиположительности, то система (3.6) является системой на стандартном симплексе, при этом ее правые части будут непрерывными по x и t, удовлетворяющими условию Липшица по переменным x на симплексе S.

Доказательство. Непрерывность правых частей системы (3.6) очевидна. Выполнение условия Липшица для них по переменным x на симплексе S проверяется так же, как в доказательстве следствия 3.1.2. Просуммировав правые части системы, легко убедиться, что их сумма равна нулю. Следовательно, требования теоремы 3.1.1 выполнены. Следствие доказано.

Замечание 3.1.2. Заметим, что если взять $\psi(x_i) \equiv x_i$, $i = \overline{1,n}$, то на стандартном симплексе S система (3.6) будет иметь вид (3.4) при $\Phi_i(x) = \varphi(\alpha_i, x_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Замечание 3.1.3. Если в системе (3.6) функции $\psi(x_i)$, $\varphi(\alpha_i, x_i)$ являются непрерывными, но не удовлетворяют условию Липшица по x_i при $x_i \in [0,1]$, то при любых начальных условиях из симплекса S решение системы будет принадлежать этому симплексу, но определяться оно может не единственным образом. Например, пусть $\psi(x_i) = \sqrt{x_i}$, $\varphi(\alpha_i, x_i) = \alpha_i\sqrt{x_i}$, $i = 1,2$, тогда система будет иметь вид

$$\dot{x}_i = \alpha_i\sqrt{x_i} \sum_{j=1}^{2} \sqrt{x_j} - \sqrt{x_i} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j\sqrt{x_j}, \ i = 1,2.$$

После преобразований получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{x_1 x_2}, \\ \dot{x}_2 &= -(\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{x_1 x_2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Нетрудно видеть, что при начальных условиях $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ пары функций $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 1$ и $\tilde{x}_1(t) = \sin^2(\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}t)$, $\tilde{x}_2(t) = \cos^2(\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}t)$ являются двумя различными решениями системы (3.7), принадлежащими стандартному симплексу.

Всюду в дальнейшем, рассматривая системы вида (3.6), будем полагать, если не оговорено противное, что $\varphi(\alpha_i, x_i)$, $\psi(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по переменной x_i.

Пример 3.1.1. Модель роста популяции в условиях конкуренции. Рассмотрим n биологических видов, обитающих в общей среде, численность которых равна соответственно $z_1, z_2, ..., z_n$. Пусть Ω – общее количество особей всех видов, которое может существовать в данной среде, определяемое, например, величиной питательного ресурса (емкость среды). В начальный момент времени общая численность особей также равна Ω. Ограниченность питательного ресурса (и соответственно ограниченная емкость среды) приводит к тому, что уравнения динамики численностей имеют вид (2.16). Пусть p_i – коэффициент дополнительной смертности i-го вида в результате ограниченности питательного ресурса – пропорционален совокупному приросту и обратно пропорционален емкости среды:

$$p_i = \frac{1}{\Omega}\sum_{j=1}^{n} a_j z_j, \tag{3.8}$$

т.е. чем больше появляется новых особей и чем меньше запас пищи, тем в худших условиях существует популяция и тем выше в ней смертность. Эта модель является частным случаем модели Вольтерра – Лотки примера 2.1.1.

Введя новые переменные $x_i = z_i/\Omega$, систему (2.16), (3.8) приводим к форме:

$$\dot{x}_i = a_i x_i - x_i \sum_{j=1}^{n} a_j x_j, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.9}$$

Переменные x_i представляют собой удельный вес i-го вида среди общего числа особей. Очевидно, система (3.9) удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1, следовательно, она является системой на симплексе.

Отметим, что если уравнения (3.9) рассматривать не на стандартном симплексе, а для любых положительных значений x_i, то в некоторых случаях можно получить эффект взрывной неустойчивости.

Например, пусть $n = 2$, $a_1 = a_2 < 0$, тогда

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_1 - x_1(a_1 x_1 + a_2 x_2),\\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 - x_2(a_1 x_1 + a_2 x_2).\end{aligned}$$

Сумма фазовых переменных $w = x_1 + x_2$ при этом удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{w} = a_1 w - a_1 w^2.$$

Интегрируя это уравнение, имеем $w = \dfrac{1}{1 - Ce^{-a_1 t}}$. В начальный момент времени $t_0 = 0$ справедливо равенство $w(0) = \dfrac{1}{1-C}$, отсюда $C = 1 - \dfrac{1}{w(0)}$. Если $w(0) > 1$, то $0 < C < 1$, тогда при $t = \dfrac{\ln C}{a_1}$ значение w обращается в бесконечность.

Если же рассматривать систему (3.9) лишь на симплексе, то такие эффекты будут невозможны.

Пример 3.1.2. Модель роста популяции в условиях конкуренции с учетом полового размножения. Рассмотрим теперь модель существования n видов, в которой учитывается половое размножение, осуществляющееся в соответствии с гипотезой "эффективных встреч" (пример 1.2.2). При отсутствии ограничений на емкость среды динамика их численности, как уже было показано, определяется уравнениями (1.8), но если емкость среды ограничена, то появляется дополнительная смертность. Уравнения динамики численности приобретают вид

$$\dot{z}_i = k_i z_i^2/4 - p_i z_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пусть коэффициент p_i дополнительной смертности i-го вида, так же как и в предыдущем примере, пропорционален совокупному приросту и обратно пропорционален емкости среды:

$$p_i = \frac{1}{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{4}z_j^2.$$

Полагая $x_i = \dfrac{z_i}{\Omega}$, $a_i = \dfrac{k_i}{4}\Omega$, получаем уравнение относительно удельных численностей x_i

$$\dot{x}_i = a_i x_i^2 - x_i \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^2, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.10}$$

Построенная модель является частным случаем обобщенной модели Вольтерра-Лотки (2.19). Здесь $\varphi_i = a_i x_i^2$, $\psi_{ij} = a_j x_j^2$.

Нетрудно видеть, что система (3.10) удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1, следовательно, она является системой на симплексе.

Отметим, что в отличие от примера 1.2.2 система (3.10) является динамической, поскольку эффект взрывной неустойчивости в системах на стандартном симплексе невозможен.

Пример 3.1.3. Модель конкуренции промышленных предприятий. Пусть n предприятий выпускают одну и ту же продукцию, z_i – величина капитала, вкладываемого в производство за единицу времени, d_i – величина затрат капитала на единицу продукции на i-м предприятии. Предполагается, что весь вырученный капитал за единицу времени вновь идет на производство той же продукции. Тогда уравнения динамики капиталов будут иметь вид:

$$\dot{z}_i = -z_i + \frac{z_i}{d_i}C, \tag{3.11}$$

где C – цена единицы продукции. Будем предполагать, что цена пропорциональна спросу и обратно пропорциональна предложению:

$$C = \frac{\Omega}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j}{d_j}},$$

где Ω – спрос на продукцию в денежном выражении, который считается постоянным; в начальный момент времени общая сумма капиталов, занятых в производстве, равна Ω. С помощью введения нормирующего множителя $1/\Omega$ уравнения (3.11) сводятся к системе:

$$\dot{x}_i = -x_i + \frac{x_i}{d_i\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{d_j}} \tag{3.12}$$

относительно переменных $x_i = z_i/\Omega$, имеющих смысл удельного веса капитала i-го предприятия среди общей суммы капиталов, занятых в производстве данной продукции. Нетрудно видеть, что условия теоремы 3.1.1 справедливы для системы (3.12), т.е. она является системой на стандартном симплексе.

3.2. Методы приведения к системе на стандартном симплексе

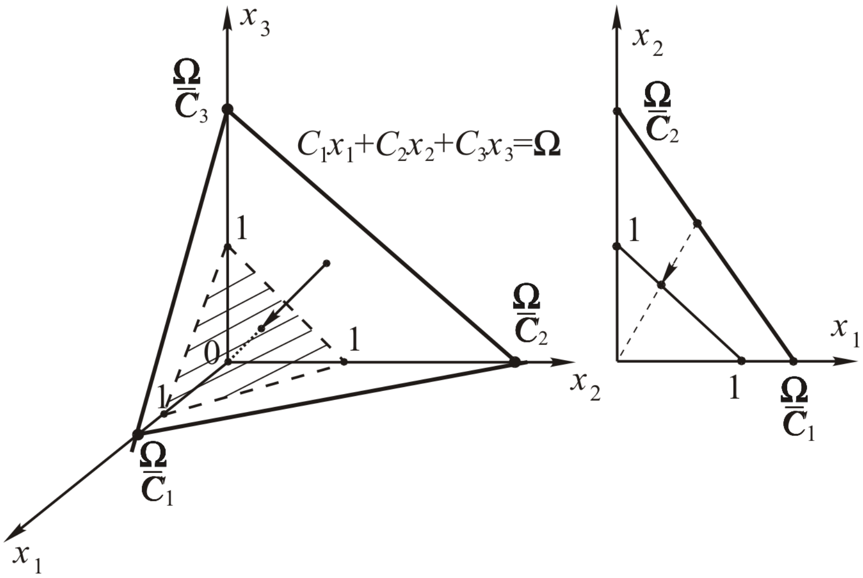
Произвольная система дифференциальных уравнений вида (1.11) не всегда является системой на стандартном симплексе (если, например, не выполняется условие (3.3)). Но с помощью определенных преобразований систему (1.11) можно в некоторых случаях привести к системе на стандартном симплексе или выделить систему на симплексе S в качестве подсистемы (1.11). Так, в примерах 3.1.1 – 3.1.3 системы на стандартном симплексе S были получены после замены переменных $x_i = z_i/\Omega$. Среди всех методов такого преобразования укажем наиболее часто встречающиеся, представляющие практический интерес.

3.2.1. Метод линейной замены

Наиболее простым методом преобразования системы дифференциальных уравнений является линейная замена переменных. Простейшими условиями, при которых после такой замены исходная система становится системой на стандартном симплексе, являются условия принадлежности решения исходной системы некоторому симплексу

$$\{z = (z_1, \ldots, z_n) : z_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i z_i = \Omega\},$$

отличному от стандартного.



Геометрическая интерпретация
линейной замены при $n = 3$ и $n = 2$

Теорема 3.2.1. *Пусть задана система дифференциальных уравнений (2.22), в которой функции F_i – непрерывны по совокупности переменных, удовлетворяют условию Липшица по переменным z. Если функции F_i являются квазиположительными и удовлетворяют равенству*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(t, z) = 0 \quad \textit{как только} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i z_i = \Omega, \tag{3.13}$$

то задача Коши для системы (2.22) с начальными условиями $z_i(t_0) = z_i^0$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющими соотношениям

$$z_i^0 \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i z_i^0 = \Omega, \tag{3.14}$$

имеет решение $z(t)$, в каждый момент времени $t \geqslant t_0$ удовлетворяющее условиям

$$z_i(t) \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(t) = \Omega. \tag{3.15}$$

Здесь Ω, c_i, $i = \overline{1,n}$, – некоторые неотрицательные константы.

Доказательство. Справедливость теоремы непосредственно вытекает из следствия 2.2.3, если в нем в качестве функции G взять $G = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$, а в качестве постоянной M константу Ω.

Непосредственно из теоремы вытекает следующее

Следствие 3.2.2. *Система (2.22), удовлетворяющая условиям теоремы 3.2.1, с помощью линейной замены переменных*

$$x_i = \frac{c_i z_i}{\Omega}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.16}$$

может быть преобразована в систему

$$\dot{x}_i = \frac{c_i}{\Omega} F_i(t, \frac{\Omega x_1}{c_1}, \ldots, \frac{\Omega x_n}{c_n}), \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.17}$$

являющуюся системой на стандартном симплексе.

Доказательство. Правые части системы (3.17) удовлетворяют условию квазиположительности по переменным x. Если $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, то $\sum_{i=1}^{n} c_i z_i = \Omega$, при этом сумма правых частей системы (3.17) в силу условия (3.13) обращается в ноль:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\Omega} F_i(t, \frac{\Omega x_1}{c_1}, \ldots, \frac{\Omega x_n}{c_n}) = \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(t, z_1, \ldots, z_n) = 0.$$

Следовательно, система (3.17) есть система на стандартном симплексе.

Пример 3.2.1. Пусть задана система (2.22), где функции F_i непрерывны по всем аргументам, квазиположительны и удовлетворяют условию Липшица по переменным z. Пусть функции F_i удовлетворяют равенству

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(t, z) = 0, \quad \text{как только} \quad \sum_{i=1}^{n} z_i = \Omega.$$

В этом случае, как следует из теоремы 3.2.1, если в начальный момент выполнялись соотношения $z_i^0 \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} z_i^0 = \Omega$, то в любой момент времени $t \geqslant t_0$ решение задачи Коши будет удовлетворять условиям $z_i(t) \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} z_i(t) = \Omega$. Здесь сохраняется сумма значений фазовых координат, хотя она уже не обязательно равна единице. С помощью линейной замены $x_i = z_i/\Omega$ данная система легко сводится к системе на стандартном симплексе. Именно такую замену мы совершали в примерах 3.1.1 – 3.1.3.

Пример 3.2.2. Сведение уравнений Вольтерра – Лотки к системе на стандартном симплексе. Рассмотрим модель Вольтерра – Лотки, которая определяется уравнениями (2.17). Найдем достаточные условия, при которых решение системы (2.17) будет удовлетворять равенствам (3.15). Для этого сделаем в системе (2.17) замену (3.16):

$$\frac{\Omega}{c_i}\dot{x}_i = a_i\frac{\Omega}{c_i}x_i - \frac{\Omega}{c_i}x_i\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\frac{\Omega}{c_j}x_j, \quad i = \overline{1,n};$$

$$\dot{x}_i = a_i x_i - x_i\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\frac{\Omega}{c_j}x_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.18}$$

Выполнение равенств (3.15) в системе (2.17) при начальных условиях (3.14) эквивалентно выполнению равенств

$$x_i(t) \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1 \tag{3.19}$$

в системе (3.18) при начальных условиях

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i^0 \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^0 = 1. \tag{3.20}$$

В этом случае для правых частей уравнений (3.18) должно выполняться условие (3.3):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\frac{\Omega}{c_j}x_j = 0, \text{ как только } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Пусть коэффициент p_{ij} не зависит от индекса i, т.е. $p_{ij} = p_j$, тогда

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \sum_{j=1}^{n} p_j\frac{\Omega}{c_j}x_j = 0.$$

Нетрудно видеть, что это равенство имеет место, когда

$$a_j = p_j\Omega/c_j, \tag{3.21}$$

и уравнения (3.18) принимают вид (3.9). Следовательно, уравнения Вольтерра – Лотки (2.17) сводятся с помощью линейной замены к системе (3.9) на стандартном симплексе при условии, что

$$p_{ij} = p_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.22}$$

Пример 3.2.3. Рассмотрим систему Вольтерра – Лотки (2.18). Очевидно, условие (3.22) здесь выполнено: $p_{ij} \equiv 1$. Тогда из (3.21) следует, что $c_j = p_j\Omega/a_j = \Omega/a_j$. Следовательно, замена $x_i = z_i/a_i$ приводит систему (2.18) к системе (3.9) на стандартном симплексе.

3.2.2. Метод нормирующей замены

Вторым распространенным способом преобразования исходной системы к системе на стандартном симплексе является переход от исходных фазовых переменных к их удельным весам. Этот переход осуществляется с помощью нормирующей замены переменных. Такое преобразование часто используется в моделях биофизики [88]. Приведем условия, при которых это преобразование возможно.

Функцию $\Phi(t,z,y)$, где $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$, будем называть положительно однородной по переменным z, если выполняется равенство

$$\Phi(t,\lambda z,y)=\lambda\Phi(t,z,y)$$

для любой положительной константы λ.

Пусть задана система (2.13), решение которой неотрицательно по z при неотрицательных по z начальных условиях (2.14). Если при любых начальных условиях (2.14), удовлетворяющих равенству $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^0=1$, во все последующие моменты времени выполняется равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i(t)=1$, то говорят, что первые n уравнений в системе (2.13) образуют подсистему на стандартном симплексе.

Теорема 3.2.3. *Пусть в системе дифференциальных уравнений* (2.13) *функции Φ_i квазиположительны по переменным z, положительно однородны по переменным z, кроме того, при любых нетривиальных и неотрицательных по z начальных условиях* (2.14) *решение задачи Коши* (2.13), (2.14) *нетривиально по переменным z. Тогда с помощью нормирующей замены переменных*

$$w=\sum_{k=1}^{n} z_k,\quad x_i=z_i/w,\quad i=\overline{1,n}, \tag{3.23}$$

исходная система приводится к виду

$$\dot{x}_i=\Phi_i(t,x,y)-x_i\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(t,x,y),\ i=\overline{1,n}, \tag{3.24}$$

$$\dot{y}_j=R_j(t,wx,y),\quad j=\overline{1,m}, \tag{3.25}$$

$$\dot{w}=w\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(t,x,y), \tag{3.26}$$

где уравнения (3.24) *образуют подсистему на стандартном симплексе.*

Доказательство. Справедливость следствия 2.1.4 и нетривиальность решения задачи (2.13), (2.14) по переменным z гарантируют, что функция $w(t)$ строго больше нуля во все рассматриваемые моменты времени. Покажем, что замена (3.23) приведет к нужному результату. Найдем производные от функций x_i, $i=\overline{1,n}$, учитывая уравнения (2.13) и связь переменных (3.23):

$$\dot{x}_i=\left(\frac{\dot{z}_i}{w}\right)=\frac{\dot{z}_i w-z_i\dot{w}}{w^2}=\frac{\Phi_i(t,z,y)w-z_i\sum\limits_{k=1}^{n}\Phi_k(t,z,y)}{w^2}=$$

$$=\frac{1}{w}\Phi_i(t,z,y)-\frac{z_i}{w}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{w}\Phi_k(t,z,y)=$$

$$=\frac{1}{w}\Phi_i(t,z,y)-x_i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{w}\Phi_k(t,z,y).$$

Так как функции $\Phi_i(t,z)$, $i=\overline{1,n}$, положительно однородны по переменным z, то результат преобразуется к виду (3.24). При замене (3.23) неотрицательные начальные условия $z_i(t_0)$ перейдут в начальные условия $x_i(t_0)$ на стандартном симплексе, $i=\overline{1,n}$. Как показано в следствии 3.1.2, система (3.24) является подсистемой на стандартном симплексе.

Подставив в оставшиеся m уравнений системы (2.13) выражения для переменных z через переменные x и w:

$$z_i = wx_i, \quad i=\overline{1,n}, \tag{3.27}$$

получим уравнения (3.25).

Продифференцируем функцию w и заменим переменные z по формулам (3.27):

$$\dot{w} = \sum_{k=1}^{n} \dot{z}_k = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(t,z,y) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(t,wx,y),$$

после этого воспользуемся свойством положительной однородности функций Φ. В результате получим уравнение (3.26). Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что система (3.4) совпадает с системой (3.24), если функции $\Phi_i(t,x)$ положительно однородные по переменным x. Квазиположительные, положительно однородные по x функции $\Phi_i(t,x)$ при этом называются *функциями перехода* [88], так как благодаря им можно перейти от системы (2.13) к системе (3.24).

Функции $\Phi_i(t,z,y)$ являются скоростями роста величин z_i, функции $\dfrac{\Phi_i(t,z,y)}{z_i}$ – их логарифмическими производными или относительными скоростями роста, но $\dfrac{\Phi_i(t,x,y)}{x_i} = \dfrac{\Phi_i(t,z,y)}{z_i}$, следовательно, функции $\dfrac{\Phi_i(t,x,y)}{x_i}$ также будут относительными скоростями роста величин z_i.

Система (2.13) допускает следующую интерпретацию: пусть существуют n видов самовоспроизводящихся объектов, т.е. объектов, которые во время существования могут создавать свои копии. Простейшим примером таких объектов являются особи одного и того же биологического вида. Пусть z_i – численности объектов i-го вида – удовлетворяют уравнениям системы (2.13), тогда $\Phi_i(t,z,y)$ являются скоростями их воспроизводства; вектор y характеризует внешние воздействия на систему самовоспроизводящихся объектов; переменные x_i описывают динамику удельных численностей объектов i-го вида в общей системе. Функции $\dfrac{\Phi_i(t,x,y)}{x_i}$ являются относительными скоростями роста численностей z_i. Если функции $\Phi_i(t,z,y)$ положительно однородные по переменным z, то система (2.13) является *однородной системой воспроизводства* для n видов объектов; (3.24) – система динамики их удельных численностей.

В экономике система (2.13) описывает процесс расширенного воспроизводства различных товаров. Здесь под z_i понимают количество i-го товара или величину капитала, занятого в его производстве.

Пример 3.2.4. Модель роста популяции с лимитированием по типу линейной обратной связи. Пусть динамика численности n видов определяется уравнением (2.16), где коэффициент $p_i \equiv p$ дополнительной смертности i-го вида меняется по следующему закону:

$$\dot{p} = -\Omega + \sum_{j=1}^{n} z_j. \tag{3.28}$$

Здесь Ω – общее количество особей всех видов, которое может существовать в рассматриваемой области обитания. Система уравнений (2.16), (3.28) является системой с лимитированием по типу обратной связи [3], где лимитирующим фактором является общая численность особей. Правые части уравнений (2.16) положительно однородны по переменным z, квазиположительны, причем условия квазиположительности выполнены в виде равенств (2.15). При нетривиальных и неотрицательных начальных условиях следствие 2.1.5 гарантирует нетривиальность и неотрицательность решения системы (2.16), (3.28) по переменным z. Следовательно, для системы (2.16), (3.28) выполнены условия теоремы 3.2.3. С помощью нормирующей замены (3.23), соответствующей переходу от исследования динамики численностей видов к исследованию динамики их удельных весов, получаем систему (3.9). Динамика общего количества особей $w = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j$ при этом определяется системой двух уравнений:

$$\dot{w} = w(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - p), \quad \dot{p} = -\Omega + w.$$

В результате сделанных преобразований из исходной системы (2.16), (3.28), которая непосредственно не удовлетворяет условию (3.2), выделена подсистема (3.9) на симплексе S относительно удельных весов конкурирующих между собой видов, не зависящая от их общей численности w и от величины лимитирующего фактора (коэффициента дополнительной смертности p).

Пример 3.2.5. Обобщенная модель Вольтерра "хищник – n жертв". Данная модель отличается от примера 2.1.3 тем, что в общей области обитания с одним видом хищников сосуществует n разновидностей жертв, которыми питаются хищники. Пусть численность жертвы i-го вида равна z_i, коэффициент размножения i-го вида жертвы равен a_i, коэффициент p_i дополнительной смертности i-го вида жертвы в результате поедания хищниками равен ky. Предположим, что коэффициент рождаемости хищников прямо пропорционален совокупному количеству жертв: $r = b\sum\limits_{i=1}^{n} z_i$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dot{z}_i & = & a_i z_i - kyz_i, \ i = \overline{1,n}, \\ \dot{y} & = & b\sum\limits_{i=1}^{n} z_i y - sy, \end{cases} \tag{3.29}$$

где s, как и раньше, коэффициент естественной смертности хищников, a_i, k, b, s – положительные константы[4].

Условие квазиположительности по переменным z для правых частей первых n уравнений выполняется в виде равенств (2.15), тогда из следствия 2.1.5 вытекает, что при любых нетривиальных и неотрицательных по z начальных условиях решение задачи Коши для системы (3.29) является нетривиальным и неотрицательным по переменным z. Очевидно, что правые части первых n уравнений положительно однородны по переменным z. Таким образом, все требования теоремы 3.2.3 выполняются. Нормирующая замена (3.23) приведет к следующему результату:

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt}\Big(\frac{z_i}{w}\Big) = \frac{\dot{z}_i w - z_i \dot{w}}{w^2} = \frac{a_i z_i - kyz_i}{w} - \frac{z_i}{w}\sum_{l=1}^{n} \frac{a_l z_l - kyz_l}{w} =$$

[4]При $n = 2$ такая система исследовалась А.Д. Базыкиным.

$$= a_i x_i - k y x_i - x_i \sum_{l=1}^{n} a_l x_l + x_i \sum_{l=1}^{n} k y x_l, \quad i = \overline{1,n};$$

$$\dot{y} = b \sum_{i=1}^{n} w x_i y - s y;$$

$$\dot{w} = \sum_{l=1}^{n} (a_l w x_l - k w x_l y).$$

С учетом того, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= a_i x_i - x_i \sum\limits_{l=1}^{n} a_l x_l, \; i = \overline{1,n}, \\ \dot{y} &= bwy - sy, \\ \dot{w} &= w \sum\limits_{l=1}^{n} a_l x_l - kwy, \end{cases}$$

в которой первые n уравнений образуют систему на стандартном симплексе.

3.2.3. Метод степенной замены

В ряде случаев решение исходной системы принадлежит некоторому ограниченному замкнутому множеству, например части сферы, эллипсоида и т.п., которое можно взаимно-однозначно и непрерывно отобразить на стандартный симплекс. Тогда исходная система будет сведена к системе на стандартном симплексе. Такой метод преобразования осуществляется посредством степенной замены.

Теорема 3.2.4. *Пусть задана система*

$$\dot{z}_i = g_i(t, z_i) - z_i \sum_{j=1}^{n} z_j^{M-1} g_j(t, z_j), \; i = \overline{1,n}, \tag{3.30}$$

где M – положительная константа, $g_i(t, z_i)$ – непрерывные по совокупности переменных, квазиположительные и положительно однородные по z_i функции, $i = \overline{1,n}$. Тогда с помощью степенной замены переменных

$$x_i = z_i^M \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.31}$$

систему (3.30) *можно привести к системе на стандартном симплексе* (3.4), *где* $\Phi_i(t, x_i) \equiv M \cdot g_i(t, x_i)$.

Доказательство. Так как функции $g_i(t, z_i)$ квазиположительные, то из теоремы 2.1.6 следует, что при неотрицательных начальных условиях система (3.30) имеет неотрицательное решение. Сделаем в уравнениях (3.30) замену (3.31):

$$\dot{x}_i = M z_i^{M-1} \Big(g_i(t, z_i) - z_i \sum_{j=1}^{n} z_j^{M-1} g_j(t, z_j) \Big), \quad i = \overline{1,n}.$$

Воспользуемся положительной однородностью функций $g_i(t, z_i)$ по второму аргументу:

$$\dot{x}_i = Mg_i(t, z_i^M) - z_i^M \sum_{j=1}^{n} Mg_j(t, z_j^M), \quad i = \overline{1, n},$$

и выразим переменные z через переменные x по формулам (3.31):

$$\dot{x}_i = Mg_i(t, x_i) - x_i \sum_{j=1}^{n} Mg_j(t, x_j), \quad i = \overline{1, n}.$$

Заменив $Mg_i(t, x_i)$ на $\Phi_i(t, x_i)$, получим уравнения системы (3.4). Функции Φ_i при этом будут удовлетворять условиям квазиположительности, положительной однородности по переменным x. Теорема доказана.

Замечание 3.2.1. Если функции Φ_i имеют вид $\Phi_i(t, x_i)$, т.е. каждая i-я функция зависит только от i-й переменной x_i и не зависит от других, кроме t, то из условия положительной однородности по второму аргументу следует выполнение условия Липшица по x для этих функций.

Действительно, пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ – две точки из области определения функций Φ_i, $i = \overline{1, n}$, тогда

$$|\Phi_i(t, x_i) - \Phi_i(t, \bar{x}_i)| = |x_i \Phi_i(t, 1) - \bar{x}_i \Phi_i(t, 1)| =$$

$$= |\Phi_i(t, 1)||x_i - \bar{x}_i| \leq |\Phi_i(t, 1)| \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k|.$$

Если в качестве константы Липшица взять $L = |\Phi_i(t, 1)|$, то условие Липшица для функции Φ_i будет выполнено при каждом фиксированном t.

Следствие 3.2.5. *Если начальные условия в задаче Коши для системы* (3.30) *удовлетворяют соотношениям*

$$z_i(t_0) = z_i^0, \quad z_i^0 \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^{n} \left(z_i^0\right)^M = 1,$$

то ее решение удовлетворяет условиям

$$z_i(t) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^M(t) = 1, \tag{3.32}$$

в любой момент времени $t \geqslant t_0$.

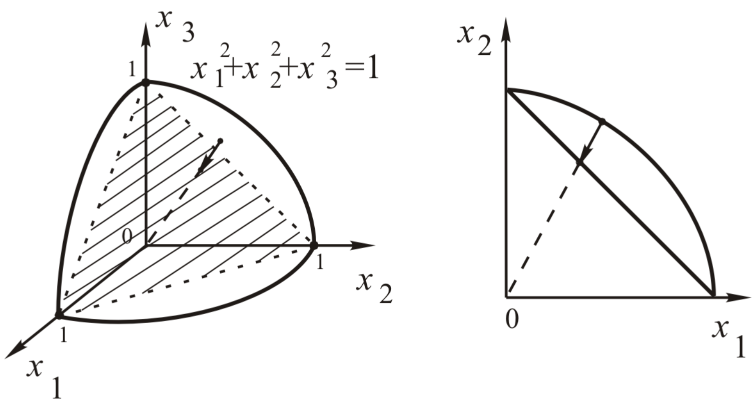
Доказательство. Если начальные условия неотрицательны, то как уже было отмечено, решение задачи Коши для системы (3.30) будет неотрицательным. С помощью замены переменных (3.31) система (3.30) преобразуется к системе (3.4) на стандартном симплексе. При этом начальные условия $x_i(t_0) = z_i^M(t_0)$ будут удовлетворять соотношениям (3.20). Тогда решение задачи Коши для системы (3.4) в каждый момент времени $t \geqslant t_0$ будет удовлетворять соотношениям (3.19), из которых вытекает справедливость соотношений (3.32) для исходных переменных $z_i(t)$.

Отметим, что в этом случае задача Коши для системы (3.30) имеет единственное решение. Если предположить, что задача Коши для системы (3.30) имеет хотя бы два различных решения, то соответствующая задача Коши для системы (3.4) также будет иметь два различных решения, что невозможно.

Пример 3.2.6. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{gathered}\dot{z}_i = b_i(t)z_i - z_i\sum_{j=1}^{n} b_j(t)z_j^2, \quad i=\overline{1,n},\\ z_i(t_0)=z_i^0, \quad z_i^0 \geqslant 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n}\left(z_i^0\right)^2 = 1.\end{gathered} \tag{3.33}$$

Для этой задачи выполнены условия теоремы 3.2.4 и следствия 3.2.5 при $M = 2$. Ее решение будет удовлетворять соотношениям $z_i(t) \geqslant 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^2(t) = 1.$



Неотрицательная часть единичной сферы – фазовое пространство системы (2.55) при $n = 3$ и $n = 2$

Отсюда видно, что если неотрицательные начальные условия задачи Коши (3.33) принадлежат единичной сфере (n-мерной сфере радиуса 1 с центром в начале координат), то ее решение в каждый момент времени неотрицательно и принадлежит единичной сфере.

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (3.33) неотрицательная часть единичной сферы

$$\{z=(z_1,\ldots,z_n) : z_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 1\}$$

является фазовым пространством[5].

Положив $a_i = 2b_i$, с помощью замены переменных

$$x_i = z_i^2, \quad i=\overline{1,n},$$

исследование системы (3.33) сводится к исследованию системы (3.9) на стандартном симплексе при начальных условиях $x_i(t_0) = (z_i^0)^2$, $i=\overline{1,n}$.

3.2.4. Метод проектирования симплекса

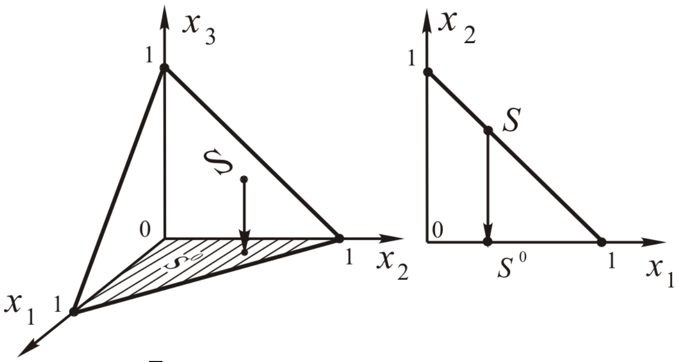
Поскольку в системе на стандартном симплексе фазовые координаты удовлетворяют тождеству $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, то одну из координат всегда можно исключить, выразив через остальные, например, $x_n = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i$. Геометрически это соответствует взаимно-однозначному проектированию стандартного симплекса S на симплекс S^0

$$S^0 = \{(x_1,\ldots,x_{n-1}) : x_i \geqslant 0, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leqslant 1\}, \tag{3.34}$$

[5] Более точно, положительная часть единичной сферы является инвариантным множеством.

одна из вершин которого находится в начале координат.

Обратно, систему на симплексе S^0 с вершиной в начале координат всегда можно привести к системе на стандартном симплексе S, добавляя дополнительную фазовую переменную. Обоснование этого метода приводится в следующих теоремах.



Геометрическая интерпретация
проектирования симплекса

Теорема 3.2.6. *Пусть задана система*

$$\dot{x}_i = G_i(t,x), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{3.35}$$

где функции $G_i(t,x)$ непрерывны по совокупности переменных, удовлетворяют условию Липшица по x, квазиположительны, удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{n-1} G_i(t,x) \le 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 1. \tag{3.36}$$

Тогда, если начальные условия $x_i(t_0) = x_i^0$, $i = \overline{1, n-1}$, задачи Коши для системы (3.35) *удовлетворяют неравенствам*

$$x_i^0 \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i^0 \le 1, \tag{3.37}$$

то ее решение удовлетворяет неравенствам

$$x_i(t) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i(t) \le 1 \tag{3.38}$$

в любой момент времени $t \geqslant t_0$.

Доказательство. Введем новую переменную

$$x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i. \tag{3.39}$$

Очевидно, для ее производной справедливо равенство

$$\dot{x}_n = -\sum_{i=1}^{n-1} G_i(t,x) \equiv F_n(t,x). \tag{3.40}$$

Функция $F_n(t,x)$ квазиположительна. Действительно, если $x_n = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i = 1$ и по условию (3.36)

$$F_n(t,x) = -\sum_{i=1}^{n-1} G_i(t,x) \geqslant 0.$$

Сумма правых частей системы (3.35), (3.40) равна нулю. Следовательно, система (3.35), (3.40) является системой на симплексе. В начальный момент времени

$$x_n(t_0) = x_n^0 = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^0 \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^0 = 1,$$

следовательно, начальные условия задачи Коши для системы (3.35), (3.40) берутся из стандартного симплекса. Тогда ее решение в любой момент времени будет принадлежать стандартному симплексу S. Отсюда следует, что

$$x_n(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i(t) \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i(t) \leq 1,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 3.2.2. Теорема 3.2.6 утверждает, что фазовым пространством системы (3.35) может быть $(n-1)$-мерный симплекс S^0 с одной из вершин в начале координат[6].

Непосредственно из доказательства теоремы вытекает следующее

Следствие 3.2.7. *Если задана система* (3.35)*, удовлетворяющая условиям* (3.36)*, то вводя по формуле* (3.39) *переменную x_n, можно перейти к системе* (3.35), (3.40) *на стандартном симплексе.*

Для данного следствия справедливо утверждение, которое является в некотором смысле обратным, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2.8. *Пусть задана система* (1.11) *на стандартном симплексе S. Определим функции $G_i(t,x)$, $i=\overline{1,n-1}$, в системе* (3.35) *следующим образом*

$$G_i(t,x_1,\ldots,x_{n-1}) = F_i\Big(t,x_1,\ldots,x_{n-1},1-\sum_{j=1}^{n-1} x_j\Big). \tag{3.41}$$

Тогда решение задачи Коши для системы (3.35) *при начальных условиях, удовлетворяющих неравенствам (3.37), в любой момент времени $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенствам* (3.38)*.*

Доказательство. Функции G_i, определенные равенством (3.41), являются квазиположительными по переменным $x_1,\ldots,x_{n-1}$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i(t,x) = 0$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{n-1} G_i(t,x_1,\ldots,x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(t,x) = -F_n(t,x).$$

[6]Более точно, в теореме 3.2.6 утверждается, что симплекс S^0 будет инвариантным множеством для системы (3.35).

Если $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i = 1$, то $x_n = 0$, при этом $F_n(t,x) \geqslant 0$, следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n-1} G_i \leq 0$. По теореме 3.2.6 решение задачи Коши в этом случае удовлетворяет неравенствам (3.38), если начальные условия удовлетворяют (3.37).

Как показывают проведенные исследования, в любой системе на стандартном симплексе всегда можно исключить одну переменную, понизив размерность системы на единицу. Но такое исключение не всегда целесообразно, поскольку, как будет показано в дальнейшем, системы на стандартном симплексе допускают специальное представление, облегчающее их интегрирование и исследование предельного поведения.

3.3. Представления систем на стандартном симплексе

В пункте 2.2 было доказано, что система вида (3.4) является системой на стандартном симплексе. Как следует из теоремы 3.2.3, к системам такого вида, где $\Phi_i(t,x)$ являются функциями перехода, приводит и нормирующая замена. Справедливо обратное утверждение[7]: любую систему на стандартном симплексе можно представить в виде (3.4), где $\Phi_i(t,x)$ положительно однородные по x. Этот вид системы будем называть *представлением (или заданием) системы на стандартном симплексе через функции перехода.*

Теорема 3.3.1 (Первая теорема о представлении). *Любая система (1.11) на стандартном симплексе S может быть представлена в виде (3.4), где функции $\Phi_i(t,x)$ квазиположительные, положительно однородные по переменным x. При этом, если функции $F_i(t,x)$ удовлетворяют условию Липшица по x хотя бы в некоторой окрестности симплекса S*

$$\{(x_1,...,x_n) : 0<\alpha\leq\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \beta<\infty,\ x_i\geqslant 0,\ i=\overline{1,n}\}, \tag{3.42}$$

где α и β – некоторые положительные константы, то для функций $\Phi_i(t,x)$ также будет выполняться условие Липшица в этой окрестности.

Доказательство. В качестве функций $\Phi_i(t,x)$ в системе (3.4) возьмем функции

$$\Phi_i(t,x) = F_i\Big(t, \frac{x}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}\Big) \sum_{j=1}^{n} x_j. \tag{3.43}$$

Нетрудно заметить, что на стандартном симплексе S функции $\Phi_i(t,x)$ и $F_i(t,x)$ тождественно совпадают. Если функции F_i были квазиположительными, то и функции Φ_i будут квазиположительными. Кроме того, функции $\Phi_i(t,x)$ удовлетворяют условию положительной однородности по переменным x. Действительно,

$$\Phi_i(t,\lambda x) = F_i\Big(t, \frac{\lambda x}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda x_j}\Big) \sum_{j=1}^{n} \lambda x_j = \lambda\Phi_i(t,x) \quad \text{при} \quad \lambda > 0.$$

Так как на симплексе S справедливо равенство (3.3), то сумма функций Φ_j, $j = \overline{1,n}$, также равна нулю на симплексе S. Тогда на симплексе S функции F_i можно представить

[7]Впервые этот факт был отмечен в [38] и в несколько более общей форме для системы динамики вероятностной меры доказан в [32].

в виде

$$F_i(t,x) = \Phi_i(t,x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,x).$$

Проверим выполнение условия Липшица для функций Φ_i. Пусть x и $\bar{x}$ – две произвольные точки из окрестности (3.42) симплекса S, тогда $\dfrac{x}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}, \dfrac{\bar{x}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{x}_j}$ – точки, принадлежащие симплексу S. По условию теоремы существует константа L такая, что

$$|F_i(t,x) - F_i(t,\bar{x})| \le L \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k|;$$

$$\left|F_i\Big(t, \frac{x}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}\Big) - F_i\Big(t, \frac{\bar{x}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{x}_j}\Big)\right| \le L \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{x_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j} - \frac{\bar{x}_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{x}_j} \right| \le$$

$$\le \frac{L}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{n} \left| x_k \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j - \bar{x}_k \sum_{j=1}^{n} x_j \right| =$$

$$= \frac{L}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{n} \left| x_k \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j - x_k \sum_{j=1}^{n} x_j + x_k \sum_{j=1}^{n} x_j - \bar{x}_k \sum_{j=1}^{n} x_j \right| \le$$

$$\le \frac{L}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{n} \Big(x_k \sum_{j=1}^{n} |x_j - \bar{x}_j| + |x_k - \bar{x}_k| \sum_{j=1}^{n} x_j \Big) \le \frac{L\beta}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k|.$$

Кроме того, поскольку функции F_i непрерывны, то при фиксированном t существует константа M такая, что

$$|F_i(t, \frac{\bar{x}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{x}_j})| \le M, \quad i = \overline{1,n},$$

при любом выборе точки $\bar{x}$ из окрестности (3.42) симплекса S. Тогда

$$|\Phi_i(t,x) - \Phi_i(t,\bar{x})| = \left| F_i\Big(t, \frac{x}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}\Big) \sum_{j=1}^{n} x_j - F_i\Big(t, \frac{\bar{x}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{x}_j}\Big) \sum_{j=1}^{n} x_j + \right.$$

$$\left. + F_i\Big(t, \frac{\bar{x}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{x}_j}\Big) \sum_{j=1}^{n} x_j - F_i\Big(t, \frac{\bar{x}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{x}_j}\Big) \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \right| \le$$

$$\le \Big(\frac{L\beta^2}{\alpha^2} + M \Big) \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k|.$$

Как следует из этой теоремы, любую систему на стандартном симплексе можно интерпретировать как систему динамики удельных численностей самовоспроизводящихся объектов, функции перехода Φ_i при этом являются скоростями роста их численностей в соответствующей однородной системе воспроизводства.

Очевидно, в примере 3.1.1 уравнения (3.9) имеют вид (3.4), где функции $\Phi_i = a_i x_i$, $i = \overline{1,n}$, – квазиположительные, положительно однородные. Что касается уравнений (3.10) примера 3.1.2, то их также можно представить в виде (3.4) с положительно однородными функциями Φ_i, если в качестве таковых взять $\Phi_i = \dfrac{a_i x_i^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}$. В примере 3.1.3 систему (3.12) можно представить в виде (3.4), если в качестве функций Φ_i взять

$$\Phi_i = \frac{x_i \sum\limits_{j=1}^{n} x_j}{d_i \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j/d_j)}.$$

Если система на стандартном симплексе автономная, то первую теорему о представлении можно усилить, доказав, что функции Φ_i могут быть всегда неотрицательными.

Теорема 3.3.2. *Пусть система (1.11) на стандартном симплексе является автономной. Тогда на симплексе S ее можно представить в виде*

$$\dot{x}_i = \tilde{\Phi}_i(x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \tilde{\Phi}_j(x), \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.44}$$

где функции $\tilde{\Phi}_i$, $i = \overline{1,n}$, квазиположительные, положительно однородные, удовлетворяют условию Липшица в окрестности симплекса и, кроме того, неотрицательные.

Доказательство. По теореме 3.3.1 для автономной системы (1.11) на стандартном симплексе справедливо представление (3.4), где функции $\Phi_i \equiv \Phi_i(x)$ не зависят от переменной t и непрерывны по x, а также квазиположительны, положительно однородны и удовлетворяют условию Липшица. В силу последнего для произвольных точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $M_i^0 = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ из симплекса S справедливы неравенства

$$|\Phi_i(x) - \Phi_i(M_i^0)| \leq L x_i, \quad i = \overline{1,n},$$

где L – положительная константа. Следовательно, имеют место неравенства

$$\Phi_i(x) + L x_i \geqslant \Phi_i(M_i^0), \quad i = \overline{1,n}.$$

Так как функции Φ_i квазиположительны, то $\Phi_i(M_i^0) \geqslant 0$, и поэтому верны соотношения

$$\Phi_i(x) + L x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Возьмем

$$\tilde{\Phi}_i(x) \equiv \Phi_i(x) + L x_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Очевидно, функции $\tilde{\Phi}_i(x)$ обладают теми же свойствами, что и функции $\Phi_i(x)$, и, кроме того, положительны на симплексе S. Для любой точки $x \in S$ имеют место тождества

$$\tilde{\Phi}_i - x_i \sum_{j=1}^{n} \tilde{\Phi}_j \equiv \Phi_i + L x_i - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j - x_i \sum_{j=1}^{n} L x_j =$$

$$= \Phi_i + L x_i - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j - L x_i \sum_{j=1}^{n} x_j = \Phi_i - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j, \; i = \overline{1,n}.$$

Значит, правые части системы (3.4) от замены функций $\Phi_i(x)$ на $\tilde{\Phi}_i(x)$ на симплексе S не меняются, и для этой системы справедлива форма представления (3.44). Теорема доказана.

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x}_i = F(x_1, \dots, x_{n-1}),\ i = \overline{1, n-1}, \tag{3.45}$$

фазовым пространством которой является симплекс S^0 размерности $n-1$ с одной из вершин в начале координат (3.34). Как было показано в п. 3.2.4., систему на симплексе S^0 с вершиной в начале координат всегда можно привести к системе на стандартном симплексе S, добавляя дополнительную фазовую переменную. Поскольку для таких систем справедливы теоремы о представлении 3.3.1 и 3.3.2, то отсюда можно получить также представление правой части системы (3.45).

Теорема 3.3.3. *Автономную систему (3.45), заданную на симплексе S^0, всегда можно представить в виде*

$$\dot{x}_i = \Phi_i(x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x),\ i = \overline{1, n-1}, \tag{3.46}$$

где функции $\Phi_i,\ i = \overline{1, n}$,квазиположительные, удовлетворяют условию Липшица.

Доказательство. Введя по формуле (3.39) переменную x_n, переходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i(x),\ i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{x}_n = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} F_i(x) \end{cases} \tag{3.47}$$

на стандартном симплексе S.

По первой теореме о представлении 3.3.1 систему (3.47) можно представить в виде

$$\dot{x}_i = \Phi_i(x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x),\ i = \overline{1, n}, \tag{3.48}$$

где функции $\Phi_i,\ i = \overline{1, n}$, квазиположительные, положительно однородные, удовлетворяют условию Липшица.

Рассматривая первые $n-1$ уравнение и полагая в них $x_n = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i$, приходим к представлению (3.46)

Теперь перейдем к рассмотрению более широкого случая, когда система задана не на симплексе, а в части пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, ограниченной поверхностью $G(z_1, \dots, z_{n-1}) = M$, то есть, когда решение системы $\dot{z}_i = F(z_1, \dots, z_{n-1}),\ i = \overline{1, n-1}$ удовлетворяет неравенству $G(z_1, \dots, z_{n-1}) \leqslant M$.

Теорема 3.3.4. *Пусть система на стандартном симплексе задана через функции перехода $\Phi_i(t, x)$. Зададим некоторые подмножества индексов I и J из множества $1, 2, \dots, n$ так, что $I \neq J$ и суммы компонент решения $\sum\limits_{i \in I} x_i$, $\sum\limits_{j \in J} x_j$ ни в один момент времени не обращаются в 0. Тогда компоненты решения этой системы удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum\limits_{i \in I} x_i}{\sum\limits_{j \in J} x_j}\right) = \frac{\sum\limits_{i \in I} x_i}{\sum\limits_{j \in J} x_j}\left(\frac{\sum\limits_{i \in I} \Phi_i(t, x)}{\sum\limits_{i \in I} x_i} - \frac{\sum\limits_{j \in J} \Phi_j(t, x)}{\sum\limits_{j \in J} x_j}\right). \tag{3.49}$$

Доказательство. Для непрерывного отношения $\dfrac{\sum\limits_{i\in I} x_i}{\sum\limits_{j\in J} x_j}$ в силу уравнений (3.4) выполняются следующие равенства

$$\frac{d}{dt}\Bigg(\frac{\sum\limits_{i\in I} x_i}{\sum\limits_{j\in J} x_j}\Bigg) = \frac{\sum\limits_{j\in J} x_j\cdot\sum\limits_{i\in I}\dot{x}_i - \sum\limits_{i\in I} x_i\cdot\sum\limits_{j\in J}\dot{x}_j}{\Bigg(\sum\limits_{j\in J} x_j\Bigg)^2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j\in J} x_j\sum\limits_{i\in I}(\Phi_i(t,x) - x_i\sum\limits_{k=1}^{n}\Phi_k(t,x))}{\Bigg(\sum\limits_{j\in J} x_j\Bigg)^2} -$$

$$- \frac{\sum\limits_{i\in I} x_i\sum\limits_{j\in J}(\Phi_j(t,x) - x_j\sum\limits_{k=1}^{n}\Phi_k(t,x))}{\Bigg(\sum\limits_{j\in J} x_j\Bigg)^2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j\in J} x_j\sum\limits_{i\in I}\Phi_i(t,x) - \sum\limits_{i\in I} x_i\sum\limits_{j\in J}\Phi_j(t,x)}{\Bigg(\sum\limits_{j\in J} x_j\Bigg)^2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i\in I} x_i}{\sum\limits_{j\in J} x_j}\Bigg(\frac{\sum\limits_{i\in I}\Phi_i(t,x)}{\sum\limits_{i\in I} x_i} - \frac{\sum\limits_{j\in J}\Phi_j(t,x)}{\sum\limits_{j\in J} x_j}\Bigg).$$

Теорема доказана.

Можно отметить еще один важный факт, справедливый для систем на стандартном симплексе: любую такую систему можно поставить во взаимно-однозначное соответствие определенной системе динамики отношения фазовых переменных $\dfrac{x_i}{x_j}$, о чем говорят следующие две теоремы.

Теорема 3.3.5. *Пусть система на стандартном симплексе задана через функции перехода $\Phi_i(t,x)$. Тогда отношения компонент ее решения $\dfrac{x_i}{x_j}$ удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{x_i}{x_j}\Big) = \frac{x_i}{x_j}\Big(\frac{\Phi_i(t,x)}{x_i} - \frac{\Phi_j(t,x)}{x_j}\Big), \quad i=\overline{1,n}, \tag{3.50}$$

если $x_i(t)$, $x_j(t)$ ни в один момент времени не обращаются в ноль.

Доказательство. Данная теорема является следствием теоремы 3.3.4 в случае, когда множества I и J содержат по одному элементу: $I=\{i\}$, $J=\{j\}$.

Теорема 3.3.6. *Пусть в системе (3.50) функции $\Phi_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$, – квазиположительные, положительно однородные по переменным x. Если система (3.50) при любых положительных начальных условиях из стандартного симплекса S имеет решение с положительными компонентами $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, то система (3.4) будет единственной системой на стандартном симплексе, которой удовлетворяют переменные $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей теоремы видно, что переменные x удовлетворяют одновременно системам (3.50) и (3.4). Докажем, что не существует другой системы на симплексе S, кроме (3.4), которой удовлетворяют переменные (3.50).

Предположим, что на симплексе S существует система

$$\dot{x}_i = R_i(t, x), \tag{3.51}$$

не совпадающая с системой (3.4), которой удовлетворяет решение (3.50). В силу первой теоремы о представлении систему (3.51) можно записать в виде

$$\dot{x}_i = G_i(t, x) - x_i \sum_{j=1}^{n} G_j(t, x), \tag{3.52}$$

где функции $G_i(t, x)$ – квазиположительные, положительно однородные по переменным x. По предположению динамика отношения компонент решения $\dfrac{x_i}{x_j}$ систем (3.4) и (3.52) совпадает, следовательно,

$$\frac{\Phi_i(t,x)}{x_i} - \frac{\Phi_j(t,x)}{x_j} \equiv \frac{G_i(t,x)}{x_i} - \frac{G_j(t,x)}{x_j} \quad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Умножим обе части этого равенства на $x_i x_j$:

$$x_j \Phi_i(t,x) - x_i \Phi_j(t,x) \equiv x_j G_i(t,x) - x_i G_j(t,x)\, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

и просуммируем по индексу j:

$$\Phi_i(t,x) \sum_{j=1}^{n} x_j - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,x) = G_i(t,x) \sum_{j=1}^{n} x_j - x_i \sum_{j=1}^{n} G_j(t,x),$$

$i = \overline{1, n}$. Так как $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1$, то системы (3.4) и (3.52) тождественно совпадают. Полученное противоречие доказывает теорему.

3.4. Интегрирование систем на симплексе

Благодаря представлению системы на стандартном симплексе через функции перехода (3.4) каждой такой системе можно поставить во взаимно-однозначное соответствие вспомогательную однородную систему дифференциальных уравнений, причем отношение функций перехода к соответствующей фазовой переменной исходной системы будет иметь смысл относительной скорости роста соответствующей фазовой переменной вспомогательной однородной системы. При этом решение исходной системы выражается через решение вспомогательной посредством нормирующей замены. Таким образом, в ряде случаев можно облегчить процесс решения системы на стандартном симплексе, сведя его к интегрированию вспомогательной однородной системы. Справедлив и обратный переход: по решению системы на стандартном симплексе, заданной через функции перехода, можно восстановить решение вспомогательной однородной системы.

Теорема 3.4.1 (Интегрирование систем на симплексе). *Пусть система на стандартном симплексе задана через функции перехода $\Phi_i(t, x)$. Тогда ее решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x^0 \in S$, определяется формулой*

$$x_i(t) = \frac{\xi_i(t)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.53}$$

где $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ *– нетривиальное в каждый момент времени решение вспомогательной задачи Коши*

$$\dot{\xi}_i = \Phi_i(t, \xi), \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.54}$$

$$\xi(t_0) = x^0. \tag{3.55}$$

Доказательство. В силу квазиположительности функций $\Phi_i(t, \xi)$ задача (3.54), (3.55) имеет неотрицательное решение. По требованию теоремы компоненты этого решения ни в один момент времени не обращаются одновременно в ноль, поэтому вектор-функция $x(t)$, определенная формулой (3.53), является непрерывной и неотрицательной.

Нетрудно видеть, что в момент t_0 функции (3.53) удовлетворяют начальным условиям:

$$x_i(t_0) = \frac{\xi_i(t_0)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j(t_0)} = \frac{x_i^0}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^0} = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Покажем теперь, что функции x_i, определяемые формулами (3.53), удовлетворяют системе (3.4). Продифференцируем равенства (3.53) по переменному t:

$$\dot{x}_i = \frac{\dot{\xi}_i \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j - \xi_i \sum\limits_{j=1}^{n} \dot{\xi}_j}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j\right)^2} = \frac{\dot{\xi}_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j} - \frac{\xi_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j} \cdot \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \dot{\xi}_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j}.$$

Так как ξ_i, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют системе (3.54), то, с учетом положительной однородности функций Φ_i, полученное выражение преобразуется к виду

$$\dot{x}_i = \Phi_i\left(t, \frac{\xi}{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j}\right) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j\left(t, \frac{\xi}{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j}\right) = \Phi_i(t, x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t, x).$$

Следовательно, вектор-функция $x(t)$, составляющие которой определяются формулой (3.53), является решением задачи Коши (3.4), (3.20), что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что если система на стандартном симплексе понимается как система динамики удельных численностей самовоспроизводящихся объектов, то ей соответствует однородная система воспроизводства.

Теорема 3.4.2. *Пусть* $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ *– единственное решение системы дифференциальных уравнений на стандартном симплексе, заданной через функции перехода* $\Phi_i(t, x)$, $i = \overline{1, n}$, *с начальными условиями* $x(t_0) = x^0$, *принадлежащими стандартному симплексу, а* $c(t)$ *– единственное решение задачи*

$$\dot{c} = c \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(t, x), \quad c(t_0) = 1.$$

Тогда $\xi(t) = c(t)x(t)$ *– единственное решение задачи* (3.54), (3.55).

Доказательство. Заметим, что уравнение для функции $c(t)$ есть уравнение с наследованием, и в силу следствия 2.1.3 функция $c(t)$ строго больше нуля для всех $t > t_0$.

Производная от функций $\xi_i(t)$ по переменному t равна

$$\dot{\xi}_i = c\dot{x}_i + x_i\dot{c}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Так как $x_i(t)$, $c(t)$ – решения соответствующих уравнений, то для $i = \overline{1,n}$ справедливы равенства

$$\dot{\xi}_i = c\Big(\Phi_i(t,x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,x)\Big) + x_i c \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,x) = c\Phi_i(t,x).$$

В силу положительной однородности функций $\Phi_i(t,x)$ по переменным x последние равенства преобразуются к виду

$$\dot{\xi}_i = \Phi_i(t,cx) = \Phi_i(t,\xi), \quad i = \overline{1,n},$$

т. е. $\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t)$ – решение задачи (3.54), (3.55). Теорема доказана.

Пример 3.4.1. Рассмотрим задачу Коши (3.9), (3.20). Очевидно, система (3.9) есть система с наследованием, удовлетворяющая всем требованиям теорем 3.4.1, следовательно, решение задачи (3.9), (3.20) имеет вид (3.53), где $\xi_i(t)$ — решение системы

$$\dot{\xi}_i = a_i\xi_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.56}$$

с начальными условиями (3.55). Если a_i – константы, то

$$\xi_i(t) = x_i^0 \exp(a_i(t-t_0)),$$

и решение задачи (3.9), (3.20) есть

$$x_i(t) = \frac{x_i^0 \exp(a_i(t-t_0))}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^0 \exp(a_j(t-t_0))}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.57}$$

Если a_i – функции времени, то

$$\xi_i(t) = x_i^0 \exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t} a_i(\tau)\,d\tau\Big), \quad i = \overline{1,n},$$

и соответственно

$$x_i(t) = \frac{x_i^0 \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a_i(\tau)\,d\tau\Big)}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^0 \exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t} a_j(\tau)\,d\tau\Big)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пример 3.4.2. Рассмотрим задачу (3.33) примера 3.2.6, где функции b_i не зависят от t. Как показано в примере 3.2.6, с помощью замены переменных $x_i = z_i^2$, полагая $a_i = 2b_i$, систему дифференциальных уравнений (3.33) можно свести к системе (3.9) на стандартном симплексе, решение которой имеет вид (3.57). Тогда решение системы (3.33) определяется формулой

$$z_i(t) = \frac{z_i^0 \exp(b_i(t-t_0))}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} (z_j^0)^2 \exp(2b_j(t-t_0))}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пример 3.4.3. Рассмотрим систему (2.18) примера 2.1.1. Как показано в примере 3.2.3, с помощью замены переменных $x_i = z_i/a_i$ ее можно свести к системе (3.9) на стандартном симплексе. Тогда решение системы (2.18) имеет вид

$$z_i(t) = \frac{z_i^0 \exp(a_i(t-t_0))}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{z_j^0}{a_j} \exp(a_j(t-t_0))}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.58}$$

Пример 3.4.4. Более нетривиальный пример представляет система с наследованием (3.10). Для нее не выполнены требования теоремы об интегрировании систем на стандартном симплексе (функции $\Phi_i = b_i x_i^2$ не являются положительно однородными). Согласно первой теореме о представлении и теореме об интегрировании системе (3.10) можно поставить в соответствие систему

$$\dot{\xi}_i = \frac{a_i \xi_i^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.59}$$

с положительно однородными правыми частями. Поделим каждое уравнение системы (3.59), начиная со второго, на первое уравнение:

$$\frac{d\xi_i}{d\xi_1} = \frac{a_i \xi_i^2}{a_1 \xi_1^2}, \quad i = \overline{2,n}.$$

Отсюда

$$\xi_i = \frac{a_1 \xi_1}{a_i(1 + a_1 c_i \xi_1)}, \quad i = \overline{2,n}, \tag{3.60}$$

где константы c_i, $i = \overline{2,n}$, определяются из начальных условий. Равенство (3.60) будет справедливо и для индекса $i = 1$, если определить константу $c_1 = 0$. Подставляя найденные выражения (3.60) в первое уравнение системы (3.59) и интегрируя, получим

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\xi_1}{1 + a_1 c_j \xi_1} \right)^{1/a_j} = c e^t,$$

где c определяется из начальных условий. Учитывая (3.53), получаем выражение для x_i через ξ_1:

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i(1 + a_1 c_i \xi_1)}{a_j(1 + a_1 c_j \xi_1)} \right)^{-1}, \quad i = \overline{1,n}.$$

3.5. Уравнения химической кинетики

Привлекательная черта химической кинетики: изучаемые системы могут давать примеры любого (по крайней мере, в принципе) динамического поведения.
А.Н. Горбань. Обход равновесия

Один из широко используемых примеров систем на симплексе представляют уравнения химической кинетики. Рассмотрим химическую реакцию, протекающую при постоянной температуре и постоянном объеме V данной системы в гомогенной среде[8]. Добиться постоянной температуры в реакторе можно, если привести его в контакт с бесконечным тепловым резервуаром – термостатом.

Пусть известен список реагирующих веществ: $A_1, ..., A_n$ (A_i – символ i-го вещества, $i = \overline{1,n}$). Каждому веществу A_i соответствует действительная переменная N_i – количество вещества A_i в системе, выраженное в молях. Вектор $N = (N_1, ..., N_n)$ называется вектором состава. Возможные изменения состава в ходе реакции не являются произвольными, для них должны выполняться следующие ограничения:

а) количество любого вещества не может быть отрицательным

$$N_i \geqslant 0, \;\; i = \overline{1,n}; \tag{3.61}$$

б) количество каждого элемента в замкнутой системе не изменяется (закон сохранения массы); математически это соответствует выполнению в любой момент времени равенств

$$\sum_{i=1}^{n} d_j^i N_i = \kappa_j = const, \;\; j = \overline{1,m}. \tag{3.62}$$

Здесь константы $d_j^i > 0$ соответствуют элементному составу каждого вещества A_i, константы $\kappa_j > 0$ определяются из начальных условий, векторы $d_j = (d_j^1, ..., d_j^n)$, $j = \overline{1,m}$, предполагаются линейно независимыми. Из (3.62) следует выполнение равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} d_j^i \Big) N_i = \sum_{j=1}^{m} \kappa_j = const.$$

Отсюда с учетом (3.61) следует, что область изменения количественного состава реагирующих веществ есть подмножество некоторого симплекса в пространстве $\mathbf{R}^n$, называемое балансным многогранником или многогранником реакции. Сделав замену переменных

$$y_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} d_j^i}{\sum\limits_{j=1}^{m} \kappa_j} N_i, \;\; i = \overline{1,n},$$

можно перейти к системе, фазовым пространством которой является подмножество стандартного симплекса

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \;\; y_i \geqslant 0, \;\; i = \overline{1,n}.$$

При исследовании систем химической кинетики удобно также рассматривать переменные $z_i = N_i/V$ – концентрации вещества A_i в объеме V.

Пусть задан механизм реакции, то есть определен список элементарных химических процессов [14], каждый из которых задается своим стехиометрическим уравнением

$$\nu_1^l A_1 + \cdots + \nu_n^l A_n \longrightarrow \beta_1^l A_1 + \cdots + \beta_n^l A_n, \;\; l = \overline{1,r}, \tag{3.63}$$

где l – номер элементарного процесса, ν_i^l, β_i^l – неотрицательные константы, называемые стехиометрическими коэффициентами. Обозначим $\gamma_i^l = \beta_i^l - \nu_i^l$. Уравнения кинетики, описывающие изменение количественного состава реагирующих веществ, имеют вид

$$\dot{N}_i = \sum_{l=1}^{r} \gamma_i^l V \omega_l, \;\; i = \overline{1,n},$$

[8] Химическая реакция, в которой все реагирующие и получающиеся вещества находятся в одинаковом агрегатном состоянии, называется реакцией в гомогенной среде.

или для концентраций

$$\dot{z}_i = \sum_{l=1}^{r} \gamma_i^l \omega_l,\ i = \overline{1,n}, \tag{3.64}$$

где ω_l – скорость l-го процесса. Для того чтобы при этом выполнялись равенства (3.62), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия сохранения балансов

$$\sum_{i=1}^{n} d_j^i \gamma_i^l = 0,\ j = \overline{1,m},\ l = \overline{1,r},$$

то есть чтобы векторы d_j были ортогональны стехиометрическим векторам $\gamma^l = (\gamma_1^l, ..., \gamma_n^l)$.

Говорят, что кинетика химической системы подчиняется закону действующих масс[9], если скорость каждой элементарной реакции определяется по ее стехиометрическому уравнению (3.63) следующим образом

$$\omega_l = a_l \prod_{i=1}^{n} z_i^{\nu_i^l},\ l = \overline{1,r},$$

где a_l – константа скорости l-го элементарного процесса (в общем случае a_l – функция температуры). В таком случае систему называют кинетически идеальной. Если система кинетически идеальна, то изменение концентраций происходит по закону:

$$\dot{z}_i = \sum_{l=1}^{r} \gamma_i^l a_l \prod_{i=1}^{n} z_i^{\nu_i^l},\ i = \overline{1,n}. \tag{3.65}$$

Пример 3.5.1. Окисление оксида углерода (II) до оксида углерода (IV). Рассмотрим реакцию взаимодействия угарного газа CO (оксида углерода (II)) и кислорода O_2, в результате которой образуется углекислый газ CO_2 (оксид углерода (IV)) [7]. Данная реакция является обратимой, т.е. идет как прямой процесс образования углекислого газа, так и обратный – распад углекислого газа на угарный газ и кислород. Поскольку все вещества, участвующие в реакции, – газы, то реакция идет в гомогенной среде. Механизм реакции определяется следующей схемой (уравнением реакции)

$$2CO + O_2 \rightleftarrows 2CO_2.$$

Пусть реакция протекает в постоянном объеме. Обозначим z_1 – концентрация угарного газа CO, z_2 – концентрация кислорода O_2, z_3 – концентрация углекислого газа CO_2. С учетом элементного состава реагирующих веществ должны иметь место следующие балансные соотношения: баланс атомов кислорода

$$z_1 + 2z_2 + 2z_3 = const; \tag{3.66}$$

баланс атомов углерода

$$z_1 + z_3 = const. \tag{3.67}$$

Складывая их, имеем

$$2z_1 + 2z_2 + 3z_3 = const. \tag{3.68}$$

[9]Закон действующих масс был впервые сформулирован Н.Н. Бекетовым в 1865 г., а затем К. Гульбергом и П. Вааге в 1867 г. Он также называется основным постулатом химической кинетики [16].

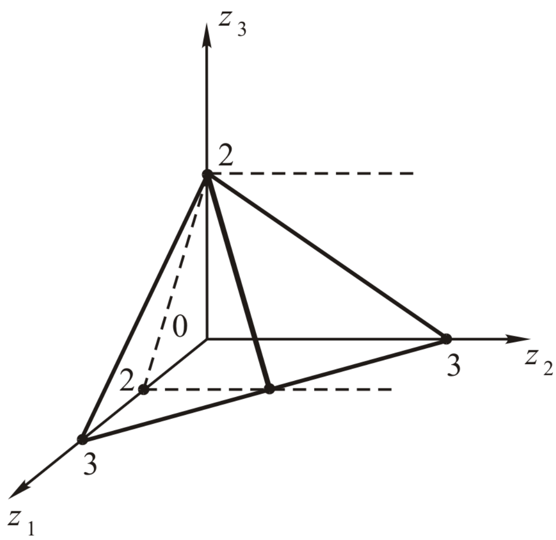
С учетом того, что концентрации неотрицательны, приходим к условиям, определяющим симплекс в пространстве R^3:

$$2z_1 + 2z_2 + 3z_3 = \Omega, \quad z_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,3},$$

где константа Ω определяется из начальных условий. Учитывая дополнительно одно из равенств (3.66) или (3.67), приходим к балансному многограннику

$$\begin{cases} z_1 + z_3 = b_1, \\ 2z_2 + z_3 = b_2, \end{cases} \tag{3.69}$$

который в данном случае является отрезком (b_1, b_2 – постоянные, определяющиеся из начальных условий). Любая фазовая траектория для рассматриваемого процесса лежит на соответствующем балансном многограннике.



Балансный многогранник
при $\Omega = 6$, $b = 2$

Перейдем к выводу уравнений кинетики этой реакции. Пусть реакция протекает при постоянной температуре, a_1 – константа скорости прямого процесса, a_2 – константа скорости обратного процесса. В соответствии с законом действующих масс скорость w_1 прямого процесса определяется концентрациями вступивших в реакцию веществ – угарного газа и кислорода, взятых в степенях, равных их стехиометрическим коэффициентам – 2 и 1 соответственно, т.е. $w_1 = a_1 z_1^2 z_2$; скорость w_2 обратного процесса определяется концентрацией углекислого газа в степени 2, т.е. $w_2 = a_2 z_3^2$. Отсюда получаются уравнения динамики концентраций всех трех веществ

$$\begin{cases} \dot z_1 &= -2a_1 z_1^2 z_2 + 2a_2 z_3^2 &\equiv f_1(z_1, z_2, z_3), \\ \dot z_2 &= -a_1 z_1^2 z_2 + a_2 z_3^2 &\equiv f_2(z_1, z_2, z_3), \\ \dot z_3 &= 2a_1 z_1^2 z_2 - 2a_2 z_3^2 &\equiv f_3(z_1, z_2, z_3). \end{cases} \tag{3.70}$$

Используя теорему 3.2.1, легко проверить, что для данной системы дифференциальных уравнений выполняются балансные соотношения (3.66), (3.67), (3.68).

Пример 3.5.2. Реакция окисления нитрит-ионов. Рассмотрим реакцию окисления нитрит-ионов в растворе:

$$NO_2^- + HClO \to [NO_2^- ... OH - Cl] \to [NO_2^- - OH ... Cl] \to$$

$$\to NO_3^- + HCl.$$

Механизм этой реакции условно можно записать в виде

$$A_1 + A_2 \xrightarrow{a_1} A_3, \quad A_3 \xrightarrow{a_2} A_4, \quad A_4 \xrightarrow{a_3} A_5 + A_6,$$

где A_1 – вещество NO_2^-, A_2 – вещество $HClO$, A_3 – $[NO_2^-...OH-Cl]$, A_4 – $[NO_2^- - OH...Cl]$, A_5 – NO_3^-, A_6 – HCl; a_i, $i = \overline{1,3}$, – константы скорости элементарных реакций. Пусть z_i – концентрация вещества A_i, балансные уравнения с учетом элементного состава реагирующих веществ имеют вид:

сохранение атомов азота	$z_1 + z_3 + z_4 + z_5 = b_1;$
сохранение атомов кислорода	$2z_1 + z_2 + 3z_3 + 3z_4 + 3z_5 = b_2;$
сохранение атомов водорода	$z_2 + z_3 + z_4 + z_6 = b_3;$
сохранение атомов хлора	$z_2 + z_3 + z_4 + z_6 = b_4,$

где константы b_i находятся из начальных условий. Уравнения химической кинетики имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= -a_1 z_1 z_2, & \dot z_2 &= -a_1 z_1 z_2, \\ \dot z_3 &= a_1 z_1 z_2 - a_2 z_3, & \dot z_4 &= a_2 z_3 - a_3 z_4, \\ \dot z_5 &= a_3 z_4, & \dot z_6 &= a_3 z_4. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Пример 3.5.3. Система Лотки – Вольтерра. Рассмотренные в примере 2.1.1 модельные уравнения, предложенные В. Вольтерра [11], возникшие из наблюдения экологической ситуации, совпадают с уравнениями А. Лотки [128] для механизма гипотетической химической реакции

$$A + A_1 \xrightarrow{a_1} 2A_1, \quad A_1 + A_2 \xrightarrow{a_2} 2A_2, \quad A_2 \xrightarrow{a_3} B, \tag{3.72}$$

где A – исходный реагент, A_1, A_2 – промежуточные вещества, B – продукт реакции, a_1, a_2 и a_3 – константы скорости реакций [73]. На практике, если A и B имеются в столь больших количествах, что их уменьшение или производство в механизме реакции (3.72) оказывает пренебрежимо малое влияние на их концентрации, то, за исключением долгих времен, их концентрации можно считать постоянными.

Обозначим концентрации веществ A, A_1, A_2 соответственно z_0, z_1, z_2. Из закона действующих масс, применимого к (3.72), следуют кинетические уравнения для $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= a_1 z_0 z_1 - a_2 z_1 z_2, \\ \dot z_2 &= a_2 z_1 z_2 - a_3 z_2. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений совпадает с уравнениями (2.20) модели "хищник – жертва" примера 2.1.3.

Нетрудно видеть, что уравнение (1.3) процесса распада радиоактивного вещества также можно рассматривать как уравнение химической кинетики, соответствующее механизму $A_1 \xrightarrow{a} A_2$, если считать, что x – количество вещества A_1.

Пример 3.5.4. Рассмотрим гипотетический процесс с участием реагирующих веществ $A_1, ..., A_n$, механизм которого условно можно записать в виде

$$A_i + A_j \xrightarrow{a_i} 2A_i, \; A_i + A_j \xrightarrow{a_j} 2A_j, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}, \; i \neq j,$$

где a_i, $i = \overline{1, n}$, – константы скорости реакций. Таким образом, определено $r = n(n-1)$ элементарных процессов, в каждом из которых участвуют 2 вещества из n с соответствующими стехиометрическими коэффициентами, протекающих со скоростью ω_l, $l = \overline{1, r}$:

l	$A_i + A_j \xrightarrow{a_i} 2A_i$	w_l	γ_i^l	γ_j^l
1	$A_1 + A_2 \xrightarrow{a_1} 2A_1,$	$a_1 z_1 z_2$	1	-1
...	...	...	...	...
$n-1$	$A_1 + A_n \xrightarrow{a_1} 2A_1,$	$a_1 z_1 z_n$	1	-1
n	$A_2 + A_1 \xrightarrow{a_2} 2A_2,$	$a_2 z_1 z_2$	1	-1
$n+1$	$A_2 + A_3 \xrightarrow{a_2} 2A_2,$	$a_2 z_2 z_3$	1	-1
...	...	...	...	...
$2(n-1)$	$A_2 + A_n \xrightarrow{a_2} 2A_2,$	$a_2 z_2 z_n$	1	-1
$2n-1$	$A_3 + A_1 \xrightarrow{a_3} 2A_3,$	$a_3 z_3 z_1$	1	-1
...	...	...	...	...
$n(n-1)$	$A_n + A_{n-1} \xrightarrow{a_n} 2A_n,$	$a_n z_n z_{n-1}$	1	-1

В соответствии с этой таблицей и системой (3.64) изменение концентрации z_1 вещества A_1 в составе смеси описывается уравнением

$$\dot{z}_1 = \sum_{l=1}^{n(n-1)} \gamma_1^l \omega_l = \sum_{l=1}^{n-1} \omega_l - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{i(n-1)+1} =$$
$$= \sum_{j=2}^{n} (a_1 - a_j) z_1 z_j = \sum_{j=1}^{n} (a_1 - a_j) z_1 z_j.$$

Аналогично записав уравнения, характеризующие изменения концентраций веществ $A_2, ..., A_n$, получим, что переходный режим будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j) z_i z_j, \; i = \overline{1, n},$$

которую можно переписать в виде

$$\dot{z}_i = a_i z_i \sum_{j=1}^{n} z_j - z_i \sum_{j=1}^{n} a_j z_j, \; i = \overline{1, n}. \tag{3.73}$$

Нетрудно убедиться, что для полученной системы выполняются условия теоремы 3.2.1. Следовательно, при начальных условиях $z_i(t_0) \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i(t_0) = \Omega$, в любой момент времени $t \geqslant t_0$ решение системы (3.73) будет удовлетворять условиям $z_i(t) \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i(t) = \Omega$. В этом случае с помощью линейной замены $x_i = z_i / \Omega$ система (3.73) легко сводится к системе (3.9) на стандартном симплексе.

Примеры 3.5.3 – 3.5.4 показывают, что нередко модель описывает процессы, не относящиеся к химии, принадлежащие совсем другой предметной области, однако их динамика во многом напоминает химическую кинетику. Это позволяет интерпретировать процесс как кинетику гипотетической химической реакции. Поэтому рассмотренные здесь уравнения имеют большое значение при моделировании процессов самой разной природы.

Глава 4.
Критерии отбора

4.1. Процессы отбора

При рассмотрении систем сосуществующих объектов различных видов нередко приходится сталкиваться с ситуацией, когда объекты одних видов с течением времени исчезают из системы, вытесняемые объектами других видов. Например, в биологических системах один вид живых существ вытесняется другим из общей среды обитания; в системах экономической конкуренции продукция одного предприятия вытесняется продукцией другого предприятия с общего рынка сбыта; в задачах принятия решений частота принятия какого-то одного решения падает до нуля за счет увеличения частоты выбора другого решения. Эти явления называют процессом отбора.

Для построения математической модели этого процесса примем следующую формализацию. Рассмотрим множество $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ различных видов объектов совместно существующих в общей системе. Поставим в соответствие каждому элементу множества M неотрицательное действительное число $x_i(t)$ – количественный показатель, характеризующий наличие объектов данного вида в системе в момент времени t. Если этот показатель для вида v_i равен нулю, то объекты этого вида не представлены в системе. Чаще всего в качестве величины $x_i(t)$ берется количество объектов вида v_i, но также это может быть какая-либо другая аддитивная характеристика, например, масса или энергия, соответствующая виду v_i. В задачах принятия решения величина x_i – это вероятность или частота использования варианта v_i в данный момент времени. Как и раньше будем считать, что величины $x_i(t)$ непрерывно меняются с течением времени.

Изучать процессы отбора наиболее целесообразно в системах, где сохраняется общая сумма количественных показателей, так как здесь исчезновение вида возможно только за счет увеличения количества других видов, а не за счет уменьшения общего количества, т.е. решающее значение имеют в первую очередь внутренние взаимоотношения видов и объективные преимущества одних по отношению к другим, а не внешние обстоятельства. При этом, не уменьшая общности, можно считать, что сумма показателей равна единице. В случае, когда сумма показателей меняется с течением времени можно перейти с помощью нормирующей замены к удельным показателям, сумма которых всегда равна единице.

Таким образом, будем считать, что динамика величин x_i определяется системой дифференциальных уравнений (1.11) на стандартном симплексе S. Пусть решение системы (1.11) на стандартном симплексе S может быть продолжено для любых значений параметра $t > t_0$. Это возможно, если, например, функции F_i удовлетворяют условию Липшица по аргументам x во всем пространстве переменных t, x.

Определение. *Будем говорить, что в системе (1.11) на стандартном симплексе имеет место процесс нестрогого отбора вдоль траектории, отвечающей начальному условию $x(t_0)$, если вдоль этой фазовой траектории хотя бы одна i-я компонента решения стремится к нулю при t, стремящемся к бесконечности.*

Определение. *Будем говорить, что в системе (1.11) на стандартном симплексе имеет место процесс строгого отбора вдоль траектории, отвечающей начальному условию*

$x(t_0)$, если вдоль этой фазовой траектории j-я компонента решения стремится к единице при t, стремящемся к бесконечности, в то время как все остальные компоненты стремятся к нулю.

Не уменьшая общности, можно считать $j = 1$, а именно

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 1, \tag{4.1}$$

если $x_1(0) \neq 0$, в противном случае достаточно переобозначить переменные. Очевидно, что результат отбора может зависеть от начальных условий – вид, на котором с течением времени будет концентрироваться вещество или энергия, зависит от начального распределения их в системе; выживание того или иного биологического вида в общей системе сосуществующих видов зависит от соотношения начальных количеств особей всех видов в системе. Востребованным на практике будет не всегда то решение, которое является наилучшим в техническом отношении, а нередко то, к которому все привыкли; частота использования которого в начальный момент времени была максимальной. В этом случае можно дополнительно сравнивать виды по широте множества начальных условий, при которых они отбираются. Если область начальных условий при которых отбирается один вид, больше области начальных условий, при которых отбирается другой, то следует признать, что у первого больше преимуществ, чем у второго.

Понятно, что при этом изучение процессов отбора является частным случаем изучения предельного поведения динамической системы на стандартном симплексе.

Определение. *Подмножество симплекса S будем называть областью нестрогого отбора, если при любых начальных условиях из этой области вдоль соответствующей фазовой траектории имеет место процесс нестрогого отбора.*

Определение. *Подмножество симплекса S будем называть областью строгого отбора (относительно первой фазовой координаты), еслипри любых начальных условиях из этой области вдоль соответствующей фазовой траектории имеет место строгий отбор по первой переменной, т. е. выполняется предельное равенство* (4.1).

Определение. *Систему* (1.11) *на стандартном симплексе S будем называть системой нестрогого отбора, если найдутся номера i и j такие, что при любых начальных условиях, принадлежащих симплексу, для которых $x_j(t_0) \neq 0$, i-я компонента решения стремится к нулю при t, стремящемся к бесконечности.*

Определение. *Систему* (1.11) *на стандартном симплексе S будем называть системой строгого отбора, если найдется такой номер j, что независимо от начальных условий, принадлежащих симплексу, с ненулевой j-й координатой, соответствующая j-я компонента решения стремится к единице при t, стремящемся к бесконечности, в то время как все остальные компоненты стремятся к нулю.*

При рассмотрении систем строгого отбора также, не уменьшая общности, будем полагать, что выполняется предельное равенство (4.1).

Очевидно, что система строгого отбора является также и системой нестрогого отбора. Обратное утверждение, в общем случае, несправедливо. Лишь в случае $n = 2$ понятия строгого и нестрогого отбора для системы (1.11) совпадают.

Целью исследования данной главы является вывод необходимых и достаточных условий, при которых имеет место отбор (строгий или нестрогий).

Практически во всех возникающих в приложениях задачах имеет место следующая альтернатива [88, с. 89] выполнения условия квазиположительности (2.2) для правых частей уравнений системы (1.11): либо оно выполняется в виде равенства (2.6), либо в виде строгого неравенства (2.3). Соответственно в системе (3.4) эта альтернатива такова: или

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv 0, \tag{4.2}$$

или
$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) > 0. \tag{4.3}$$

Напомним некоторые свойства решения задачи Коши для системы (1.11). Если в системе (1.11) условие квазиположительности для правой части i-го уравнения системы выполняется в виде равенства (2.6), то при $x_i(t_0) = 0$ справедливо тождество $x_i(t) \equiv 0$ для всех $t > t_0$, а при $x_i(t_0) > 0$ для всех $t > t_0$ выполняется неравенство $x_i(t) > 0$. Если условие квазиположительности для правой части i-го уравнения системы выполняется в виде строгого неравенства (2.3), то при $x_i(t_0) \geqslant 0$ неравенство $x_i(t) > 0$ выполняется для всех $t > t_0$.

4.2. Процессы нестрогого отбора

Если система на стандартном симплексе задана через функции перехода, то наличие нестрогого отбора зависит от взаимного поведения относительных скоростей роста соответствующих фазовых координат вспомогательной однородной системы. Эта зависимость отражена в следующих теоремах[1].

Теорема 4.2.1. *Пусть система на стандартном симплексе с начальным условием $x(t_0) = x^0 \in S$ имеет решение $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, i-я и j-я компоненты которого, не обращаются в ноль: $x_i(t)x_j(t) \neq 0$ $\forall t \geqslant t_0$, причем индекс i принадлежит некоторому множеству I, а индекс j – множеству J, $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$, Для того чтобы компоненты этого решения с индексами из множества I с течением времени стремились к нулю вдоль траектории, отвечающей начальному условию x^0, необходимо и достаточно, чтобы вдоль этой траектории было справедливо условие*
$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \Big(\frac{\sum\limits_{j\in J} \Phi_j(t, x(t))}{\sum\limits_{j\in J} x_j(t)} - \frac{\sum\limits_{i\in I} \Phi_i(t, x(t))}{\sum\limits_{i\in I} x_i(t)} \Big)\, dt = +\infty. \tag{4.4}$$

Доказательство. Согласно теореме 3.3.4 при $t \geqslant t_0$ отношение функций $\sum\limits_{i\in I} x_i / \sum\limits_{j\in J} x_j$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.49). Разрешая это уравнение относительно $\sum\limits_{i\in I} x_i / \sum\limits_{j\in J} x_j$, с учетом начальных условий получим:
$$\frac{\sum\limits_{i\in I} x_i(t)}{\sum\limits_{j\in J} x_j(t)} = \frac{\sum\limits_{i\in I} x_i^0}{\sum\limits_{j\in J} x_j^0} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \Big(\frac{\sum\limits_{j\in J} \Phi_j(t, x)}{\sum\limits_{j\in J} x_j} - \frac{\sum\limits_{i\in I} \Phi_i(t, x)}{\sum\limits_{i\in I} x_i} \Big)\, dt \right). \tag{4.5}$$

Необходимость. Если для компонент решения системы (3.4) с индексами $i \in I$ выполняются предельные равенства $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{i\in I} x_i(t) = 0$. Так как (3.4) – система на стандартном симплексе, то $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{j\in J} x_j(t) = 1$. Перейдя к пределу при $t \to \infty$ в равенстве (4.5), получим
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{i\in I} x_i^0}{\sum\limits_{j\in J} x_j^0} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \Big(\frac{\sum\limits_{j\in J} \Phi_j(t, x)}{\sum\limits_{j\in J} x_j} - \frac{\sum\limits_{i\in I} \Phi_i(t, x)}{\sum\limits_{i\in I} x_i} \Big)\, dt \right) = 0.$$

[1] В несколько более общем случае систем с наследованием эти теоремы для нестрогого отбора вдоль траекторий были доказаны А.Н. Горбанем [14].

Так как отношение $\sum\limits_{i\in I} x_i^0 / \sum\limits_{j\in J} x_j^0$ не обращается в ноль, то отсюда вытекает справедливость предельного равенства (4.4).

Достаточность. Если выполнено равенство (4.4), то перейдя к пределу в равенстве (4.5), получим

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{i\in I} x_i(t)}{\sum\limits_{j\in J} x_j(t)} = 0.$$

Так как величина $\sum\limits_{j\in J} x_j(t)$ ограничена: $0 < \sum\limits_{j\in J} x_j(t) \le 1$, то

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i\in I} x_i(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{j\in J} x_j(t) \frac{\sum\limits_{i\in I} x_i(t)}{\sum\limits_{j\in J} x_j(t)} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4.2.2. *Пусть система (3.4) на стандартном симплексе с начальным условием $x(t_0) = x^0 \in S$ имеет решение $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, i-я и j-я компоненты которого, не обращаются в ноль: $x_i(t)x_j(t) \neq 0\ \forall\, t \geqslant t_0$. Для того чтобы в системе (3.4) имел место процесс нестрогого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальному условию x^0, а именно $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, достаточно, чтобы вдоль этой траектории было справедливо условие*

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \Big(\frac{\Phi_j(t, x(t))}{x_j(t)} - \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)}\Big)\, dt = +\infty. \tag{4.6}$$

Доказательство. Согласно теореме 3.3.5 при $t \geqslant t_0$ отношение функций $\dfrac{x_i}{x_j}$ подчиняется уравнениям

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{x_i}{x_j}\Big) = \frac{x_i}{x_j}\left(\frac{\Phi_i(t,x)}{x_i} - \frac{\Phi_j(t,x)}{x_j}\right).$$

Разрешая это уравнение относительно $\dfrac{x_i}{x_j}$, с учетом начальных условий получим

$$\frac{x_i}{x_j}(t) = \frac{x_i^0}{x_j^0} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \Big(\frac{\Phi_j(t,x)}{x_j} - \frac{\Phi_i(t,x)}{x_i}\Big)\, dt\right). \tag{4.7}$$

Если выполнено равенство (4.6), то перейдя к пределу в равенстве (4.7), получим

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_i}{x_j}(t) = 0.$$

Так как величина $x_j(t)$ ограничена, $0 < x_j(t) \le 1$, то

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \lim_{t\to\infty} x_j(t) \frac{x_i(t)}{x_j(t)} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Определение. *Пусть задана непрерывная функция $\xi(t)$ для $t_0 \leq t < \infty$. Если существует предел*

$$\langle \xi \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^{T} \xi(t)\, dt,$$

то он называется временным средним от функции ξ.

Теорема 4.2.3. *Пусть система (3.4) на стандартном симплексе с начальным условием $x(t_0) = x^0 \in S$ имеет решение $x(t)$, i-я и j-я компоненты которого, не обращаются в ноль: $x_i(t)x_j(t) \neq 0 \; \forall t \geqslant t_0$. Для того чтобы в системе (3.4) имел место процесс нестрогого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальному условию x^0, а именно $\lim\limits_{t \to \infty} x_i(t) = 0$, достаточно, чтобы вдоль этой траектории было справедливо неравенство*

$$\left\langle \frac{\Phi_j}{x_j} \right\rangle > \left\langle \frac{\Phi_i}{x_i} \right\rangle. \tag{4.8}$$

Доказательство. Обозначим

$$q = \left\langle \frac{\Phi_j}{x_j} \right\rangle - \left\langle \frac{\Phi_i}{x_i} \right\rangle.$$

По условию $q > 0$, тогда

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^{T} \left(\frac{\Phi_j(t, x(t))}{x_j(t)} - \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)} \right) dt = q;$$

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{t_0}^{T} \left(\frac{\Phi_j(t, x(t))}{x_j(t)} - \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)} \right) dt = \lim_{T \to +\infty} q(T - t_0) = +\infty,$$

то есть справедливо равенство (4.6), которое является достаточным условием существования процесса нестрогого отбора вдоль траектории, отвечающей начальным условиям x^0, что и требовалось доказать.

Теорема 4.2.4. *Пусть система (3.4) на стандартном симплексе с начальным условием $x(t_0) = x^0 \in S$ имеет решение $x(t)$, i-я и j-я компоненты которого, не обращаются в ноль: $x_i(t)x_j(t) \neq 0 \; \forall t \geqslant t_0$. Для того чтобы в системе (3.4) имел место процесс нестрогого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальному условию x^0, а именно $\lim\limits_{t \to \infty} x_i(t) = 0$, достаточно, чтобы вдоль этой траектории предел*

$$q = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\Phi_j(t, x(t))}{x_j(t)} - \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)} \right)$$

существовал и являлся строго большим нуля либо равным $+\infty$.

Доказательство. Если $q > 0$, то начиная с некоторого момента времени t^* справедливо неравенство

$$\frac{\Phi_j(t, x(t))}{x_j(t)} - \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)} > A, \tag{4.9}$$

где A – фиксированное положительное число, $0 < A < q$. Тогда при $T > t^*$ имеет место оценка

$$\int\limits_{t_*}^{T} \Big(\frac{\Phi_j(t, x(t))}{x_j(t)} - \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)} \Big)\, dt > A(T - t^*).$$

Отсюда вытекает справедливость равенства (4.6), что по теореме 4.2.2 влечет выполнение условия существования процесса нестрогого отбора вдоль траектории, отвечающей начальным условиям x^0.

В случае $q = +\infty$ неравенство (4.9) выполняется для любого положительного числа A начиная с некоторого момента времени t^*, что опять приводит к выполнению условия существования процесса нестрогого отбора вдоль траектории, отвечающей начальным условиям x^0.

Следствие 4.2.5. *Пусть система* (3.4) *на стандартном симплексе с начальным условием* $x(t_0) = x^0 \in S$ *имеет решение* $x(t)$, i*-я и* j*-я компоненты которого, не обращаются в ноль:* $x_i(t)x_j(t) \neq 0 \ \forall t \geqslant t_0$. *Для того чтобы в системе* (3.4) *имел место процесс нестрогого отбора вдоль траектории* $x(t)$, *отвечающей начальному условию* x^0, *а именно* $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, *достаточно, чтобы вдоль этой траектории было верно неравенство*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_j(t, x(t))}{x_j(t)} > \lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)}.$$

Справедливость следствия очевидна. Отметим, что в этом случае существуют временные средние $\left\langle \dfrac{\Phi_j}{x_j} \right\rangle$ и $\left\langle \dfrac{\Phi_i}{x_i} \right\rangle$, равные соответствующим пределам

$$\left\langle \frac{\Phi_j}{x_j} \right\rangle = \lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_j(t, x(t))}{x_j(t)}, \qquad \left\langle \frac{\Phi_i}{x_i} \right\rangle = \lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)}.$$

Вообще, если некоторая непрерывная функция $\xi(t)$ имеет предел, то ее временное среднее совпадает с этим пределом. Действительно, применяя правило Лопиталя, имеем

$$\langle \xi \rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{\int\limits_{t_0}^{T} \xi(t)\, dt}{T - t_0} = \lim_{T\to+\infty} \xi(T),$$

что и требовалось показать.

Замечание 4.2.1. Пусть для правых частей уравнений системы (3.4) выполняются условия (4.2) или (4.2). Если требования теорем 4.2.1 – 4.2.4 и следствия 4.2.5 выполняются вдоль фазовых траекторий системы (3.4) при любых начальных условиях $x^0 \in S$, в которых $x_j^0 \neq 0$, то система (3.4) является системой нестрогого отбора.

Если условия теорем 4.2.1 – 4.2.4 и следствия 4.2.5 выполняются вдоль фазовых траекторий системы (3.4) при любых начальных условиях x^0 ($x_j^0 \neq 0$) из некоторого подмножества стандартного симплекса, то это подмножество является областью нестрогого отбора.

Лемма 4.2.6. *Пусть система* (3.4) *на стандартном симплексе с начальным условием* $x(t_0) = x^0 \in S$ *имеет решение* $x(t)$, i*-я и* j*-я компоненты которого, не обращаются в ноль:* $x_i(t)x_j(t) \neq 0 \ \forall t \geqslant t_0$. *Если вдоль траектории, отвечающей начальному условию* x^0, *справедливо неравенство*

$$\frac{\Phi_j(t, x(t))}{x_j(t)} > \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)}, \tag{4.10}$$

то отношение $\dfrac{x_i}{x_j}(t)$ *монотонно убывает вдоль рассматриваемой траектории.*

Доказательство. Согласно теореме 3.3.5 при $t \geqslant t_0$ отношение функций $\dfrac{x_i}{x_j}$ подчиняется уравнению

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{x_i}{x_j}\right) = \frac{x_i}{x_j}\left(\frac{\Phi_i(t,x)}{x_i} - \frac{\Phi_j(t,x)}{x_j}\right).$$

В силу требований леммы $\dfrac{d}{d\,t}\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right) < 0$, следовательно, $x_i/x_j(t)$ монотонно убывает вдоль траектории, что и требовалось доказать.

Замечание 4.2.2. Если в системе (3.4) на стандартном симплексе для некоторых индексов i и j вдоль соответствующей траектории выполняется неравенство (4.10), то это не гарантирует, что $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, т.е. вдоль этой траектории может не быть процесса нестрогого отбора.

Продемонстрируем данное замечание на примере.

Пример 4.2.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

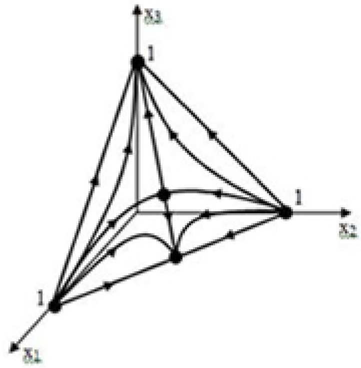
$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_1 \ln x_2 - x_1(x_1 \ln x_2 + x_2 \ln x_1 + x_3 \ln x_3), \\ \dot{x}_2 & = & x_2 \ln x_1 - x_2(x_1 \ln x_2 + x_2 \ln x_1 + x_3 \ln x_3), \\ \dot{x}_3 & = & x_3 \ln x_3 - x_3(x_1 \ln x_2 + x_2 \ln x_1 + x_3 \ln x_3). \end{array}\right. \tag{4.11}$$

Здесь $\dfrac{\Phi_1}{x_1} = \ln x_2$, $\dfrac{\Phi_2}{x_2} = \ln x_1$, $\dfrac{\Phi_1}{x_1} - \dfrac{\Phi_2}{x_2} = \ln \dfrac{x_2}{x_1}$. Пусть в начальный момент $x_2^0 > x_1^0$. Найдем предел отношения $\dfrac{x_2}{x_1}(t)$ при $t \to \infty$.

Как следует из теоремы 3.3.5,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{x_2}{x_1}\ln\frac{x_1}{x_2}.$$

Обозначим $z = x_2/x_1$, тогда $\dot{z} = -z\ln z$, $\ln z = \ln z_0 e^{t_0 - t}$. Так как $\ln z_0 = \ln(x_2^0/x_1^0) > 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \ln z = +0$, тогда $\lim\limits_{t\to\infty} z = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x_2}{x_1}(t) = 1 + 0$. Отсюда не вытекает, что $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 0$ и, следовательно, вдоль рассматриваемой фазовой траектории может не наблюдаться процесс нестрогого отбора. При этом вдоль рассматриваемой фазовой траектории справедливо неравенство $\dfrac{\Phi_1}{x_1} - \dfrac{\Phi_2}{x_2} = \ln\dfrac{x_2}{x_1} > 0$, обеспечивающее согласно лемме 4.2.6 монотонное убывание отношения $\dfrac{x_2}{x_1}(t)$.



4.3. Процессы строгого отбора

Перейдем к рассмотрению условий строгого отбора. Центральным результатом здесь является интегральный критерий отбора[2].

Теорема 4.3.1 (Интегральный критерий строгого отбора). *Пусть ни одна из компонент решения $x(t)$ системы (3.4) на стандартном симплексе, удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0) = x^0 \in S$, не обращается в ноль: $x_i(t) \neq 0\ \forall\, t \geqslant t_0$, $i = \overline{1, n}$. Для того чтобы в системе (3.4) имел место процесс строгого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0, необходимо и достаточно, чтобы вдоль этой траектории были справедливы равенства*

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \left(\frac{\Phi_1(t, x(t))}{x_1(t)} - \frac{\Phi_i(t, x(t))}{x_i(t)} \right) dt = +\infty, \quad i = \overline{2, n}. \tag{4.12}$$

Доказательство. *Необходимость.* Как уже было показано в теореме 4.2.2, для отношений $\dfrac{x_i}{x_1}$ справедливы следующие выражения

$$\frac{x_i}{x_1}(t) = \frac{x_i^0}{x_1^0} \exp\left(- \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\Phi_1}{x_1} - \frac{\Phi_i}{x_i} \right) dt \right), \quad i = \overline{2, n}. \tag{4.13}$$

Если в системе (3.4) имеет место процесс строгого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0, то вдоль этой траектории в силу сохранения симплекса справедливы предельные соотношения

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0, \quad i = \overline{2, n}.$$

Перейдя к пределу в равенствах (4.13), получим

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x_i^0}{x_1^0} \exp\left(- \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\Phi_1(t, x)}{x_1} - \frac{\Phi_i(t, x)}{x_i} \right) dt \right) = 0, \quad i = \overline{2, n}.$$

Так как отношение $\dfrac{x_i^0}{x_1^0}$ не обращается в ноль, то отсюда вытекает справедливость равенств (4.12).

Достаточность. При выполнении равенств (4.12) по теореме 4.2.2 в системе (3.4) имеет место процесс нестрогого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0, при этом, $\lim\limits_{t \to \infty} x_i(t) = 0$ для всех i от 2 до n, что говорит о наличии процесса строгого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0.

Теорема 4.3.2. *Пусть первая компонента решения $x(t)$ системы (3.4) на стандартном симплексе, удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0) = x^0 \in S$, не принимает значений 0 и 1: $x_1(t) \neq 0$, $x_1(t) \neq 1\ \forall\, t \geqslant t_0$. Для того чтобы в системе (3.4) имел место*

[2] Этот критерий был получен в [38] и в более общем случае для систем динамики вероятностной меры в [32].

процесс строгого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0, необходимо и достаточно, чтобы вдоль этой траектории были справедливы равенства

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \Big(\frac{\Phi_1(t,x(t))}{x_1(t)} - \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_i(t,x(t))}{1-x_1(t)} \Big)\, dt = +\infty, \quad i = \overline{2,n}. \tag{4.14}$$

Доказательство. *Необходимость.* Согласно теореме 3.3.4 при $t \geqslant t_0$ отношение функций $\sum\limits_{i\in I} x_i / \sum\limits_{j\in J} x_j$ при $I = 2,3,\dots,n,\ J = 1$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1-x_1}{x_1}\Big) = \frac{1-x_1}{x_1}\left(\frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_i(t,x(t))}{1-x_1(t)} - \frac{\Phi_1(t,x)}{x_1} \right).$$

Разрешая это уравнение относительно $\dfrac{1-x_1}{x_1}$, с учетом начальных условий получим:

$$\frac{1-x_1}{x_1} = \frac{1-x_1^0}{x_1^0} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \Big(\frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_i(t,x(t))}{1-x_1(t)} - \frac{\Phi_1(t,x)}{x_1} \Big)\, dt \right). \tag{4.15}$$

Если в системе (3.4) имеет место процесс строгого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0, то вдоль этой траектории в силу сохранения симплекса справедливы предельные соотношения

$$\lim_{t\to\infty} (1 - x_1(t)) = \lim_{t\to\infty} \sum_{i=2}^{n} x_i(t) = 0.$$

Перейдя к пределу в равенствах (4.15), получим

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-x_1^0}{x_1^0} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \Big(\frac{\Phi_1(t,x)}{x_1} - \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_i(t,x(t))}{1-x_1(t)} \Big)\, dt \right) = 0, \quad i = \overline{2,n}.$$

Так как отношение $\dfrac{1-x_1^0}{x_1^0}$ не обращается в ноль, то отсюда вытекает справедливость равенств (4.12).

Достаточность. При выполнении равенств (4.14) по теореме 4.2.1 в системе (3.4) имеет место процесс нестрогого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0, при этом, $\lim\limits_{t\to\infty}(1 - x_1(t)) = \lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{i=2}^{n} x_i(t) = 0$, что говорит о наличии процесса строгого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0.

Теорема 4.3.3. *Пусть ни одна из компонент решения $x(t)$ системы (3.4) на стандартном симплексе, удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0) = x^0 \in S$, не обращается в ноль: $x_i(t) \neq 0\ \forall\, t \geqslant t_0$, $i = \overline{1,n}$. Для того чтобы в системе (3.4) имел место процесс строгого* *отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0, достаточно, чтобы вдоль этой траектории были справедливы неравенства:*

$$\left\langle \frac{\Phi_1}{x_1} \right\rangle > \left\langle \frac{\Phi_i}{x_i} \right\rangle, \quad i = \overline{2, n}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Из неравенств (4.16), как уже было показано в теореме 4.2.3, вытекает справедливость равенств (4.12), а из них по теореме 4.3.1 следует, что в системе (3.4) имеет место процесс строгого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0, что и требовалось доказать.

Теорема 4.3.4. *Пусть первая компонента решения $x(t)$ системы (3.4) на стандартном симплексе, удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0) = x^0 \in S$, не принимает значений 0 и 1: $x_1(t) \neq 0$, $x_1(t) \neq 1$ $\forall\, t \geqslant t_0$. Для того чтобы в системе (3.4) имел место процесс строгого отбора вдоль траектории $x(t)$, отвечающей начальным условиям x^0, достаточно, чтобы вдоль этой траектории были справедливы неравенства:*

$$\left\langle \frac{\Phi_1}{x_1} \right\rangle > \left\langle \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_i}{1 - x_1} \right\rangle, \quad i = \overline{2, n}.$$

Доказательство. Обозначим

$$q = \left\langle \frac{\Phi_1}{x_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_i}{1 - x_1} \right\rangle.$$

По условию $q > 0$, тогда

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T - t_0} \int\limits_{t_0}^{T} \Bigg(\frac{\Phi_1(t, x(t))}{x_1(t)} - \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_i(t, x(t))}{1 - x_1(t)} \Bigg)\, dt = q;$$

$$\lim_{T\to+\infty} \int\limits_{t_0}^{T} \Bigg(\frac{\Phi_1(t, x(t))}{x_1(t)} - \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_i(t, x(t))}{1 - x_1(t)} \Bigg)\, dt = \lim_{T\to+\infty} q(T - t_0) = +\infty,$$

то есть справедливо равенство (4.14), которое является достаточным условием существования процесса нестрогого отбора вдоль траектории, отвечающей начальным условиям x^0, что и требовалось доказать.

Замечание 4.3.1. Пусть для правых частей уравнений системы (3.4) выполняются условия (4.2) или (4.2). Если требования теорем 4.3.1, 4.3.3 выполняются вдоль фазовых траекторий системы (3.4) при любых начальных условиях $x^0 \in S$, в которых $x_1^0 \neq 0$, то система (3.4) является системой строгого отбора.

Если условия теорем 4.3.1, 4.3.3 выполняются вдоль фазовых траекторий системы (3.4) при любых начальных условиях x^0, в которых $x_1^0 \neq 0$, принадлежащих некоторому подмножеству стандартного симплекса, то это подмножество является областью строгого отбора.

Пример 4.3.1. Рассмотрим систему (3.4) на стандартном симплексе в случае, когда $n = 2$, $\Phi_i = a_i x_i$, где коэффициенты a_1, a_2 – функции времени: $a_1 = \operatorname{arctg} t^2$, $a_2 = \sin t^2 + 1$. Проверим для нее выполнение условий теоремы 4.3.3:

$$\left\langle \frac{\Phi_1}{x_1} \right\rangle = \langle a_1(t) \rangle = \left\langle \operatorname{arctg} t^2 \right\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T - t_0} \int\limits_{t_0}^{T} \operatorname{arctg} t^2 \, dt.$$

Применив правило Лопиталя, нетрудно видеть, что

$$\left\langle \frac{\Phi_1}{x_1} \right\rangle = \lim_{T\to+\infty} \operatorname{arctg} T^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично

$$\left\langle \frac{\Phi_2}{x_2} \right\rangle = \langle a_2(t) \rangle = \left\langle \sin t^2 + 1 \right\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T - t_0} \int\limits_{t_0}^{T} (\sin t^2 + 1) dt,$$

используя известное значение интеграла Френеля[3] [102], найдем

$$\left\langle \frac{\Phi_2}{x_2} \right\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T - t_0} \Big(\int\limits_{0}^{T} \sin t^2 dt - \int\limits_{0}^{t_0} \sin t^2 \, dt + T - t_0 \Big) = 1.$$

Следовательно, $\left\langle \frac{\Phi_1}{x_1} \right\rangle > \left\langle \frac{\Phi_2}{x_2} \right\rangle$ при любых начальных условиях из стандартного симплекса, поэтому рассматриваемая система является системой как нестрогого, так и строгого отбора.

Пример 4.3.2. Рассмотрим систему уравнений на стандартном симплексе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 - x_1(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 + x_1 x_3^2), \\ \dot{x}_2 &= x_2 x_3 + x_3 - x_2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 + x_1 x_3^2), \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_3^2 - x_3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 + x_1 x_3^2), \end{cases}$$

являющуюся частным случаем обобщенной модели Вольтерра-Лотки (2.19). Здесь $\Phi_1 = x_1 x_2$, $\Phi_2 = x_2 x_3 + x_3$, $\Phi_3 = x_1 x_3^2$, $\frac{\Phi_1}{x_1} = x_2$, $\frac{\Phi_2}{x_2} = x_3 + \frac{x_3}{x_2}$, $\frac{\Phi_3}{x_3} = x_1 x_3$. Так как $0 < x_1 < 1$ и $\frac{x_3}{x_2} \geqslant 0$, то $x_1 x_3 < x_3$ и $\frac{\Phi_3}{x_3} - \frac{\Phi_2}{x_2} = x_1 x_3 - x_3 - \frac{x_3}{x_2} < 0$. Согласно лемме 4.2.6 отношение $\frac{x_3}{x_2}(t)$ монотонно убывает, следовательно, существует конечный предел $\alpha = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{x_3}{x_2}(t)$, $\alpha \geqslant 0$. Если $\alpha > 0$, то

$$\frac{\Phi_3}{x_3} - \frac{\Phi_2}{x_2} < -\alpha, \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \Big(\frac{\Phi_3}{x_3} - \frac{\Phi_2}{x_2} \Big) dt = -\infty.$$

---

[3] $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin t^2 \, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Из теоремы 3.3.5 следует, что

$$\frac{x_3}{x_2}(t) = \frac{x_3^0}{x_2^0}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{\Phi_3}{x_3} - \frac{\Phi_2}{x_2}\right)dt\right),$$

тогда при $x_2^0 \neq 0$ выполняется предельное равенство

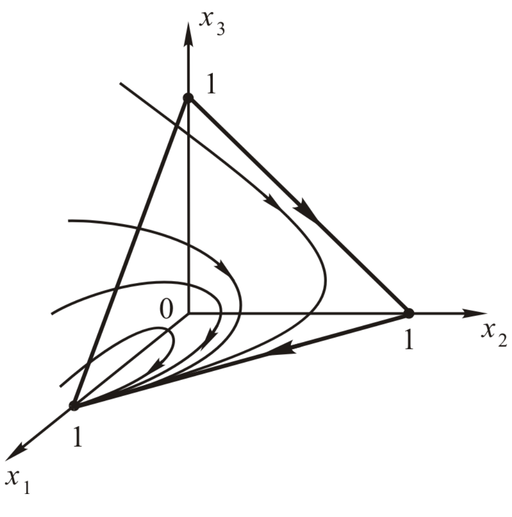
$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_3}{x_2}(t) = 0.$$

Получили противоречие. Отсюда следует, что α может иметь только нулевое значение и $\lim\limits_{t\to\infty} x_3(t) = 0$.

Так как отношение $\dfrac{x_3}{x_2}$ стремится к нулю, то начиная с некоторого момента времени справедливо неравенство $x_2 > x_3 + \dfrac{x_3}{x_2}$. Это означает, что с этого момента времени отношение $\dfrac{x_1}{x_2}$ будет строго монотонно возрастать. Если при этом оно ограничено сверху, то его предел будет равен некоторой константе γ, откуда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} x_2 = \dfrac{1}{1+\gamma} > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_3 = \dfrac{\gamma}{1+\gamma} > 0$ и существует положительное число β такое, что $x_2 > x_3 + \dfrac{x_3}{x_2} + \beta$ начиная с некоторого момента времени t^*. Тогда при $t > t^*$ справедливо неравенство $\dfrac{\Phi_1}{x_1} - \dfrac{\Phi_2}{x_2} > \beta$. Следовательно, $\int\limits_{t_0}^{+\infty}\left(\dfrac{\Phi_1}{x_1} - \dfrac{\Phi_2}{x_2}\right)dt = +\infty$, и в силу теоремы 4.2.2 при $x_1^0 \neq 0$ имеет место предельное равенство $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 0$.

Получили противоречие. Следовательно отношение $\dfrac{x_1}{x_2}$ неограниченно возрастает, откуда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} x_2 = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_1 = 1$.

Проведенные рассуждения справедливы при $x_2^0 \neq 0$. Но поскольку $F_2(x_1, 0, x_3) = x_3 > 0$, то при $x_2^0 = 0$ для любого $\Delta t > 0$ выполняется неравенство $x_2(t_0 + \Delta t) > 0$. Таким образом, при $x_2^0 = 0$ можно провести все вышеизложенные рассуждения для $t > t_0 + \Delta t$ и прийти к тому же результату.



Фазовый портрет системы
примера 3.3.2

Итак, $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty} x_3(t) = 0$, при любых начальных условиях из стандартного симплекса, если $x_1^0 \neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 1$ и данная система является системой строгого отбора.

4.4. Автономные системы отбора

В случае когда система на стандартном симплексе является автономной, можно получить дополнительные необходимые и достаточные условия строгого и нестрогого отбора.

Теорема 4.4.1. *Рассмотрим систему двух автономных уравнений на стандартном симплексе*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Здесь $F_1(x_1, x_2) + F_2(x_1, x_2) = 0$, $F_1(0, x_2) \geqslant 0$, $F_2(x_1, 0) \geqslant 0$[4]. *Для того чтобы имел место процесс отбора (строгого и нестрогого) вдоль траектории, отвечающей начальному условию* $x(t_0) = x^0 \in S$, *необходимо и достаточно, чтобы вдоль этой траектории при* $0 < x_1 < 1$ *выполнялось неравенство:*

$$F_1(x_1, 1 - x_1) > 0. \tag{4.18}$$

Доказательство. *Достаточность.* Поскольку система рассматривается на стандартном симплексе, переменные x_1 и x_2 связаны условием $x_2 = 1 - x_1$. При этом можно ограничиться рассмотрением уравнения

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, 1 - x_1) = G(x_1). \tag{4.19}$$

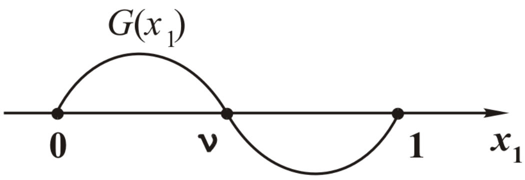
В силу непрерывности функции G справедливо неравенство $G(1) \geqslant 0$. Если $G(1) > 0$, то $F_2(1, 0) < 0$, поэтому функция F_2 не является квазиположительной, и система (4.17) не может быть системой на стандартном симплексе. Следовательно, $G(1) = 0$ и точка $(1, 0)$ является состоянием равновесия системы (4.17).

Из условия (4.18) вытекает строго монотонное возрастание функции $x_1(t)$, кроме того, x_1 ограничена: $x_1 \leq 1$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} x_1 = \alpha \leq 1$.

Докажем, что если первая компонента вектора начального условия x^0 строго больше нуля: $x_1(t_0) = x_1^0 > 0$, то справедливо равенство $\alpha = 1$. Предположим противное: $\alpha < 1$. Рассмотрим отрезок $[x_1^0, \alpha]$. Так как функция $G(x_1)$ непрерывна на этом отрезке, то по теореме Вейерштрасса она достигает своей точной нижней грани в некоторой точке отрезка $[x_1^0, \alpha]$. Пусть $\inf\limits_{[x_1^0, \alpha]} G(x_1) = \beta > 0$. Проинтегрируем (4.19) и оценим результат:

$$x_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} G(x_1(\tau))\, d\tau + x_1^0 \geqslant \beta(t - t_0) + x_1^0 \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty,$$

но это противоречит условию ограниченности. Следовательно, α не может быть меньше единицы.



[4]Смотри замечание 3.1.1 на с. 50.

Необходимость. В рассматриваемой системе (4.17) на стандартном симплексе по условию теоремы имеет место процесс строгого отбора вдоль траектории, отвечающей начальному условию $x^0 \in S$, в котором $x_1^0 > 0$, т.е. вдоль этой траектории выполняется условие (4.1). Докажем, что вдоль этой траектории справедливо неравенство (4.18). Предположим противное: в некоторой точке на рассматриваемой траектории переменная x_1 принимает значение $\zeta \in (0,1)$, и в этой точке неравенство (4.18) не выполняется: $G(\zeta) = F_1(\zeta, 1-\zeta) \le 0$. Если при этом $G(x_1) \le 0$ для всех остальных значений x_1 вдоль траектории, то переменная x_1 монотонно убывает вдоль траектории и условие (4.1) не может быть выполнено. Следовательно, существует хотя бы одна точка на траектории, в которой $x_1 = \mu \in (0,1)$ и $G(\mu) > 0$. Тогда в силу непрерывности функций $G(x_1)$, $x_1(t)$ на интервале (ζ, μ) изменения переменной x_1 существует некоторая точка ν, для которой $G(\nu) = 0$. Уравнение (4.19) при начальном условии $x_1(0) = \nu$ будет иметь стационарное решение $x_1(t) \equiv \nu$, $x_2(t) \equiv 1 - \nu$, что противоречит условию (4.1). Значит сделанное предположение о невыполнении неравенства (4.18) неверно. Теорема доказана.

Теорема 4.4.2. *Для того чтобы в автономной системе двух уравнений, заданной на стандартном симплексе с помощью функций перехода $\Phi_1(x_1, x_2)$, $\Phi_2(x_1, x_2)$, имел место процесс отбора (строгого и нестрогого) вдоль траектории, отвечающей начальному условию $x(t_0) = x^0 \in S$, необходимо и достаточно, чтобы вдоль этой траектории, за исключением точек с координатой $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, выполнялось неравенство:*

$$\frac{\Phi_1(x)}{x_1} > \frac{\Phi_2(x)}{x_2}. \tag{4.20}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть в системе на стандартном симплексе, заданной с помощью функций перехода $\Phi_1(x_1, x_2)$, $\Phi_2(x_1, x_2)$, имеет место процесс отбора вдоль траектории, отвечающей начальному условию x^0. Тогда из теоремы 4.4.1 следует, что вдоль этой траектории при $0 < x_1 < 1$ справедливо неравенство

$$F_1(x_1, x_2) \equiv \Phi_1(x) - x_1(\Phi_1(x) + \Phi_2(x)) > 0.$$

Отсюда

$$(1 - x_1)\Phi_1(x) - x_1\Phi_2(x) > 0.$$

Так как $x_1 + x_2 = 1$, то получим

$$x_2\Phi_1(x) > x_1\Phi_2(x).$$

Далее очевидно, что при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ справедливо неравенство (4.20).

Достаточность. Пусть в системе на стандартном симплексе, заданной с помощью функций перехода $\Phi_1(x_1, x_2)$, $\Phi_2(x_1, x_2)$, вдоль некоторой траектории, отвечающей начальному условию $x^0 \in S$, выполняется условие (4.20). Тогда при любом x_1, принадлежащем интервалу $(0, 1)$, вдоль этой траектории справедливы неравенства

$$x_2\Phi_1(x) > x_1\Phi_2(x),$$

$$(1 - x_1)\Phi_1(x) - x_1\Phi_2(x) > 0,$$

$$\Phi_1(x) - x_1(\Phi_1(x) + \Phi_2(x)) > 0.$$

Таким образом, выполняются условия теоремы 4.4.1, и в рассматриваемой системе имеет место процесс отбора вдоль траектории, отвечающей начальному условию x^0. Теорема доказана.

Замечание 4.4.1. Пусть для правых частей уравнений системы (4.4.1) выполняются условия (2.6) или (2.3). Если требования теорем 4.4.1, 4.4.2 выполняются вдоль фазовых траекторий системы двух автономных уравнений на стандартном симплексе при любых начальных условиях $x^0 \in S$, в которых $x_1^0 \neq 0$, то рассматриваемая система является системой отбора (строгого и нестрогого).

Если условия теорем 4.4.1, 4.4.2 выполняются вдоль фазовых траекторий системы двух автономных уравнений на стандартном симплексе при любых начальных условиях x^0, в которых $x_1^0 \neq 0$, принадлежащих некоторому подмножеству стандартного симплекса, то это подмножество является областью отбора (строгого и нестрогого).

Теорема 4.4.3. *Если в системе*

$$\dot{x}_i = F_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.21}$$

на стандартном симплексе для всех точек с первой координатой x_1, удовлетворяющей условию $0 < \alpha \leq x_1 < 1$, справедливо неравенство

$$F_1(x) > 0, \tag{4.22}$$

то $x_1 \geqslant \alpha$ – область строгого отбора.

Доказательство.Так как функция F_1 непрерывна, то $F_1(1,0,\dots,0) \geqslant 0$. Если $F_1(1,0,\dots,0) > 0$, то из критерия сохранения суммы фазовых координат[5] следует, что

$$\sum_{j=2}^{n} F_j(1,0,\dots,0) < 0,$$

поэтому хотя бы для одной функции F_j, $j = \overline{2,n}$, справедливо неравенство

$$F_j(1,0,\dots,0) < 0,$$

которое противоречит условию (2.2) квазиположительности функции F_j. В этом случае система (4.21) не может быть системой на стандартном симплексе[6]. Следовательно, $F_1(1,0,\dots,0) = 0$ и $\sum\limits_{j=2}^{n} F_j(1,0,\dots,0) = 0$. С учетом условий квазиположительности из последнего равенства следует, что $F_j(1,0,\dots,0) = 0$, $j = \overline{2,n}$. Таким образом, точка $(1,0,\dots,0)$ является состоянием равновесия системы (4.21).

Так как для всех точек стандартного симплекса, удовлетворяющих условию $\alpha \leq x_1 < 1$, выполнено условие (4.22), то из первого уравнения системы (4.21) вытекает строго монотонное возрастание функции $x_1(t)$ вдоль траекторий, отвечающих начальным условиям x^0 из области $x_1 \geqslant \alpha$, кроме того, на стандартном симплексе значения x_1 ограничены сверху единицей, следовательно, существует предел

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = l \leqslant 1. \tag{4.23}$$

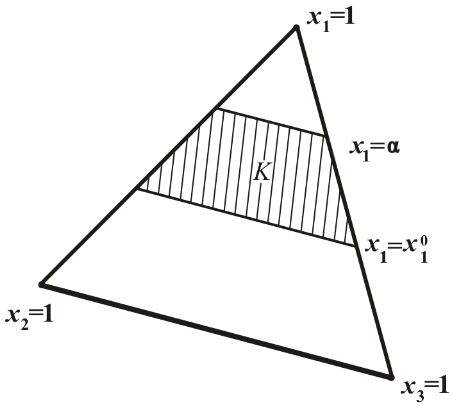
Предположим, что $l < 1$. Рассмотрим подмножество симплекса S – компактное[7] множество

$$K = \{x = (x_1,\dots,x_n) : \alpha \leqslant x_1 \leqslant l,\ 0 \leq x_i \leq 1,\ i = \overline{2,n}\}.$$

[5]Смотри теорему 3.1.1.

[6]Смотри замечание 3.1.1 на с. 50.

[7]Замкнутое ограниченное множество называется компактным.



Функция $F_1(x)$ непрерывна и строго положительна на K, значит, существует $\inf\limits_K F_1(x) = \beta > 0$. Проинтегрировав первое уравнение системы (4.21) на промежутке времени $[t_0, t]$, $t > t_0$, получим

$$x_1(t) = x_1^0 + \int\limits_{t_0}^{t} F_1(x)\, d\tau \geqslant x_1^0 + \beta(t - t_0).$$

Устремив здесь t к бесконечности, получим $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = +\infty$, что противоречит (4.23). Значит, $l = 1$. Теорема доказана.

Согласно первой теореме о представлении 3.3.1 автономную систему (4.21) на стандартном симплексе можно записать в виде

$$\dot{x}_i = \Phi_i(x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x), \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.24}$$

где $\Phi_i(x)$ – квазиположительные, положительно однородные функции. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.4.4. *Если в системе (4.24) для всех точек стандартного симплекса с первой координатой x_1, удовлетворяющей условию $0 < \alpha \leq x_1 < 1$, справедливо неравенство*

$$\frac{\Phi_1(x)}{x_1} > \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_j(x)}{\sum\limits_{j=2}^{n} x_j}, \tag{4.25}$$

то $x_1 \geqslant \alpha$ – область строгого отбора.

Доказательство. Так как на стандартном симплексе $\sum\limits_{j=2}^{n} x_j = 1 - x_1$, то из (4.25) следует, что на подмножестве стандартного симплекса $x_1 \geqslant \alpha$ выполняются неравенства

$$\Phi_1(x)(1 - x_1) > x_1 \sum_{j=2}^{n} \Phi_j(x),$$

$$\Phi_1(x) - x_1 \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x) > 0.$$

В силу теоремы 4.4.3 подмножество стандартного симплекса $x_1 \geqslant \alpha$ – область строгого отбора для система (4.24).

Эта теорема означает, что в системе динамики удельных численностей будет наблюдаться процесс строгого отбора вдоль фазовых траекторий, отвечающих начальным условиям из подмножества стандартного симплекса $x_1 \geqslant \alpha$, если во всех точках этой области относительная скорость роста численности объектов первого вида в однородной системе воспроизводства больше средней относительной скорости роста суммарной численности объектов всех оставшихся видов.

Теорема 4.4.5. *Если в системе* (4.24) *для всех точек стандартного симплекса с первой координатой* x_1*, удовлетворяющей условию* $0 < \alpha \leq x_1 < 1$*, выполняются неравенства*

$$\frac{\Phi_1(x)}{x_1} > \frac{\Phi_i(x)}{x_i}, \quad i = \overline{2, n}, \tag{4.26}$$

как только $x_i \neq 0$*, то* $x_1 \geqslant \alpha$ *– область строгого отбора.*

Доказательство. Пусть β – произвольная константа, удовлетворяющая неравенствам $\alpha < \beta < 1$. Рассмотрим множество

$$A = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \quad x \in S, \quad \alpha \leq x_1 \leq \beta\}.$$

В силу непрерывности отношения $\Phi_1(x)/x_1$ на множестве A имеет место неравенство $\dfrac{\Phi_1(x)}{x_1} \leq C$, где C – некоторая константа. Из неравенств (4.26) при $x_i \neq 0$ следует, что $\dfrac{\Phi_i(x)}{x_i} \leq C$, $i = \overline{2, n}$. Так как $\Phi_i(x) = \dfrac{\Phi_i(x)}{x_i} x_i$, то устремив x_i к нулю в правой части этого равенства, из ограниченности отношения $\dfrac{\Phi_i(x)}{x_i}$ и непрерывности функций $\Phi_i(x)$ заключаем, что для всех индексов $i = \overline{1, n}$ выполняется условие квазиположительности (4.2).

Пусть в некоторой точке x из подмножества стандартного симплекса $x_1 \geqslant \alpha$ координаты x_j отличны от нуля для индексов $j \in E$ и равны нулю для индексов $j \in \overline{E}$, $E \cap \overline{E} = \varnothing$, $E \cup \overline{E} = \{1, \ldots, n\}$. Из (4.26) следует, что в этой точке справедливы неравенства

$$x_j \Phi_1(x) > x_1 \Phi_j(x), \quad j \in E,$$

а из условия (4.2) следуют равенства

$$x_j \Phi_1(x) = x_1 \Phi_j(x), \quad j \in \overline{E}.$$

Просуммировав эти равенства и неравенства по индексам $j \in E \cup \overline{E}$, получим

$$\Phi_1(x) \sum_{j=1}^{n} x_j - x_1 \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x) > 0,$$

следовательно, на подмножестве стандартного симплекса $x_1 \geqslant \alpha$ выполняется неравенство

$$\Phi_1(x) - x_1 \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x) > 0,$$

которое в силу теоремы 4.4.3 говорит о том, что $x_1 \geqslant \alpha$ – область строгого отбора для системы (4.24).

Эта теорема означает, что в системе динамики удельных численностей будет наблюдаться процесс строгого отбора вдоль фазовых траекторий, отвечающих начальным условиям из подмножества стандартного симплекса $x_1 \geqslant \alpha$, если во всех точках этой области относительная скорость роста численности объектов первого вида в однородной системе воспроизводства больше относительной скорости роста численности объектов любого другого вида.

Замечание 4.4.2. Если неравенства (4.22), (4.25) выполняются всюду на стандартном симплексе, за исключением точек с координатой $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$, а условия (4.26) справедливы на стандартном симплексе, как только знаменатели не обращаются в ноль, то система (4.21) и соответсвующая ей (4.24) являются системами строгого отбора.

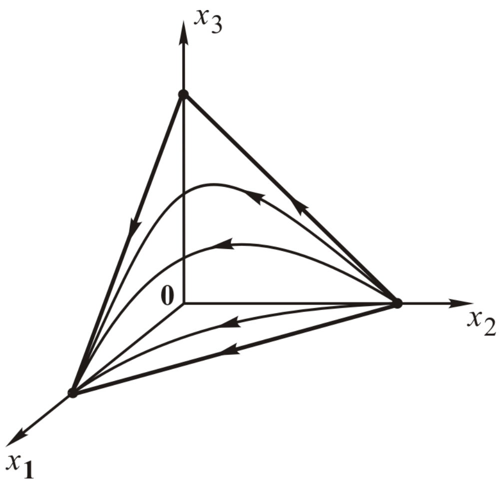
Пример 4.4.1. Рассмотрим систему с наследованием (3.9) с начальными условиями (3.20). Если коэффициенты a_i, $i = \overline{1,n}$, являются постоянными величинами, причём $a_1 > \max\limits_{i=\overline{2,n}} a_i$, то из теоремы 4.4.5 и замечания 4.4.2 следует, что система (3.9) является системой строгого отбора и выполняется предельное соотношение (4.1). В этом можно убедиться, непосредственно исследовав предельное поведение решения задачи (3.9), (3.20), полученное в примере 3.4.1 и имеющее вид (3.57).

Введем обозначение $C_{ji} = \dfrac{x_j^0}{x_i^0}$. Так как $x_i^0 > 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, то C_{ji} – положительные константы, тогда

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \left(1 + \sum_{j=2}^{n} C_{j1} \lim_{t\to\infty} e^{(a_j - a_1)(t - t_0)}\right)^{-1} = 1,$$

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \lim_{t\to\infty}\Bigg(1 + C_{1i}e^{(a_1 - a_i)(t - t_0)} + \\ + \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} C_{ji}e^{(a_j - a_i)(t - t_0)}\Bigg)^{-1} = 0$$

при $i = \overline{2,n}$. Все компоненты решения, кроме первой, стремятся к нулю с течением времени. В рамках модели примера 3.1.1 это означает, что биологический вид, имеющий наибольший коэффициент размножения, с течением времени вытеснит биологические виды с меньшими коэффициентами размножения, их относительная численность будет стремиться к нулю.



Фазовый портрет системы (2.30)
при $n = 3$, $a_1 > a_2 > a_3 > 0$

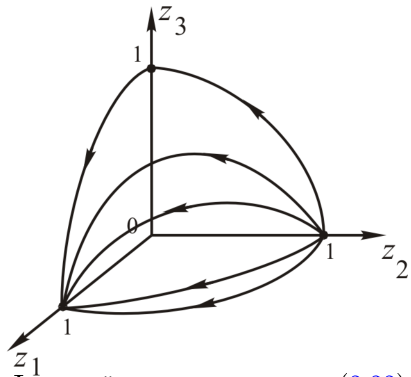
Если же в системе (3.9) коэффициенты a_i упорядочены следующим образом: $a_1 = a_2 > a_3 > \cdots > a_n$, то условия теоремы 4.4.5 не выполняются, т.к. $\dfrac{\Phi_1(x)}{x_1} = \dfrac{\Phi_2(x)}{x_2}$, но применив теорему 4.2.3, заключаем, что система обладает свойством нестрогого отбора.

Проанализировав в этом случае непосредственно предельное поведение решения (3.57), получим $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = \dfrac{x_1^0}{x_1^0 + x_2^0}$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \dfrac{x_2^0}{x_1^0 + x_2^0}$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, $i = \overline{3, n}$.

Отсюда видно, что два биологических вида, обладающих наибольшими коэффициентами размножения, вытесняют из общей области остальные виды. Относительная численность выживающих видов зависит только от их начальной численности.

Если рассмотреть систему (3.33) при $b_1 > \max\limits_{i=\overline{2,n}} b_i$, то сделав степенную замену $z_i = \sqrt{x_i}$, перейдем к системе (3.9) с коэффициентами $a_i = 2b_i$. Поскольку при этом $x_1 \to 1$ при $t \to +\infty$, то и $z_1 \to 1$ при $t \to +\infty$.

Данный пример показывает, что с помощью теорем об отборе можно исследовать динамику не только систем на стандартном симплексе, но и систем других классов.



Фазовый портрет системы (3.33)
при $n = 3$, $b_1 > b_2 > b_3 > 0$

Рассмотрим модель (3.29) примера 3.2.5. Выделенная подсистема на стандартном симплексе снова исследуется так же, как система (3.9). Если $a_1 > \max\limits_{i=\overline{2,n}} a_i$, то она является системой строгого отбора и с течением времени удельный вес всех видов жертв, кроме первого, стремится к нулю.

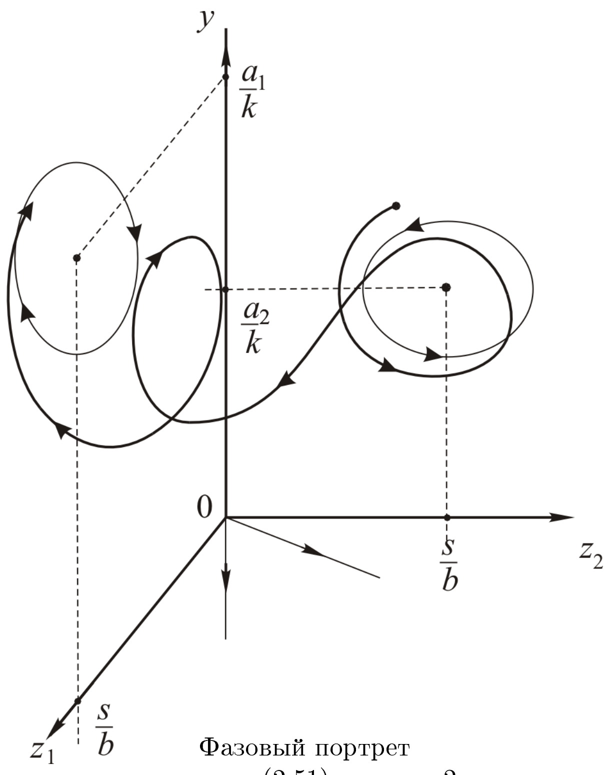
Что касается системы (3.29), то у нее кроме тривиального состояния равновесия в начале координат есть состояния равновесия в точках $\left(\dfrac{s}{b}, 0, \ldots, 0, \dfrac{a_1}{k}\right)$, $\left(0, \dfrac{s}{b}, 0, \ldots, 0, \dfrac{a_2}{k}\right), \ldots,$ $\left(0, \ldots, 0, \dfrac{s}{b}, \dfrac{a_n}{k}\right)$. В каждой полуплоскости

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_{i-1} = z_{i+1} = \cdots = z_n = 0,\ z_i \geqslant 0$$

находятся два состояния равновесия: $(0, 0)$ и $z_i = \dfrac{s}{b}$, $y = \dfrac{a_i}{k}$. Анализ первого состояния равновесия в полуплоскости показывает, что оно является седлом, анализ второго – что оно является центром [109].

Учитывая, что с течением времени все z_i, кроме первого, стремятся к нулю, заключаем, что все фазовые траектории сколь угодно близко подходят к плоскости

$$z_2 = \cdots = z_{i-1} = z_{i+1} = \cdots = z_n = 0,\ z_i \geqslant 0.$$



Фазовый портрет
системы (2.51) при $n = 2$

В примере 3.1.3 уравнение (3.12) представлено через функции перехода $\Phi_i = \frac{x_i}{d_i}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j}{d_j}\Big)^{-1}$. Тогда $\frac{\Phi_i}{x_i} = \frac{1}{d_i}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j}{d_j}\Big)^{-1}$. Если $d_1 < \min\limits_{j=\overline{2,n}} d_j$, то по теореме 4.4.5 данная система является системой строгого отбора. Это означает, что в процессе конкуренции остается только то предприятие, на котором меньше затраты на производство единицы продукции независимо от величины начальных капиталов.

Теорема 4.4.6. *Пусть в системе* (4.24) *однородные функции* Φ_i *имеют вид*

$$\Phi_i(x) = \varphi_i(x_i)A(x), \quad i = \overline{1,n},$$

где функция $A(x)$ *строго больше нуля, функции* $\varphi_i(x_i) \geqslant 0$ *не зависят от переменных* $x_j, i \neq j$, *и* $\varphi_i(x_i) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x_i = 0$. *В этом случае для того чтобы система* (4.24) *была системой строгого отбора, необходимо и достаточно, чтобы как только* $0 < x_1 < 1$, $0 < x_i < 1$ *выполнялись неравенства:*

$$\frac{\varphi_1(x_1)}{x_1} > \frac{\varphi_i(x_i)}{x_i}, \quad i = \overline{2,n}. \tag{4.27}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (4.24) является системой строгого отбора. Рассмотрим ее поведение в случае, когда лишь две компоненты начальных условий отличны от нуля: $x_1^0 = \bar{x}_1^0 \neq 0$, $x_i^0 = \bar{x}_i^0 \neq 0$, $i \neq 1$. Обозначим $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_n(t))$ решение системы при таких начальных условиях. Поскольку для данной системы выполняется равенство (4.2), то в любой другой момент времени будут справедливы соотношения

$$\bar{x}_j = 0,\ j \neq 1,\ j \neq i,\ \bar{x}_1 + \bar{x}_i = 1,\ 0 < \bar{x}_1 < 1,\ 0 < \bar{x}_i < 1.$$

Таким образом, динамика переменных x_1 и x_i в этом случае совпадает с динамикой двух переменных $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_i$, $\bar{x}_1 + \bar{x}_i = 1$:

$$\dot{\bar{x}}_1 = \varphi_1(\bar{x}_1)A(\bar{x}_1,\bar{x}_i) - \bar{x}_1\Big(\varphi_1(\bar{x}_1)A(\bar{x}_1,\bar{x}_i) + \varphi_i(\bar{x}_i)A(\bar{x}_1,\bar{x}_i)\Big),$$
$$\dot{\bar{x}}_i = \varphi_i(\bar{x}_i)A(\bar{x}_1,\bar{x}_i) - \bar{x}_i\Big(\varphi_1(\bar{x}_1)A(\bar{x}_1,\bar{x}_i) + \varphi_i(\bar{x}_i)A(\bar{x}_1,\bar{x}_i)\Big),$$

где $A(\bar{x}_1, \bar{x}_i) = A(\bar{x}_1, 0, \dots, 0, \bar{x}_i, 0, \dots, 0)$. Поскольку для последней системы выполнено условие строгого отбора, то по теореме 4.4.2 справедливы неравенства

$$\frac{\varphi_1(\bar{x}_1)A(\bar{x}_1, \bar{x}_i)}{\bar{x}_1} > \frac{\varphi_i(\bar{x}_i)A(\bar{x}_1, \bar{x}_i)}{\bar{x}_i}, \quad i = \overline{2, n}. \tag{4.28}$$

Так как функции $\Phi_i(\bar{x})$ однородны, то для любого положительного α и $i = \overline{2, n}$ справедливы соотношения

$$\Phi_1(\alpha\bar{x}) = \frac{\varphi_1(\alpha\bar{x}_1)A(\alpha\bar{x}_1, \alpha\bar{x}_i)}{\alpha\bar{x}_1} > \frac{\varphi_i(\alpha\bar{x}_i)A(\alpha\bar{x}_1, \alpha\bar{x}_i)}{\alpha\bar{x}_i} = \Phi_i(\alpha\bar{x}),$$

$$\frac{\varphi_1(\alpha\bar{x}_1)}{\alpha\bar{x}_1} > \frac{\varphi_i(\alpha\bar{x}_i)}{\alpha\bar{x}_i}, \quad i = \overline{2, n}.$$

Отсюда $\dfrac{\varphi_1(x_1)}{x_1} > \dfrac{\varphi_i(x_i)}{x_i}$ для любых $0 < x_1 < 1,\ 0 < x_i < 1,\ i = \overline{2, n}$.

Достаточность. При выполнении (4.27) всюду на стандартном симплексе, где $0 < x_1 < 1$, $0 < x_i < 1$, справедливы неравенства

$$\frac{\varphi_1(x_1)A(x)}{x_1} > \frac{\varphi_i(x_i)A(x)}{x_i}, \quad i = \overline{2, n},$$

тогда в силу теоремы 4.4.5 и замечания 4.4.2 система (4.24) является системой строгого отбора. Теорема доказана.

Теорема 4.4.7. *Для того чтобы в системе*

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_{n-2}), \quad i = \overline{1, n-2}, \\ \dot{x}_{n-1} = G(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n), \\ \dot{x}_n = -\sum\limits_{i=1}^{n-2} F_i(x_1, \dots, x_{n-2}) - G(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{4.29}$$

заданной на стандартном симплексе, выполнялось условие строгого отбора (4.1), достаточно, чтобы системой строгого отбора являлась система

$$\dot{y}_i = F_i(y_1, \dots, y_{n-2}), \quad i = \overline{1, n-2}, \tag{4.30}$$

$$\dot{y}_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-2} F_i(y_1, \dots, y_{n-2}), \tag{4.31}$$

заданная на симплексе

$$y_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} y_i = 1.$$

Доказательство. Так как система (4.30), (4.31) является системой строгого отбора, то при любых начальных значениях $y_i(0)$, $i = \overline{1, n-2}$, удовлетворяющих условиям

$$y_1(0) > 0, \quad y_i(0) \geqslant 0, \quad i = \overline{2, n-2}, \quad \sum_{i=1}^{n-2} y_i(0) \leq 1,$$

для решения системы (4.30) справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty} y_1(t) = 1$. Но уравнения (4.30) и первые $n-2$ уравнения системы (4.29) совпадают, поэтому при любых начальных условиях $x(0) = (x_1(0), \dots, x_{n-2}(0))$, удовлетворяющих требованиям

$$x_1(0) > 0, \quad x_i(0) \geqslant 0, \quad i = \overline{2, n-2}, \quad \sum_{i=1}^{n-2} x_i(0) \leq 1, \tag{4.32}$$

выполняется предельное соотношение (4.1). Поскольку любые начальные условия $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ на стандартном симплексе при $x_1^0 \neq 0$ удовлетворяют (4.32), то система (4.29) является системой строгого отбора, что и требовалось доказать.

Теорема 4.4.8. *Для того чтобы точка $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, принадлежащая стандартному симплексу S, являлась стационарной для системы* (4.24), *необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$\frac{\Phi_1(x)}{x_1} = \frac{\Phi_2(x)}{x_2} = \dots = \frac{\Phi_n(x)}{x_n} \tag{4.33}$$

имела решение $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ на симплексе S.

Доказательство. Напомним, что если в системах типа (4.33) некоторый знаменатель x_i равен нулю, то это означает не деление на ноль, а справедливость уравнения $\Phi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$.

Необходимость. Пусть система уравнений (4.24) имеет некоторое стационарное решение $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ на симплексе S. Это означает, что в точке $\bar{x}$ выполняются равенства

$$\Phi_i(\bar{x}) - \bar{x}_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(\bar{x}) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Предположим, что компоненты вектора $\bar{x}$ равны нулю для индексов $i \in E$ и отличны от нуля для индексов $i \in \overline{E}$, $E \cap \overline{E} = \varnothing$, $E \cup \overline{E} = \{1, \dots, n\}$, тогда условия стационарности решения $\bar{x}$ преобразуются к следующему виду:

$$\Phi_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in E,$$

$$\frac{\Phi_i(\bar{x})}{\bar{x}_i} = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(\bar{x}), \quad i \in \overline{E}.$$

В последней формуле правая часть одинакова для любого индекса $i \in \overline{E}$. Из вышесказанного заключаем, что вектор $\bar{x}$ удовлетворяет системе уравнений (4.33).

Достаточность. Пусть система уравнений (4.33) имеет некоторое решение $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ на стандартном симплексе S. Так как точка $(0, \dots, 0)$ не принадлежит симплексу S, то обязательно найдется хотя бы одна отличная от нуля компонента вектора $\bar{x}$, т.е. $\overline{E} \neq \varnothing$. Не уменьшая общности, будем считать $\bar{x}_k \neq 0$. Из (4.33) следует, что $\Phi_i(\bar{x}) = 0$, если $i \in E$, и $\bar{x}_k \Phi_i(\bar{x}) = \bar{x}_i \Phi_k(\bar{x})$, если $i \in \overline{E}$. Следовательно, для всех значений индекса i справедливы равенства

$$\bar{x}_k \Phi_i(\bar{x}) = \bar{x}_i \Phi_k(\bar{x}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Просуммировав эти равенства по индексу $i = \overline{1, n}$, получим

$$\bar{x}_k \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\bar{x}) = \Phi_k(\bar{x}) \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i = 1$ и $\bar{x}_k \neq 0$, то $\dfrac{\Phi_k(\bar{x})}{\bar{x}_k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \Phi_i(\bar{x})$. Поскольку $\bar{x}$ удовлетворяет системе (4.33), то справедливы равенства

$$\frac{\Phi_j(\bar{x})}{\bar{x}_j} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\bar{x}), \quad j = \overline{1,n},$$

значит,

$$\Phi_j(\bar{x}) - \bar{x}_j \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\bar{x}) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, точка $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ является стационарной для системы (4.24), что и требовалось доказать.

Замечание 4.4.3. Пусть система уравнений (4.33) имеет решение $\bar{x}$ внутри стандартного симплекса; $\bar{z}(t)$ – соответствующее ему решение однородной системы воспроизводства, тогда в любой момент времени отношение $\bar{z}_i/\bar{z}_j$ постоянно. Это означает, что **в однородной системе осуществляется пропорциональный прирост численностей. В экономике такой режим называют сбалансированным ростом** [75].

Следствие 4.4.9. *Для того чтобы система* (4.24) *была системой отбора (строгого или нестрогого), необходимо, чтобы система уравнений* (4.33) *не имела решений на стандартном симплексе.*

Справедливость следствия очевидна. Надо заметить, что если система (4.33) имеет решение на стандартном симплексе, то процессы отбора в системе (4.24) могут наблюдаться вдоль отдельных фазовых траекторий. Продемонстрируем этот факт на следующих примерах.

Пример 4.4.2. Исследуем, является ли система (3.10) примера 3.1.2 системой строгого или нестрогого отбора. Пусть a_i – строго положительные константы. Система (4.33) в этом случае имеет вид

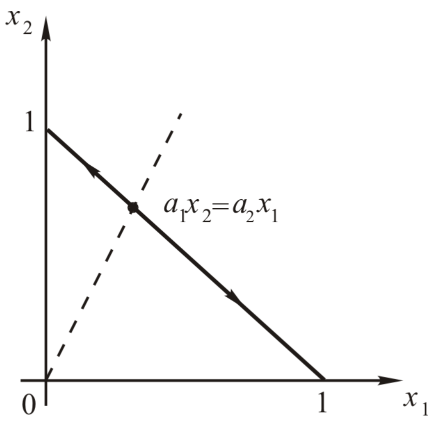
$$a_1 x_1 = a_2 x_2 = \cdots = a_n x_n = \kappa,$$

где κ — некоторая константа. Данная система имеет решение $x_i = \dfrac{\kappa}{a_i}$, постоянная κ находится из условия (3.2): $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \kappa \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i} = 1$, следовательно, $\kappa = 1\Big/\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}\Big)$. Таким образом, мы нашли решение системы (3.10)

$$x_i = 1\Big/\Big(1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_i}{a_j}\Big),$$

которое лежит внутри стандартного симплекса.

Согласно следствию 4.4.9 система (3.10) не является системой отбора, ни строгого, ни нестрогого. Но для данной системы отбор будет наблюдаться вдоль отдельных траекторий. Если, например, $a_1 x_1^0 > a_i x_i^0$, $i = \overline{1,n}$, то в силу (4.13) отношение $\dfrac{x_1}{x_i}$ будет возрастать в окрестности t_0, а значит, разность $a_1 x_1 - a_i x_i$ будет лишь возрастать с течением времени. Следовательно, вдоль фазовых траекторий, отвечающих таким начальным условиям, справедливы неравенства (4.26) и вдоль них будет наблюдаться строгий отбор. Таким образом, неравенства $a_1 x_1 > a_i x_i$, $i = \overline{1,n}$, определяют область строгого отбора для системы (3.10).



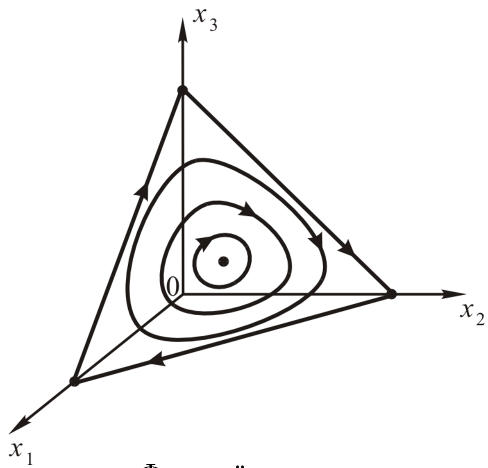
Фазовый портрет
системы (2.31) при $n = 2$

Пример 4.4.3. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_1x_2 - x_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4), \\ \dot{x}_2 & = & x_2x_3 - x_2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4), \\ \dot{x}_3 & = & x_3x_1 - x_3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4). \end{array}\right. \tag{4.34}$$

Эта система описывает динамику модели А.Колмогорова. Здесь $\Phi_1 = x_1x_2$, $\Phi_2 = x_2x_3$, $\Phi_3 = x_3x_1$, $\dfrac{\Phi_1}{x_1} = x_2$, $\dfrac{\Phi_2}{x_2} = x_3$, $\dfrac{\Phi_3}{x_3} = x_1$. Рассмотрим систему уравнений $x_1 = x_2 = x_3$. На стандартном симплексе эта система имеет решение $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$. Следовательно, по теореме 4.4.9 данная система не является системой отбора (ни строгого, ни нестрогого). Обратим внимание, что при $x_3 = 0$ система (4.34) приобретает вид

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_1x_2 - x_1(x_1x_2), \\ \dot{x}_2 & = & -x_2(x_1x_2). \end{array}\right.$$



Фазовый портрет
системы примера 3.4.4

Здесь $\dfrac{\Phi_1}{x_1} = x_2$, $\dfrac{\Phi_2}{x_2} = 0$, $\dfrac{\Phi_1}{x_1} > \dfrac{\Phi_2}{x_2}$, следовательно, по теореме 4.4.2 данная система является системой отбора, $x_1(t) \to 1$, $x_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, $x_1^0 \neq 0$, т.е. первый вид вытесняет второй в отсутствие третьего. Аналогично при $x_1 = 0$ система (4.34) также становится системой отбора, здесь $x_2(t) \to 1$, $x_3(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, $x_2^0 \neq 0$, т.е. второй вид вытесняет третий в отсутствие первого. При $x_2 = 0$ имеют место соотношения

$x_3(t) \to 1$, $x_1(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, $x_3^0 \neq 0$, т.е. третий вид вытесняет первый в отсутствие второго. Система (4.34) имеет периодические решения по t, ее фазовые траектории внутри симплекса представляют собой замкнутые концентрические кривые, охватывающие центр симплекса $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Здесь отбор отсутствует вдоль любой фазовой траектории, лежащей внутри симплекса, но наблюдается вдоль траекторий, лежащих на границе симплекса.

4.5. Частный случай систем отбора

Рассмотрим на стандартном симплексе S систему дифференциальных уравнений (3.6), правые части которых удовлетворяют условию квазиположительности в виде равенства (2.6).

Теорема 4.5.1. *Пусть функция скалярного аргумента $\psi(x)$ строго монотонно возрастает на отрезке $[0,1]$, $\psi(0) = 0$, функция $\varphi(\alpha, x)$ при $x = 0$ принимает значение $\varphi(\alpha, 0) = 0$. Для того чтобы система (3.6) являлась системой строгого отбора, необходимо и достаточно, чтобы вдоль любой траектории системы, отвечающей начальным условиям (3.20) с ненулевыми координатами, для $j = \overline{2,n}$ были справедливы равенства*

$$\int_{t_0}^{+\infty}\Big(\frac{\varphi(\alpha_1, x_1(t))}{\psi(x_1(t))} - \frac{\varphi(\alpha_j, x_j(t))}{\psi(x_j(t))}\Big)\sum_{m=1}^{n}\psi(x_m(t))\,dt = +\infty. \tag{4.35}$$

Доказательство. Так как функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то $|\psi(x^1) - \psi(x^2)| \leqslant L|x^1 - x^2|$ для некоторой константы L при любых x^1, x^2 из отрезка $[0,1]$, в частности, при $x^2 = 0$ имеет место неравенство $1/\psi(x^1) \geqslant 1/Lx^1$ и, следовательно, $\int_0^1 dx^1/\psi(x^1) = +\infty$.

Введем замену переменных

$$y_i(x_i) = \exp\Big(\int_1^{x_i}\frac{d\tau}{\psi(\tau)}\Big). \tag{4.36}$$

При такой замене $y_i(0) = 0$, $y_i(1) = 1$, $0 < y_i(x_i) < 1$, когда $0 < x_i < 1$. Возьмем в качестве аргумента в замене (4.36) i-ю компоненту нетривиального решения $x(t)$ задачи (3.6). Производная функции y_i по переменному t равна:

$$\dot{y}_i = \frac{y_i}{\psi(x_i)}\dot{x}_i = F_i(t, y), \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.37}$$

где $F_i(t,y) \equiv y_i\Big(\frac{\varphi(\alpha_i, x_i)}{\psi(x_i)}\sum_{j=1}^{n}\psi(x_j) - \sum_{j=1}^{n}\varphi(\alpha_j, x_j)\Big)$, $i = \overline{1,n}$.

Проведя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3.3.5, нетрудно убедиться, что динамика отношения переменных $\frac{y_j}{y_1}$ такой системы описывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{y_j}{y_1}\Big) = \frac{y_j}{y_1}\Big(\frac{\varphi(\alpha_j, x_j)}{\psi(x_j)} - \frac{\varphi(\alpha_1, x_1)}{\psi(x_1)}\Big)\sum_{m=1}^{n}\psi(x_m),\ j = \overline{2,n}.$$

Отсюда для всех $j = \overline{2,n}$ справедливо равенство

$$\frac{y_j}{y_1} = \frac{y_j^0}{y_1^0}\exp\Big(-\int_{t_0}^{t}\Big(\frac{\varphi(\alpha_1, x_1)}{\psi(x_1)} - \frac{\varphi(\alpha_j, x_j)}{\psi(x_j)}\Big)\sum_{m=1}^{n}\psi(x_m)\,dt\Big), \tag{4.38}$$

где $y_j(x_j^0) = y_j^0$, $j = \overline{1,n}$. Так как мы рассматриваем начальные условия со строго положительными компонентами x_1^0, x_j^0, то из замены (4.36) вытекает, что отношение $\dfrac{y_j(x_j^0)}{y_1(x_1^0)}$ является величиной ограниченной, отличной от нуля.

Необходимость. Пусть система (3.6) является системой отбора, т.е. $x_1(t) \to 1$, $x_j(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Тогда из (4.36) следует, что $y_1(t) \to 1$, $y_j(t) \to 0$, а из (4.38) получим равенство (4.35).

Достаточность. Пусть выполняется соотношение (4.35). С учетом вышесказанного об ограниченности отношения $\dfrac{y_1(0)}{y_j(0)}$, отличного от нуля, из (4.38) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y_j(x_j)}{y_1(x_1)} = 0$, $j = \overline{2,n}$. Так как функции $y_j(x_j)$, $j = \overline{1,n}$, – непрерывные и ограниченные, то $y_j(x_j) \to 0$, $j = \overline{2,n}$. Следовательно, соответствующие компоненты $x_j(t) \to 0$, $j = \overline{2,n}$. Так как задача (3.6) рассматривается на стандартном симплексе S, то $x_1(t) \to 1$ при $t \to +\infty$, что и требовалось доказать.

Пример 4.5.1. Рассмотрим систему (3.6) вида

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_i^3 \sum_{j=1}^{n} x_j^3 - x_i^3 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^3, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.39}$$

с начальными условиями из стандартного симплекса. Здесь α_i – некоторые постоянные. Используя критерий 4.5.1, проверим, является ли система (4.39) системой строгого отбора. Интеграл (4.35) для системы (4.39) равен

$$\int_0^{+\infty} (\alpha_1 - \alpha_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^3\Big)\, dt, \quad i = \overline{2,n}. \tag{4.40}$$

Найдем наименьшее значение выражения $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^3$ на симплексе S. Для этого составим функцию Лагранжа[8]

$$L = \sum_{j=1}^{n} x_j^3 + \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

где λ – множитель Лагранжа. Поскольку необходимыми условиями экстремума являются равенства

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 3x_j^2 + \lambda = 0,$$

[8] Для отыскания экстремума используется метод множителей Лагранжа. Суть метода Лагранжа состоит в том, что вместо экстремума функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, аргументы которой удовлетворяют равенству $g(x_1,\ldots,x_n) = 0$, ищется обычный экстремум функции Лагранжа $L(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,\ldots,x_n) + \lambda g(x_1,\ldots,x_n)$ при определенных условиях на приращения $dx_1,\ldots,dx_n$ независимых переменных, λ – множитель Лагранжа. Для нахождения стационарной точки функции Лагранжа нужно решить систему $\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1,n}$, $g(x_1,\ldots,x_n) = 0$, из которой находятся координаты точки $M(x_1,\ldots,x_n)$ и значение параметра λ. Если второй дифференциал функции Лагранжа в точке M при найденном значении λ с учетом продифференцированного уравнения связи $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial g}{\partial x_j} dx_j = 0$ строго меньше (больше) нуля независимо от $dx_1,\ldots,dx_n$, одновременно в ноль не обращающихся, то в точке M есть условный максимум (минимум) функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

то $x_j = \sqrt{\dfrac{-\lambda}{3}}$, $j = \overline{1, n}$; учитывая принадлежность симплексу, имеем $x_j = \dfrac{1}{n}$. Легко убедиться, что это точка минимума, следовательно, на симплексе S имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^3 \geqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^2}.$$

Поскольку $\alpha_1 - \alpha_i > 0$, то подынтегральное выражение в (4.40) всегда больше $(\alpha_1 - \alpha_i)/n^2$. Следовательно, интеграл в (4.40) расходится к $+\infty$ и по критерию 4.5.1 система является системой строгого отбора.

Глава 5. Устойчивость и отбор

5.1. Связь устойчивости и строгого отбора

В [37, 40] были рассмотрены различные виды отбора, получены необходимые и достаточные условия их наличия.

Для систем на стандартном симплексе можно показать, что если существуют временные средние фазовых координат вдоль фазовой траектории, то почти всегда будет иметь место отбор вдоль этой траектории. Исследование отбора вдоль траектории и сравнение элементов по широте множества начальных условий, приводящих их к отбору, тесно связано с изучением областей притяжения для состояний равновесия, находящихся на границах симплекса.

Строгий отбор в этом случае имеет прямое отношение к глобальной устойчивости на симплексе состояния равновесия в одной из его вершин, а именно условие его глобальной устойчивости является достаточным условием строгого отбора; условие строгого отбора является необходимым условием глобальной устойчивости. Известно, что эффективным методом для исследования устойчивости является применение метода функции Ляпунова. Благодаря этому методу, учитывая связь между отбором и устойчивостью, можно сформулировать целый ряд достаточных условий строгого отбора в системах на стандартном симплексе.

В связи с этим обратимся к теории глобальной устойчивости. Заметим, что при исследовании устойчивости состояния равновесия в вершине симплекса появляется определенная специфика, не встречающаяся при исследовании устойчивости внутри симплекса. Так, например, для случая $n = 2$ точка в вершине симплекса не может быть состоянием равновесия типа центр или фокус [109].

Рассмотрим динамическую систему (1.11). Пусть $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ – состояние равновесия этой системы. Любое начальное состояние, принадлежащее стандартному симплексу, будем называть допустимым.

Определение. *Состояние равновесия x^* называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число δ, что для любого допустимого начального состояния $\overline{x}$ из δ-окрестности точки x^* фазовая траектория $x(t)[\overline{x}]$, соответствующая ему, не выйдет за пределы ε-окрестности точки x^*.*

Определение. *Состояние равновесия x^* называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такая окрестность точки x^*, что для любой допустимой точки $\overline{x}$ из этой окрестности фазовая траектория, выходящая из $\overline{x}$, стремится к точке x^* при t, стремящемся к бесконечности.*

Определение. *Состояние равновесия x^* называется глобально асимптотически устойчивым в области D ($x^* \in D$), если оно устойчиво асимптотически и, кроме того, для любой точки $\overline{x}$ из области D фазовая траектория, выходящая из $\overline{x}$, стремится к точке x^* при t, стремящемся к бесконечности.*

Из данных определений непосредственно следует, что условие глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия в вершине симплекса на всем симплексе или на симплексе без противоположной грани является достаточным условием отбора.

Если задана система дифференциальных уравнений (1.11) на стандартном симплексе S, то согласно теореме 3.2.8 от нее можно перейти к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= F_2(1-\sum_{i=2}^{n} x_i, x_2, \dots, x_n) \equiv G_2(x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_n &= F_n(1-\sum_{i=2}^{n} x_i, x_2, \dots, x_n) \equiv G_n(x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{5.1}$$

на симплексе

$$S_0 = \{(x_2, \dots, x_n) : x_i \geqslant 0,\ i = \overline{2, n},\ 0 \leq \sum_{i=2}^{n} x_i \leqslant 1\}. \tag{5.2}$$

Вершина $(1, 0, \dots, 0)$ симплекса S при этом переходит в начало координат на симплексе S_0. Тогда исследование устойчивости состояния равновесия в вершине симплекса S можно свести к исследованию устойчивости состояния равновесия в начале координат на множестве S_0.

Под ε-окрестностью точки на симплексе S_0 будет пониматься пересечение шаровой окрестности этой точки с симплексом S_0.

Определение. *Пусть на симплексе S_0 определена функция $V(x)$. Функция $V(x)$ называется знакопостоянной, если*

$$V(x) \geqslant 0 \quad \textit{для любого} \quad x \in S_0$$

либо

$$V(x) \leq 0 \quad \textit{для любого} \quad x \in S_0.$$

Если функция $V(x)$ всюду неотрицательна, то она называется знакоположительной, если всюду неположительна – знакоотрицательной.

Определение. *Функция $V(x)$ называется знакоопределенной, если*

$$V(x) > 0 \quad \textit{для любого} \quad x \in S_0, \quad \textit{кроме} \quad x = 0,$$

либо

$$V(x) < 0 \quad \textit{для любого} \quad x \in S_0, \quad \textit{кроме} \quad x = 0,$$

и $V(0) = 0$.

В первом случае функция называется положительно определенной, во втором – отрицательно определенной.

Если функция $V(x)$ определена на некоторой части симплекса, то будем говорить о знакопостоянности и знакоопределенности на этой части симплекса.

Определение. *Пусть на симплексе S_0 определена непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$. Выражение*

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} G_i(x), \tag{5.3}$$

рассматриваемое вдоль фазовых траекторий системы (5.1), называется полной производной функции $V(x)$ по времени, взятой в силу системы (5.1).

5.2. Теоремы Ляпунова

При исследовании устойчивости состояния равновесия динамических систем центральную роль играют теоремы Ляпунова. Для полноты изложения приведем формулировки и доказательства двух теорем Ляпунова[1] для случая, когда состояние равновесия системы на стандартном симплексе находится в его вершине, поскольку при этом доказательство содержит незначительные особенности по сравнению с классическим случаем, когда фазовым пространством системы является все пространство $\mathbf{R}^n$.

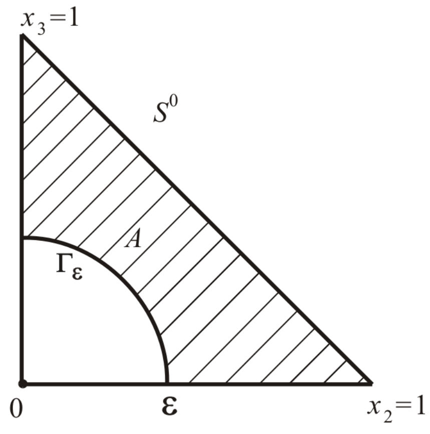
Теорема 5.2.1 (Первая теорема Ляпунова). *Пусть на симплексе S_0 задана знакоопределенная непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$. Пусть ее производная, взятая в силу системы (5.1), является знакопостоянной, имеющей знак противоположный знаку функции $V(x)$. Тогда состояние равновесия в начале координат будет устойчивым по Ляпунову. Функция $V(x)$ при этом называется функцией Ляпунова для рассматриваемой системы.*

Доказательство. Пусть функция $V(x)$, определенная на симплексе S_0, положительно определенная, т. е. $V(x) > 0$ при $x \neq 0$. В начале координат имеет место равенство $V(0) = 0$.

Возьмем произвольную ε-окрестность начала координат на симплексе S_0 и рассмотрим ее границу – Γ_ε – граничные точки ε-шара с центром в начале координат, попадающие в симплекс S_0:

$$\Gamma_\varepsilon = \{x = (x_2, \dots, x_n): \quad x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{2,n}, \quad \sum_{i=2}^{n} x_i^2 = \varepsilon^2\}.$$

Очевидно Γ_ε – компактное множество.



Функция Ляпунова $V(x)$ определена на Γ_ε, следовательно, на Γ_ε она достигает своей точной нижней грани. Пусть $\inf\limits_{x\in\Gamma_\varepsilon} V(x) = \alpha$. Так как функция $V(x)$ строго больше нуля в любой точке множества Γ_ε, то $\alpha > 0$. В силу непрерывности функции $V(x)$ на симплексе S_0 существует δ-окрестность начала координат такая, что для любого $\overline{x}$, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство: $V(\overline{x}) < \alpha$. Вдоль фазовой траектории $x(t)[\overline{x}]$, начинающейся в точке $\overline{x}$, функция Ляпунова с течением времени не возрастает, так как по условию теоремы $\dfrac{\partial V}{\partial t} \leq 0$. Следовательно, $x(t)[\overline{x}]$ не может попасть на Γ_ε и не может выйти из ε-окрестности начала координат на симплексе S_0. Теорема доказана.

[1]Эти теоремы впервые были доказаны А.М. Ляпуновым в [72].

Теорема 5.2.2 (Вторая теорема Ляпунова). *Пусть на симплексе S_0 задана знакоопределенная функция $V(x)$, производная $\dfrac{dV}{dt}$ которой, взятая в силу системы (5.1), является также знакоопределенной, имеющей знак противоположный знаку функции $V(x)$. Тогда, если начало координат является состоянием равновесия, то оно является глобально асимптотически устойчивым на симплексе S_0.*

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать $V(x) > 0$, а $\dfrac{\partial V}{\partial t} < 0$. Рассмотрим произвольную ε-окрестность начала координат на симплексе S_0.

В силу того, что выполняется первая теорема Ляпунова, состояние равновесия является устойчивым по Ляпунову, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $\overline{x}$, принадлежащего δ-окрестности начала координат x_0 ($x_0 = 0$), фазовая траектория $x(t)[\overline{x}]$, определенная этим начальным состоянием, не выйдет из ε-окрестности начала координат.

Возьмем любую точку, находящуюся за пределами δ-окрестности начала координат на симплексе S_0. Предположим, что фазовая траектория не попадет в эту окрестность, то есть будет расположена в симплексе с исключенной δ-окрестностью начала координат. Обозначим эту часть симплекса как A:

$$\{(x_2, \ldots, x_n) : x_i \geqslant 0,\ i = \overline{2, n},\ 0 \leq \sum_{i=2}^{n} x_i \leq 1,\ \sum_{i=2}^{n} x_i^2 > \delta^2\}.$$

Множество A – замкнутое подмножество симплекса, следовательно, A – компактное множество. Функция (5.3) на множестве A является непрерывной, следовательно, по теореме Вейерштрасса, функция $\dfrac{dV}{dt}$ достигает своих точных верхней и нижней граней на этом множестве. Обозначим: $m = \inf\limits_{x \in A} \dfrac{dV}{dt}$, $M = \sup\limits_{x \in A} \dfrac{dV}{dt}$. Так как $\dfrac{dV}{dt}$ отрицательна во всех точках симплекса, кроме $x = 0$, то $M < 0$.

Рассмотрим фазовую траекторию $x(t)$, начинающуюся в точке $\overline{x} \in A$, и функцию Ляпунова $V(x(t))$ вдоль этой траектории. В силу изложенного выше выполняется неравенство $\dfrac{dV}{dt} \leq M < 0$. Отсюда

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \frac{dV}{dt} dt \leq V(0) + Mt. \tag{5.4}$$

Если в неравенстве (5.4) устремить t к бесконечности, то $V(t)$ будет стремиться к минус бесконечности, что противоречит условию положительности $V(x)$ в каждой точке симплекса. Следовательно, фазовая траектория попадет в δ-окрестность начала координат на симплексе S_0. Как только это произойдет, фазовая траектория не сможет выйти за пределы ε-окрестности начала координат, поскольку состояние равновесия в начале координат устойчиво по Ляпунову, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и для любого начального состояния $\overline{x}$ существует момент времени T_ε такой, что при $t > T_\varepsilon$ для решения $x(t)$, соответствующего начальному условию $\overline{x}$, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=2}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon$, следовательно, $x(t) \to 0$ при t стремящемся к бесконечности.

Поскольку глобальная устойчивость состояния равновесия в вершине симплекса является достаточным условием строгого отбора, то доказанная теорема дает еще одно достаточное условие строгого отбора. Но устойчивость состояния равновесия в вершине симплекса не является необходимым условием строгого отбора.

5.3. Потенциал как функция Ляпунова

Рассмотрим систему (5.1) на симплексе S_0. Правые части этой системы задают вектор-функцию $G = (G_2, ..., G_n)$, определенную на симплексе S_0, или, что то же самое, векторное поле G на симплексе S_0.

Определение. *Векторное поле G называется потенциальным, если существует функция $U(x_2, \ldots, x_n)$ такая, что $G_i = \dfrac{\partial U}{\partial x_i}$, $i = \overline{2, n}$. Функция U называется потенциалом поля G.*

Очевидно, функция U определяется с точностью до константы. Не уменьшая общности, можно считать $U(0) = 0$.

Теорема 5.3.1. *Если начало координат является единственным состоянием равновесия для системы (5.1) на симплексе S_0 и векторное поле G, определенное правыми частями системы (5.1), потенциально, то начало координат глобально асимптотически устойчиво на симплексе S_0.*

Доказательство. Из математического анализа известно следующее свойство: если поле G потенциально, то работа поля вдоль гладкой кривой, соединяющей точки A и B, не зависит от вида кривой и равна разности $U(B) - U(A)$:

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} G\,dx = U(B) - U(A). \tag{5.5}$$

Рассмотрим криволинейный интеграл (5.5) вдоль участка фазовой траектории системы (5.1), соответствующей отрезку времени $[t_1, t_2]$:

$$U(B) - U(A) = \int\limits_{\widetilde{AB}} G\,dx = \int\limits_{\widetilde{AB}} \sum_{i=2}^{n} G_i\,dx_i =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{i=2}^{n} G_i(x_2(t), \ldots, x_n(t))\dot{x}_i(t)\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{i=2}^{n} G_i^2\,dt > 0. \tag{5.6}$$

Итак, вдоль фазовых траекторий системы (5.1) (за исключением фазовой траектории, отвечающей состоянию равновесия) потенциал U строго монотонно возрастает. Следовательно, производная функции U, взятая в силу системы (5.1), положительно определена на симплексе S_0.

Функция $U(x)$ непрерывна, следовательно, на симплексе S_0 достигает своего наибольшего значения в некоторой точке $\overline{x}$. При этом точка $\overline{x}$ является состоянием равновесия системы (5.1), иначе вдоль траектории, проходящей через эту точку, потенциал убывал бы на некотором участке, что невозможно ввиду (5.6). Следовательно, $\overline{x}$ есть начало координат. Так как в начале координат $U(0) = 0$, то во всех других точках симплекса S_0 функция $U(x)$ отрицательно определена. Эту функцию можно взять в качестве функции Ляпунова. По теореме 5.2.2 начало координат будет глобально асимптотически устойчивым на симплексе S_0.

5.4. Частные случаи функции Ляпунова

Выбирая разные виды функции Ляпунова, можно получить достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости начала координат на симплексе S_0, а следовательно, и достаточные условия строгого отбора.

Пусть, например, $V(x) = \sum_{i=2}^{n} x_i$. Очевидно, эта функция положительно определена на симплексе S_0. Ее производная по времени, взятая в силу системы (5.1), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=2}^{n} G_i(x_2, \dots, x_n).$$

Если эта функция всюду отрицательна на S_0 за исключением начала координат, то начало координат глобально асимптотически устойчиво на симплексе S_0. Возвращаясь к исходной системе (1.11) на стандартном симплексе S, получаем, что достаточным условием глобальной асимптотической устойчивости вершины $(1, 0, \dots, 0)$ является неравенство

$$\sum_{i=2}^{n} F_i(x_1, \dots, x_n) < 0, \tag{5.7}$$

выполняющееся всюду на стандартном симплексе за исключением вершины $(1, 0, \dots, 0)$. Но поскольку на симплексе S имеет место равенство

$$\sum_{i=2}^{n} F_i(x_1, \dots, x_n) = -F_1(x_1, \dots, x_n),$$

то неравенство (5.7) можно преобразовать к виду

$$F_1(x_1, \dots, x_n) > 0.$$

В итоге получили достаточное условие глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия $(1, 0, \dots, 0)$. Это условие напоминает условие теоремы 4.4.3. Отличие состоит в том, что здесь положительность функции F_1 требуется всюду, кроме вершины $(1, 0, \dots, 0)$, а в теореме 4.4.3 – всюду, где $x_1 \neq 0$ и $x_1 \neq 1$.

Возьмем в качестве функции Ляпунова более общую функцию $V(x) = \sum_{i=2}^{n} x_i^k$, где k – положительная константа, $k > 1$. Очевидно, эта функция положительно определена на симплексе S_0. Ее производная по времени, взятая в силу системы (5.1), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=2}^{n} k x_i^{k-1} G_i(x_2, \dots, x_n).$$

Если эта функция всюду отрицательна на S_0 за исключением начала координат, то начало координат глобально асимптотически устойчиво на симплексе S_0. Возвращаясь к исходной системе (1.11) на стандартном симплексе S, получаем, что достаточным условием глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия $(1, 0, \dots, 0)$ является неравенство

$$\sum_{i=2}^{n} x_i^{k-1} F_i(x_1, \dots, x_n) < 0, \tag{5.8}$$

выполняющееся всюду на стандартном симплексе за исключением вершины $(1, 0, \dots, 0)$. Так как согласно первой теореме о представлении 3.3.1 функции F_i на стандартном симплексе S могут быть заданы через функции перехода $\Phi_i(x)$, то неравенство (5.8) преобразуется к виду

$$\sum_{i=2}^{n} x_i^{k-1} \Phi_i(x) - \sum_{i=2}^{n} x_i^k \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x) < 0,$$

откуда следует неравенство

$$\frac{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i^{k-1}\Phi_i(x)}{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i^k} < \sum_{j=1}^{n}\Phi_j(x),$$

которое является достаточным условием глобальной устойчивости состояния равновесия в вершине симплекса.

5.5. Функция Ляпунова для моделей химической кинетики

Для уравнений химической кинетики известна физическая величина, играющая в ряде случаев роль функции Ляпунова. Такой величиной является энтропия, которая характеризует беспорядок системы или выражает меру близости системы к равномерному распределению вещества и энергии.

Согласно второму началу термодинамики во всех самопроизвольных процессах в изолированной системе энтропия не убывает (беспорядок может только возрасти).

В разделе 2.7 мы рассматривали кинетические уравнения (3.65) химической реакции, протекающей при постоянной температуре. Минимальной изолированной системой, в которой самопроизвольно осуществляется этот процесс, будет являться система "термостат + реактор". Для такой системы энтропия выражается функцией Массье [14, 16]:

$$J = -RV\sum_{i=1}^{n} z_i(\ln\frac{z_i}{z_i^*} - 1), \tag{5.9}$$

где R – универсальная газовая постоянная, V – объем реактора, z_i – концентрации реагирующих веществ, z_i^* – фазовые координаты состояния равновесия, отличные от нуля.

Вдоль фазовых траекторий системы (3.65) функция J не убывает. Если рассмотреть функцию $J(z)-J(z^*)$, то для систем вида (3.65) она будет играть роль функции Ляпунова.

Пример 5.5.1. Рассмотрим реакцию окисления угарного газа, описанную в примере 3.5.1. Соответствующие уравнения химической кинетики имеют вид (3.70). Равенства нулю правых частей этой системы:

$$f_1(z_1,z_2,z_3) = f_2(z_1,z_2,z_3) = f_3(z_1,z_2,z_3) = 0$$

и условия (3.69) определяют единственное состояние равновесия $z^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*)$ на балансном многограннике. Отсюда следует, что в состоянии равновесия справедливо равенство

$$-a_1 z_1^{*2} z_2^* + a_2 z_3^{*2} = 0. \tag{5.10}$$

Если все три координаты состояния равновесия z^* отличны от нуля, то функция Массье имеет вид (5.9), тогда

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = -RV(\ln\frac{z_i}{z_i^*} - 1 + z_i\frac{z_i^*}{z_i}\frac{1}{z_i^*}) = -RV\ln\frac{z_i}{z_i^*}.$$

Возьмем полную производную функции J по времени в силу системы (3.70):

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial J}{\partial z_i}f_i = -RV\Big(\ln\frac{z_1}{z_1^*}(-2a_1 z_1^2 z_2 + 2a_2 z_3^2) +$$

$$+\ln\frac{z_2}{z_2^*}(-a_1z_1^2z_2+a_2z_3^2)+\ln\frac{z_3}{z_3^*}(2a_1z_1^2z_2-2a_2z_3^2)\Big)=$$

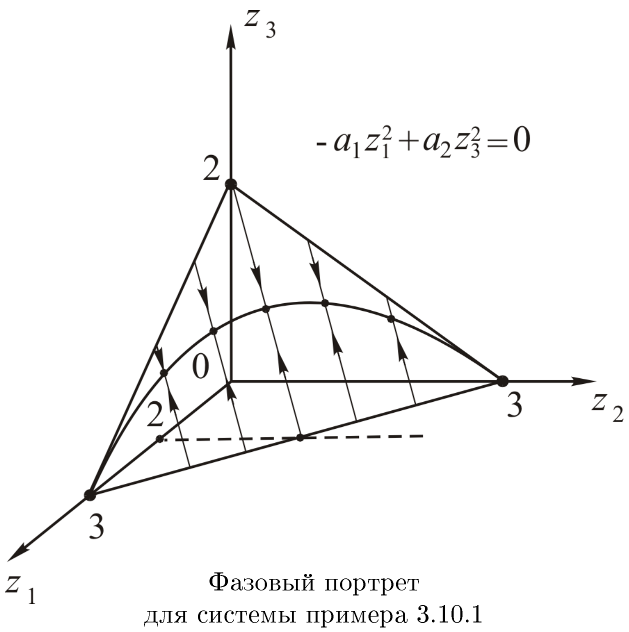
$$=-RV(-a_1z_1^2z_2+a_2z_3^2)(2\ln\frac{z_1}{z_1^*}+\ln\frac{z_2}{z_2^*}+2\ln\frac{z_3^*}{z_3})=$$

$$=-RV(-a_1z_1^2z_2+a_2z_3^2)\ln\frac{z_1^2z_2z_3^{*2}}{z_1^{*2}z_2^*z_3^2}.$$

Определим знак функции dJ/dt. Очевидно, в состоянии равновесия эта функция равна нулю, так как в нем справедливо (5.10). Выражение $-a_1z_1^2z_2+a_2z_3^2$ может быть как положительным, так и отрицательным. Пусть оно принимает положительное значение, тогда $a_2z_3^2>a_1z_1^2z_2$, $\frac{z_3^2}{z_1^2z_2}>\frac{a_1}{a_2}$, но в силу (5.10) $\frac{z_3^{*2}}{z_1^{*2}z_2^*}=\frac{a_1}{a_2}$, поэтому $\frac{z_3^2}{z_1^2z_2}>\frac{z_3^{*2}}{z_1^{*2}z_2^*}$, $\frac{z_1^2z_2z_3^{*2}}{z_1^{*2}z_2^*z_3^2}<1$, $\ln\frac{z_1^2z_2z_3^{*2}}{z_1^{*2}z_2^*z_3^2}<0$ и $\frac{dJ}{dt}>0$.

Если $-a_1z_1^2z_2+a_2z_3^2<0$, то $a_2z_3^2<a_1z_1^2z_2$, $\frac{a_1}{a_2}>\frac{z_3^2}{z_1^2z_2}$, $\frac{z_3^2}{z_1^2z_2}<\frac{z_3^{*2}}{z_1^{*2}z_2^*}$, при этом $\ln\frac{z_1^2z_2z_3^{*2}}{z_1^{*2}z_2^*z_3^2}>0$ и $\frac{dJ}{dt}>0$. Отсюда видно, что $\frac{dJ}{dt}$ в любой точке, отличной от состояния равновесия, больше нуля, следовательно, функция Массье возрастает.

Так как $\lim\limits_{z_i\to0}z_i(\ln\frac{z_i}{z_i^*}-1)=0$, то функцию Массье (5.9) можно доопределить до непрерывной на всем балансном многограннике, включая точки с нулевыми координатами. Поскольку балансный многогранник – замкнутое подмножество симплекса и, следовательно, компактное множество, то доопределенная функция Массье достигает своего максимума на балансном многограннике. Покажем, что функция Массье достигает своего максимума на балансном многограннике в состоянии равновесия z^* системы (3.70).



Фазовый портрет
для системы примера 3.10.1

Предположим противное: максимум функции J достигается в точке $\overline{z}=(\overline{z}_1,\overline{z}_2,\overline{z}_3)$, принадлежащей балансному многограннику, но не являющейся состоянием равновесия ($\overline{z}\neq z^*$). Возьмем $\overline{z}$ в качестве начального условия и рассмотрим фазовую траекторию, начинающуюся в точке $\overline{z}$. Так как точка $\overline{z}$ – не состояние равновесия, то фазовая траектория будет некоторой гладкой кривой, выходящей из точки $\overline{z}$. Пусть z – любая точка на этой кривой, отличная от $\overline{z}$. Вдоль фазовой траектории функция Массье строго возрастает, следовательно, $J(z) > J(\overline{z})$ и точка $\overline{z}$ не является точкой максимума. Получили противоречие, значит, максимум функции Массье может достигаться только в состоянии равновесия. Определим функцию $V(z) = J(z) - J(z^*)$. Тогда: $V(z^*) = 0$; $V(z) < 0$; $\dfrac{dV}{dt}(z) = \dfrac{dJ}{dt}(z) > 0$ при $z \neq z^*$. Следовательно, $V(z)$ – знакоопределенная функция, имеющая знак противоположный знаку производной, взятой в силу системы (3.70). Таким образом, $V(z)$ – функция Ляпунова, и выполняется условие второй теоремы Ляпунова. Отсюда следует, что состояние z^* глобально асимптотически устойчиво на балансном многограннике.

Эти рассуждения справедливы только тогда, когда z^* является внутренней точкой балансного многогранника. Если хотя бы одна координата z_i^* равна нулю, то функция Массье обращается в бесконечность. Однако и в этом случае можно указать некий аналог функции Массье, который можно выбрать в качестве функции Ляпунова.

Пусть в состоянии равновесия z^* процесса (3.63) равны нулю k координат. Не уменьшая общности, можно считать, что это первые k координат: $z_i^* = 0$, $i = \overline{1,k}$; $z_i^* > 0$, $i = \overline{k+1,n}$. Добавим в механизм реакции гипотетический элементарный процесс

$$\nu_{k+1}A_{k+1} + \nu_{k+2}A_{k+2} + \ldots + \nu_n A_n \xrightarrow{\varepsilon} \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_n A_n$$

с константой скорости $\varepsilon > 0$. При этом $\gamma_i = \beta_i$, если $i = \overline{1,k}$, и $\gamma_i = \beta_i - \nu_i$, если $i = \overline{k+1,n}$. Стехиометрические коэффициенты подбираются так, что $\beta_i > 0$, $i = \overline{1,k}$, и $\sum\limits_{i=1}^{n} d_j^i \gamma_i = 0$, $j = \overline{1,m}$. При этом балансные уравнения (3.62) остаются справедливыми. Скорость данного процесса в соответствии с законом действующих масс выражается следующим образом $\omega = \varepsilon \prod\limits_{i=k+1}^{n} z_i^{\nu_i}$. Кинетические уравнения, которые соответствуют данному механизму, имеют вид

$$\dot{z}_i = \sum_{l=1}^{r} \gamma_i^l a_l \prod_{i=1}^{n} z_i^{\nu_i^l} + \gamma_i \varepsilon \prod_{i=k+1}^{n} z_i^{\nu_i} \equiv f_i(z,\varepsilon),\ \ i = \overline{1,n}.$$

В состоянии равновесия $z^*(\varepsilon) = (z_1^*(\varepsilon), \ldots, z_n^*(\varepsilon))$ этой системы выполняются равенства $f_i(z^*(\varepsilon),\varepsilon) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Нетрудно заметить, что все координаты состояния равновесия в этом случае строго больше нуля. При ε, стремящемся к нулю, $z^*(\varepsilon)$ стремится к z^*; $f_i(z,\varepsilon)$ стремится к $f_i(z)$.

Для данного процесса можно определить функцию Массье

$$J(\varepsilon) = -RV \sum_{i=1}^{n} z_i (\ln \frac{z_i}{z_i^*(\varepsilon)} - 1),$$

причем в силу ее свойств

$$\frac{dJ(\varepsilon)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial z_i} f_i(z,\varepsilon) = -RV \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{z_i}{z_i^*(\varepsilon)} f_i(z,\varepsilon) \geqslant 0.$$

Наряду с функцией $J(\varepsilon)$ рассмотрим функцию $-\dfrac{J(\varepsilon)}{\ln z_1^*(\varepsilon)}$. Так как она отличается от функции Массье на фиксированный положительный множитель, то

$$\frac{d}{dt}\Big(-\frac{J(\varepsilon)}{\ln z_1^*(\varepsilon)}\Big) \geqslant 0. \tag{5.11}$$

Найдем ее предел при $\varepsilon \to 0$. Если $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\ln z_i^*(\varepsilon)}{\ln z_1^*(\varepsilon)} = \eta_i$, $i = \overline{1,k}$, где η_i – неотрицательные константы, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(-\frac{J(\varepsilon)}{\ln z_1^*(\varepsilon)}\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0} RV \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i \ln z_i - z_i \ln z_i^*(\varepsilon) - z_i}{\ln z_1^*(\varepsilon)} =$$

$$= RV \sum_{i=1}^{n} \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{z_i \ln z_i}{\ln z_1^*(\varepsilon)} - \frac{z_i \ln z_i^*(\varepsilon)}{\ln z_1^*(\varepsilon)} - \frac{z_i}{\ln z_1^*(\varepsilon)}\Big) =$$

$$= -RV \sum_{i=1}^{k} \eta_i z_i \equiv \tilde{J}.$$

Кроме того

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d}{dt}\Big(-\frac{J(\varepsilon)}{\ln z_1^*(\varepsilon)}\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{RV}{\ln z_1^*(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{z_i}{z_i^*(\varepsilon)} f_i(z,\varepsilon) =$$

$$= -RV \sum_{i=1}^{k} \eta_i f_i(z,\varepsilon) \equiv \frac{d\tilde{J}}{dt}.$$

При этом знак неравенства (5.11) в пределе сохранится, следовательно, $\dfrac{d\tilde{J}}{dt} \geqslant 0$. Таким образом, функция $\tilde{J}$ не убывает вдоль фазовых траекторий. Во многих случаях ее можно выбрать в качестве функции Ляпунова для системы химической кинетики с состоянием равновесия, имеющим нулевые координаты.

Пример 5.5.2. Рассмотрим реакцию окисления нитрит-ионов, описанную в примере 3.5.2. Соответствующие уравнения химической кинетики имеют вид (3.71). Состояния равновесия этой системы в зависимости от соотношений констант b_i, $i = \overline{1,4}$, имеют координаты $(0, z_2^*, 0, 0, z_5^*, z_6^*)$, либо $(0, 0, 0, 0, z_5^*, z_6^*)$, либо $(z_1^*, 0, 0, 0, z_5^*, z_6^*)$.

Обратим внимание, что эти состояния равновесия лежат на разных балансных многогранниках. Рассмотрим балансный многогранник, содержащий первую точку равновесия. Добавим к механизму реакции элементарный процесс

$$\nu_2 A_2 + \nu_5 A_5 + \nu_6 A_6 \xrightarrow{\varepsilon} \sum_{i=1}^{6} \beta_i A_i.$$

С учетом элементного состава веществ, выполнения балансных уравнений и условий $\beta_1 > 0$, $\beta_3 > 0$, $\beta_4 > 0$ имеем $\nu_2 = 0$, $\nu_5 = \nu_6 = 3$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$, $\beta_5 = \beta_6 = 0$. Кинетические уравнения при этом приобретают вид

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{z}_1 &=& -a_1 z_1 z_2 + \varepsilon z_5^3 z_6^3 \\ \dot{z}_2 &=& -a_1 z_1 z_2 + \varepsilon z_5^3 z_6^3 \\ \dot{z}_3 &=& a_1 z_1 z_2 - a_2 z_3 + \varepsilon z_5^3 z_6^3 \\ \dot{z}_4 &=& a_2 z_3 - a_3 z_4 + \varepsilon z_5^3 z_6^3 \\ \dot{z}_5 &=& a_3 z_4 - 3\varepsilon z_5^3 z_6^3 \\ \dot{z}_6 &=& a_3 z_4 - 3\varepsilon z_5^3 z_6^3. \end{array}\right.$$

Приравнивая правые части полученной системы к нулю, приходим к соотношениям, которые определяют координаты состояния равновесия $z^*(\varepsilon)$:

$$\frac{z_1^*(\varepsilon) z_2^*(\varepsilon)}{z_5^{*3}(\varepsilon) z_6^{*3}(\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{a_1}; \quad \frac{z_4^*(\varepsilon)}{z_5^{*3}(\varepsilon) z_6^{*3}(\varepsilon)} = \frac{3\varepsilon}{a_3}; \quad \frac{z_3^*(\varepsilon)}{z_5^{*3}(\varepsilon) z_6^{*3}(\varepsilon)} = \frac{2\varepsilon}{a_2}.$$

Отсюда

$$\ln z_1^*(\varepsilon) = -\ln z_2^*(\varepsilon) + 3\ln z_5^*(\varepsilon) + 3\ln z_6^*(\varepsilon) + \ln\varepsilon - \ln a_1;$$
$$\ln z_4^*(\varepsilon) = 3\ln z_5^*(\varepsilon) + 3\ln z_6^*(\varepsilon) + \ln\varepsilon + \ln 3 - \ln a_3;$$
$$\ln z_3^*(\varepsilon) = 3\ln z_5^*(\varepsilon) + 3\ln z_6^*(\varepsilon) + \ln\varepsilon + \ln 2 - \ln a_2;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln z_3^*(\varepsilon)}{\ln z_1^*(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln z_4^*(\varepsilon)}{\ln z_1^*(\varepsilon)} = 1.$$

Следовательно, функция $\tilde{J}$ – аналог функции Массье для системы (3.71) на балансном многограннике, содержащем состояние равновесия $(0, z_2^*, 0, 0, z_5^*, z_6^*)$, – имеет вид

$$\tilde{J} = -RV(z_1 + z_3 + z_4) < 0.$$

Проверим, можно ли ее взять в качестве функции Ляпунова. Поскольку $\tilde{J} < 0$ во всех точках балансного многогранника, кроме состояния равновесия, то $\tilde{J}$ отрицательно определена. В силу системы (3.71)

$$\frac{d\tilde{J}}{dt} = \frac{\partial\tilde{J}}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial z_3}\dot{z}_3 + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial z_4}\dot{z}_4 =$$
$$= -RV(-a_1z_1z_2 + a_1z_1z_2 - a_2z_3 + a_2z_3 - a_3z_4) = RVa_3z_4 > 0,$$

поэтому $\dfrac{d\tilde{J}}{dt}$ положительно определена. Таким образом, для функции $\tilde{J}$ выполняются все условия, накладываемые на функцию Ляпунова. Отсюда следует, что состояние равновесия $(0, z_2^*, 0, 0, z_5^*, z_6^*)$ асимптотически устойчиво.

Аналогично на балансном многограннике, содержащем второе состояние равновесия $(0, 0, 0, 0, z_5^*, z_6^*)$, рассмотрим функцию $\tilde{J} = -RV(z_1+z_2+z_3+z_4)$, которая представляет собой аналог функции Массье. Очевидно, $\tilde{J} < 0$ всюду, кроме состояния равновесия, при этом в силу системы

$$\frac{d\tilde{J}}{dt} = RV(a_1z_1z_2 + a_3z_4) > 0,$$

поэтому функцию $\tilde{J}$ можно взять в качестве функции Ляпунова, и состояние равновесия $(0, 0, 0, 0, z_5^*, z_6^*)$ асимптотически устойчиво.

На балансном многограннике, содержащем третье состояние равновесия $(z_1^*, 0, 0, 0, z_5^*, z_6^*)$, аналогом функции Массье является функция $\tilde{J} = -RV(z_2 + z_3 + z_4)$. Так как $\tilde{J} < 0$ и $\dfrac{d\tilde{J}}{dt} = RVa_3z_4 > 0$ во всех точках, кроме состояния равновесия, то $\tilde{J}$ можно взять в качестве функции Ляпунова. Третье состояние равновесия также асимптотически устойчиво.

5.6. Мера разнообразия и мера упорядоченности

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений на стандартном симплексе

$$\{(z_1, \ldots, z_n) : z_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i = 1\}.$$

Пусть $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ единственное состояние равновесия для этой системы. Тогда функцию Массье формально можно определить выражением (5.9). Пусть $z_1^* = z_2^* = \dots = z_n^* = 1/n$, тогда

$$J = -RV\sum_{i=1}^{n} z_i \ln\frac{z_i}{z_i^*} + RV = -RV\Big(\sum_{i=1}^{n} z_i \ln z_i - \ln\frac{1}{n}\Big) + RV =$$

$$= -RV\sum_{i=1}^{n} z_i \ln z_i + RV(\ln\frac{1}{n} + 1).$$

Поскольку RV и $(\ln\frac{1}{n} + 1)$ постоянные, то при исследовании устойчивости можно вместо функции J использовать функцию

$$Z = -\sum_{i=1}^{n} z_i \ln z_i.$$

Функция Z непрерывно доопределяется на случай, когда $z_i = 0$: полагают, что $z_i \ln z_i = 0$, если $z_i = 0$. Эта функция называется *энтропией системы* на стандартном симплексе. Она достигает своего минимума, равного нулю, в вершинах симплекса и своего максимума в центре симплекса.

Функцию Z часто используют в качестве показателя (меры) разнообразия для данного состояния системы. Если система является системой не на стандартном симплексе, то сначала ее приводят к системе на стандартном симплексе с помощью линейной замены (3.16), а затем вычисляют меру разнообразия. Функция Z является показателем упорядоченности системы; чем больше Z, тем более равномерно распределено вещество, энергия и т.п. по всем видам элементов системы, чем меньше Z, тем более сосредоточены вещество или энергия на одном из конкретных видов среди элементов системы.

Но такое описание имеет смысл тогда, когда все элементы системы равноценны. Если же некоторые виды элементов этой системы имеют более сложную структуру по отношению к другим видам, то при описании упорядоченности системы необходимо учитывать ее изменение за счет усложнения структуры. Рассмотрим систему из n различных видов элементов, количество элементов i-го вида обозначим z_i. Пусть первые m видов имеют самую простую структуру. Это "элементарные кирпичики", "атомы", из которых образуются элементы всех остальных видов. Пусть каждый элемент j-го вида при $j > m$ состоит из объединения по l_{ij} элементов i-го вида, $i = \overline{1, m}$.

Если в системе возможны только перестройки элементов из одного вида в другой, но не происходит исчезновение или появление новых "атомов", то это приводит к следующим балансным соотношениям

$$z_i + \sum_{j=m+1}^{n} l_{ij} z_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{5.12}$$

где константы b_i определяются из начальных условий. Состоянию наименьшей упорядоченности соответствует случай, когда в системе присутствуют только элементы всех первых m видов, т.е.

$$z_i^* = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad z_j^* = 0, \quad j = \overline{m+1, n}.$$

Энтропия системы относительно такого состояния равновесия рассчитывается уже по-другому. Здесь можно использовать аналог функции Массье $\tilde{J}$, введенный в разделе 3.10.

Тогда показателем упорядоченности будет величина

$$J_1 = -\sum_{i=1}^{m} z_i. \tag{5.13}$$

С учетом балансных соотношений (5.12) величина (5.13) эквивалентна величине

$$J_2 = -\sum_{i=1}^{n} z_i, \tag{5.14}$$

т.е. увеличение J_1 влечет за собой увеличение J_2 и наоборот.

Пример 5.6.1. Пусть в системе присутствуют элементы двух видов A и B, причем A является элементарным видом, а каждый элемент B состоит из объединения двух элементов A. Пусть z_1 – количество элементов вида A, z_2 – количество элементов вида B. Балансное уравнение имеет форму

$$z_1 + 2z_2 = b_1.$$

Упорядоченность системы в конкретном состоянии (z_1, z_2) можно рассчитать по формулам $J_1 = -z_1$ или $J_2 = -z_1 - z_2$. Тогда в состоянии $z_1 = b_1$, $z_2 = 0$ показатели упорядоченности принимают значения $J_1(b_1, 0) = -b_1$, $J_2(b_1, 0) = -b_1$; в состоянии $z_1 = 0$, $z_2 = b_1/2$ соответственно $J_1(0, b_1/2) = 0$, $J_2(0, b_1/2) = -b_1/2$. Первое состояние соответствует минимальному порядку, второе – максимальному.

5.7. Системы близкие к системам отбора

С точки зрения практики бывает нецелесообразно различать случаи, когда в системе на стандартном симплексе первая координата стремится к единице с течением времени и когда она становится больше $1-\varepsilon$ при достаточно малом положительном ε. Известно, например, что у твердого тела, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, происходят микроскопические флуктуации – отклонения от абсолютно равномерного нагрева. Но в обыденной жизни эти флуктуации никто не замечает, и считается, что температура тела во всех точках одинакова. В связи с этим имеет смысл выделить класс систем, близких по своему поведению к системам строгого отбора.

Определение. *Будем говорить, что система* (1.11) *на стандартном симплексе S является близкой к системе отбора, если существует положительное число ε $(0 < \varepsilon \ll 1)$ такое, что при любых начальных условиях, принадлежащих симплексу, с ненулевой j-й координатой, найдется момент времени T, начиная с которого $x_j(t) > 1-\varepsilon$, $t > T$.*

В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать $j = 1$, т.е. для решения системы близкой к системе отбора справедливо неравенство

$$x_1(t) > 1-\varepsilon \quad \text{для всех} \quad t > T. \tag{5.15}$$

Целью дальнейшего исследования является вывод достаточных условий, при которых система на стандартном симплексе является близкой к системе отбора.

Теорема 5.7.1. *Автономная система* (4.21) *на стандартном симплексе S является близкой к системе отбора, если выполнено условие*

$$F_1(x) > 0 \ \textit{при} \ 0 < x_1 \le 1-\varepsilon. \tag{5.16}$$

Доказательство. Функция $x_1(t)$ при начальном условии $x_1(t_0)$ удовлетворяет равенству

$$x_1(t) = x_1(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} F_1(x(\tau))\, d\tau. \tag{5.17}$$

Функция $F_1(x)$ непрерывна на компакте K:

$$K = \{x : 0 < x_1(t_0) \leqslant x_1 \leqslant 1 - \varepsilon,\ \ x_i \geqslant 0,\ \ i = \overline{2, n},\ \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

По условию (5.16) функция $F_1(x)$ принимает на компакте K только положительные значения. По теореме Вейерштрасса $F_1(x)$ достигает точной нижней грани $\beta = \inf\limits_{K} F_1(x)$. Так как $x_1(t_0) > 0$ и $F_1(x) \geqslant \beta > 0$, то из равенства (5.17) вытекает справедливость отношения

$$x_1(t) > \beta(t - t_0),$$

следовательно, при $t = T = t_0 + (1 - \varepsilon)/\beta$ функция x_1 удовлетворяет неравенству (5.15).

Покажем, что при всех значениях $t > T$ для функции $x_1(t)$ справедливо неравенство $x_1(t) \geqslant 1 - \varepsilon$. Предположим обратное. Пусть в момент времени $t_2 > T$ функция $x_1(t_2) < 1 - \varepsilon$. Так как $x_1(t)$ есть непрерывная функция, то в некоторый момент времени t_1, такой что $T \leqslant t_1 < t_2$, справедливо равенство $x_1(t_1) = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\lim_{t_1 \to t_2 - 0} \frac{x_1(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1} = F_1(x(t_2)) < 0,$$

что противоречит условию (5.16).

Теорема 5.7.2. *Система (4.24) является близкой к системе отбора, если выполнено условие*

$$\frac{\Phi_1(x)}{x_1} > \frac{\Phi_i(x)}{x_i} \ \ \textit{при}\ \ 0 < x_1 \leqslant 1 - \varepsilon,\ \ x_i \neq 0,\ \ i = \overline{2, n}. \tag{5.18}$$

Доказательство. Поскольку $x_1 \neq 1$, то x_i, $i = \overline{2, n}$, одновременно в ноль не обращаются. Предположим, что в некоторой точке области, вырезаемой из стандартного симплекса условием $0 < x_1 \leqslant 1 - \varepsilon$, компоненты x_i не равны нулю для индексов $i \in E$ и равны нулю для индексов $i \in \overline{E}$, $E \cup \overline{E} = \{2, \ldots, n\}$.

Так как неравенство (5.18) выполняется в любой окрестности точки с координатой $x_i = 0$, то для индексов $i \in \overline{E}$ справедливы предельные соотношения

$$0 \leq \lim_{x_i \to 0} \frac{\Phi_i(x_1, \ldots, x_n)}{x_i} \leq \frac{\Phi_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{x_1}.$$

Отсюда следует, в силу ограниченности отношения Φ_1/x_1 в рассматриваемой области, необходимое выполнение условий

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0, \quad i \in \overline{E}.$$

Тогда

$$\Phi_1 x_i = \Phi_i x_1, \quad i \in \overline{E},$$
$$\Phi_1 x_i > \Phi_i x_1, \quad i \in E.$$

Просуммировав отдельно правые и левые части этих неравенств по всем индексам $i \in E \cup \overline{E}$, получим

$$\Phi_1(1 - x_1) - x_1 \sum_{i=2}^{n} \Phi_i > 0 \text{ при } 0 < x_1 \leqslant 1 - \varepsilon.$$

Это означает выполнение требования теоремы 5.7.1:

$$F_i(x) \equiv \Phi_1(x) - x_1 \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) > 0 \text{ при } 0 < x_1 \leqslant 1 - \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.7.3. *Для того чтобы система* (4.24) *была близкой к системе отбора, достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\frac{\Phi_1(x)}{x_1} > \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} \Phi_j(x)}{\sum\limits_{j=2}^{n} x_j} \text{ \textit{при} } 0 < x_1 \leqslant 1 - \varepsilon. \tag{5.19}$$

Доказательство. Заметим, что $\sum\limits_{j=2}^{n} x_j \neq 0$. Так как решение системы (4.24) принадлежит симплексу S и функция x_1 удовлетворяет ограничениям $0 < x_1 \leqslant 1 - \varepsilon$, то справедливо соотношение

$$\sum_{j=2}^{n} x_j = 1 - x_1 \geq \varepsilon.$$

Из (5.19) следует

$$\Phi_1(1 - x_1) > x_1 \sum_{j=2}^{n} \Phi_j,$$

$$\Phi_1(x) - x_1 \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x) > 0.$$

Таким образом, выполнены требования теоремы 5.7.1. Теорема доказана.

Пример 5.7.1. Рассмотрим систему на стандартном симплексе

$$\dot{x}_i = a_i x_i + \mu - x_i \sum_{j=1}^{n} (a_j x_j + \mu), \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.20}$$

где a_i – положительные константы, причем $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$; μ – некоторый параметр, $0 < \mu \ll 1$. Покажем, что для системы (5.20) с начальным условием (3.20) выполнено требование (5.19) при некотором ε:

$$a_1 + \frac{\mu}{x_1} > \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} (a_j x_j + \mu)}{1 - x_1} \text{ при } 0 < x_1 \leqslant 1 - \varepsilon. \tag{5.21}$$

Оценим правую часть неравенства (5.21) сверху

$$\frac{\sum\limits_{j=2}^{n} (a_j x_j + \mu)}{1 - x_1} < \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} a_j x_j + n\mu}{\varepsilon} < \frac{a_2 + n\mu}{\varepsilon},$$

а левую часть снизу

$$a_1 + \frac{\mu}{x_1} > a_1 + \frac{\mu}{1-\varepsilon}.$$

Если коэффициенты a_1, a_2 и параметр μ таковы, что

$$a_1 + \frac{\mu}{1-\varepsilon} > \frac{a_2 + n\mu}{\varepsilon},$$

то система (5.20) близка к системе отбора в силу теоремы 5.7.3. Последнее неравенство позволяет указать ε-окрестность точки $x = (1, 0, \ldots, 0)$, в которую заведомо попадет решение системы (5.20):

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 4a_1(a_2 + n\mu)}}{2a_1} < \varepsilon < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a_1(a_2 + n\mu)}}{2a_1},$$

где $a = a_1 + a_2 + (n+1)\mu$. Например, если $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $n = 4$, $\mu = 0,003$, то ε принимает значения из интервала $(0,25; 1)$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для системы

$$\dot{x}_i = a_i x_i + \mu f_i(x) - x_i \sum_{j=1}^{n} (a_j x_j + \mu f_j(x)), \quad i = \overline{1, n},$$

где функции $f_i(x)$ являются достаточно гладкими, ограниченными в совокупности константами L и M, т.е. для любого номера $i = \overline{1, n}$ справедливо неравенство $L \leq f_i \leq M$. Обозначим $a = a_1 + a_2 + (L + nM)\mu$. Тогда ε-окрестность точки $x = (1, 0, \ldots, 0)$, в которую заведомо попадет решение данной системы, определяется неравенством

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 4a_1(a_2 + nM\mu)}}{2a_1} < \varepsilon < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a_1(a_2 + nM\mu)}}{2a_1}.$$

Так, если $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $n = 4$, $\mu = 0,003$, $L = 0$, $M = 2$, то ε принимает значения из интервала $(0,31; 1)$.

Пример 5.7.2. Модель "хищник – n жертв" с учетом возможности возникновения мутации. Отличие данной модели от рассмотренной в примере 3.2.5 состоит в предположении, что в результате мутации в потомстве жертв j-го вида появляется генотип i с вероятностью f_{ij}, удовлетворяющей условиям: $f_{ij} \geqslant 0$, $f_{ij} = f_{j\,i}$, $f_{ii} \gg f_{ij}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ij} = 1$, $f_{ii} = f_{jj}$. С учетом этого система (3.29) изменится следующим образом

$$\begin{cases} \dot{z}_i &= \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij} a_j z_j - kyz_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ \dot{y} &= b\sum\limits_{i=1}^{n} z_i y - sy. \end{cases} \tag{5.22}$$

Так же как и в системе (3.29), параметры a_i, k, b, s – положительные постоянные. Пусть заданы начальные условия

$$z_i(t_0) = z_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad y(t_0) = y^0.$$

С помощью замены переменных

$$x_i = \frac{z_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_j}, \quad i = \overline{1, n}$$

от системы (5.22) перейдем к рассмотрению динамики удельных численностей жертв:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} a_j x_j - x_i \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{lj} a_j x_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.23}$$

Покажем, что для системы (5.23) при определенном соотношении между коэффициентами выполнено требование (5.19) теоремы 5.7.3 для некоторого ε, т.е.

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} f_{1j} a_j x_j}{x_1} > \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij} a_j x_j}{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i} \text{ при } 0 < x_1 \leqslant 1 - \varepsilon. \tag{5.24}$$

Оценим правую и левую части неравенства (5.24) при условиях $0 < x_1 \leqslant 1 - \varepsilon$, $\sum\limits_{j=2}^{n} x_j = 1 - x_1 \geqslant \varepsilon$. Учитывая предположения относительно коэффициентов f_{ij} и a_i, преобразуем правую часть неравенства (5.24)

$$\frac{\sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij} a_j x_j}{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} f_{2j} a_j x_j + \sum\limits_{j=1}^{n} f_{3j} a_j x_j + \dots + \sum\limits_{j=1}^{n} f_{nj} a_j x_j}{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i} =$$

$$= \Big(\sum_{i=2}^{n} f_{ii} a_i x_i + a_1 x_1 \sum_{i=2}^{n} f_{i1} + a_2 x_2 \sum_{i=3}^{n} f_{i2} + a_3 x_3 \sum_{\substack{i=2\\ i\neq 3}}^{n} f_{i3} +$$

$$+ \dots + a_{n-1} x_{n-1} \sum_{\substack{i=2\\ i\neq n-1}}^{n} f_{i\,n-1} + a_n x_n \sum_{i=2}^{n-1} f_{in} \Big) \Big/ \sum_{i=2}^{n} x_i.$$

Учитывая, что

$$\max_{j=\overline{1,n}} \sum_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{n} f_{ij} = \sum_{i=2}^{n} f_{i1} = 1 - f_{11},$$

оценим правую часть неравенства (5.24) сверху:

$$\frac{\sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij} a_j x_j}{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i} \leq \frac{a_2 f_{22} \sum\limits_{i=2}^{n} x_i + a_1 (1 - f_{11}) \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i} \leq$$

$$\leq a_2 f_{11} + \frac{a_1 (1 - f_{11})}{\varepsilon}.$$

Левую часть неравенства (5.24) оценим снизу следующим образом

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} f_{1j} a_j x_j}{x_1} = f_{11} a_1 + \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} f_{1j} a_j x_j}{x_1} \geq f_{11} a_1 + a_n \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \min_{j=\overline{2,n}} f_{1j}.$$

Если коэффициенты f_{ij}, a_i таковы, что

$$f_{11}a_1 + a_n \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \min_{j=\overline{2,n}} f_{1j} > a_2 f_{11} + \frac{a_1(1-f_{11})}{\varepsilon}, \tag{5.25}$$

то в силу теоремы 5.7.3 система (5.23) является близкой к системе отбора. Обозначив $\theta = f_{11}(a_1 - a_2) - a_n \min\limits_{j=\overline{2,n}} f_{1j}$, соотношение (5.25) перепишем в виде

$$\theta\varepsilon^2 - (a_1 - a_2 f_{11})\varepsilon + a_1(1 - f_{11}) < 0.$$

Если $\theta > 0$, то условие (5.25) справедливо для ε, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{a_1 - a_2 f_{11} - \sqrt{D}}{2\theta} < \varepsilon < \frac{a_1 - a_2 f_{11} + \sqrt{D}}{2\theta},$$

где $D = (a_1 - a_2 f_{11})^2 - 4\theta a_1(1 - f_{11})$.

Например, если $a_1 = 6$, $a_2 = 3$, $a_n = 1$, $f_{11} = 0,9$, $\min\limits_{j=\overline{2,n}} f_{1j} = 0,002$, то ε принимает значения из интервала $(0,22;1)$. Увеличение значения параметра f_{11} приводит к уменьшению минимального значения ε, для которого справедливо неравенство (5.15). Так, при $f_{11} = 0,95$ оно равно $0,1$. Уменьшение a_1 ведет к увеличению минимального значения ε, для которого справедливо неравенство (5.15). При $a_1 = 4$, $f_{11} = 0,9$ величина $\varepsilon \in (0,44;1)$. Увеличив $f_{11} = 0,95$, получим, что $\varepsilon \in (0,21;1)$. Данный результат свидетельствует о том, что увеличение коэффициента размножения жертв первого вида, а также увеличение вероятности того, что потомство первого вида жертв будет принадлежать этому же классу, ведет к увеличению удельной численности жертв первого вида среди остальных жертв.

Пример 5.7.3. Рассмотрим пример 5.7.2 в случае, когда вероятность $f_{ij}(t)$ появления генотипа i в потомстве j-го вида жертв определяется законом

$$\dot{f}_{ij} = d_{ij} f_{ij} - f_{ij} \sum_{l=1}^{n} d_{lj} f_{lj}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{5.26}$$

где d_{ij} – положительные константы, причем

$$d_{ij} = d_{j\,i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}, \quad d_{ii} = \max_{j=\overline{1,n}} \{d_{ij}\}.$$

Тогда система (5.26) обладает предельным свойством (4.1), и справедливы следующие соотношения

$$\lim_{t\to\infty} f_{ii}(t) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} f_{ij}(t) = 0, \quad i \neq j. \tag{5.27}$$

Учитывая предельные равенства (5.27) и преобразования предыдущего примера, оценим правую часть неравенства (5.24) сверху:

$$\frac{\sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij} a_j x_j}{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i} \leq a_2 f_{11} + \frac{a_1(1-f_{11})}{\varepsilon} < a_2 + \frac{a_1\gamma}{\varepsilon},$$

а левую снизу:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} f_{1j} a_j x_j}{x_1} = f_{11}a_1 + \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} f_{1j} a_j x_j}{x_1} \geqslant f_{11}a_1 \geqslant (1-\gamma)a_1.$$

Здесь γ – положительная сколь угодно малая величина. Если коэффициенты a_1, a_2 такие, что
$$(1-\gamma)a_1 > a_2 + \frac{a_1\gamma}{\varepsilon}, \tag{5.28}$$
то система (5.23) близка к системе отбора в силу теоремы 5.7.3. Условие (5.28) справедливо для ε, удовлетворяющих неравенству
$$\varepsilon > \frac{\gamma a_1}{(1-\gamma)a_1 - a_2}. \tag{5.29}$$
Поскольку величина γ стремится к нулю, то из оценки (5.29) вытекает, что система (5.23) при условии (5.26) близка к системе отбора при любом, сколь угодно близком к нулю, ε. Но это означает, что данная система является системой отбора.

Список литературы

[1] Акоф Р., Эмери Ф. О целеустремленных системах. М.: Советское радио, 1974.

[2] Алексеев В.В. Динамические модели водных биоценозов // Человек и биосфера. Вып.1. 1976. С.1 – 137.

[3] Алексеев В.В., Крышев И.И., Сазыкина И.И. Физическое и математическое моделирование экосистем. СПб., 1992.

[4] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[5] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.

[6] Афанасьев А.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.

[7] Ахметов Н.С. Общая и неорганическая химия. М.: Высшая школа, 1988.

[8] Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.

[9] Баруча-Рид А.Г. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969.

[10] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Новосибирск: Наука, 1990.

[11] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.

[12] Гаазе-Рапопорт Н.Г., Поспелов Д.А. От амебы до робота: модели поведения. М.: Наука, 1987.

[13] Гегель Г. Философия права. – М.: Мир книги, 2009.

[14] Горбань А.Н. Обход равновесия. Новосибирск: Наука, 1984.

[15] Горбань А.Н., Хлебопрос Р.Г. Демон Дарвина: идея оптимальности и естественный отбор. М.: Наука, 1988.

[16] Горшков В.И., Кузнецов И.А. Физическая химия. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[17] Заславский Б.Г., Полуэктов Р.А. Управление экологическими системами. М.: Наука, 1990.

[18] Капица С.П. Общая теория роста человечества. М.: Наука, 1998.

[19] Клайн Н. Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984.

[20] Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. Вып. 5. М., 1972.

[21] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[22] Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие для втузов. М.: Высш. школа, 1983.

[23] Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

[24] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.

[25] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

[26] Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантный конус в пространстве Банаха // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. Вып. 1 (23). С.4–97.

[27] Кузенков О.А. Задача Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве//Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 24—32.

[28] Кузенков О.А. Задача Коши для эволюционного уравнения с неограниченным оператором в семействе вероятностных мер Радона //Дифференц. уравнения. 1999. Т.35. № 11. С.1535–1542.

[29] Кузенков О.А. Задача оптимального управления для распределенной системы Вольтерра//Автоматика и телемеханика. 2006. № 7. С. 14-–26.

[30] Кузенков О.А. Задачи оптимального управления распределенными системами в некоторых классах интегро-дифференциальных уравнений//Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 138-–139.

[31] Кузенков О.А. Исследование асимптотического поведения в некоторых математических моделях с нелинейной динамикой//Нелинейная динамика и управление. Вып 2. Сб. статей/Под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2002. С. 333-–335.

[32] Кузенков О.А. Исследование динамической системы вероятностных мер Радона //Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. № 4. С.591–596.

[33] Кузенков О.А. Исследование динамической системы вероятностных мер Радона с неограниченным оператором//Дифференциальные уравнения. Т. 33. № 8. 1997. С. 1142-–1143.

[34] Кузенков О.А. Исследование квазитермодинамического поведения систем на конечномерном симплексе // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. С.67–75.

[35] Кузенков О.А. Исследование уравнений динамики вероятностных мер Радона//Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского. Важнейшие результаты. 1999-2003 гг. Сборник кратких описаний. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. С. 13.

[36] Кузенков О.А. Критерий оптимальности в задачах принятия решений//Тезисы доклада X Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Пущино, 20 -– 25 января 2003 г. М. -– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. С. 126.

[37] Кузенков О.А. Математическое моделирование процесса выбора оптимальной стратегии: проблема критерия // Математическое моделирование и оптимальное

управление: Сб. научн. тр. /Под ред. Р.Г. Стронгина. Н.Новгород, 1994. С.48–59.

[38] Кузенков О.А. Математическое моделирование процессов отбора //Математическое моделирование и оптимальное управление: Сб. научн. тр. /Под ред. Р.Г. Стронгина. Н.Новгород, 1994. С.120–131.

[39] Кузенков О.А. Математическое моделирование процесса формирования «объективного» критерия//Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 2(29). Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. С.140-–146.

[40] Кузенков О.А. Некоторые свойства динамических систем на конечномерном симплексе // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 2(19). 1998. С.56–62.

[41] Кузенков О.А. О многоэкстремальной оптимизации в математических моделях процесса оптимального проектирования//Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н.Новгород. 2000. Вып. 1(22). С. 11-–117.

[42] Кузенков О.А. О свойствах одного класса интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Лебега//Нелинейная динамика и управление. Вып. 1. Сб. статей/Под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина. — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 347-–354.

[43] Кузенков О.А. О системах оценок объективного критерия //Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 1(18). 1998. С.1160–125.

[44] Кузенков О.А. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Лебега//Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 1. С. 134-–135.

[45] Кузенков О.А. Об устойчивости по мере на измеримом подмножестве решений дифференциальных уравнений с частными производными//Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 8. С. 1105-–1113.

[46] Кузенков О.А. Проблема критерия в математическом моделировании процесса выбора для биологических систем // Математическое моделирование и оптимальное управление: Сб. научн. тр. /Под ред. Р.Г. Стронгина, Н.Новгород. 1996. С.53–64.

[47] Кузенков О.А. Проблема «объективного» критерия оптимальности при выборе стратегии поведения//Математика. Компьютер. Образование. Сб. научн. трудов. Т. 1. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. С. 34-–44.

[48] Кузенков О.А. Слабое решение задачи Коши в семействе вероятностных мер Радона//Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1529-–1537.

[49] Кузенков О.А. Уравнения динамики меры как язык для описания оптимизационных процессов//Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 1(30). Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. С.51—62.

[50] Кузенков О.А. Численный метод поиска глобального максимума в гильбертовом пространстве//Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1(25). Н.Новгород. С. 189-–194.

[51] Кузенков О.А., Большаков А.В., Зорин В.А. Метод адаптации для задач с безусловной минимизацией средних потерь//Вестник ННГУ. 2007. № 6. С. 147-–152.

[52] Кузенков О.А., Дырдин О.З. Моделирование процессов передачи ненаследственной информации//Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2006. Вып. 2(31). С. 29—36.

[53] Кузенков О.А., Ирхина А.Л. Идентификация распределения деформаций в стержне как задача оптимального управления//Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. 2005. № 5. С. 23-–28.

[54] Кузенков О.А., Капитанов Д.В. Разностные уравнения на единичном симплексе// Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 1(30). Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. С.63—69.

[55] Кузенков О.А., Капитанов Д.В. Системы разностных уравнений на единичном симплексе//Математика. Компьютер. Образование. Сб. научн. трудов. Т. 2. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. С. 39-–50.

[56] Кузенков О.А., Круподёрова К.Р. Практикум по курсу "Математические модели процессов отбора": Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009. – 80 с.

[57] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Гиперболическая система полулинейных уравнений на конечномерном симплексе: достаточные условия близости к системе отбора // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 2(24). 2001. С.212–218.

[58] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Исследование обобщенной модели Вольтерра с учетом явления переноса // Математика. Компьютер. Образование. Вып. 6. Часть II. Сб. научных трудов/ Под ред. Г.Ю. Ризниченко. М.: Прогресс-Традиция, 1999. С.429–433.

[59] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Исследование гиперболической системы первого порядка на конечномерном симплексе // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 2(21). 1999. С.138–144.

[60] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора: Учеб. пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2007. – 324 с.

[61] Кузенков О.А., Рябова Е.А. О форме гиперболической системы первого порядка на конечномерном симплексе // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 1(23). 2001. С.87–95.

[62] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Оптимальное управление гиперболической полулинейной системой первого порядка на стандартном симплексе//Дифференциальные уравнения. 2005. Т.41. №8. С. 1142.

[63] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Оптимальное управление гиперболической системой на симплексе //Изв. АН. Теория и системы управления. 2003. № 2. С.69–75.

[64] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Оптимальное управление за бесконечное время системой на единичном симплексе // Автоматика и телемеханика. 2005. № 10. С.70–79.

[65] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Оптимизация и отбор//Нелинейные колебания механических систем. Труды VIII Всероссийской научной конференции. Н.Новгород: Издательский дом «Диалог культур», 2008. Т.1.С. 203-–207.

[66] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 1(20). 1999. С.63–72.

[67] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Учебно-методическое обеспечение специального курса «Математическое моделирование процессов отбора»//Труды итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы

и программные средства». 27-30 ноября 2007 г. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. С. 233-–235.

[68] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Учебный курс «Математическое моделирование процессов отбора» //XV конференция «Математика. Компьютер. Образование». Дубна, 28 января-02 февраля 2008 г. Тезисы докладов. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. С. 362.

[69] Кузенков О.А., Рябова Е.А., Дырдин О.З. Исследование предельных свойств решения смешаной задачи для гиперболической системы на стандартном симплексе//Вестник ННГУ. 2007. № 5. С. 78-–81.

[70] Кузенков О.А., Эгамов А.И. Теорема существования обобщенного решения одного класса функционально-дифференциальных уравнений и ее приложения//Дифференциальные уравнения. Т. 33. № 8. 1997. С. 1143-–1144.

[71] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

[72] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1960.

[73] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983.

[74] Менджел М., Кларк К. Динамические модели в экологии поведения. М.: Мир, 1992.

[75] Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост: Пер. с япон. – М.: Наука, 1973.

[76] Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. Динамические модели теории управления. М.: Наука, 1985.

[77] Нейман Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. – М.: Мир, 1971. – 326 с.

[78] Новая теория информации. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.eme.ru/statii/nov_toor.htm, свободный.

[79] Новый объяснительный словарь синонимов русского языка/ Под ред. Ю.Д. Апресяна. – М.: 2000. – с. 52 – 53.

[80] Ожегов С.И., Швецова Н.Ю. Толковый словарь русского языка. – М.: 1993

[81] Основы общей биологии / Под. ред. Э. Либберта. – М.: Мир, 1982. – 440 с.

[82] Перельман Я.И. Живая математика. М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

[83] Перельман Я.И. Занимательная геометрия. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

[84] Плотников В.И. Теоремы существования оптимизирующих функций для оптимальных систем с распределенными параметрами // Изв. АН СССР. Сер. метем. – 1970. – Т.34, №3. – С.689-711.

[85] Плотников В.И., Шашков В.М., Кузенков О.А. Оптимальное управление линейными сосредоточенными системами. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1993.

[86] Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. Динамические модели экологических систем. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.

[87] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкреяндзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.

[88] Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983.

[89] Пых Ю.А. Задачи устойчивости в популяционной генетике: Автореф. дисс. Ленинград: ЛГУ, 1972.

[90] Пых Ю.А. Исследование устойчивости в динамических моделях популяционной генетики // Проблемы эволюции. Новосибирск, 1973. Т. 3. С.214–221.

[91] Пых Ю.А. Математический анализ модели культивирования микроводорослей на многокомпонентной среде. //Сборник трудов по агрономической физике. Вып. 38. Л., 1976. С.82–84.

[92] Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.

[93] Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. М.: Мир, 1969.

[94] Розоноэр Л.И., Седых Е.И. О механизмах эволюции самовоспроизводящихся систем // Автоматика и телемеханика. 1979. № 5. С.137–148.

[95] Рубин А.Б. Биофизика. Ч.1. М.: Наука, 1999.

[96] Сабаев Е.Ф. Системы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений и их приложения в динамике реакторов. М.: Атомиздат, 1980.

[97] Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.

[98] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1958.

[99] Тай М.Л. Динамика процессов самосборки: Учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2000.

[100] Шабанов Д.А. Опровергнута ли теория эволюции? (http://evolutio.narod.ru/shabanov04.htm)

[101] Шовен Р. От пчелы до гориллы. М.: Мир, 1965.

[102] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II. М.: Наука, 1970.

[103] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. М.: Наука, 1967.

[104] Фролов Ю.Г., Болик В.В. Физическая химия. М. Химия, 1993.

[105] Фукуканэ Х. Выпуклые структуры математической экономики: Пер. с япон. – М.: Мир, 1972.

[106] Цейтлин М.Л. Исследование по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969.

[107] Чернавский Д.С. Синергетика и информация. М.: УРСС, 2004.

[108] Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. М.: Мир, 1973.

[109] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

[110] Эткинс П. Порядок и беспорядок в природе. – М.: Мир, 1987.

[111] Юданов А.Ю. Конкуренция: теория и практика. М.: Акалис, 1996.

[112] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974

[113] Chekland P. From optimizing to learning a development of systems thinking for the 1990-s // J. Oper. Res. Soc. 1985. V 36. No. 9. P. 757 – 767.

[114] Cowan J.D. A statistical mechanics of nervous activity. Lectures on mathematics in the life sciences. 1970. V.2.

[115] Dasarathy B.V. Dynamics of a class of social interaction systems // Intern. J. Syst. Sci. 1974. V.5. N 4. P.329–333.

[116] Dasarathy B.V. On a generalized dynamic model of bistate social interaction process // Intern. J. Syst. Sci. 1974. V.5. P.499–506.

[117] Ewens W.Y. Mathematical Population Genetics. – Berlin: Springer-Verleg, 1979.

[118] Ferster H. von. Some remarks on changing populations// The kinetics of cellular proliferations. N.Y.: Ed. by Stolman. 1959. P. 382-407

[119] Fisher R.A. The genetical theory of natural selection. – New York, 1958.

[120] Freye H.A. Kompendium der Humanökologie. – Jena: Fisher, 1978.

[121] Gandolfo G. Mathematical methods and models in economic dynamics. Amsterdam: North-Holland Publ., 1971.

[122] Gorban A. Systems with inheritence: dynamics of distributions with conservation of support, natural selectio and finite-dimentional asymptotics [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/cond-mat/0405451, свободный.

[123] Haldane J.B.S. The Causes of Evolution. – Princeton Science Library: Princenton Uiversity Press, 1963.

[124] Holland J.H. Adaptation in natural and artificial systems: Ann. – Arbor. MI: The University of Michigan Press, 1975.

[125] Kerner E. A dynamical approach to chemical kinetics: mass-action laws as generalized // Bull. Math. Biophys. 1972. V.34. N 2. P.243–275.

[126] Kuzenkov O.A. Mathematical modeling for the process of “objective” criterion forming//VI International Congress on Mathematical Modeling. Book of abstracts. September 20-26, 2004. Nizhny Novgorod: University of Nizhny Novgorod, 2004. P. 97.

[127] Kuzenkov O. A., Ryabova E. A. Optimal Control of the System with “Objective” Criterion//VI International Congress on Mathematical Modeling. Book of abstracts. September 20-26, 2004. Nizhny Novgorod: University of Nizhny Novgorod, 2004. P. 99.

[128] Lotka A. Elements of physical biology. Baltimora: Williams and Wilkins, 1925.

[129] L’vov V.S. Wawe turbulence under parametric excitation applications to magnets. – Berlin, Heidelber: Springer, 1994.

[130] Mayr E. Animal Species and Evolution. – Cambrige. MA: Harvard University Press, 1963.

[131] Nagumo M. Uber die Lage der Intergralkurven gewohnlicer Differentilgleichungen // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1942. V.24. P.551–559.

[132] Oster G.F., Perelson A.S. Chemical reaction dynamics // Arch. Rat.Mech. and Analysis. 1974. V.55. N 3. P.230–274.

[133] Pareto V. Manuale d’economia politica. Milan. 1906.

[134] Vickers G. Freedom in a Rocking Boat. London: Allen Lane, 1970.

[135] Zakharov V.E., L’vov V.S., Falkovich G.E. Kolmogorov spectra of turbulence. – v.1. Wawe Turbulence. – Berlin: Springer, 1992.

Олег Анатольевич **Кузенков**
Елена Александровна Рябова
Климентина Руслановна Круподерова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ОТБОРА

Электронное учебно-методическое пособие

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.**