МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»**

Е.В. Круглов
Н.А. Мамаева
Е.А. Таланова

Некоторые приемы вычисления пределов

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института экономики и предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика» (бакалавриат).

Нижний Новгород
2018

УДК 517
ББК 22.161.1
К 84

К 84 Круглов Е.В., Мамаева Н.А., Таланова Е.А. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 30 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор П.Б. Болдыревский

Учебно-методическое пособие представляет собой руководство по курсу «Математический анализ» в части изучения теории пределов для студентов института экономики и предпринимательства ННГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 38.03.05 «Бизнес-информатика»

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С.В..

УДК 517
ББК 22.161.1

Содержание

Введение

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения, изучающих математику поучебной программе дисциплины «Математический анализ», составленной в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению «Бизнес-информатика». Пособие направлено на формирование компетенции ПК-18 «Способность использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования».

Учебное пособие посвящено практике вычисления пределов и содержит основные теоретические сведения: понятия, определения и теоремы, необходимые при вычислении пределов, а также примеры раскрытия неопределенностей.

Пособие также может быть использовано при изучении курса «Математический анализ» направления подготовки бакалавриата 38.03.01 «Экономика».

1. Последовательность как функция натурального аргумента. Предел числовой последовательности

Функцию натурального аргумента n, заданную на множестве натуральных чисел N, называют *числовой последовательностью* $y_n = f(n)$ и обозначают $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ называют членами последовательности.

Например, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ – это последовательность 1, $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ Все её члены больше нуля и уменьшаются с ростом n, подходят сколько угодно близко к нулю.

Еще пример $\{(-1)^n\}$. Члены этой последовательности чередуются, не приближаясь ни к какому числу: $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$.

Членами последовательности $\{2^n + 1\}$ являются числа $3, 5, 9, 17, \dots$ Видно, что с ростом n члены этой последовательности увеличиваются.

Анализируя приведенные примеры, видим, что в некоторых случаях с увеличением номера n члены последовательности приближаются к какому-то числу, в других этого явления не наблюдается. Так мы подошли к одному из основных понятий математического анализа – пределу числовой последовательности.

<u>Определение 1.1.</u> Число L (если оно существует) называется *пределом последовательности* $\{y_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что для всех y_n с номерами $n > N$ верно неравенство $|y_n - L| < \varepsilon$.

Предел последовательности обозначают: $L = \lim_{n\to\infty} y_n$. Говорят также, что последовательность стремится к пределу L.

Пример 1.1 Показать по определению, что $\lim_{n\to\infty} \frac{8n+3}{4n} = 2$.

Рассмотрим модуль разности $\left|\frac{8n+3}{4n} - 2\right| = \left|\frac{3}{4n}\right| = \frac{3}{4n}$. Покажем, что найдется такое число N, что $\frac{3}{4n} < \varepsilon$ при $n > N$.

Неравенство $\frac{3}{4n} < \varepsilon$ выполняется для $n > \frac{3}{4\varepsilon}$, поэтому в качестве N можно взять $E\left(\frac{3}{4n}\right) + 1$. Это означает, что число 2 является пределом последовательности $\left\{\frac{8n+3}{4n}\right\}$. Если возьмем $\varepsilon = \frac{1}{5}$, то $N = 4$, и неравенство будет выполняться при $n > 4$. Если возьмем $\varepsilon = \frac{1}{100}$, то $N = 76$, и неравенство будет выполняться при $n > 76$. Номер, начиная с которого будет выполняться неравенство $\frac{3}{4n} < \varepsilon$, зависит от выбора ε.

<u>Определение 1.2.</u> Последовательность $\{x_n\}$, стремящаяся к нулю, называется *бесконечно малой*.

Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ является бесконечно малой.

Определение 1.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если она для всех достаточно больших значений n становится и остается по абсолютной величине большей сколь угодно большого числа $E > 0$. В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Примером бесконечно большой последовательности является $\{2^n + 1\}$.

Теорема 1.1. Последовательность не может иметь более одного предела.

Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ предела не имеет, так как бесконечно много её членов накапливается как в окрестности -1, так и в окрестности 1.

Теоремы о пределах последовательности. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = B.$$

Тогда:

$\mathbf{1^0}$. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$\mathbf{2^0}$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = A \cdot B = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

В частности, $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = C \lim\limits_{n\to\infty} x_n = CA$, где $C = \text{const}$.

$\mathbf{3^0}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если $B \neq 0$.

2. Предел функции

Определение 2.1. Число L называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to a$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - L| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Символически данный факт записывают так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Определение 2.2. Число L называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число N такое, что для любого $x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$. Пишут:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Определение 2.3 Число L называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число N такое, что для любого $x < N$ выполняется неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$. Пишут:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Теорема 2.1. Предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$ существует тогда и только тогда, когда пределы функции $f(x)$ при $x \to -\infty$, при $x \to +\infty$ существуют и равны L.

Определение 2.4. Число L называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a *справа* (пишут $x \to a + 0$) , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x из интервала $a < x < a + \delta$ будет выполняться неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$. Пишут:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = L.$$

Определение 2.5 Число L называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a *слева* (пишут $x \to a - 0$) , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x из интервала $a - \delta < x < a$ будет выполняться неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$. Пишут:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = L.$$

Теорема 2.2. Функция $f(x)$ имеет предел L при $x \to a$ тогда и только тогда, когда существуют пределы $f(x)$ как справа, так и слева и они равны L.

Пример 2.1. $\lim_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} \neq \lim_{x \to -\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$, следовательно, $\lim_{x \to \infty} arctgx$ не существует.

Теорема 2.3. (о единственности предела). Функция $f(x)$ при $x \to a$ не может иметь более одного предела.

Определение 2.6. Функция α(x) называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если она имеет предел в точке a, и этот предел равен нулю.

Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, так как $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

<u>Определение 2.7.</u> Функция α(x) называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если она имеет предел в точке a, и этот предел равен ∞.

<u>Теорема 2.4.</u> Сумма конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

<u>Теорема 2.5.</u> Произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть величина бесконечно малая.

Пример 2.2. Доказать по определению, что $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-1}{10x+4} = \frac{1}{2}$.

При каких значениях x значения функции $f(x) = \frac{5x-1}{10x+4}$ будут отличаться от предельного меньше, чем на 0,01?

Задача состоит в том, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ найти такое N, чтобы из неравенства $|x| > N$ следовало $\left|\frac{5x-1}{10x+4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Рассмотрим модуль разности $|f(x) - L| = \left|\frac{5x-1}{10x+4} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{|10x+4|}$. Потребуем выполнения неравенства $\frac{3}{|10x+4|} < \varepsilon$. Оно выполняется, например, при $x > \frac{3}{10\varepsilon} - \frac{4}{3}$. Значит, если мы возьмем $N = \frac{3}{10\varepsilon} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$, то для $|x| > N$ получим $\frac{3}{|10x+4|} < \varepsilon$.

Для $\varepsilon = 0{,}01$ находим $N = \frac{3}{10\cdot 0{,}01} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 31$. То есть для $\varepsilon < 0{,}01$ из неравенства$|x| > 31$ следует $\left|\frac{5x-1}{10x+4} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}01$.

3. Некоторые методы и приемы вычисления пределов функции

Отыскание предела функции по определению – это довольно трудоемкий процесс. Поэтому на практике удобнее пользоваться следующими теоремами о пределах, которые могут быть доказанны с использованием определения предела.

Теорема 3.1 Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$имеют пределы при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,\ \lim_{x\to a} \varphi(x) = B,$$

то существует предел суммы этих функций, причем

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) + \varphi(x)\big) = A + B = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} \varphi(x)\,.$$

Теорема 3.2 Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$имеют пределы при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,\ \lim_{x\to a} \varphi(x) = B,$$

то существует предел произведения этих функций, причем

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot \varphi(x)\big) = A \cdot B = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \varphi(x)\,.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 3.3 Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы (соответственно A и B) при $x \to a$, причем $B \neq 0$, то существует предел их отношения

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}.$$

3.1. Непосредственное применение теорем о пределах

Пример 3.1.1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 7x + 5).$$

Применяя теоремы 3.1 и 3.2 о пределах, получаем

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 7x + 5) = 3\lim_{x\to 2} x \lim_{x\to 2} x - 7\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 - 7 \cdot 2 + 5 = 3.$$

Пример 3.1.2. Найти предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+6}{\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}+8}.$$

Пределы числителя и знаменателя существуют, и предел знаменателя не равен нулю. Тогда по теореме 3.3 о пределе частного получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+6}{\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}+8}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+6)}{\lim\limits_{x\to 1}(\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}+8)}=\frac{1^2-5\cdot 1+6}{1^2-6\cdot 1+8}=\frac{2}{3}.$$

Пример 3.1.3. Найти предел:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}+12}.$$

Пределы числителя и знаменателя существуют, и предел знаменателя не равен нулю. Тогда по теореме 3.3 о пределе частного получаем

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}+12}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(3-x)}{\lim\limits_{x\to 3}(\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}+12)}=\frac{0}{3}=0.$$

Функция $\frac{3-x}{\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}+12}$ при $x\to 3$ является бесконечно малой.

Пример 3.1.4. Найти предел:

$$\mathit{lim}_{x\to 4}\frac{x^2+1}{x^2-5x+4}.$$

В данном случае теорему о пределе частного применять нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. В числителе имеем ограниченную величину, отличную от нуля (равную 17). Если величина $\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+4$ при $x\to 4$ является бесконечно малой, то величина $\frac{1}{\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+4}$ является бесконечно большой. Тогда функцию под знаком предела можем записать как произведение ограниченной величины на бесконечно большую:

$$\mathit{lim}_{x\to 4}\frac{x^2+1}{x^2-5x+4}=\mathit{lim}_{x\to 4}(x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2-5x+4}=\infty.$$

Следовательно, функция $\frac{x^2+1}{x^2-5x+4}$ при $x\to 4$ является бесконечно большой.

3.2. Раскрытие неопределенностей

Нужно иметь в виду, что ∞ - это только символ для обозначения бесконечно большой величины. Он не обладает свойствами числа и в арифметических операциях не участвует. Поэтому для бесконечных пределов теоремы 3.1-3.3 неверны. В частности, пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = L \text{ и } \lim_{x\to a} \gamma(x) = 0.$$

Если $L = \infty$, то пределы разности $f(x) - \varphi(x)$, частного $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, произведения $\gamma(x) \cdot f(x)$ могут дать всё, что угодно, а могут и вовсе не существовать. Поэтому говорят, что они дают неопределенности соответственно видов $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$.

Если $L = 0$, то говорят, что предел частного $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ дает неопределенность $\frac{0}{0}$.

Различают 7 основных видов неопределенностей:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Приведем примеры возможных действий, чтобы избавиться от них и вычислить предел функции.

3.2.1 Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пример 3.2.1.1. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 2x + 1}.$$

Теорему о пределе частного применять нельзя, так как числитель и знаменатель дроби конечного предела не имеют. В этом случае говорят: имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для избавления от неопределенности вынесем за скобки в числителе и знаменателе дроби переменную в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-3x+2}{4x^2-2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(8-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}{x^2(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}=2.$$

Пример 3.2.1.2. Найти предел:

$$\mathop{lim}_{x\to\infty}\frac{6x^2-x^5+2}{4x^3+2x-1}.$$

Снова нельзя применять теорему о пределе частного, так как имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Вынесем за скобки в числителе и знаменателе дроби переменную в старшей степени:

$$\mathop{lim}_{x\to\infty}\frac{6x^2+x^5+2}{4x^3+2x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\mathop{lim}_{x\to\infty}\frac{x^5(\frac{6}{x^3}+1+\frac{2}{x^5})}{x^5(\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^5})}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Такой результат получился, так как степень числителя была больше степени знаменателя.

Пример 3.2.1.3. Найти предел:

$$\mathop{lim}_{x\to\infty}\frac{2x^2-x^3+5}{x^4-1}.$$

Теорема о пределе частного также не применима, так как имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Снова вынесем за скобки в числителе и знаменателе дроби переменную в старшей степени:

$$\mathop{lim}_{x\to\infty}\frac{2x^2-x^3+5}{x^4-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\mathop{lim}_{x\to\infty}\frac{x^4(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^4})}{x^4(1-\frac{1}{x^4})}=\frac{0}{1}=0.$$

Предел функции получился равным нулю, так как степень числителя была меньше степени знаменателя.

3.2.2. Неопределенность типа $\frac{0}{0}$

Пример 3.2.2.1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-9x}{x^3-3x^2}.$$

Нельзя применять теорему о пределе частного, так как предел знаменателя равен нулю. Кроме того, предел числителя также равен нулю. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы от неё избавиться, вынесем за скобки в числителе и знаменателе x в младшей степени. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-9x}{x^3-3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-9)}{x(x^2-3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-9}{x^2-3x}=\frac{9}{0}=\infty.$$

Пример 3.2.2.2. Найти предел:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}.$$

При решении данного примера применять теорему о пределе частного нельзя, так как предел не только знаменателя, но и числителя равен нулю. Получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

В этом случае предел можно вычислить разложением многочленов числителя и знаменателя на множители. Воспользуемся известной формулой:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2),$$

где x_1, x_2–корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

Получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x-10)}=\frac{2-3}{2-10}=\frac{1}{8}.$$

Пример 3.2.2.3. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}.$$

В данном случае для освобождения от неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1=\sqrt{0+1}+1=2.$$

Пример 3.2.2.4. Найти предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

Неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ здесь можно раскрыть, сделав замену переменной $x=z^6$, тогда $\sqrt{x}=z^3, \sqrt[3]{x}=z^2, x\to 1, z\to 1.$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-1)(z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{(z^2+z+1)}{(z+1)}=\frac{3}{2}.$$

Пределы функций, в которых участвуют тригонометрические выражения, обычно сводятся к *первому замечательному пределу*

$$\mathit{lim}_{x\to 0}\frac{\mathit{sin}\,x}{x}=1.$$

Также используют несколько его следствий:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1, \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1, \lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1, \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1\quad.$$

Пример 3.2.2.5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 6x}{x\sin x}.$$

Для избавления от неопределенности $\frac{0}{0}$ воспользуемся первым замечательным пределом и следствием из него:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 6x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(6\cdot\frac{tg6x}{6x}\cdot\frac{tg6x}{6x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 6\right)=36.$$

Пример 3.2.2.6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}.$$

Так как $1-\cos x=2sin^2\frac{x}{2}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{10}\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{10}\cdot 1=\frac{1}{10}.$$

3.2.3. Неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$

Неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$ раскрываются с помощью приведения их к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 3.2.3.1 Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right).$$

В этом примере получаем неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Приведем выражение под знаком предела к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Пример 3.2.3.2. Найти предел

$$\lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+3x}).$$

Имеем неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Чтобы избавиться от неё, домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+3x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+3x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2-(x^2+3x))}{\left(x+\sqrt{x^2+3x}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x}{\left(x+\sqrt{x^2+3x}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Для устранения неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ разделим числитель и знаменатель полученной дроби на x в старшей степени:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x}{\left(x+\sqrt{x^2+3x}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3}{\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right)}=\frac{-3}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{3}{2}.$$

Пример 3.2.3.3. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$ сведем к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,tg\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Сделаем замену переменных $z = 1 - x$. Тогда $z \to 0, ctg\frac{\pi x}{2} = tg\frac{\pi z}{2}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{tg\frac{\pi z}{2}} = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{\pi z}{2}\cdot\frac{2}{\pi}}{tg\frac{\pi z}{2}} = \frac{2}{\pi}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\pi z}{2}}{tg\frac{\pi z}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

3.2.4. Неопределенность 1^{∞}

Неопределенность вида 1^{∞} часто сводят ко ***второму замечательному пределу.***

Предел функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ при $x \to \infty$ существует и равен числу e. Число e имеет значение $e \approx 2{,}71828\ldots$ и является основанием системы натуральных логарифмов, то есть

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \qquad (1)$$

Этот предел называют вторым замечательным пределом.

Если в (1) положить $\frac{1}{x} = \alpha$, то при $x \to \infty$ получим $\alpha \to 0$, и тогда (1) примет вид:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Приведем здесь ещё несколько следствий второго замечательного предела, полезных для отыскания пределов функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$ и, в частности $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a\,(a > 0, a \neq 1)$ и, в частности $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu$ и, в частности при $\mu = \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = 1.$

4. Полагая

$\frac{a}{x}=\frac{1}{y}$, найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = = \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{aby} = \lim\limits_{y\to 0}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{ab} = e^{ab}$.

Пример 3.2.4.1. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}, a = const, a \neq 0.$$

При подстановке $x\to\infty$ получаем неопределенность типа 1^{∞}. Поэтому выражение под знаком предела преобразуем так, чтобы задача сводилась ко второму замечательному пределу.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{xa}{ax}x} = e^{a}, \text{так как}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \text{где } \frac{a}{x}=\alpha,$$

$$\text{а показатель степени } \frac{a}{x}\cdot x = a.$$

Пример 3.2.4.2. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+5}\right)^{5x+3}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+5}\right)^{5x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+5)-9}{x+5}\right)^{5x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+5}+\frac{-9}{x+5}\right)^{5x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-9}{x+5}\right)^{5x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-9}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{(-9)}\cdot\frac{(-9)}{x+5}\cdot(5x+3)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45x-27}{x+5}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45-\frac{27}{x}}{1+\frac{5}{x}}} = e^{-45}.$$

Пример 3.2.4.3. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}.$$

Числитель и знаменатель данной дроби стремятся к нулю. Преобразуем выражение в пределе и применим следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{e^x}=2.$$

Пример 3.2.4.4. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{sin^2x}}.$$

Здесь имеем неопределенность 1^∞.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{sin^2x}}= \lim_{x\to 0}(1+\cos 2x-1)^{\frac{1}{sin^2x}}==\lim_{x\to 0}\left[(1+(-2sin^2x))^{\frac{-1}{2sin^2x}}\right]^{\frac{-2sin^2x}{sin^2x}}$$
$$=\frac{1}{e^2}.$$

3.2.5. Переход к эквивалентным бесконечно малым

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые величины при $x\to a$, где a конечное число или бесконечность.

1. Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является бесконечно

малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт обозначают $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

2. Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=m\ (m\neq 0)$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$являются

бесконечно малыми одного и того же порядка. В частности,

если $m=1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными. Запись $\alpha\sim\beta$ означает, что α и β - эквивалентные бесконечно малые.

3. Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то говорят, что $\beta(x)$ является бесконечно

малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$.

4. Если α^k и β - бесконечно малые одного и того же порядка, причем $k > 0$, то говорят, что бесконечно малая β имеет порядок k по сравнению с α.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых:

1^0. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с сомножителями.

2^0. Бесконечно малые α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с α и β.

3^0. Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой.

При отыскании пределов будет полезна информация об эквивалентности следующих бесконечно малых величин при $x \to 0$:

$\sin x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$tgx \sim x$	$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$
$arcsinx \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$arctgx \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Покажем, что в некоторых случаях использование эквивалентности бесконечно малых величин значительно упрощает нахождение предела функции и приведем несколько примеров.

Пример 3.2.5.1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin\, 5x}{tg\, 8x}.$$

Так как при $x \to 0$, $sin\, 5x \sim 5x$, $tg 8x \sim 8x$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin\, 5x}{tg\, 8x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{8x} = \frac{5}{8}.$$

Пример 3.2.5.2. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}.$$

При $x \to 0$, $1-\cos x \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{8x^4} = \frac{1}{8}.$$

Пример 3.2.5.3. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x - arcsinx}{2x + arctgx}.$$

Имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Пользуясь тем, что при $x \to 0$ $arcsinx \sim x$ и $arctgx \sim x$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x - arcsinx}{2x + arctgx} = \lim_{x\to 0}\frac{3x - x}{2x + x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 3.2.5.4. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{6x}.$$

Принимая во внимание, что $3x \to 0$ при $x \to 0$, можем заменить $\ln(1+3x)$ на эквивалентный ему $3x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}.$$

3.3 Вычисление пределов с помощью правила Лопиталя

Правилами Лопиталя обычно называют следующие теоремы.

Теорема 3.3.1 (неопределенность $\frac{0}{0}$). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны и имеют производные* $f'(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *в интервале* (a, b), *причем* $\varphi'(x) \neq 0$ *и*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = 0, \lim_{x\to a+0} \varphi(x) = 0.$$

Тогда, если существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ *при* $x \to a + 0$, *то существует предел отношения и самих функций, и эти пределы равны:*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема 3.3.2 (неопределенность $\frac{0}{0}$ при $x \to +\infty$). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны и имеют производные* $f'(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *в интервале* $(\alpha, +\infty)$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0$ *и*

$$\mathop{lim}_{x \to +\infty} f(x) = 0, \mathop{lim}_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Тогда, если существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ *при* $x \to +\infty$, *то существует предел отношения и самих функций, и эти пределы равны:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Аналогично при $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Теорема 3.3.3 (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть при* $x \to a + 0$ *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *являются бесконечно большими. Тогда при выполнении остальных условий теоремы 1 существует*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Аналогично для случаев $x \to a - 0$, $x \to a$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Данные теоремы, вообще говоря, необратимы.

Пример 3.3.1. Найти

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}.$$

При $x \to 1$ числитель и знаменатель стремятся к нулю. Найдем производные числителя и знаменателя и воспользуемся теоремой 1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Пример 3.3.2. Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}.$$

При решении этого примера придется применить теорему 1 дважды, так как после первого применения числитель и знаменатель дроби всё ещё будут стремиться к нулю.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{6}{4}=1{,}5.$$

Пример 3.3.3. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}.$$

Чтобы избавиться от неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, здесь также придется применить правило Лопиталя (теорему 3) трижды.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}}{e^x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}=0.$$

4. Разные задачи на вычисление пределов

Пример 4.1. Найти

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x.$$

Здесь при $x\to 0$ получаем неопределенность 0^0. Обозначим $y=(\sin x)^x$ и прологарифмируем её:

$$\ln y = x\ln\sin x=\frac{\ln\sin x}{1/x}.$$

Вычислим предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталя, так как получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1/_x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x/_{\sin x}}{-1/_{x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

Пример 4.2. Найти

$$\lim_{x\to \pi/_2}(tgx)^{2\cos x}.$$

Это неопределенность вида ∞^0. Снова положим $(tgx)^{2\cos x} = y$ и прологарифмируем её: $\ln y = 2\cos x \ln tgx = \frac{2\ln tgx}{1/_{\cos x}}$. Применяя правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, получаем:

$$\lim_{x\to \pi/_2}\ln y = \lim_{x\to \pi/_2}\frac{2\ln tgx}{1/_{\cos x}} = 2\lim_{x\to \pi/_2}\frac{\ln tgx}{1/_{\cos x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2\lim_{x\to \pi/_2}\frac{1/_{\cos x}}{tg^2x} =$$

$$= 2\lim_{x\to \pi/_2}\frac{\cos x}{sin^2x} = 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to \pi/_2} y = e^0 = 1.$

Пример 4.3. Найти

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+10}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}.$$

Данная функция при $x\to +\infty$ является отношением двух бесконечно больших функций (неопределенность вида $\frac{+\infty}{+\infty}$). Разделив числитель и знаменатель на x, получим:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+10}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{10}{x^2}}+1}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1} = 1.$$

Пример 4.4. Найти $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+10}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$.

При $x\to-\infty$ числитель и знаменатель представляют собой неопределенности вида $\infty-\infty$. Чтобы найти предел, сделаем замену переменной $z=-x$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+10}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\sqrt{z^2+10}-z}{\sqrt{z^2-2}-z}$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{z^2+10}-z\right)\left(\sqrt{z^2+10}+z\right)(\sqrt{z^2-2}+z)}{(\sqrt{z^2-2}-z)(\sqrt{z^2-2}+z)\left(\sqrt{z^2+10}+z\right)}$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\frac{10(\sqrt{1-\frac{2}{z^2}}+1)}{-2(\sqrt{1+\frac{10}{z^2}}+1)}=-5.$$

5. Задачи для самостоятельной работы

Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. 1) $\lim_{x\to x_0}\frac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+3}$; $a)$ $x_0=3$; б) $x_0=-1$; в)$x_0=\infty$.

   2) $\lim_{x\to4}\frac{4-x}{\sqrt{6x+1}-5}$; 3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{tg3x}$.

2. 1) $\lim_{x\to x_0}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-5x-2}$; $a)$ $x_0=1$; б) $x_0=2$; в)$x_0=\infty$.

   2) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{2-\sqrt{x}}$; 3) $\lim_{x\to0}\frac{3x\cos 4x}{\sin2x}$.

3. 1) $\lim_{x\to x_0}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+x-4}$; $a)$ $x_0=1$; б) $x_0=2$; в)$x_0=\infty$.

   2) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}}{x^2+3x}$; 3) $\lim_{x\to0}\frac{2x\, tg\, x}{\sin^2x}$.

4. 1) $\lim_{x\to x_0}\frac{-x^2-4x+5}{2x^2+15x+25}$; $a)$ $x_0=1$; б) $x_0=-5$; в)$x_0=\infty$.

$$2)\ \lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin 3x\cdot tg5x}.$$

$$5.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{5x^2-6x+1}{2x^2+x-3};\ a)\ x_0=1;\ б)\ x_0=2;\ в) x_0=\infty.$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{2+x}}{x-x^2};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{tg\,2x}{\sin 7x}.$$

$$6.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{2x^2+x-1}{4x^2+7x+3};\ a)\ x_0=1;\ б)\ x_0=-1;\ в) x_0=\infty.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}}{7x};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x\cos 2x}.$$

$$7.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{3+2x-x^2}{x^2-4x+3};\ a)\ x_0=1;\ б)\ x_0=3;\ в) x_0=\infty.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{5x^2+x};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{sin^2 9x}{4xtg7x}.$$

$$8.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-9x+9};\ a)\ x_0=2;\ б)\ x_0=3;\ в) x_0=\infty.$$

$$2)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{sin^2 9x}{x^2}.$$

$$9.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{2x^2+x-3}{-4x^2+x+3};\ a)\ x_0=2;\ б)\ x_0=1;\ в) x_0=\infty.$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{3x-3};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 8x}.$$

$$10.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-2x-8}{5x-x^2-4};\ a)\ x_0=1;\ б)\ x_0=4;\ в) x_0=\infty.$$

$$2)\ \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{4x}-x};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{5x\cos 6x}{sin\,3x}.$$

$$11.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-7x+10}{3x^2-2x-8};\ a)\ x_0=-1;\ б)\ x_0=2;\ в) x_0=\infty.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{3x\cos 2x}{tg4x}.$$

$$12.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2};\ a)\ x_0=1;\ б)\ x_0=-2;\ в) x_0=\infty.$$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2xtg5x}{sin^2 3x}$.

13. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; $a)$ $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в)$x_0 = \infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x-2}-2}{2x-6}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{sin^2 2x \cdot \cos 3x}$.

14. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2+5x+2}{2x^2+x-1}$; $a)$ $x_0 = -1$; б) $x_0 = 2$; в)$x_0 = \infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{\sqrt{1+x}-2}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 10x}{6x \cos 8x}$.

15. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$; $a)$ $x_0 = 1$; б) $x_0 = 3$; в)$x_0 = \infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3xtg5x}{sin^2 2x}$.

16. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$; $a)$ $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в)$x_0 = \infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{3x-12}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x \, tg7x}{x^2}$.

17. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2+4x+1}{3x^2+x-2}$; $a)$ $x_0 = -1$; б) $x_0 = 2$; в)$x_0 = \infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{5x+5}-5}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin 9x}{tg5x}$.

18. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-1}{3x^2+x-2}$; $a)$ $x_0 = -1$; б) $x_0 = -2$; в)$x_0 = \infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{4-x}{\sqrt{6x+1}-5}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x \cos 4x}{\sin 7x}$.

19. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$; $a)$ $x_0 = 1$; б) $x_0 = -3$; в)$x_0 = \infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{2x^2}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6xtg2x}{sin^2 3x}$.

20. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-x-12}{x^2-16}$; $a)$ $x_0 = 3$; б) $x_0 = 4$; в)$x_0 = \infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+25}-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\mathrm{tg}3\mathrm{x}\cdot\sin 7x}$.

21. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-7x+10}{3x^2-2x-8}$; $a)\ x_0=-1$; б) $x_0=2$; в)$x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{sin^2 2x\cdot\cos 3x}$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; $a)\ x_0=1$; б) $x_0=-2$; в)$x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{2x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{6x\cos 8x}$.

23. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; $a)\ x_0=1$; б) $x_0=2$; в)$x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{1+x}-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3xtg5x}{sin^2 2x}$.

24. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+5x+2}{2x^2+x-1}$; $a)\ x_0=-1$; б) $x_0=2$; в)$x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\,tg7x}{x^2}$.

25. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-2}$; $a)\ x_0=1$; б) $x_0=3$; в)$x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{3x-12}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 9x}{tg5x}$.

26. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$; $a)\ x_0=1$; б) $x_0=2$; в)$x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5x+5}-5}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cos 4x}{\sin 7x}$.

27. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2+x-2}$; $a)\ x_0=-1$; б) $x_0=2$; в)$x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{\sqrt{6x+1}-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6xtg2x}{sin^2 3x}$.

28. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-1}{3x^2+x-2}$; $a)\ x_0=-1$; б) $x_0=-2$; в)$x_0=\infty$.

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{2x^2};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\mathrm{tg}3\mathrm{x}\cdot\sin 7x}.$$

$$29.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{x^2+5x+6}{x^2-x-12};\ а)\ x_0=1;\ б)\ x_0=-3;\ в)\ x_0=\infty.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sqrt{x^2+25}-5};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{3x\cos 2x}{tg4x}.$$

$$30.\ 1)\ \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x-12}{x^2-16};\ а)\ x_0=3;\ б)\ x_0=4;\ в)\ x_0=\infty;$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}};\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{2xtg5x}{sin^2 3x}.$$

Разные задачи на вычисление пределов:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1};\qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{9+2x}};$$

$$3)\ \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-5x}\right);\qquad 4)\ \lim_{x\to -1}\frac{\sin(1+x)}{1-x^2};$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x};\qquad 6)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{3}{1-x^3}\right);$$

$$7)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{x+1};\qquad 8)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)};$$

$$9)\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{x+1};\qquad 10)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x};$$

$$11)\ \lim_{x\to 0}\frac{4^{2x}-1}{x};\qquad 12)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[6]{5x+1}-1};$$

$$13)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{3x};\qquad 14)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x};$$

$$15)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{1-2x};\qquad 16)\ \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1};$$

$$17)\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3};\qquad 18)\ \lim_{x\to \pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx;$$

$$19)\ \lim_{y\to\pi}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{y}}{\sqrt{\cos y+1}};\qquad 20)\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x+2}{3x-1}\right)^{2x+1}.$$

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание 22-е, переработанное.- СПб.: Изд-во «Профессия», 2001. – 432с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. Издание 17-е стереотипное. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1966. – 424 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. Издание 4-е, испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 304 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.1. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1970. – 590 с.
5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Учеб. пособие / Под ред. Л.Д.Кудрявцева. Издание 2-е, переработанное. – М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 496 с.
6. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Издание 2-е, испр. и доп. – Минск: Изд-во «Вышэйшая школа», 1969. – 454 с.
7. Солдатов М.А., Круглова С.С. Математический анализ функции одного переменного: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. – 309 с.
8. Тарасова Н.А. Высшая математика для агроинженерных специальностей в примерах и задачах: учебное пособие. – Нижегородская гос.с.-х. академия. – Н.Новгород, 2007. – 197 с.

Евгений Валентинович **Круглов**
Надежда Анатольевна **Мамаева**
Елена Анатольевна **Таланова**

НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.