МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»**

Е.М. Макаров

Линейные и аффинные пространства в компьютерной геометрии

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика»,
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Нижний Новгород
2019

УДК 514.142.2
ББК 22.151.5
М15

М15 Макаров Е.М. ЛИНЕЙНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. — 36 с.

Рецензент:
доцент кафедры прикладной математики ИИТММ к.ф.-м.н. **О.Е. Галкин**

Данное учебно-методическое пособие напоминает и систематизирует факты о линейных и аффинных пространствах, которые активно используются при изучении курса «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование». Пособие содержит описание общей теории систем координат, основные факты о линейных векторных и аффинных точечных пространствах и отображениях в них, сведения об однородных координатах, аффинных (барицентрических) комбинациях точек, а также способы нахождения матриц отображений, осуществляющих преобразование мировых координат в экранные. Каждая из этих тем сопровождается упражнениями.

Пособие предназначено для поддержки дисциплины «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование», читаемой студентам третьего курса Института информационных технологий, математики и механики ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки «Математика» и «Математика и компьютерные науки».

УДК 514.142.2
ББК 22.151.5

Содержание

1. Обобщенные системы координат

1.1. Системы координат

В геометрическом моделировании широко используются преобразования координат, связанные с переходом из одной системы координат в другую, а также с отображениями пространства. В линейных векторных пространствах такие преобразования координат описываются матрицами перехода от одного базиса к другому и матрицами отображений, чьи свойства изучаются в курсах аналитической геометрии и линейной алгебры.

Однако многие из этих свойств верны не только для систем координат, задаваемых базисами в векторных пространствах или реперами в аффинных пространствах, но и в более общих случаях. Так, напомним, что метрическое пространство M называется n-мерным многообразием, если каждая его точка содержится в окрестности U, гомеоморфной некоторой области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ [3, с. 97]. Гомеоморфизм $\varphi : U \to D$ можно рассматривать как локальную систему координат в окрестности U, и описываемые в этом разделе факты применимы к таким системам координат. На самом деле, эти утверждения еще более общие, так как не требуют, чтобы M было метрическим пространством, а отображение φ было гомеоморфизмом.

Определение 1.1. Слово «отображение» будем рассматривать как синоним слова «функция». Преобразование — это взаимно-однозначное отображение. Через id_U будем обозначать тождественное отображение на множестве U, опуская индекс U, если он ясен из контекста.

Композиции будем обозначать следующим образом.

$$(f \circ g)(x) = (g; f)(x) = f(g(x))$$

Определение 1.2. Пусть U — произвольное непустое множество, называемое в дальнейшем пространством. Элементы U будем называть точками. (В большинстве приложений U будет линейным векторным или аффинным точечным пространством.) Пусть D будет непустым подмножеством $\mathbb{R}^n$ для некоторого n. Биекция $S : D \to U$ называется системой координат на U. Будем называть $S^{-1}(P)$ координатами точки P и обозначать их через $[P]S$.

В более общем случае D не обязано быть подмножеством $\mathbb{R}^n$. Например, в случае проективного пространства в качестве D можно взять множество ненулевых кортежей действительных чисел, определенных с точностью до ненулевого множителя.

Замечание 1.3. В отличие от координатных функций φ, являющихся частью определения многообразия и отображающих пространство M в $\mathbb{R}^n$, система координат S в определении 1.2 осуществляет отображение в обратном направлении: из $\mathbb{R}^n$ в U. Поскольку S является биекцией и, таким образом, обладает единственным обратным, направление S не очень важно. Такой выбор оказывается более удобным, когда в качестве S рассматривается функция, не являющаяся ни инъекцией, ни сюръекцией. Так, в векторном пространстве U можно рассмотреть конечную линейно зависимую систему векторов $(v_1, \ldots, v_n)$, линейная оболочка которой не совпадает со всем пространством. Эта система определяют функцию $T(x_1, \ldots, x_n) = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ из $\mathbb{R}^n$ в U. У каждого образа T есть бесконечное множество прообразов, и T не является сюръекцией, поэтому T не имеет обратной. Тем не менее описываемая ниже теория применима и к таким ситуациям.

Еще одно отличие от понятия многообразия, где каждая локальная система координат определена только на своей карте, состоит в том, что мы будем рассматривать «глобальную» систему координат, то есть функцию, осуществляющую биекцию D на все множество U.

Определение 1.4. Пусть $f : U \to U$, а $S, S' : D \to U$ — две системы координат. Будем говорить, что f сохраняет координаты по отношению к S и S', если

$$[P]S = [f(P)]S' \tag{1}$$

для каждой точки $P \in U$.

Это же условие можно записать в виде $S^{-1} = (S')^{-1} \circ f$. Беря композицию обеих частей с S' слева и S справа, получим

$$S' = f \circ S. \tag{2}$$

Функции f, S и S', удовлетворяющие (2), удобно изобразить в виде диаграммы.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] & & U \\ & D \arrow[ul, "S"] \arrow[ur, "S'"'] & \end{tikzcd}$$

Равенство (2) означает, что диаграмма *коммутативна*, то есть любые перемещения вдоль стрелкок с общим началом и концом дают одно и то же отображение. Заметим, что (2) влечет $f = S' \circ S^{-1}$. В частности, функции, сохраняющие координаты по отношению к двум системам координат, являются биекциями.

Определение 1.5. В случае, если f сохраняет координаты по отношению к S и S', будем обозначать S' через $f(S)$, а S — через $f^{-1}(S')$.

Согласно (2), система координат $f(S)$ равна $f \circ S$. Еще одна причина для такого обозначения состоит в том, что в векторных пространствах базис, задающий $f(S)$, состоит из образом векторов базиса, задающего S.

Утверждение 1.6. Если f сохраняет координаты по отношению к S и S', то для любой точки $P \in U$ имеет место равенство

$$[P](f^{-1}(S')) = [f(P)]S'. \tag{3}$$

Этот факт часто используется в компьютерной графике: вместо того, чтобы применять преобразование f к точке, можно применить обратное преобразование к системе координат, и координаты точек в обоих случаях будут одинаковы. Конечно, равенство (3) является всего лишь лишь другой формулировкой (1) в силу того, что $S = f^{-1}(S')$, то есть тавтологией, которая имеет место благодаря правильному выбору соотношения между S, S' и f.

Определение 1.7. Пусть $S, S' : D \to U$ — две системы координат. Функцией перехода от S к S' называется отображение $C^S_{S'}$, если диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & U & \\
D \arrow[ur, "S"] & & D \arrow[ul, "S'"'] \arrow[ll, "C^S_{S'}"]
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть если

$$S' = S \circ C^S_{S'}. \tag{4}$$

Функция перехода является обобщением преобразования координат, задаваемого матрицей перехода в векторных пространствах. Функция $C^S_{S'}$ переводит координаты точки в S' в координаты той же точки в S. Отметим, что $C^S_{S'} = S^{-1} \circ S'$ является биекцией и единственна.

Беря композицию обеих частей (4) с S^{-1} слева и $(S')^{-1}$ справа, получим $S^{-1} = C^S_{S'} \circ (S')^{-1}$, или

$$[P]S = C^S_{S'}([P]S'). \tag{5}$$

Замечание 1.8. В обозначении $[P]S$ система координат S играет роль, аналогичную роли единиц измерения в физике. По аналогии с такими уравнениями, как

$$836800\,\text{Дж} = 4184\,\frac{\text{Дж}}{\text{ккал}} \cdot 200\,\text{ккал},$$

формулу (5) можно рассматривать как переход от одних единиц к другим, где $C^S_{S'}$ выступает в роли коэффициента пропорциональности.

Утверждение 1.9. Пусть S, S' и S'' являются системами координат на U.

1. $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''} = C^S_{S''}$.
2. $(C^S_{S'})^{-1} = C^{S'}_S$.
3. $C^S_S = \mathrm{id}_D$.

Доказательство. В пункте 1 нужно показать коммутативность внешнего треугольника следующей диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
 & U & \\
D \arrow[ur, "S"] & D \arrow[u, "S'"] \arrow[l, "C^S_{S'}"] & D \arrow[ul, "S''"'] \arrow[l, "C^{S'}_{S''}"]
\end{tikzcd}$$

Это вытекает из коммутативности маленьких треугольников.

Алгебраически то же доказательство можно провести следующим образом. По условию

$$S' = S \circ C^S_{S'} \tag{6}$$
$$S'' = S' \circ C^{S'}_{S''} \tag{7}$$

Следовательно,

$$S \circ C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''} \overset{(6)}{=} S' \circ C^{S'}_{S''} \overset{(7)}{=} S'',$$

что и требовалось доказать. Смысл этого рассуждения простой: $C^{S'}_{S''}$ переводит координаты любой точки P в S'' в ее же координаты в S', а $C^S_{S'}$ в свою очередь переводит их в координаты P в S. Значит, $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''}$ удовлетворяет определению функции перехода от S к S'' и совпадает с ней в силу единственности.

Пункт 2 доказывается применением $(C^S_{S'})^{-1}$ справа к обеим частям равенства $S' = S \circ C^S_{S'}$ и сравнением результата с $S' \circ C^{S'}_S = S$. Справедливость пункта 3 очевидна. $\square$

Определение 1.10. Пусть S — система координат на пространстве U. Координатной функцией отображения $f : U \to U$ в S называется отображение $[f]S : D \to D$, которое делает следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & U \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[r, "{[f]S}"'] & D \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

Говоря неформально, $[f]S$ осуществляет на уровне координат то же отображение, что f делает на уровне точек пространства. С точки зрения координат точек определение 1.10 записывается следующим образом.

$$([f]S)([P]S) = [f(P)]S$$

Равенства $[f]S = S^{-1} \circ f \circ S$ и $f = S \circ [f]S \circ S^{-1}$ показывают, что f и $[f]S$ единственным образом восстанавливаются друг по другу, даже если эти функции не являются биекциями.

Между функциями перехода и координатными функциями существует тесная связь.

Утверждение 1.11. Если $f(S) = S'$, то $[f]S = C^S_{S'}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & U \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[ur, "S'"] \arrow[r, "C^S_{S'}"'] & D \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

По условию треугольники являются коммутативными, поэтому квадрат также коммутативен. Следовательно, $C^S_{S'}$ удовлетворяет определению функции $[f]S$ и совпадает с ней в силу ее единственности.

Алгебраически это можно записать так. По условию $S; f = S'$, так как $f(S) = S'$, и $C^S_{S'}; S = S'$ по определению $C^S_{S'}$, откуда $S; f = S' = C^S_{S'}; S$. $\square$

Смысл данного рассуждения снова прост: f переводит точку P с некоторыми координатами в S в точку $f(P)$ с теми же координатами, но в S', а функция перехода $C^S_{S'}$ переводит их в координаты той же точки $f(P)$ в S. То есть $C^S_{S'}$ исполняет роль координатной функции $[f]S$.

Утверждение 1.12.

1. $[f \circ g]S = ([f]S) \circ ([g]S)$.
2. $[\mathrm{id}_U]S = \mathrm{id}_D$.
3. Если f — преобразование, то $[f^{-1}]S = ([f]S)^{-1}$.

Доказательство. Пункт 1 доказывается следующей диаграммой.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g"] & U \arrow[r, "f"] & U \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[r, "{[g]S}"'] & D \arrow[u, "S"'] \arrow[r, "{[f]S}"'] & D \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

По условию квадраты коммутативны, следовательно, весь прямоугольник также коммутативен. Пункт 3 получается рассмотрением обратного преобразования к $f \circ S = S \circ [f]S$ и взятием композиции с S слева и справа. $\square$

1.2. Координатная функция в другой системе координат

Следующий факт важен для построения матрицы отображения в другом базисе, однако он часто приводится без обоснования в учебниках компьютерной графики.

Теорема 1.13. Рассмотрим отображение $f : U \to U$ и системы координат $S, S' : D \to U$ с функцией перехода $C = C^S_{S'}$. Пусть $g : U \to U$ будет преобразованием, сохраняющим координаты по отношению к S и S', а $h : U \to U$ будет таким отображением, что $[h]S' = [f]S$. Тогда $f = g^{-1} \circ h \circ g$.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g"] & U \arrow[r, "h"] & U \arrow[r, "g^{-1}"] & U \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[ur, "S'"'] \arrow[rrr, "{[h]S'}"'] & & & D \arrow[u, "S"'] \arrow[ul, "S'"]
\end{tikzcd}$$

На диаграмме треугольники коммутативны в силу определения g, а трапеция — по определению $[h]S'$. Отсюда следует коммутативность прямоугольника. Но из $[f]S = [h]S'$ и того факта, что f единственным образом восстанавливается по $[f]S$, следует заключение теоремы.

Более подробно доказательство можно записать так. Равенство

$$S' = S; g \tag{8}$$

имеет место, так как по предположению g сохраняет координаты по отношению к S и S'. Беря композицию обеих частей с g^{-1} справа, получаем

$$S'; g^{-1} = S. \tag{9}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
S; g; h; g^{-1} &= S'; h; g^{-1} = && \text{по (8)}\\
&= [h]S'; S'; g^{-1} = && \text{по определению } [h]S'\\
&= [h]S'; S = && \text{по (9)}\\
&= [f]S; S && \text{по определению } h.
\end{aligned}$$

Значит, $g^{-1} \circ h \circ g$ имеет координатную функцию $[f]S$ и в силу единственности совпадает с f. $\square$

Теорему 1.13 можно сформулировать и доказать на уровне координатных функций.

Теорема 1.14. В условиях теоремы 1.13 обозначим $A = [f]S$ и $A' = [f]S'$. Тогда $A' = C^{-1} \circ A \circ C$.

Доказательство содержится в следующей диаграмме.

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[r, "f"] & U & \\
D \arrow[ur, "S'"] \arrow[r, "C"'] & D \arrow[u, "S"'] \arrow[r, "A"'] & D \arrow[u, "S"'] \arrow[r, "C^{-1}"'] & D \arrow[ul, "S'"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Это доказательство подчеркивает основную идею формулы $A' = C^{-1} \circ A \circ C$: для вычисления координат образа точки P координаты самой P в S' временно преобразуются в координаты той же точки в S. Затем A отображает их в координаты $f(P)$ в S, которые C^{-1} затем переводит в координаты $f(P)$ в S'.

1.3. Отображения между разными пространствами

Понятие отображения, сохраняющего координаты, легко обобщается на случай, когда область определения и область значения отображения являются разными пространствами. Также легко обобщить понятие координатной функции. Однако когда область определения и область значений отображения не совпадают, координатная функция должна быть определена по отношению к двум систем координат, а не одной, как раньше.

Определение 1.15. Пусть f — отображение из U в U', а $S : D \to U$ и $S' : D' \to U'$ — системы координат. Координатной функцией f по отношению к S и S' называется функция $[f]_S^{S'} : D \to D'$, которая делает следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & U' \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[r, "{[f]_S^{S'}}"'] & D' \arrow[u, "S'"']
\end{tikzcd}$$

Утверждение 1.16. Пусть $f : U \to U'$ сохраняет координаты относительно $S : D \to U$ и $S'' : D \to U'$ и пусть $S' : D \to U'$ — еще одна система координат. Тогда $[f]_S^{S'} = C_{S''}^{S'}$.

Доказательство содержится в следующей диаграмме.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & U' \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[ur, "S''"] \arrow[r, "C_{S''}^{S'}"'] & D \arrow[u, "S'"']
\end{tikzcd}$$

□

Утверждение 1.12 имеет следующее обобщение.

Утверждение 1.17.

1. $[f \circ g]_S^{S''} = ([f]_{S'}^{S''}) \circ ([g]_S^{S'})$.
2. $[\mathrm{id}_U]_S^{S'} = C_S^{S'}$.
3. Если f — преобразование, то $[f^{-1}]_S^{S'} = ([f]_{S'}^{S})^{-1}$.

Доказательство. Пункты 1 и 3 доказываются, как в утверждении 1.12, а пункт 2 можно рассматривать как частный случай утверждения 1.16, где $f = \mathrm{id}$ и $S'' = S$. $\square$

Упражнения

1.1. Докажите, что из $f(S) = S'$ следует $[f]S = [f]S'$.

1.2. Используя выражение функции перехода через координатную функцию тождественного отображения, а также свойство композиции координатных функций (утверждение 1.17), дайте другое доказательство теоремы 1.14.

1.3. Пусть $f : U \to U$ — преобразование произвольного пространства U, а S, S_1 и S_2 — системы координат на U. Пусть также $f(S_1) = S_2$, $C_1 = C^S_{S_1}$ и $C_2 = C^S_{S_2}$. Докажите, что $[f]S = C_2 \circ C_1^{-1}$, а $[f]S_1 = [f]S_2 = C_1^{-1} \circ C_2$.

1.4. Пусть $f_1, f_2 : U \to U$ — преобразования произвольного пространства U, а S_1 и S_2 — системы координат на U, причем $f_1(S_1) = S_2$. Докажите, что $[f_2 \circ f_1]S_1 = [f_1 \circ f_2]S_2$.

1.5. Утверждения 1.11 и 1.16 позволяют выразить координатную функцию отображения через функцию перехода. К сожалению, эти утверждения применимы только к преобразованиям, так как функции, сохраняющие координаты по отношению к двум системам координат, являются биекциями.

Как отмечалось в замечании 1.3, в линейной алгебре имеет смысл рассматривать линейные комбинации не только базисов, но и произвольных конечных систем векторов. При этом отображение набора коэффициентов в линейную комбинацию в общем случае не будет биекцией. Поэтому определим *псевдосистему* координат на пространстве U как произвольное отображение $T : D \to U$, где $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Определите, что значит, что отображение f сохраняет координаты по отношению к системе координат S и псевдосистеме координат T. Определите функцию перехода от S к T. Докажите аналог утверждения 1.16 для отображения, сохраняющего координаты по отношению к S и T.

2. Векторные пространства

В этом разделе предполагается, что фиксировано n-мерное линейное векторное пространство V над полем действительных чисел.

2.1. Матрицы перехода

Утверждение 2.1. Пусть $E = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V. Тогда отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

которое мы также будем обозначать через E, является системой координат в смысле раздела 1. Если набор E не обязательно является базисом, то данное отображение является псевдосистемой координат (упражнение 1.5).

Доказательство. Тот факт, что E — биекция, то есть что любой вектор из V выражается единственные образом в виде линейной комбинации векторов из E, является одним из возможных определений базиса. $\square$

Определение 2.2. Пусть E — базис, а $E' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — произвольная система из n векторов. Матрица $C^E_{E'}$, состоящая из столбцов $\big([e'_1]E \quad \ldots \quad [e'_n]E\big)$, называется матрицей перехода от E к E'.

Утверждение 2.3. Если E — базис, E' — произвольная система векторов, а x — вектор-столбец координат, то $x \mapsto C^E_{E'} x$ является функцией перехода от E к E', то есть следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
& V & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "E"] & & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "E'"'] \arrow[ll, "C^E_{E'}"]
\end{tikzcd}$$

Если E' также является базисом, то этот факт означает $[v]E = C^E_{E'}([v]E')$ для любого $v \in V$.

Доказательство. Пусть $[v]E = (x_1, \ldots, x_n)$ и $v = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n$. Рассмотрим последнее равенство в координатах в базисе E.

$$[v]E = x'_1 [e'_1]E + \ldots + x'_n [e'_n]E$$

Значит, $[v]E$ является линейной комбинацией столбцов $C_{E'}^{E}$ с коэффициентами $x'_1, \ldots, x'_n$, или, по определению умножения матрицы на вектор,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C_{E'}^{E} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Альтернативное доказательство. Из определение матрицы перехода следует, что

$$\begin{pmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} C_{E'}^{E}$$

(здесь рассматриваются векторы-строки, состоящие из векторов). Поэтому

$$v = \begin{pmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} C_{E'}^{E} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$v = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

В силу единственности разложения вектора по базису получаем (10). □

Замечание 2.4. Термин «матрица перехода *от* E *к* E'» выбран, чтобы подчеркнуть, что координаты вектора, как и любого контравариантного тензора, меняются в противоположном направлении: координаты в E' преобразуются в координаты в E.

2.2. Линейные отображения

Определение 2.5. Отображение $f : V \to V'$ называется линейным, если оно сохраняет операции векторного пространства, то есть $f(u + v) = f(u) + f(v)$ и $f(\lambda v) = \lambda f v$ для любых $u, v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Утверждение 2.6. Пусть $f : V \to V'$ — линейное отображение, $E = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V и $f(e_i) = e'_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда f сохраняет координаты по отношению к E и $E' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, то есть следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] & & V \\ & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "E"] \arrow[ur, "E'"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Если $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, то по линейности $f(v) = x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n) = x_1e'_1 + \ldots + x_ne'_n$. $\square$

Если $V' = V$, то отображение f называется линейным оператором. В этом случае согласно утверждению 1.16 функция перехода $C^E_{f(E)}$ является координатной функцией f в E, обозначаемой через $[f]E$. Поскольку эта функция задается умножением аргумента-столбца на матрицу, будем называть ее матрицей f в E и обозначать так же, как и саму функцию.

Упражнения

2.1. Рассмотрим линейный оператор с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Определите геометрический смысл параметров a и b. Найдите образ квадрата с углами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ и $(0,1)$ при данном операторе.

2.2. Найдите матрицы следующих линейных операторов:

1) масштабирование с коэффициентами λ и μ в направлении $(1,0)$ и $(a,1)$, соответственно;
2) масштабирование с коэффициентами λ и μ в направлении (x_1, y_1) и (x_2, y_2), соответственно (результат можно представить в виде произведения матриц).

2.3. Дан ортонормированный базис (e_1, e_2, e_3). Также дан вектор a, который образует угол θ с плоскостью Oe_1e_2, а ортогональная проекция которого на эту плоскость образует угол φ с e_1. Найдите матрицу поворота на угол α вокруг прямой с направляющим вектором a, проходящей через начало координат. Ответ можно представить в виде произведения матриц.

2.4. Найдите матрицу ортогонального проектирования на плоскость $Ax + By + Cz = 0$.

Указание: представьте произвольный вектор u в виде $u' + \lambda n$, где u' — результат проекции, а n — нормаль к плоскости, и рассмотрите скалярное произведение обеих частей равенства на n.

2.5. Покажите, что проекция вектора v на плоскость с нормалью n есть $\dfrac{[[n,p],n]}{(n,n)}$, где $[a,b]$ — векторное произведение). Выразите отсюда матрицу ортогональной проекции на плоскость.

2.6. Найдите матрицу оператора симметрии относительно плоскости $Ax + By + Cz = 0$.

2.7. Найдите матрицу оператора проекции на плоскость $Ax + By + Cz = 0$ параллельно вектору v.

3. Аффинные точечные пространства

Параллельный перенос не является линейным оператором по трем причинам.

1. Это операция на точках, а не на векторах.
2. Для того, чтобы каждой точке поставить в соответствие радиус-вектор, необходимо выбрать начало отсчета.
3. Даже если это сделано, при параллельном переносе нулевой радиус-вектор переходит в ненулевой, следовательно, отображение не является линейным.

Определение 3.1. Аффинным точечным пространством называется тройка $(A, V, +)$, где A — множество точек, V — линейное векторное пространство, а $+ : A \times V \to A$ — операция откладывания вектора от точки, удовлетворяющая следующим аксиомам (здесь $P, Q \in A$, $u, v \in V$).

(A1) $P + 0 = P$.
(A2) $(P + u) + v = P + (u + v)$.
(A3) Для любых точек P, Q существует единственный вектор v, такой что $P + v = Q$. Этот вектор обозначается через $\overrightarrow{PQ}$.

Размерностью аффинного пространства называется размерность V.

Из аксиомы (A3) вытекают следующие равенства.

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q \qquad \text{по определению } \overrightarrow{OP} \tag{11}$$

$$\overrightarrow{P(P+v)} = v \qquad \text{в силу единственности вектора из } P \text{ в } P + v \tag{12}$$

Утверждение 3.2. Пусть фиксирована точка O. Тогда функции $g(P) = \overrightarrow{OP}$ и $h(v) = O + v$ определяют взаимно-однозначное соответствие между A и V, то есть $h \circ g = \mathrm{id}_A$ и $g \circ h = \mathrm{id}_V$.

Доказательство. Действительно, $h(g(P)) = h(\overrightarrow{OP}) = O + \overrightarrow{OP} \overset{(11)}{=} P$ и $g(h(v)) = g(O + v) = \overrightarrow{O(O+v)} \overset{(12)}{=} v$. $\square$

В силу этой взаимной однозначности возникает вопрос: нужно ли рассматривать новую алгебраическую структуру? Вместо этого можно выбрать точку отсчета O и говорить не о точках P, а об их радиус-векторах $\overrightarrow{OP}$. Идея рассмотрения аффинного пространства состоит в том, что никакая точка не выделяется в качестве особенной. Позже мы увидим, что а аффинном пространстве можно ввести естественные операции, не требующие точки отсчета.

3.1. Матрицы перехода

Определение 3.3. Репер в n-мерном аффинном пространстве $(A, V, +)$ — это пара $F = (O, E)$ (англ. *frame*), где $O \in A$, а E — это базис в V. Координатам точки P называются координаты $\overrightarrow{OP}$ в E; они обозначаются $[P]F$. Псевдорепером назовем пару (O, E), где E — набор из произвольных n векторов.

Если $E = (e_1, \ldots, e_n)$, то репер (O, E) задает систему координат

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto O + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

а псевдорепер аналогично задает псевдосистему координат.

Утверждение 3.4. Пусть даны два репера $F = (O, E)$ и $F' = (O', E')$. Тогда

$$[P]F = C_{E'}^{E}[P]F' + [O]F \tag{13}$$

для любых точек P.

Доказательство.

$$[P]F = [\overrightarrow{OP}]E = [\overrightarrow{OO'}]E + [\overrightarrow{O'P}]E = [\overrightarrow{OO'}]E + C_{E'}^{E}[\overrightarrow{O'P}]E' = [O']F + C_{E'}^{E}[P]F'.$$

□

Формула (13) неудобна на практике тем, что она не сводится к одному матричному умножению. При многократной замене репера выражение для преобразования координат может вырасти в большую сумму, которую неудобно представлять в программе.

Следующий факт доказывается непосредственной проверкой.

Утверждение 3.5. Пусть x, y, z — векторы-столбцы высоты n, а C — матрица размера $n \times n$. Тогда следующие равенства эквивалентны.

$$x = Cy + z \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь $\begin{pmatrix} C & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — блочная $(n+1) \times (n+1)$ матрица, последняя строка которой состоит из ряда нулей и одной единицы.

Определение 3.6. Однородными координатами точки P в репере F называется последовательность $([P]F, 1)$. Если не возникнет путаницы, однородные координаты будут также обозначаться через $[P]F$.

Определение 3.7. Матрицей перехода от репера $F = (O, E)$ к реперу $F' = (O', E')$ называется блочная матрица $C^F_{F'} = \begin{pmatrix} C^E_{E'} & [O']F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, уравнение (13) переписывается следующим образом,

$$[P]F = C^F_{F'}[P]F', \tag{14}$$

а умножение на $C^F_{F'}$ определяет функцию перехода от F к F'.

3.2. Аффинные отображения

Определение 3.8. Пусть $(A, V, +)$ и $(A', V', +')$ являются аффинными пространствами. Отображение $f : A \to A'$ называется аффинным, если существует такое линейное отображение $\overrightarrow{f} : V \to V'$, называемое линейной частью f, что

$$f(P + v) = f(P) +' \overrightarrow{f}(v) \tag{15}$$

для любых $P \in A$ и $v \in V$. Отображение f называется невырожденным, если таковым является $\overrightarrow{f}$, то есть ядро $\overrightarrow{f}$ состоит только из нулевого вектора.

Если даны две функции $g : X \to Y$ и $h : X' \to Y'$, обозначим через $g \times h : X \times X' \to Y \times Y'$ отображение $(g \times h)(x, x') = (g(x), h(x'))$. Тогда аффинность отображения f с линейной частью $\overrightarrow{f}$ эквивалентна коммутативности следующей диаграммы.

$$\begin{tikzcd} A \times V \arrow[r, "f \times \overrightarrow{f}"] \arrow[d, "+"'] & A' \times V' \arrow[d, "+'"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd}$$

Требование, чтобы отображения между аффинными пространствами коммутировали с операциями на пространстве типично для алгебраических структур (аналогичное требование есть, например, для гомоморфизмов групп и линейных отображений векторных пространств).

Утверждение 3.9. Равенство (15) достаточно проверять в одной точке, то есть если $f(O + v) = f(O) + \overrightarrow{f}(v)$ для любого $v \in V$ и фиксированной точки O, то f является аффинным.

Доказательство. Пусть $f(O+v) = f(O) + \overrightarrow{f}(v)$ для любого $v \in V$ и пусть O' — произвольная точка. Тогда

$$\begin{aligned}
f(O'+v) &= f((O+\overrightarrow{OO'})+v) && (11)\\
&= f(O+(\overrightarrow{OO'}+v)) && \text{(A2)}\\
&= f(O)+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OO'}+v) && \text{по условию}\\
&= f(O)+(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OO'})+\overrightarrow{f}(v)) && \text{в силу линейности } \overrightarrow{f}\\
&= (f(O)+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OO'}))+\overrightarrow{f}(v) && \text{(A2)}\\
&= f(O+\overrightarrow{OO'})+\overrightarrow{f}(v) && \text{по условию}\\
&= f(O')+\overrightarrow{f}(v) && (11)
\end{aligned}$$

□

Утверждение 3.10. Если отображение f с линейной частью $\overrightarrow{f}$ аффинно, то

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}. \qquad (16)$$

Доказательство.

$$f(Q) = f(P+\overrightarrow{PQ}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}),$$

откуда следует требуемое равенство. □

В дальнейшем мы будем использовать обычные правила работы с точками и векторами, справедливыми для $\mathbb{R}^n$, и, как правило, не будем выводить их из приведенных выше аксиом.

Пусть даны аффинное отображение f с линейной частью $\overrightarrow{f}$ и репер $F = (O, e_1, \ldots, e_n)$. Образом $f(F)$ назовем псевдорепер $(f(O), \overrightarrow{f}(e_1), \ldots, \overrightarrow{f}(e_n))$.

Утверждение 3.11. Невырожденное аффинное отображение f сохраняет координаты по отношению к F и $F' = f(F)$. Обратно, если f сохраняет координаты по отношению к реперам F и F', то f является аффинным.

Доказательство. Пусть $F = (O, E)$ и $F' = (f(O), \overrightarrow{f}(E))$. Тогда

$$[f(P)]F' = [\overrightarrow{f(O)f(P)}](\overrightarrow{f}(E)) \overset{(16)}{=} [\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})](\overrightarrow{f}(E)) = [\overrightarrow{OP}]E = [P]F.$$

Здесь используется то, что $\overrightarrow{f}$ — линейное отображение и, следовательно, сохраняет координаты по отношению к базисам E и $\overrightarrow{f}(E)$.

Обратно, пусть даны $F = (O, E)$ и $F' = (O', E')$ и некое отображение f, сохраняющее координаты по отношению к F и F'. Заметим, что $f(O) = O'$ поскольку $[O]F = [O']F'$. Определим $\overrightarrow{f}$ как линейное отображение, переводящее $E = (e_1, \ldots, e_n)$ в $E' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Тогда в силу сохранения координат

$$f(O + \textstyle\sum_{i=1}^n x_i e_i) = O' + \sum_{i=1}^n x_i e'_i = f(O) + \overrightarrow{f}(\sum_{i=1}^n x_i e_i).$$

□

Как следует из общей теории (утверждение 1.16), координатная функция аффинного отображения f в репере F задается матрицей $C^F_{f(F)}$. Она называется матрицей f в F и обозначается через $[f]F$.

Как и в случае произвольных систем координат имеет место следующий факт.

Утверждение 3.12. Если f аффинное отображение, а F и F' — два репера, то

$$[f]F' = (C^F_{F'})^{-1}([f]F)(C^F_{F'}).$$

Также f можно представить как композицию $g^{-1} \circ h \circ g$, где g переводит F в F', а $[h]F' = [f]F$.

3.3. Свойства аффинных отображений

Утверждение 3.13. Аффинные отображения переводят прямые в прямые или точки; плоскости в плоскости, прямые или точки; параллельные прямые в параллельные прямые или точки, а также сохраняет отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой.

Доказательство. Прямая имеет параметрическое уравнение $P + tv$, где P — точка на прямой, v — направляющий вектор, а $t \in \mathbb{R}$. По определению $f(P + tv) = f(P) + t\vec{f}(v)$, что является уравнением точки или прямой в зависимости от того, равен ли $\vec{f}(v)$ нулевому вектору. Утверждение про плоскость доказывается аналогично.

Пусть точки P, Q, R лежат на одной прямой и $\overrightarrow{PR} = \lambda\overrightarrow{PQ}$. Тогда в силу линейности отображения $\vec{f}$

$$\overrightarrow{f(P)f(R)} \overset{(16)}{=} \vec{f}(\overrightarrow{PR}) = \lambda\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \lambda\overrightarrow{f(P)f(Q)}. \qquad \square$$

Можно доказать, что отображение, переводящее прямые в прямые и сохраняющее отношение длин отрезков на прямой, является аффинным. На самом деле, достаточно потребовать только перевода прямых в прямые, но доказательство при этом усложняется.

3.4. Основные аффинные отображения на плоскости

Если $F = (O, e_1, e_2)$ — ортонормированный репер, то поворот вокруг O на угол α, масштабирования вдоль e_1 и e_2 с коэффициентами λ и μ, соответственно, а также параллельный перенос на вектор с координатами (x, y)

являются аффинными отображениями со следующими матрицами в F.

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Необходимо подчеркнуть, что поворот имеет матрицу, приведенную выше, если базисные векторы имеют одинаковую длину и образуют угол 90°, а направление поворота совпадает с направлением кратчайшего поворота, переводящего e_1 в e_2. Если перевод e_1 в e_2 осуществляется поворотом по часовой стрелке (это часто имеет место в компьютерной системе координат), а поворот производится против часовой стрелке, как принято в математике, то необходимо поменять знак перед $\sin\alpha$.

Если λ или μ в $S(\lambda,\mu)$ отрицательны, то кроме масштабирования отображение включает в себя симметрию относительно соответствующей оси координат. В частности, обозначим симметрии относительно осей Ox и Oy через

$$S_x = S(1,-1), \qquad S_y = S(-1,1).$$

Матрицы поворота и масштабирования с центром в произвольной точке с координатами (x,y) можно получить с помощью теоремы 1.14.

$$R_{(x,y)}(\alpha) = T(-x,-y)R(\alpha)T(x,y),$$
$$S_{(x,y)}(\lambda,\mu) = T(-x,-y)S(\lambda,\mu)T(x,y)$$

Упражнения

3.1. Выведите из аксиом правило треугольника (также известное как тождество Шаля) для сложения векторов: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

3.2. Докажите, что если A — обратимая матрица, то

$$\begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Покажите, что $S(\lambda,\mu)T(a,b) = T(\lambda a, \mu b)S(\lambda,\mu)$.

3.4. Дан график функции $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Напишите матрицы аффинных отображений, переводящих этот график в графики следующих функций:

а) $\cos x$ на $[0,\pi]$,
б) $\arcsin x$ на $[-1,1]$,
в) $\arccos x$ на $[-1,1]$.

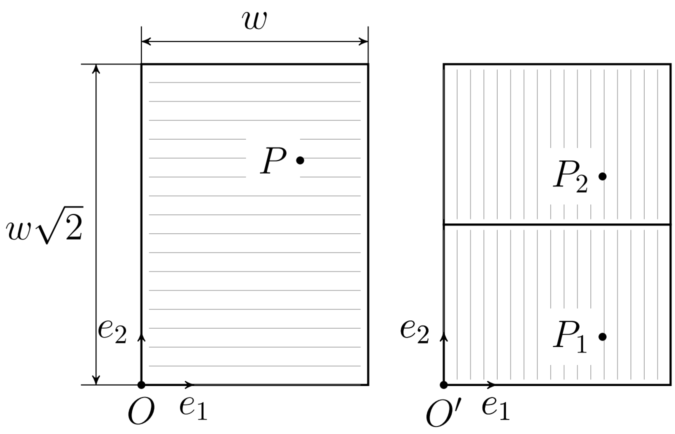


Рис. 3.1. К упражнению 3.9

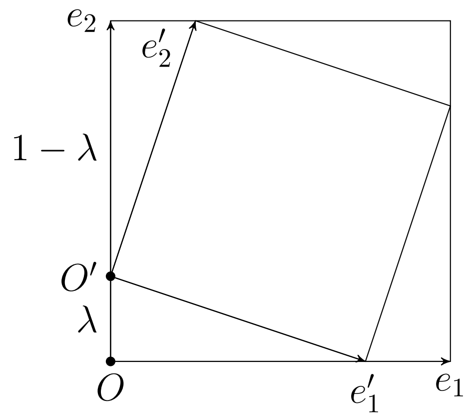


Рис. 3.2. К упражнению 3.10

3.5. Требуется найти матрицу отображения, которое осуществляет поворот на угол α, за которым следует масштабирование с коэффициентом λ вдоль повернутой оси Ox и коэффициентом μ вдоль повернутой оси Oy. В каком порядке нужно перемножать матрицы $R(\alpha)$ и $S(\lambda, \mu)$?

3.6. Пусть l_1 и l_2 будут прямые, получающиеся из оси Ox поворотом на угол α вокруг начала координат и переносом на вектор (a, b), соответственно, и пусть S_1 и S_2 будут матрицы симметрий относительно l_1 и l_2. Докажите следующие равенства.

1) $S_1 = R(\alpha)S_xR(-\alpha) = R(2\alpha)S_x$;
2) $S_1S_x = R(2\alpha)$;
3) $S_2 = T(a, b)S_xT(-a, -b) = T(0, 2b)S_x$;
4) $S_2S_x = T(0, 2b)$.

3.7. Пусть S_l будет матрицей симметрии относительно прямой l, пересекающей ось Oy в точке $(0, b)$ и образующей угол α с осью Ox.

1) Докажите, что $S_l = T(0, b)R(\alpha)S_xR(-\alpha)T(0, -b)$.
2) Найдите такие числа a и b, что $S_l = T(a, b)R(2\alpha)S_x$.

3.8. Найдите числа a и b, для которых

1) $R_{(x,y)}(\alpha) = T(a, b)R(\alpha)$;
2) $S_{(x,y)}(\lambda, \mu) = T(a, b)S(\lambda, \mu)$;
3) $R_{(x,y)}(-\alpha)R(\alpha) = T(a, b)$.

3.9. Отношение высоты к ширине листа бумаги любого формата серии A (например, A4) равно $\sqrt{2} \approx 1{,}414$. Это позволяет в точности разместить две уменьшенные и повернутые на 90° копии страницы на одной странице, как показано на рис. 3.1. Пусть при таких преобразованиях точка P переходит в

P_1 и P_2, и пусть заданы реперы $F = (O, e_1, e_2)$ и $F' = (O', e_1, e_2)$ с началами в левых нижних углах страниц. Напишите матрицу, преобразующую $[P]F$ в $[P_i]F'$, $i = 1, 2$, если ширина исходной страницы есть $w|e_1|$.

3.10. На рис. 3.2 изображен квадрат, вписанный в другой квадрат со стороной 1. Известно, что $OO' = \lambda$. Рассмотрим реперы $F = (O, e_1, e_2)$ и $F' = (O', e'_1, e'_2)$ и аффинное отображение f, переводящее больший квадрат в меньший, причем $f(O) = O'$. Найдите $[f]F = C_{F'}^{F}$.

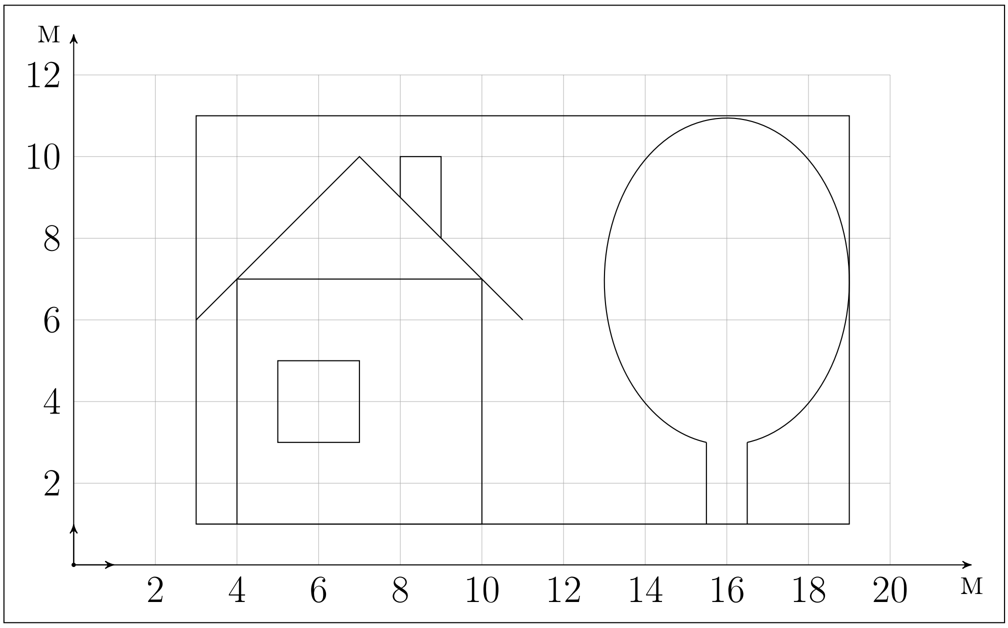


Рис. 4.1. Фигура в мировых координатах.

4. Перевод мировых координат в экранные

В качестве примера применения изложенных выше фактов в этом разделе рассмотрим хорошо известную задачу о переводе фигуры из мировой системы координат в экранную (window to viewport transformation). Разумеется, эту задачу может решить даже школьник, потому что искомые преобразования координат используют только основные арифметические действия. Однако без достаточной практики легко совершить ошибку, например, в порядке аффинных отображений.

Рассмотрим следующую ситуацию. В мировой системе координат, где единицами измерения служат метры, задана фигура, показанная на рис. 4.1. Требуется изобразить ее в окне, имеющем высоту h пикселей, границу шириной p пикселей и разрешение r пикселей на сантиметр. Изображение должно быть выполнено в масштабе m метров в одном сантиметре и располагаться в левом нижнем углу окна, то есть левый нижний угол фигуры с мировыми координатами $(x_w, y_w) = (3, 1)$ должен иметь экранные координаты $(x_s, y_s) = (h-p, p)$. Описанное расположение изображено на рис. 4.2.

Рассмотрим аффинное пространство, в котором задано исходное изображение, а также аффинное пространство экрана. Пусть W и $S = (O, e_1, e_2)$ — реперы, задающие мировую и экранную системы координат, соответственно. Как обычно, будем считать, что начало экранной системы координат расположено в левом верхнем углу экрана или окна, ось x направлена вправо, а ось y — вниз. Тогда длины векторов re_1 и re_2 равны 1 см. Далее, пусть P — точка с экранными координатами (x_s, y_s). Рассмотрим репер $W' = (O', e'_1, e'_2)$, где $|e'_1| = |e'_2| = 1/m$ см и $[P]W' = (x_w, y_w)$. Тогда аффинное отображение

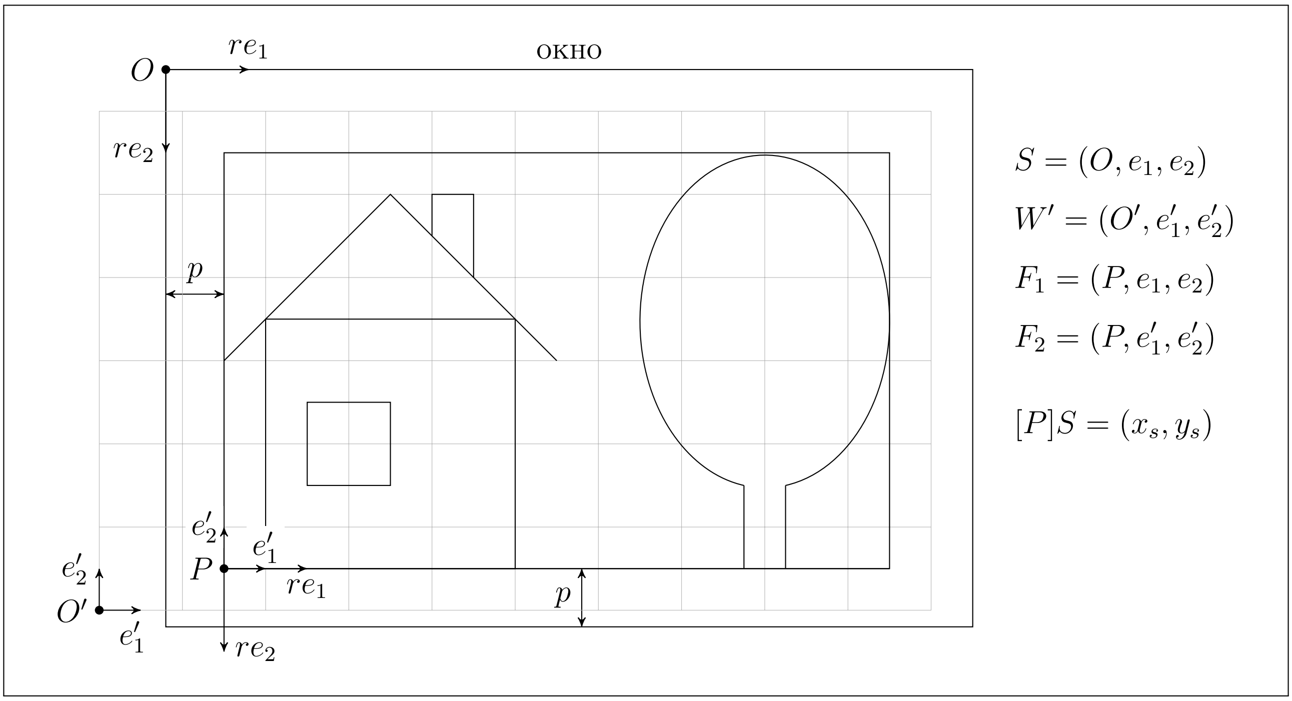


Рис. 4.2. Преобразование координат из мировых в экранные.

f, сохраняющее координаты по отношению к W в W', переводит исходную фигуру в требуемое изображение в окне, поэтому согласно утверждению 1.16 задача сводится к отысканию $[f]^S_W = C^S_{W'}$.

Рассмотрим два дополнительных репера $F_1 = (P, e_1, e_2)$ и $F_2 = (P, e'_1, e'_2)$; тогда $C^S_{W'} = C^S_{F_1} C^{F_1}_{F_2} C^{F_2}_{W'}$ по утверждению 1.9. Эти матрицы переходов удобно рассматривать как матрицы преобразований: $C^S_{F_1}$ и $C^{F_2}_{W'}$ есть матрицы параллельных переносов на векторы (x_s, y_s) и $(-x_w, -y_w)$, соответственно, поскольку координаты векторов переноса определяются в реперах S и F_2. Преобразование, переводящее F_1 в F_2, есть масштабирование с центром в точке P и коэффициентами r/m и $-r/m$. Общая матрица перехода есть

$$C^S_{W'} = T(x_s, y_s) S(r/m, -r/m) T(-x_w, -y_w).$$

Альтернативно можно представить отображение f в виде композиции $f = g \circ h$. Здесь h сохраняет координаты по отношению к W и S, а $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$, где g_1 делает параллельный перенос на $(-x_w, -y_w)$, g_2 осуществляет масштабирование с коэффициентами r/m и $-r/m$, а g_3 делает перенос на (x_s, y_s), все в координатах репера S. Тогда $[f]^S_W = ([g_3]S)([g_2]S)([g_1]S)([h]^S_W)$. Отображение h переводит исходное изображение в крошечное и перевернутое изображение на экране, и $[h]^S_W$ является единичной матрицей. Далее отображения g_i придают изображению нужный размер и положение.

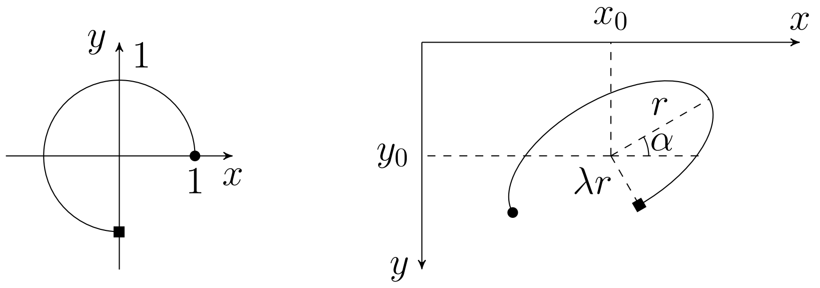


Рис. 4.3. К упражнению 4.1

Упражнения

4.1. В мировых координатах задана дуга окружности с центром в начале координат, радиусом 1 и угловой величиной $270°$, как показано на рис. 4.3. Напишите матрицу, переводящую мировые координат точек окружности в экранные координаты точек дуги следующего эллипса. Центр эллипса имеет экранные координаты (x_0, y_0), большая полуось составляет r пикселей, отношение малой полуоси к большой равно λ, и эллипс повернут на угол α против часовой стрелки. При этом концы дуги окружности, помеченные черными кружочком и квадратиком, должен переходить в соответствующие концы дуги эллипса.

4.2. Прямоугольная область в экранных координатах задана координатами левого верхнего угла (x_s, y_s), шириной w_s и высотой h_s. Прямоугольник в мировых координатах задан координатами левого нижнего угла (x_r, y_r), шириной w_r и высотой h_r. Разрешение экрана есть r пикселей на сантиметр. Выпишите матрицу преобразования координат в виде произведения матриц переноса и масштабирования, если

а) прямоугольник требуется изобразить в каждом из четырех углов, а также в центре экранной области в масштабе одна мировая единица в одном сантиметре,

б) прямоугольник должен занять всю экранную область, при этом отношение ширины к высоте не обязательно сохраняется.

5. Аффинные комбинации и барицентрические координаты

5.1. Аффинные комбинации и их свойства

Утверждение 5.1. Пусть в аффинном точечном пространстве даны точки $A_1, \ldots, A_n$ и числа $\lambda_1, \ldots . \lambda_n$. Если $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, то

$$O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = O' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}.$$

для любых точек O и O'. Аналогично, если $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}.$$

для любых O и O'.

Доказательство.

$$O+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = O+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_i}\right) = O+\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{OO'}+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i} =$$
$$= O + \overrightarrow{OO'} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i} = O' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}.$$

Доказательство второго равенства предлагается в качестве упражнения. □

Поскольку результаты операций $O \mapsto O + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ и $O \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ не зависят от точки O при соответствующих условиях на λ_i, можно ввести следующее обозначение.

Определение 5.2. Если $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \stackrel{\text{def}}{=} O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \tag{17}$$

для произвольной точки O. Полученную точку будем называть аффинной комбинацией точек $A_1, \ldots, A_n$.

Аналогично, если $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

для произвольной точки O.

Например,

$$A - B = 1 \cdot A + (-1) \cdot B \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}. \tag{18}$$

Утверждение 5.3. Пусть $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Тогда

$$B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = 0.$$

Доказательство. Выбирая B в качестве O в (17), мы получаем

$$B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \iff B = B + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = 0.$$

□

В физике центром тяжести, или барицентром, множества материальных точек $A_1, \ldots, A_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$, соответственно, называется точка B, такая что $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{BA_i} = 0$. Очевидно, что барицентр есть аффинная комбинация точек A_i с коэффициентами m_i/M, где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Обозначение $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ подсказывает, что для аффинных комбинаций точек выполняются те же законы, что и для линейных комбинаций векторов, например, свойства коммутативности и дистрибутивности. Так, можно проделать следующее формальное вычисление:

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) + \frac{1}{3}C, \tag{19}$$

согласно которому аффинную комбинацию трех точек можно найти с помощью последовательного нахождения комбинаций двух точек.

В качестве еще одного примера формального вычисления рассмотрим $n+1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$, задающих репер $F = (A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$. Тогда $[P]F = (x_1, \ldots, x_n)$ означает, что

$$P = A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{A_0A_i} \stackrel{(18)}{=} A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i (A_i - A_0) = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i. \tag{20}$$

Однако возможность применения к аффинным комбинациям законов, которые имеют место для линейных комбинаций векторов, неочевидна. Аффинная комбинация $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ — это некая функция от n чисел и n точек. Нельзя априори предполагать, что она обладает обычными свойствами сложения: коммутативностью, ассоциативностью и дистрибутивностью.

Эти свойства имеют место, потому что согласно определению каждому слагаемому $\lambda_i A_i$ в аффинной комбинации соответствует вектор $\lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ для некоторой точки O. Мы не будем формулировать точное утверждение о корректных операциях над аффинными комбинациями, но покажем, как равенства (19) и (20) можно вывести, используя определение аффинной комбинации.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C &= O + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = && \text{по определению}\\
&= O + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \\
&= O + \frac{2}{3}\overrightarrow{O\left(O + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = && v = \overrightarrow{O(O+v)}\\
&= O + \frac{2}{3}\overrightarrow{O\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = && \text{по определению}\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) + \frac{1}{3}C && \text{по определению}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i(A_i - A_0) &= && \text{по определению}\\
&= A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_0}\right) = \\
&= A_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{OA_0} + \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{OA_i} = \\
&= O + \overrightarrow{OA_0} - \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{OA_0} + \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{OA_i} = && O + \overrightarrow{OA_0} = A_0\\
&= O + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\overrightarrow{OA_0} + \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{OA_i} = \\
&= \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i && \text{по определению}
\end{aligned}$$

С этого момента будем считать, что аффинные комбинации можно преобразовывать, обращаясь с точками, как с векторами, но при условии, что во всей комбинации сумма коэффициентов равна 1.

5.2. Барицентрические системы координат

Определение 5.4. Точки $P_0, \dots, P_n$ находятся в общем положении, если векторы $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}$ линейно независимы. В n-мерном аффинном точечном пространстве $(A, V, +)$ (то есть если $\dim V = n$) говорят, что $n+1$ точек в общем положении образуют барицентрическую систему координат. Если $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$, то $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ называются барицентрическими координатами точки P в системе $P_0, \ldots, P_n$.

Очевидно, что барицентрическая система координат $A_0, \ldots, A_n$ соответствует реперу $F = (A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$. Как показано в (20), обычные координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ в F и барицентрические координаты $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ одной и той же точки P связаны следующим образом.

$$\begin{aligned} \lambda_i &= x_i, \qquad\qquad i = 1, \ldots, n \\ \lambda_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned} \tag{21}$$

Это можно увидеть еще раз, используя (17) при $O = A_0$:

$$P = A_0 + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\overrightarrow{A_0A_0} + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{A_0A_i} \iff$$
$$P = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i.$$

Таким образом, доказан следующий факт.

Утверждение 5.5. Если задана барицентрическая система координат, то каждая точка имеет единственный набор барицентрических координат, которые связаны с аффинными координатами в соответствующем репере формулами (21).

5.3. Сохранение аффинных комбинаций аффинными отображениями

По определению отображение называется линейным, если оно сохраняет линейные комбинации векторов. Аналогично, имеем следующий факт.

Утверждение 5.6. Отображение f аффинного точечного пространства является аффинным тогда и только тогда, когда оно сохраняет аффинные комбинации, то есть $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(A_i)$.

Доказательство. Если f аффинно с линейной частью $\overrightarrow{f}$, то

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i\right) &= && \text{определение аффинной комбинации}\\
&= f\left(O + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{OA_i}\right) = &&\\
&= f(O) + \overrightarrow{f}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{OA_i}\right) = && \text{определение аффинного отображения}\\
&= f(O) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_i}) = && \text{линейность}\\
&= f(O) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{f(O)f(A)} = && \text{утверждение 3.10}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(A_i) && \text{определение аффинной комбинации}
\end{aligned}
$$

Обратно, если f сохраняет аффинные комбинации, то, в частности, оно сохраняет барицентрические координаты и, следовательно, сохраняет аффинные координаты по утверждению 5.5. Значит, оно аффинно по утверждению 3.11. ☐

5.4. Аффинные комбинации на прямой и плоскости

Пусть точка P лежит на прямой AB и $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Тогда координата P в репере $(A, \overrightarrow{AB})$ есть λ, поэтому по (21) барицентрические координаты P в системе (A, B) есть $(1-\lambda, \lambda)$, то есть $P = (1-\lambda)A + \lambda B$. В частности, координаты A и B есть $(1, 0)$ и $(0, 1)$, соответственно.

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PB}$, имеем $\overrightarrow{PB} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB}$. Таким образом, $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \lambda : (1-\lambda)$, под чем подразумевается $(1-\lambda)\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$. Нетрудно видеть, что это последнее равенство в свою очередь влечет $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Таким образом, имеют место следующие эквивалентности.

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \lambda : (1-\lambda) \iff P = (1-\lambda)A + \lambda B$$

Равенство $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ можно интерпретировать как то, что точка P преодолела часть λ пути от A к B. Если известно, что $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \lambda : \mu$, где $\lambda + \mu \neq 1$, то нужно рассмотреть $\lambda' = \lambda/(\lambda+\mu)$ и $\mu' = \mu/(\lambda+\mu) = 1 - \lambda'$; тогда $P = \mu' A + \lambda' B$. В качестве мнемонического правила стоит запомнить,

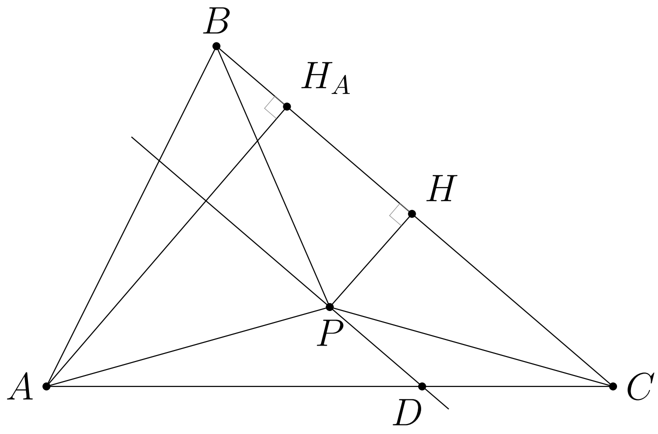


Рис. 5.1. Барицентрические координаты на плоскости

что если $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \lambda : \mu$, то члены отношения умножаются на точки «крест-накрест»: μ умножается на A, а λ — на B.

Рассмотрим теперь треугольник ABC и точку P в той же плоскости. Тогда по утверждению 5.5 имеют место следующие эквивалентности.

$$
\begin{aligned}
P = \lambda A + \mu B + \nu C &\iff [P](A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\mu, \nu) \\
&\iff [P](B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\lambda, \nu) \\
&\iff [P](C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\lambda, \mu)
\end{aligned}
$$

В частности, координаты A, B и C в барицентрической системе координат есть соответственно $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Утверждение 5.7. Если $P = \lambda A + \mu B + \nu C$, то

$$
\lambda = \frac{\pm S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}, \qquad \mu = \frac{\pm S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle ABC}}, \qquad \nu = \frac{\pm S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}},
$$

где $S_{\triangle PXY}$ берется со знаком $+$, если точка P находится с той же стороне прямой XY, что и треугольник, и со знаком $-$ в противном случае.

Доказательство. Пусть $P = \lambda A + \mu B + \nu C$. В репере $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ точка P имеет координаты (λ, μ). Обозначим через P_{AB} проекцию P на AB параллельно BC. На рис. 5.1 CD/CA есть координата P, соответствующая $\overrightarrow{CA}$, то есть λ. С другой стороны по теореме Фалеса $CD/CA = PH/AH_A$, где PH и AH_A перпендикулярны BC. Наконец, последнее отношение высот равно отношению площадей треугольников PBC и ABC с одинаковым основанием. Итого, $S_{\triangle PBC}/S_{\triangle ABC} = \lambda$.

Если P находится по другую сторону от BC, чем A, то $\lambda = -CD/CA = -PH/AH_A = -S_{\triangle PBC}/S_{\triangle ABC}$. Остальные два равенства доказываются аналогично. $\square$

Упражнения

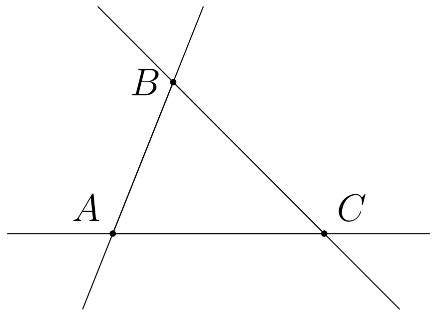
5.1. Докажите второе равенство в утверждении 5.1.

5.2. Пусть $S = (P_0, \ldots, P_n)$ и $S' = (P'_1, \ldots, P'_n)$ — две барицентрические системы координат. Рассмотрим $(n+1) \times (n+1)$ матрицу C, i-й столбец которой содержит барицентрические координаты P'_i в S. (Таким образом, сумма элементов в каждом столбце равна 1.) Докажите, что C задает функцию перехода $C^S_{S'}$.

5.3. Опишите, как найти аффинную комбинацию $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$ для любого n с помощью последовательного нахождения комбинаций двух точек.

5.4. Докажите, что понятие точек в общем положении не зависит от выбора начальной точки, то есть для любого $1 \leq k \leq n$ множества векторов $\{\overrightarrow{P_0P_i} \mid i \neq 0\}$ и $\{\overrightarrow{P_kP_i} \mid i \neq k\}$ линейно независимы одновременно.

5.5. Задана барицентрическая система координат (A, B, C) на плоскости. Обозначим барицентрические координаты точки относительно этой системы через (x_1, x_2, x_3). В каждой из 7 зон, на которые прямые AB, BC и AC делят плоскость, напишите знаки, которые принимают x_1, x_2 и x_3.



5.6. В контексте утверждения 5.7 пусть задан еще один репер F. Рассмотрим матрицу M, в которой по столбцам записаны однородные координаты A, B и C в F (таким образом, нижняя строка состоит из единиц). Пусть также Y — однородные координаты P в F, а $X = (\lambda, \mu, \nu)^T$. Тогда $MX = Y$ означает, что $P = \lambda A + \mu B + \nu C$ и $\lambda + \mu + \nu = 1$. Решая эту систему по правилу Крамера, дайте алгебраическое доказательство утверждения 5.7.

Список литературы

1. Gallier J. Geometric Methods and Applications. — 2nd ed. — Springer, 2011.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра. — М. : Физматлит, 2000.
3. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — Факториал Пресс, 2000.
4. Шульц М. М. Аналитическая и вычислительная геометрия. — Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2010.

Евгений Маратович **Макаров**

Линейные и аффинные пространства в компьютерной геометрии

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.