Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
"Модели, методы и программные средства"

Основная образовательная программа
010100.62 «Математика», общий профиль, квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Математический анализ»

Основная образовательная программа
010200.62 «Математика. Компьютерные науки», общий профиль, квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Математический анализ»

Малкин М.И

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАИЗ: НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород
2012

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАИЗ: НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ. Малкин М.И. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 71 с.

Учебное пособие предназначено для изучения начал математического анализа, оно содержит серию нестандартных задач по элементарной математике вместе с описанием методов их решения. Кроме того, в пособии значительное внимание уделяется подходу к решению данных задач с точки зрения общих приемов математического анализа, с которыми студенты должны будут встретиться при дальнейшем обучении. Тем самым, у студентов появляется мотивация в изучении более сложных конструкций дифференциального и интегрального исчисления. Задачи, представленные в пособии, Малкиным, являются авторскими, они предлагались на математических олимпиадах различного уровня. В пособии имеются и «технические» задачи, требующие лишь стандартных знаний и навыков и поэтому предназначенные для аудиторных занятиях, но основное внимание в пособии уделяется нестандартным задачам, которые следует предлагать для самостоятельной работы студентов.

.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса механико-математического факультета ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010100.62 «Математика» и 010100.62 «Математика. Компьютерные науки» при изучении математического анализа.

Оглавление

Уравнения и неравенства с многочленами

1. Решить уравнение

$$\frac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1}+\frac{4x-4x^2-1}{x^3-3x^2+2}=0$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1}=\frac{(2x-1)^2}{x^3-3x^2+2}$$

Значит, либо $2x-1=0$, либо

$$\frac{1}{x^3-2x^2+1}=\frac{1}{x^3-3x^2+2}$$

Из первого уравнения $x=\frac{1}{2}$ и при этом значении x знаменатели второго уравнения $\neq 0$, т.е. $x=\frac{1}{2}$ - корень.

Из второго уравнения следует: $x^3-2x^2+1=x^3-3x^2+2$, или $x^2=1$, т.е. $x=\pm 1$. При $x=+1$ знаменатель первой дроби обращается в нуль, т.е. $x=+1$ не является корнем. При $x=-1$ оба знаменателя $\neq 0$.

Ответ: $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-1$

2. Найти все двузначные числа n, которые обладают следующим свойством: к n можно приписать слева одну или несколько цифр так, что получится n^2.

Решение. Условие задачи равносильно тому, что (n^2-n) делится на 100, т.е. $n(n-1)$ делится на $25\cdot 4$. Из последовательных чисел n и $(n-1)$ только одно четное, и только одно делится на 5. Значит, одно делится на 25, а другое -- на 4 (если бы число одновременно делилось на 25 и 4, то оно было бы уже ≥ 100). Остаются два случая: а) одно из чисел $n, n-1$ равно 25,и тогда в этом случае другое равно 24, т.е. $n=25$; б) одно из чисел равно 75, и в этом случае другое равно 76, т.е. $n=76$.

Ответ: $n=25, n=76$

\

3. Внутри ΔABC взята точка O такая, что все треугольники OAB, OBC и OCA -- равнобедренные. Доказать, что $OA=OB=OC$.

Решение. Из трех углов $\angle AOB, \angle BOC$è$\angle COA$ по меньшей мере два тупых. Пусть $\angle AOB$ и $\angle BOC$ -- тупые углы. Тогда, очевидно, $AO=OB$ в равнобедренном ΔAOB

ris ol96-1

и, аналогично, $BO=$ ÎC в ΔBOC. Значит $OA=OB=OC$.

4. В компании собралось 9 человек. Оказалось, что каждый дружит не менее, чем с

пятью присутствующими. Доказать, что в компании найдутся три друга (каждый дружит с остальными двумя).

Решение. Возьмем любых двух друзей A и B. Из остальных семи человек A имеет не менее 4 друзей, и B имеет не менее 4 друзей. Значит, среди друзей A и B есть хотя бы один общий (т.к. $4+4>7$). Вместе с A и B этот общий друг и составляет нужную тройку.

5. Сколько имеется трехзначных чисел, которые не содержат цифр $7,8,9,0$?

Решение. Возможные цифры требуемых чисел -- это любые цифры от 1 до 6. Для данной выбранной первой цифры вторую цифру можно выбрать 6 способами, т.е. всего имеется $6\cdot 6=36$ двузначных чисел с требуемыми цифрами. Тогда трехзначных чисел будет $36\cdot 6=216$ (рассуждаем аналогично: для данной пары цифр третью можно выбрать 6 способами)

Ответ: 216.

6. Решить уравнение $(x^2+x)^3+\frac{1}{64}=0$

Решение. Запишем уравнение в виде: $(x^2+x)^3=(-1/4)^3$. Оно равносильно такому: $x^2+x=-\frac{1}{4}$, поскольку равенство кубов двух чисел означает равенство самих чисел. Тогда $(x+\frac{1}{2})^2=0$, т.е. $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

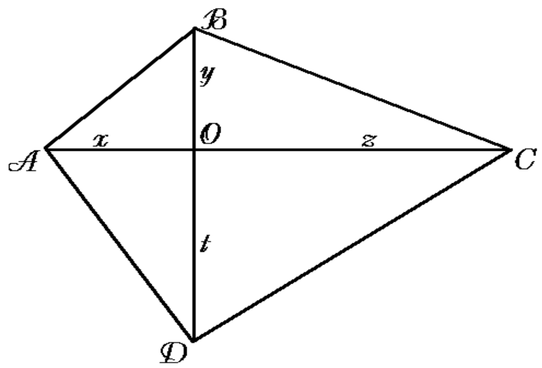
7. Найти все натуральные числа n,m, для которых выполняется $n!+24=m^2$ (где $n!=1\cdot 2\cdots n$ означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n).

Решение. Если $n\ge 6$, то $n!$ делится на $3\cdot 6=18$. Тогда число $n!+24$ делится на 3, но не делится на 9, значит оно не может быть точным квадратом. Для $n=1,2,3,4,5$ значения $n!+24$ равны соответственно 25, 26, 32, 48, 144, из которых первое и последнее удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $n=1, m=5$ или $n=5, m=12$

8. Диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны. Длины трех последовательных сторон равны $4;7;17$. Найти четвертую сторону.

Решение. Пусть O -- точка пересечения диагоналей и пусть x,y,z,t -- соответствующие отрезки диагоналей. Из теоремы Пифагора имеем:



$$\begin{cases} x^2+y^2=AB^2 \\ y^2+z^2=BC^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z^2+t^2=DC^2 \\ t^2+x^2=AD^2 \end{cases}$$

Из первых двух равенств получим $x^2-z^2=AB^2-BC^2$, из вторых двух --

$z^2 - x^2 = DC^2 - AD^2$. Следовательно, $AB^2 - BC^2 + DC^2 - AD^2 = 0$, или, $AB^2 + DC^2 = BC^2 + AD^2$ и подставляя данные, получаем $7^2 + DC^2 = 4^2 + 17^2$, т.е. $DC^2 = 16^2$.

Ответ: четвертая сторона равна 16.

9. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые не содержит цифр 6,7,8,9,0 .

Решение. Будем складывать числа столбиком. Каждая последняя цифра (например, двойка) встречается в разряде единиц столько раз, сколько имеется трехзначных чисел с этой последней цифрой (в нашем примере -- это числа вида $\overline{xy2}$, где x, y -- произвольные цифры от 1 до 5). Значит, она встретится $5 \cdot 5 = 25$ раз. Таким образом, сумма цифр в последнем разряде равна $25 \cdot (1+2+3+4+5) = 375$. Аналогично, в разряде десяток и сотен получим ту же сумму 375. В итоге искомая сумма всех чисел равна

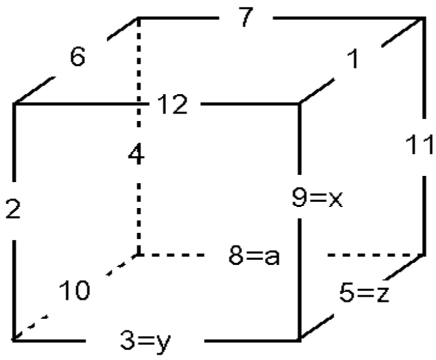
$$375 \cdot 100 + 375 \cdot 10 + 375 = 375 \cdot 111 = 41625$$

Ответ: 41625

10. Ребра куба занумеровали числами от 1 до 12 и затем для каждой грани подсчитали сумму номеров на ребрах данной грани. а) Доказать, что найдется грань, у которой эта сумма больше 25 . б) Придумать такую нумерацию, чтобы эти суммы у всех граней совпадали.

Решение. а) Подсчитаем для каждой грани соответствующую сумму и затем сложим эти суммы для всех шести граней. Получим в результате $(1+2+\ldots+12) \cdot 2$, так как при таком подсчете любое ребро будет сосчитано дважды. Итак, получаем общую сумму 156 и тогда по принципу Дирихле хотя бы для одной грани ее сумма номеров $\geq \frac{156}{6} = 26$ (вместо принципа Дирихле можно рассуждать от противного: иначе мы получили бы общую сумму $\leq 25 \cdot 6 < 156$).

б) Некоторые эвристические соображения при построении примера: самые большие номера 12,11,10 размещаем на скрещивающихся ребрах (тогда они не сложатся ни в одной грани), а самые маленькие- 1 и 2 -- на ребрах, соединяющих самые большие. Из а) следует, что все суммы в гранях равны 26. Тогда (см. рис.) $x + y = 12$, $x + z = 14$, $y + z = 16 - a$. Для разрешимости этой системы уравнений в целых x, y, z число a должно быть четным, причем $a \neq 2, a \neq 4$, т.к. иначе среди x, y, z есть одинаковые числа. Остается $a = 6$ или 8. При $a = 6$ получим $z = 6$. При $a = 8$ имеем $x = 9, y = 3, z = 5$. Остальные три номера определяются однозначно из аналогичной системы уравнений.



11.. Решить уравнение $(\sin^2 3x + 1)(\cos^2 2x + 1) = 4 \sin 3x \cos 2x$

Решение. Разделим уравнение на $\sin 3x \cos 2x$, при этом не произойдет потери корней, т.к. при любых x левая часть уравнения ≥ 1. Получим

$$(\sin 3x + \frac{1}{\sin 3x})(\cos 2x + \frac{1}{cos 2x}) = 4.$$

Для любого числа $a \neq 0$ выполняется неравенство $|a + \frac{1}{a}| \geq 2$ (равносильное неравенству $|a|^2 + 1 \geq 2|a|$), причем равенство здесь возможно лишь при условии $|a| = 1$. Таким образом, $|\sin 3x + \frac{1}{\sin 3x}| \cdot |\cos 2x + \frac{1}{\cos 2x}| \geq 4$, причем последнее неравенство превращается в равенство лишь в случае, когда $|\sin 3x| = 1$ и $|\cos 2x| = 1$. Из исходного уравнения следует, что $\sin 3x$ и $\cos 2x$ должны быть одного знака, поэтому получаем, что уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin 3x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}.$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x = 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \pi k \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} n = \pi k \Leftrightarrow 1 + 4n = 6k$$

$n, k \in Z$

Получаем противоречие с четностью, значит первая система не имеет решений.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} 3x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x = \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} n \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow k = \frac{2}{3} n \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2m \\ n = 3m \end{cases} \quad (m \in Z)$$

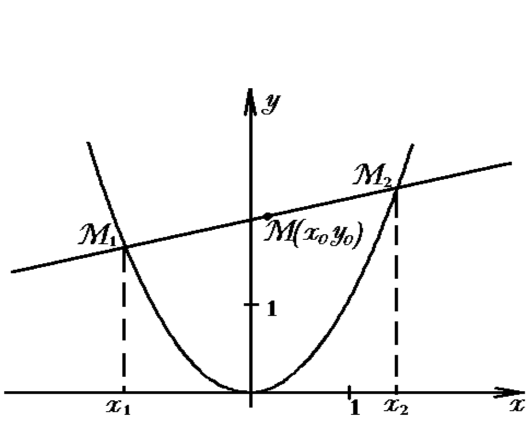
Подставляя значения k (или n), получаем $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$

12. На плоскости начерчена парабола $y = x^2$ в декартовой системе координат (с осями координат и единицей масштаба). Требуется с помощью циркуля и линейки провести через данную точку M прямую так, чтобы ее отрезок между точками пересечения с параболой делился в точке M пополам.

Решение. Пусть $M(x_0, y_0)$ координаты точки M. Если $y_0 < x_0^2$ (т.е. M лежит вне параболы), то, очевидно, задача неразрешима.

Пусть M лежит внутри параболы и искомая прямая имеет уравнение $y = ax + b$. Пусть M_1, M_2 точки пересечения параболы с этой прямой и x_1, x_2 -- их абсциссы, т.е. корни уравнения $x^2 = ax + b$. Тогда из теоремы Виета $x_1 + x_2 = a$. С другой стороны, $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, т.к. M -- середина $M_1 M_2$.



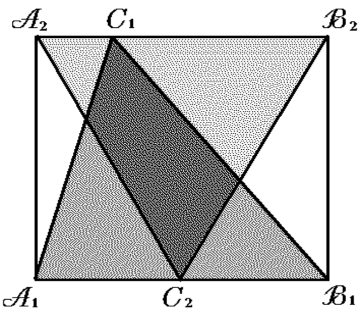
Значит $a = 2x_0$.

Теперь построение очевидно: нужно спроектировать M_0 на ось x, найти удвоенный отрезок проекции и найденную величину a (с учетом знака) использовать как тангенс угла наклона искомой прямой, проходящей через M -- для этого прилежащий катет берем равным единице масштаба.

Замечание. Если M лежит на параболе, то при помощи такого построения мы получим касательную.

13. На каждой грани куба закрасили по треугольнику так, что не все его вершины совпадают с вершинами куба. Доказать, что через центр куба можно провести прямую, не проходящую через закрашенные точки.

Решение. Отобразим каждый закрашенный треугольник на противоположную грань при помощи центральной симметрии относительно центра куба. Тогда на каждой грани получится по два треугольника (исходный и отраженный). Далее мы покажем, что объединение любых двух таких треугольников не совпадает со всей гранью, и поэтому взяв любую "свободную" точку, можно провести через нее и центр куба искомую прямую.

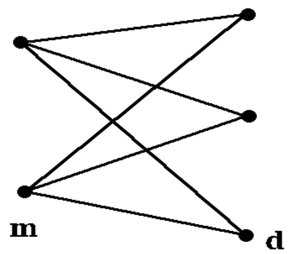


Итак, докажем требуемый факт, а именно: объединение двух "хороших" (т.е. не содержащих 3 вершины квадрата) треугольников не совпадает со всем квадратом. Предположим противное. Тогда две вершины квадрата являются вершинами одного треугольника T_1 , а две другие -- вершинами другого треугольника T_2. Пусть сначала $A_1, B_1 \in T_1$ и $A_2, B_2 \in T_2$. Тогда третья вершина C_1 треугольника T_1 лежит на отрезке A_2B_2 (в противном случае $S_1 = S_{\Delta A_1B_1C_1} < \frac{1}{2}a^2$, где a -- сторона квадрата, и $S_2 = S_{\Delta A_2B_2C_2} \le \frac{1}{2}a^2$). Аналогично, $C_2 \in A_1B_1$. Итак, в квадрате остались "свободные" точки (на рисунке они не заштрихованы).

Если же две противоположные вершины квадрата принадлежат T_1, а две другие -- T_2, то $S_1 < 1/2a^2$ и $S_2 < 1/2a^2$. Итак, во всех случаях получаем противоречие с предположением.

14. В классе каждый мальчик дружит ровно с тремя девочками, а каждая девочка -- ровно с двумя мальчиками. Может ли в этом классе быть всего: а) 24 человека, б) 25 человек?

Решение. а) Пусть m -- число мальиков, d -- число девочек. С одной стороны, число дружеских связей равно $3m$ (если просуммировать их число для всех мальчиков), с другой стороны, оно равно $2d$. Итак, $3m = 2d$. Значит, m -- четное число: $m = 2k$, и тогда $d = 3k$, где $k \in Z$. Получаем $m + d = 5k$, поэтому в классе не может быть 24 человек.



б) Построим пример: возьмем 10 мальчиков и 15 девочек и разобъем их на пятерки, состоящие из 2 мальчиков и 3 девочек. В пятерке каждый мальчик дружит с каждой девочкой (соответствующий граф для такой пятерки показан на рисунке).

Ответ: а)не может; б)может

15. Найти все трехзначные числа n, которые обладают следующим свойством: к n можно приписать слева одну или несколько цифр так, что получится n^2.

Решение. Повторяя рассуждения в решении задачи 2 для 8-го класса, получим, что одно из чисел $n, (n-1)$ нечетное, кратное 125, а другое -- кратное 8. Тогда из соседних к числам 125; $125 \cdot 3 = 375$; $125 \cdot 5 = 625$; $125 \cdot 7 = 875$ выберем кратные 8 и получим два возможных значения n: 376 и 625.

Ответ: $n = 376, n = 625$.

16. Решить неравенство $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} + 8\sin x < 8$

Решение. ОДЗ неравенства есть отрезок [0,1]. На [0,1] функция $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x} + 8\sin x$ монотонно возрастает. Проверим, что $f(1) < 8$. Действительно, $1 + 8\sin 1 < 1 + 8\sin\frac{\pi}{3}$ (т.к. $1 < \frac{\pi}{3}$) и осталось проверить неравенство $1 + 4\sqrt{3} < 8$, т.е. $4\sqrt{3} < 7$, или $16 \cdot 3 < 49$. Таким образом, решением исходного неравенства будут все точки отрезка [0,1]

Ответ: $0 \le x \le 1$

17. На плоскости дан единичный квадрат и отмечено 100 точек. Доказать, что найдется вершина квадрата, от которой сумма расстояний до отмеченных точек не меньше $50\sqrt{2}$

Решение. Пусть A и B -- две противоположные вершины квадрата. Для любой отмеченной точки M_i имеем $AM_i + BM_i \ge AB = \sqrt{2}$. Складывая такие неравенства для всех отмеченных точек, получим

$$(AM_1 + AM_2 + \ldots + AM_{100}) + (BM_1 + BM_2 + \ldots + BM_{100}) \ge 100\sqrt{2}.$$

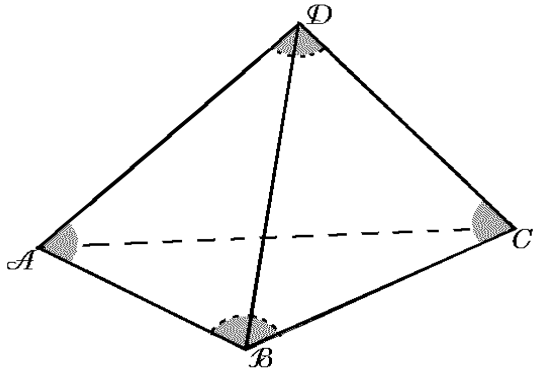
Значит, хотя бы одна из скобок $\ge 50\sqrt{2}$.

18. Пусть $s(a)$ означает сумму цифр числа a и пусть $s_n(a) = s(\underbrace{s(\ldots s(a))\ldots)}_{n\ \text{ðàç}}$ Найти $\lim_{n\to\infty} s_n(1997^{1996})$.

Решение. Воспользуемся следующим фактом, обобщающим признак делимости на 9: любое натуральное число имеет тот же остаток при делении на 9, что и его сумма цифр (этот факт доказывается точно так же, как и признак делимости на 9. Последовательность $s_n(a)$ будет строго убывающей, пока не получится однозначное число, поэтому $\lim_{n\to\infty} s_n(a)$ равен остатку при делении a на 9. Найдем этот остаток для $a = 1997^{1996}$. Поскольку 1997 есть число вида $9k-1$, то 1997 в четной степени дает остаток 1 при делении на 9.

Ответ: 1

19. Существует ли тетраэдр, у которого к каждой вершине прилежит хотя бы один плоский тупой угол?



Решение. Предположим, что такой тетраэдр $ABCD$ существует и пусть AD – его наибольшее ребро. Тогда в ΔADC углы $\angle ADC$ и $\angle CAD$ - острые и, аналогично, $\angle DAB$ и $\angle BDA$ - острые углы. Поэтому углы $\angle BAC$ и $\angle BDC$ -- тупые. Тогда остальные 4 угла в ΔBAC и ΔBDC -- острые, причем их сумма $s < 180^o$. В вершинах B и C имеем тупые углы $\angle DBA$ и $\angle DCA$ (на рисунке отмечены все тупые углы). По свойству трехгранного угла с вершиной B имеем $\angle DBA < \angle ABC + \angle DBC$. Аналогично, $\angle DCA < \angle DCB + \angle ACB$. Складывая эти неравенства, получаем противоречие (в левой части сумма двух тупых углов, а в правой -- сумма $s < 180^o$).

Ответ: не существует.

20. Фирма предлагает товар со склада в Москве в ящиках разной расфасовки. Известно, что любые 30 ящиков можно вывезти на трехтонном грузовике. Доказать, что любые 50 ящиков можно вывезти на пятитонном грузовике.

Решение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ -- веса ящиков (в тоннах), которые надо вывезти. Требуется доказать, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_{50} \le 5$, если сумма любых тридцати слагаемых ≤ 3. Обозначим

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{30},\, S_2 = x_2 + x_3 + \ldots + x_{31}, \ldots, S_{50} = x_{50} + x_1 + \ldots + x_{29}$$

(суммы S_i получаются, если расположить числа $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ по кругу и складывать по 30 чисел подряд, начиная с x_i). Тогда $S_1 + S_2 + \ldots + S_{50} = 30 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_{50})$, т.к. при суммировании чисел $S_1 + S_2 + \ldots + S_{50}$ каждое x_i будет сосчитано 30 раз. Поэтому $x_1 + x_2 + \ldots + x_{50} = \dfrac{1}{30}(S_1 + S_2 + \ldots + S_{50}) \le \dfrac{1}{30} \cdot 50 \cdot 3 = 5$, что и требовалось доказать.

Свойства функций

21. Решить уравнение $x^4 + 4 + 2x(x^2 - 2x + 2) = 0$.

Решение.

Разложим $x^4 + 4$ на множители: $x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 == (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4x + 2) = 0$$

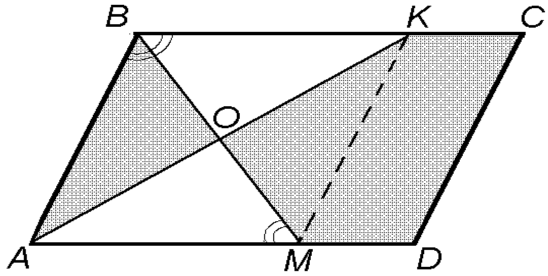
Первый множитель $x^2 - 2x + 2$ не имеет корней, т.к. его дискриминант < 0. Корни второго множителя $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$

Ответ: $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$

22 В параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = 4$, $BC = 7$. Биссектрисы AK и BM углов параллелограмма пересекаются в точке O (точки K и M принадлежат стронам BC и AD соответственно). Найти отношение площадей $S_{OKCDM} : S_{OAB}$.

Решение. 1) Треугольник ABM равнобедренный, т.к. $\angle ABM = \angle MBC = \angle AMB$. Поэтому $AB = AM$. Аналогично, ΔABK -- равнобедренный; $AB = BK$.

2) Четырехугольник $ABKM$ -- ромб, т.к. он -- параллелограмм (его противоположные стороны AM и BK равны и параллельны) и $AB = AM$.



3) Таким образом, $MKCD$ -- параллелограмм со сторонами $MD = 7 - 4 = 3$ и $MK = 4$. Поэтому $\frac{S_{MKCD}}{S_{ABKM}} = \frac{MD}{AM} = \frac{3}{4}$.

4) Обозначим $S = S_{OAB}$. Тогда $S_{ABKM} = 4S$ и $S_{OKCDM} = S_{OKM} + S_{MKCD} = S + \frac{3}{4} \cdot 4S = 4S$

Ответ: 4.

23**.** Дано трехзначное число, делящееся на 9 и не имеющее одинаковых цифр. Цифры этого числа переставляются всевозможными способами. Все полученные таким образом числа (включая исходное) складываются. Доказать, что сумма делится на 1998.

Решение. Пусть $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ -- исходное число. Переставляя цифры, получаем еще 5 чисел $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$. Сумма всех 6 чисел равна $S = 100(2a + 2b + 2c) + 10(2a + 2b + 2c) + (2a + 2b + 2c) = 2(a + b + c) \cdot 111$. Из условия задачи, учитывая признак делимости на 9, имеем $(a + b + c) \vdots 9$. Отсюда $S \vdots (2 \cdot 9 \cdot 111)$, т.е. $S \vdots 1998$.

24**.** Дано 10 чисел: 10, 20, 30,..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т.д. Можно ли в результате нескольких операций получить: а) все одинаковые числа?, б) все числа, равные 200?

Решение. а) Покажем, как проделать три операции с числами $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, чтобы в результате нескольких троек операций все числа стали равными. Пусть m -- наименьшее, а M -- наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Сосчитаем сумму

$$S = (a_1 - m) + (a_2 - m) + \ldots + (a_{10} - m)$$

Если $M = m$, то все числа одинаковые и $S = 0$. Если же $M > m$, то $S > 0$ и мы проделаем следующие три операции, которые S уменьшат на единицу, а значит через несколько таких операций сделают S равным нулю. Эти три операции заключаются в прибавлении по 1 к трем тройкам чисел; если, для определенности, $a_{10} = M$, то эти тройки таковы: $\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}, \{a_7, a_8, a_9\}$. В результате этих трех операций все числа, кроме a_{10}, станут больше на 1 и m станет больше на 1, т.е. S уменьшится на 1.

б) Покажем, что это невозможно. В результате каждой операции сумма чисел увеличивается на 3, значит за n операций она увеличится на $3n$. Вначале эта сумма равнялась $10 + 20 + \ldots + 100 = 550$, т.е. давала остаток 1 при делении на 3. В конце сумма должна равняться 2000, т.е. остаток при делении на 3 должен стать равным 2, что невозможно.

Ответ: а) можно, б) нельзя.

25. В классе 25 учеников. Известно, что среди любых четырех учеников найдутся хотя бы два друга. Доказать, что в классе есть ученик, у которого не менее 8 друзей.

Решение. Предположим противное и рассмотрим произвольного ученика A. Он по предположению имеет <8 друзей, тогда возьмем ученика B, который не дружит с A. B также имеет <8 друзей, тогда возьмем C, который не дружит ни с A, ни с B. Всего у A, B и C имеется не больше $7\cdot 3=21$ друга, а присоединяя к ним самих A, B и C, получим не больше 24 учеников. Значит найдется еще ученик D, который не дружит ни с A, ни с B, ни с C. Тогда для четверки A, B, C, D нарушается условие задачи. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

26. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2 & = x^3+8y^3 \\ x-y & = x^2-4xy+4y^2 \end{cases}$$

Решение. Разложим левую часть первого уравнения на множители, рассматривая её как квадратный трехчлен переменного x с корнями $x_1=-y, x_2=-2y$:

$$x^2+3xy+2y^2=(x+y)(x+2y)$$

Правую часть разложим по формуле суммы кубов. Тогда получим

$$(x+y)(x+2y)=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$$

Отсюда либо $x+2y=0$ либо $x+y=x^2-2xy+4y^2$. В первом случае имеем систему:

$$\begin{cases} x+2y & =0 \\ x-y & =x^2-4xy+4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & =-2y \\ -3y & =4y^2+8y^2+4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x & =-2y \\ y & =0 \text{ èëè } y=-\dfrac{3}{16} \end{cases}$$

Итак, в первом случае получаем два решения: $(0;0)$ и $(\frac{3}{8};-\frac{3}{16})$. Во втором случае

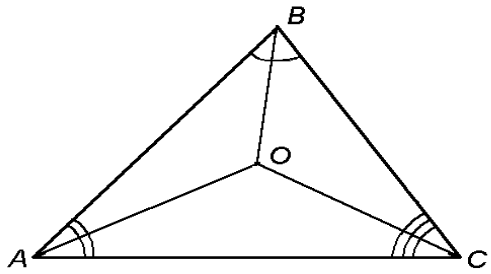
$$\begin{cases} x+y=x^2-2xy+4y^2 \\ x-y=x^2-4xy+4y^2 \end{cases}$$

Вычитая уравнения, получим $2y=2xy$. Отсюда $y=0$ или $x=1$. Таким образом, во втором случае получается три решения $(0;0),(1;0)$ и $(1;\frac{3}{4})$.

Ответ: $(0;0), (\frac{3}{8};-\frac{3}{16}), (1;0), (1;\frac{3}{4})$.

27. На сторонах треугольника как на диаметрах построены три окружности. Доказать, что найдется точка, лежащая внутри всех трех окружностей.

Решение. Докажем, что центр O вписанной в ΔABC окружности лежит внутри всех трех указанных окружностей. Для этого достаточно доказать, что все три угла $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ тупые. Если бы какой-то из этих углов, например $\angle AOB$, был острым или прямым, то мы получили бы $\angle BAO + \angle ABO = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CBA) \geq 90^\circ$, т.е. сумма двух углов $\angle BAC + \angle CAB$ треугольника ABC больше или равна 180°. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.



28**.** Двое играют в такую игру. Первый выбирает одно из двух чисел: 69 или 38. Второй прибавляет одно из тех же двух чисел и так далее: при очередном ходе игрок прибавляет к имеющейся сумме одно из двух чисел: 69 или 38. Выигрывает тот, у кого после его хода получится число с одинаковыми двумя последними цифрами. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Заметим, что $69 \cdot 2 = 138$ и рассмотрим последовательность чисел $a_1 = 69, a_2 = 38, \ldots, a_n = 69n \ (mod\ 100)$, т.е. a_n -- число, составленное из двух последних цифр числа $69n$. Тогда прибавление чисел 69 или 38 соответствует увеличению номера n в нашей последовательности на одну или две единицы. Перечислим первые 14 членов нашей последовательности:

$$69, 38, 07, 76, 45, 14, 83, 52, 21, 90, 59, 28, 97, 66$$

Итак, первым "выигрышным" числом в последовательности является $a_{14} = 66$. Учитывая, что при одном ходе можно продвинуться только на один или два номера в нашей последовательности, получаем следующие выигрышные номера (отмечены плюсом)

Таким образом, первый игрок может выиграть так: своим первым ходом он выбирает 38, а в ответ на очередной ход соперника выбирает другое число (на "69" отвечает "38" и наоборот). Тогда после своего k-го хода первый игрок получает a_{3k-1} и на 5-ом ходу выигрывает.

Ответ: выигрывает первый игрок

29**.** Пусть $s(A)$ означает сумму цифр числа A . Разешимы ли в целых числах уравнения $a)$ $s(m^2) = 300$?á) $s(m^2) + s(n^2) = 300$?

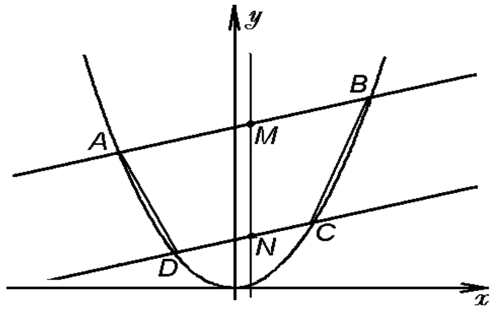
Решение. а) По признаку делимости на 3 получаем, что m^2 делится на 3. Но тогда m^2 делится на 9 и поэтому по признаку делимости на 9 $s(m^2)$ должно делиться на 9. Получаем противоречие, значит уравнение не разрешимо.

б) Известно следующее свойство: любое натуральное число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 9 (это свойство доказывается точно так же, как признак делимости на 9). Квадраты чисел дают при делении на 9 остатки 0; 1; 4; 7. Сумма двух таких остатков может принимать значения: 0; 1; 2; 4; 5; 7; 8. Учитывая упомянутое свойство, получаем отсюда, что $s(m^2) + s(n^2)$ не может иметь остаток 3, равный остатку при делении 300 на 9. Итак, уравнение неразрешимо.

Ответ: а) нет, б) нет.

30. Трапеция вписана в параболу $y = x^2$ на декартовой плоскости. Доказать, что прямая, проходящая через середины оснований трапеции, параллельна оси $0y$.

Решение. Пусть AB и CD -- основания трапеции, и пусть уравнения AB и CD записываются в виде $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$. Тогда абсциссы x_A, x_B точек A, B удовлетворяют уравнению $kx + b = x^2$. Отсюда по теореме Виета $x_A + x_B = k$. Поэтому абсцисса x_M середины AB равна $\frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{k}{2}$. Аналогично, абсцисса середины CD также равна $\frac{k}{2}$.

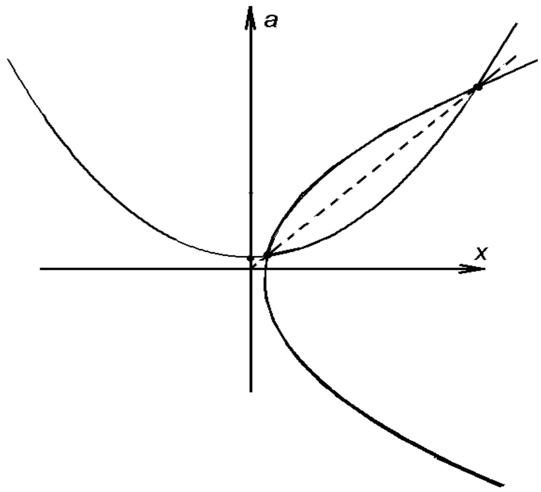


31. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a - x^2 - \frac{1}{5})(x - a^2 - \frac{1}{5}) = 0$ имеет ровно 2 корня.

Решение. Начертим параболы $a - x^2 - \frac{1}{5} = 0$ и $x - a^2 - \frac{1}{5} = 0$ в плоскости xOa. Требуется найти такие значения a_0, при которых прямая $a = a_0$ имеет с параболами две точки пересечения.

Из графика видно (и далее мы это обоснуем), что таких значений три: первое значание $a_0 = \frac{1}{5}$ -- ордината вершины параболы $a = x^2 + \frac{1}{5}$, второе и третье значения a -- это ординаты точек пересечения парабол. Из графика также замечаем, что точки пересечения парабол лежат на прямой $a = x$.

Итак, обоснуем указанные свойства.



1) При $a < \frac{1}{5}$ первый множитель исходного уравнения $(a - x^2 - \frac{1}{5})$ не имеет корней, а второй $(x - a^2 - \frac{1}{5})$ имеет один корень.

2) При $a = \frac{1}{5}$ есть два корня $x = 0$ и $x = \frac{1}{25} + \frac{1}{5}$.

3) Пусть $a > \frac{1}{5}$. Тогда первый множитель имеет два корня $x = \pm\sqrt{a - \frac{1}{5}}$, а второй -- один корень $x = a^2 + \frac{1}{5}$. Поэтому для

тех $a > \frac{1}{5}$, для которых $\sqrt{a-\frac{1}{5}} \neq a^2+\frac{1}{5}$, исходное уравнение будет иметь три корня.

Осталось решить уравнение $\sqrt{a-\frac{1}{5}} = a^2+\frac{1}{5}$. Для этого удобно записать систему

$$\begin{cases} x &= a^2+\frac{1}{5} \\ a &= x^2+\frac{1}{5} \end{cases}$$

Заметим, что для любой монотонно возрастающей функции $f(x)$ решение системы $\begin{cases} y &= f(x) \\ x &= f(y) \end{cases}$ лежит на прямой $y = x$. (Иначе для решения (x_0, y_0) в случае $x_0 < y_0$ мы получили бы $y_0 = f(x_0) < f(y_0) = x_0$, что приводит к противоречию).

В нашем случае функция $f(x) = x^2+\frac{1}{5}$ при $x > \frac{1}{5}$ монотонно возрастает, т.е. условие выполнено, и поэтому $a = a^2+\frac{1}{5}$; $a_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{\frac{1}{5}}}{2}$.

Ответ: при $a \in \{\frac{1}{5}; \dfrac{1\pm\sqrt{\frac{1}{5}}}{2}\}$

32. Все стороны треугольника меньше 1. Можно ли утверждать, что
à) $r < \frac{1}{2\sqrt{3}}$, á) $R < \frac{1}{\sqrt{3}}$, где r è R -- радиусы вписанной и описанной окружностей.

Решение. а) Докажем неравенство $r < \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Используя формулу Герона и формулу площади $S = pr$, получим $r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \leq \sqrt{\frac{1}{p}\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3}$. Здесь мы воспользовались неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим для трех чисел. Таким образом, $r \leq \frac{p}{3\sqrt{3}} < \frac{3/2}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, что и требовалось доказать.

б) Неравенство не будет выполнено, если взять тупоугольный треугольник малых размеров, вписанный в окружность большого радиуса. Возьмем, например, единичную окружность с центром O и рассмотрим центральный угол $AOB = \frac{\pi}{6}$ и пусть C -- середина дуги AB. Тогда $AB = 2\sin\frac{\pi}{12} < 1$, $AC = BC = 2\sin\frac{\pi}{24} < 1$, но $R = 1 > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: а) можно, б) нельзя.

33. Пусть $s(A)$ означает сумму цифр натурального числа A. Решить уравнение $s((\frac{10^n-1}{3})^2)=1998$

Решение. Рассмотрев несколько примеров, приходим к выводу, что

$$(a_n)^2=\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2=(\underbrace{333\ldots3}_{n})^2=\underbrace{11\ldots1}_{n-1}0\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9$$

Докажем по индукции, что $(a_n)^2$ имеет указанный вид. База индукции проверяется непосредственно. Сделаем шаг индукции:

$$(a_{n+1})^2=(10a_n+3)^2=100(a_n)^2+60a_n+9$$

Учитывая предположение индукции и вычислив $60a_n+9=2\cdot10^{n+1}-11=1\underbrace{99\ldots9}_{n-1}89$, получим, что $(a_{n+1})^2$ равно

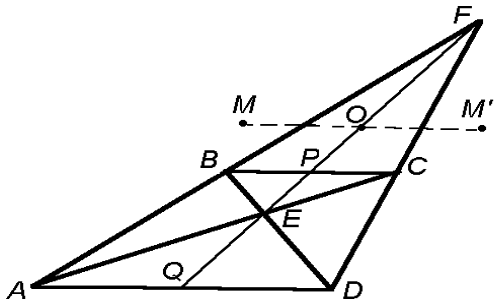
$$\begin{array}{rr} & \underbrace{11\ldots1}_{n-1}0\underbrace{888\ldots8}_{n-1}900 \\ + & 1\underbrace{99\ldots99}_{n-1}89 \\ 1-2 & \underbrace{11\ldots11}_{n}0\underbrace{88\ldots888}_{n}9 \end{array}$$

Таким образом, по методу математической индукции утверждение доказано. Поэтому $s((a_n)^2)=9n$ и исходное уравнение принимает вид $9n=1998$.

Ответ: $n=222$

34. Трапеция вписана в гиперболу $y=1x$ на декартовой плоскости. Доказать, что начало координат лежит на прямой, соединяющей точку пересечения диагоналей с точкой пересечения боковых сторон трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ -- данная трапеция, BC è AD -- ее основания, E -- точка пересечения AC è BD, F -- точка пересечения AB è DC. Известно (далее мы приведем доказательство), что EF проходит через середины P, Q оснований трапеции. Таким образом, требуется доказать, что прямая PQ проходит через начало координат.



Пусть прямые BC и AD имеют уравнения $y=kx+b$ и $y=kx+b_1$ (очевидно, $k\neq0$). Тогда абсциссы точек B è C удовлетворяют уравнению $kx+b=\frac{1}{x}$, следовательно по теореме Виета $x_B\cdot x_C=-\frac{1}{k}$. Точка P как середина BC имеет координаты $\left(\frac{1}{2}(x_B+x_C);\frac{1}{2}(y_B+y_C)\right)$, отсюда

$$y_P = \frac{1}{2}(y_B + y_C) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_B} + \frac{1}{x_C}\right) = \frac{x_B + x_C}{2 \cdot x_B \cdot x_C} = -kx_P$$

т.е. P лежит на прямой $y = -kx$. Аналогично, Q лежит на той же прямой.

Дадим теперь "аффинное" доказательство факта, приведенного в начале решения задачи. Сделаем преобразование плоскости, которое переводит точку M в M' такую, что

$MM' \parallel BC$ и $\overleftarrow{OM} = -\overleftarrow{OM'}$, где O -- точка пересечения PQ и прямой, проходящей через M параллельно BC. Это преобразование (называемое косой симметрией) переводит прямые в прямые. Точки и B и C оно меняет местами и, аналогично, меняет местами A и D, а прямую PQ оставляет неподвижной. Тогда точка E пересечения диагоналей останется неподвижной и, аналогично, останется неподвижной точка F. Значит E и F лежат на прямой PQ.

35**.** Дано 100 чисел: $1,2^1,2^2,\ldots,2^{99}$. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые одиннадцать и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 100 числами проделывается та же операция и т.д. Можно ли в результате нескольких операций получить: а) все одинаковые числа?, б) все числа, равные 2^{100}?

Решение а) Рассуждая так же, как в решении задачи № 4 для 8 класса, в результате девяти операций мы можем увеличить на единицу все числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, кроме наибольшего (т.к. $9 \cdot 11 = 100 - 1$). Тогда после нескольких девяток операций получим одинаковые числа.

б) Так же, как при решении задачи № 4 для 8-го класса, получаем, что числа

$$A_1 = 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{99} = 2^{100} - 1 \text{ è } A_2 = 2^{100} \cdot 100$$

должны иметь одинаковые остатки при делении на 11. Но $A_2 - A_1 = 99 \cdot 2^{100} + 1$ не делится на 11, и мы приходим к противоречию.

Ответ: а) можно, б) нельзя.

36**.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x + \sin x - a)\left(\left|x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} - a\right) = 0$$

имеет ровно два корня.

Решение. 1) Заметим, что функция $f(x) = x + \sin x$ является монотонно возрастающей на всей числовой прямой. Действительно $f'(x) = 1 + \cos x \ge 0$, причем f' обращается в 0 только в точках $\pi + 2\pi k, k \in Z$, и $f' > 0$ слева и справа от этих точек. Значит $f(x)$ возрастает всюду на R. Кроме того, $f(x)$ является нечетной функцией и $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

2) Таким образом первый множитель $x + \sin x - a$ имеет ровно один корень при всех a. Второй множитель $|x - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} - a$ не имеет корней при $a < -\frac{1}{2}$, имеет один корень $x = \frac{1}{2}$

при $a=-\frac{1}{2}$ и имеет 2 корня при $a>-\frac{1}{2}$.

3) При $a=-\frac{1}{2}$ первый множитель имеет отрицательный корень, т.е. $a=-\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию.

4) При $-\frac{1}{2}<a<0$ второй множительимеет два положительных корня $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm(a+\frac{1}{2})$, а первый множитель -- отрицательный корень. Всего уранение имеет три корня.

5) При $a=0$ есть ровно два корня $x_1=0, x_2=1$.

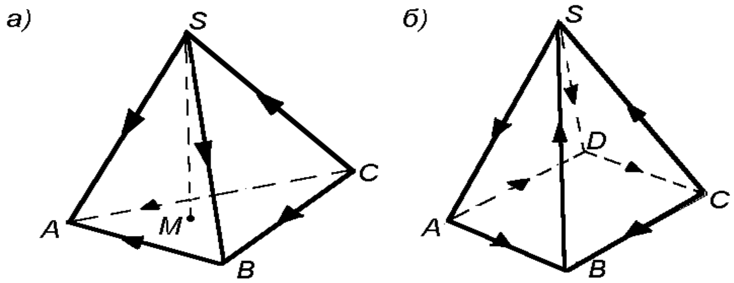
6) При $a>0$ первый множитель имеет положительный корень, а второй -- корни разных знаков $x=\frac{1}{2}\pm(a+\frac{1}{2})$. Поэтому остается найти те значения $a>0$, при которых положительные корни обоих множителей совпадают:

$$x+\sin x-a=x-1-a=0 \qquad (a>0; x>0)$$

Отсюда $\sin x=-1$; $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Тогда $a=\frac{3\pi}{2}-1+2\pi k$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

Ответ: при $a=-\frac{1}{2}$; $a=0$; $a=\frac{3\pi}{2}-1+2\pi k$ $(k=0,1,2,\ldots)$

37. а) Существует ли тетраэдр, на ребрах которого можно выбрать направления так, чтобы сумма получившихся векторов была равна $\overleftarrow{0}$? б) Тот же вопрос для четырехугольной пирамиды.



Решение. а) Докажем, что такого тетраэдра не существует. Предположим противное, и пусть $SABC$ -- искомый тетраэдр с выбранными направлениями ребер. Тогда должны выполняться следующие два свойства: 1) сумма трех векторов любой грани $\neq \overleftarrow{0}$, 2) ни одна вершина не может быть началом трех векторов. Действительно, если свойство 1) не выполняется , например, для грани ABC, то $\pm\overleftarrow{SA}\pm\overleftarrow{SB}\pm\overleftarrow{SC}=\overleftarrow{0}$ при некотором выборе знаков. Значит, векторы $\overleftarrow{SA},\overleftarrow{SB},\overleftarrow{SC}$ компланарны (лежат в одной плоскости). Противоречие. Если свойство 2) не выполняется, например, для вершины S то проведем высоту SM . Тогда сумма проекций всех шести векторов на ось $\overleftarrow{SM}$ будет положительной.

Можно считать, что вершина S является началом двух векторов $\overleftarrow{SA}$ и $\overleftarrow{SB}$ -- иначе сменим знак сразу у всех шести векторов. Тогда из свойств 1) и 2) получим, что направления на ребрах обязаны быть такими:

$\overleftarrow{CS}$ -- из свойства 2) для вершины S;

$\overleftarrow{CB},\overleftarrow{CA}$ -- из свойства 1) для граней BCS и ACS.

Приходим к противоречию со свойством 1) для вершины C

б) Пример такого тетраэдра показан на рис б), где основание $ABCD$ --

параллелограмм.

Ответ: а) не существует, б) существует

38. Дано шестизначное число, делящееся на 3 и не имеющее одинаковых цифр. Цифры этого числа переставляются всевозможными способами. Все полученные таким образом числа (включая исходное) складываются. Доказать, что сумма делится на 1998.

Решение. Пусть n -- наше число, $s(n)$ -- его сумма цифр. При всевозможных перестановках цифр получится 6! чисел. Если зафиксировать последнюю цифру и переставлять остальные цифры, то получится всего 5! чисел. Поэтому при сложении "столбиком" всех 6! чисел в разряде единиц получится $5!\cdot s(n)$. Та же сумма будет и в остальных разрядах. Следовательно, искомая сумма равна $5!\cdot s(n)\cdot(1+10+10^2+10^3+10^4+10^5)=5!\cdot 111111\cdot s(n)$. Это число делится на 1998, т.к. $5!\,\vdots\,6$, $111111\,\vdots\,111$ и $s(n)\,\vdots\,3$.

39. Решить уравнение в натуральных числах $(n!-1)^2 = m!+1$

Решение. Перепишем уравнение в виде $(n!-2)\cdot n! = m!$. Очевидно $n>2$ и $m>n$. Сокращая уравнение на $n!$, получим

$$n!-2=(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot m$$

Если в правой части стоит произведение более двух последовательных чисел, то оно делится на 3, тогда левая часть $(n!-2)$ должна делиться на 3, но это невозможно. т.к. $n!\,\vdots\,3$. Поэтому правая часть равна либо $(n+1)(n+2)$, либо $(n+1)$.

В первом случае получаем $n! = n^2+3n+4$. Значит $4\,\vdots\,n$, т.е. $n=4$, но при подстановке $n=4$ равенство не выполняется.

Во втором случае $n! = n+3$. Значит $3\,\vdots\,n$, т.е. $n=3$ и при этом значении n равенство выполняется. Итак, $n=3, m=n+1=4$.

Ответ: $n=3, m=4$.

40. В школе 610 учеников. Известно, что среди любых 30 учеников школы найдутся хотя бы два друга. Доказать, что есть ученик, у которого более 20 друзей.

Решение. Предположим противное и рассмотрим произвольного ученика A_1. По предположению он имеет не более 20 друзей, тогда возьмем A_2, который не дружит с A_1. Далее рассуждаем по индукции. Пусть мы нашли на n-ом шаге учеников $A_1, A_2, \ldots, A_n$, среди которых нет ни одной пары друзей. Если $21n<610$, то мы сможем найти следующего ученика A_{n+1}, не дружащего ни с одним из $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Это следует из того, что у $A_1, A_2, \ldots, A_n$ друзей не более $20n$, а всего вместе с самими $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будет $21n$ учеников. Тогда в качестве A_{n+1} можно взять любого из оставшихся $610-21n$ учеников школы. Поскольку $21\cdot 29=609<610$, мы сможем найти $A_1, A_2, \ldots, A_{30}$, среди которых нет ни одной пары друзей. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Теоретико-числовые свойства

41**.** Натуральное число назовем интересным, если после вычитания из него суммы его цифр получится число, состоящее из одинаковых цифр. Найти все интересные трехзначные числа.

Решение. Пусть $\overline{xyz}$ -- искомое число. Тогда разность

$$A = \overline{xyz} - (x + y + z) = 99x + 9y = 9(11x + y)$$

делится на 9 и состоит из одинаковых цифр. Поэтому A может равняться либо 99, либо 333, либо 666.

В случае, когда $A = 99$, имеем: $11x + y = 11$, и тогда $x = 1, y = 0, z$ --любая цифра.

В случае, когда $A = 333$, получаем: $11x + y = 37$, и тогда последовательно определяем цифры: $x = 3, y = 0, z$ --любая цифра.

В случае, когда $A = 666$, имеем: $11x + y = 74$, тогда $x = 6, y = 8, z$ --любая цифра.

Ответ: 30 чисел: $100,101,\ldots,109,340,341,\ldots,349,680,681,\ldots,689$.

42. Имеется такой набор гирек: 1^2 ã,4^2 ã,7^2 ã,$\ldots$,100^2 ã (веса гирек -- это квадраты чисел от 1 до 100 с интервалом в 3 единицы), по одной гирьке каждого веса . Можно ли все эти гирьки разложить на две кучи, равные по весу?

Решение. Легко заметить, что всего гирек -- 34, из них 17 -- нечетного веса и 17 -- четного. Поэтому суммарный вес гирек -- нечетное число (в граммах). Значит, разложить гирьки на две равные по весу кучи не удастся.

Ответ: нельзя.

43**.** В правильном семиугольнике провели все диагонали. Есть ли точка внутри семиугольника, в которой пересекаются три диагонали.

Решение. Диагонали семиугольника могут быть двух типов -- малые и большие: по одну сторону от малой диагонали находится одна вершина семиугольника (по другую -- четыре), по одну сторону от большой диагонали -- две вершины (по другую -- три). Пусть AC -- малая диагональ, а B -- та единственная вершина, которая находится по одну сторону от AC. Тогда AC пересекается только с диагоналями, выходящими из B . Таким образом, на малых диагоналях не может быть "тройных пересечений".

Значит, тройное пересечение могло бы появиться лишь при пересечении трех больших диагоналей. Но зто невозможно, т.к. три большие диагонали -- это три равные хорды описанной вокруг семиугольника окружности (семиугольник -- правильный!), а, как легко заметить, любые две равные пересекающиеся хорды симметричны относительно диаметра, проходящего через точку пересечения.

Ответ: нет.

44**.** 100 чисел расположены по кругу. Известно, что суммы любых трех идущих подряд чисел одинаковы. Доказать, что все числа одинаковы.

Решение. Пусть наши числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Тогда имеем цепочку уравнений:

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4 = \ldots = a_{99} + a_{100} + a_{101} = a_{100} + a_{101} + a_{102}$$

Из первого уравнения следует, что $a_1 = a_4$; аналогично, из четвертого: $a_4 = a_7$. Продолжая эти рассуждения, получаем совпадение чисел, расположенных по кругу через два:

$$a_1 = a_4 = a_7 = \ldots = a_{97} = a_{100} = a_3 = \ldots = a_{99} = a_2 = a_5 = \ldots = a_{98}$$

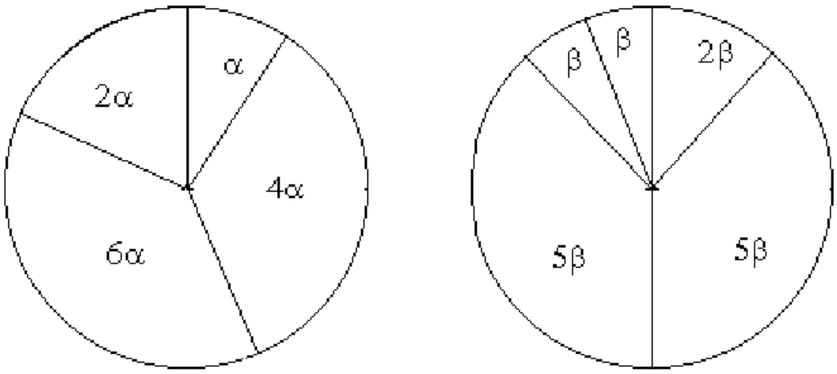
т.е. все числа равны.

45. Какое наименьшее количество радиусов нужно провести в данном круге, чтобы проведенные радиусы (не только соседние) ограничивали:

а) любой угол, кратный $\alpha = 360^\circ/13$ (т.е. $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, 12\alpha$) ?

б) любой угол, кратный $\beta = 360^\circ/14$? (Считается, что мы умеем строить углы α, β и кратные им).

Решение. В случае а) достаточно провести 4 радиуса, а в случае б) -- 5 радиусов (см. рис.)



Покажем, что меньшего числа радиусов недостаточно. Пусть проведено n радиусов. Каждый радиус образует с остальными $n-1$ радиусами не более $2(n-1)$ различных центральных углов (для данных двух радиусов мы рассматриваем оба угла, дополняющие друг друга до 360°). Таким образом, всего имеем не более $n \cdot 2(n-1)$ углов. При этом подсчете каждый угол засчитан дважды, поэтому всего углов -- не более $n(n-1)$. В случае а) при $n \leq 3$ мы получили бы не не более $3 \cdot 2 = 6$ углов, а в случае б) при $n \leq 4$ -- не более $4 \cdot 3 = 12$ углов.

Ответ: а) 4 радиуса, б) 5 радиусов.

46 Решить уравнение

$$(x^3 + (x-1998)^3)(x(x-1)(x-2) + (1998-x)(1999-x)(2000-x)) = 0.$$

Решение. Приравнивая нулю первый сомножитель, получим

$$x^3 - (1998-x)^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = (1998-x)^3 \Leftrightarrow x = 1998 - x \Leftrightarrow x = 999$$

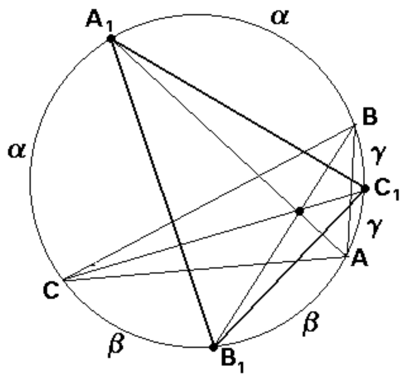
Обозначим второй сомножитель через $f(x)$. Легко убедиться, что $f(x)$ -- квадратный трехчлен, а его график (парабола) симметричен относительно прямой $x = 1000$ (т.к. $f(x)$ имеет вид $g(x) + g(2000-x)$, где g(x)=$x(x-1)(x-2)$). Очевидно, ордината $f(1000)$ вершины параболы положительна, а ветви направлены вверх (последний факт следует, например, из непосредственного подсчета старшего коэффициента: $1998 + 1999 + 2000 - 1 - 2 > 0$). Значит, парабола не пересекает ось Ox, т.е. $f(x)$ корней не имеет.

Ответ: $x = 999$.

47. В треугольнике ABC построены вписанная и описанная окружности. Через центр вписанной окружности O_1 проводятся прямые AO_1, BO_1, CO_1, пересекающие описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 . Известны углы треугольника $A_1B_1C_1 : 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. Найти углы треугольника ABC.

Решение. Пусть $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$. Поскольку AA_1, BB_1 и CC_1 -- биссектрисы углов A, B и C, то по свойству вписанных углов получим угловые величины всех дуг (см. рис.) и значение углов $\Delta A_1B_1C_1$:

$\angle A_1 = \frac{1}{2}(\beta+\gamma),\ \angle B_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma),\ \angle C_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta).$



Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}(\beta+\gamma)/2 & = 40^\circ \\ (\alpha+\gamma)/2 & = 60^\circ \\ (\alpha+\beta)/2 & = 80^\circ\end{cases}$$

Из первого уравнения $\alpha = 180^\circ - (\beta+\gamma) = 100^\circ$; аналогично, из второго: $\beta = 180^\circ - (\alpha+\gamma) = 60^\circ$; из третьего: $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\gamma) = 20^\circ$

Ответ: $100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$.

48. Натуральное число назовем интересным, если после вычитания из него суммы его цифр получится число, состоящее из одинаковых цифр. Найти все интересные шестизначные числа.

Решение. Пусть $x = \overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ -- искомое число, а y -- разность между x и его суммой цифр . Тогда

$$y = 99\,999 \cdot a_5 + 9\,999 \cdot a_4 + 999 \cdot a_3 + 99 \cdot a_2 + 9 \cdot a_1,$$

т.е. y делится на 9. Поэтому y может равняться либо 99 999, либо 333 333, либо 666 666.

В случае, когда $y = 99\,999$, имеем:

$$11111 \cdot a_5 + 1111 \cdot a_4 + 111 \cdot a_3 + 11 \cdot a_2 + a_1 = 11\,111,$$

отсюда $a_5 = 1, a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$, a_0 -- любая цифра.

В случае, когда $y = 333\,333$, получаем:

$$11111 \cdot a_5 + 1111 \cdot a_4 + 111 \cdot a_3 + 11 \cdot a_2 + a_1 = 37\,037,$$

отсюда последовательно находим: $a_5 = a_4 = a_3 = a_2 = 3, a_1 = 5$, a_0 -- любая цифра.

В случае, когда $y = 666\,666$, получаем:

$$11111 \cdot a_5 + 1111 \cdot a_4 + 111 \cdot a_3 + 11 \cdot a_2 + a_1 = 74\,074,$$

отсюда $a_5 = a_4 = a_3 = a_2 = 6$, и тогда $a_1 = 10$, что невозможно.

Ответ: 20 чисел: $100\,000, 100\,101, \ldots, 100\,109, 333\,350, 333\,351, \ldots, 333\,359$.

49. В правильном семиугольнике провели все диагонали. Сколько получилось точек пересеченмя внутри семиугольника? (Для полного решения необходимо выяснить, могут ли в одной точке пересекаться 3 диагонали.)

Решение. Как доказано при решении третьей задачи для 8-го класса, внутри семиугольника не могут пересекаться три (или более) диагонали. Рассмотрим малую диагональ. По одну сторону от нее одна вершина, -- скажем B, по другую -- 4 вершины. Поэтому эта диагональ пересекается со всеми 4 диагоналями, выходящими из B.

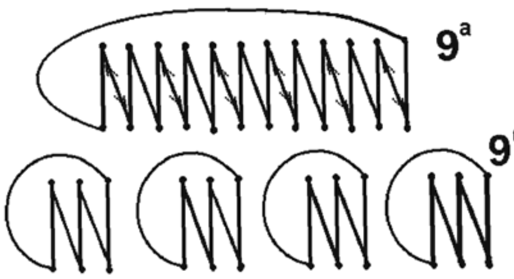
Теперь возьмем большую диагональ. Поскольку по одну сторону от нее 2 вершины, а по другую -- 3, то всего на большой диагонали $2 \cdot 3 = 6$ точек пересечения. Считая для каждой малой и большой диагонали число точек пересечения, получим всего $7 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 70$ точек, но при этом каждая точка засчитана дважды. Таким образом, всего 35 точек.

Ответ: 35

50. В 9^a è $9^{á}$ классах -- по 24 человека, у каждого ученика -- ровно по два друга в своем классе. В обоих классах за каждой партой сидят по два друга. Классные руководители Анна Васильевна и Марья Егоровна пришли к выводу, что для улучшения успеваемости надо, чтобы ни за одной партой не сидели друзья, и они (каждая в своем классе) взялись каждый день менять между собой местами по паре друзей, не сидящих за одной партой. Анна Васильевна утверждает, что в своем классе сможет рассадить всех друзей за 6 дней, а Марья Егоровна говорит, что ей никак не удастся сделать этого менее, чем за 8 дней. Может ли такое быть?

Решение. Да, может (см. рис.)

На рисунке связи указывают на дружбу между учениками, причем вертикальные связи -- на дружбу сидящих за одной партой. Стрелки показывают, как можно за 6 дней рассадить всех друзей в 9^a.



Друзей из любой шестерки в $9^{á}$ (см. рис.), очевидно, нельзя рассадить менее, чем за 2 дня. Таким образом, всего потребуется не менее $2 \cdot 4 = 8$ дней.

51. Решить уравнение $x(x-1)(x-2)(x-3) + (8-x)(7-x)(6-x)(5-x) = 0.$

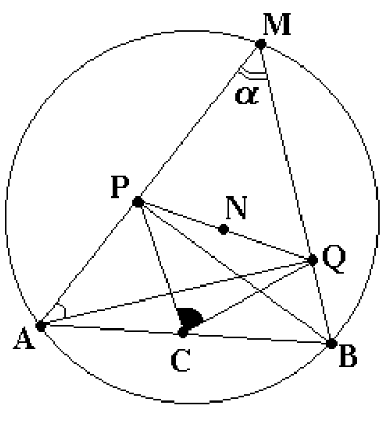
Решение. Сделав замену $t = x - 4$, получим уравнение

$$(4+t)(3+t)(2+t)(1+t) + (4-t)(3-t)(2-t)(1-t) = 0.$$

После приведения подобных членов получается, очевидно, биквадратное уравнение, причем коэффициенты при t^4, t^2 и t^0 положительны. Значит, оно не имеет решения.

Ответ: корней нет.

42. Даны окружность S и ее хорда AB, являющаяся диаметром окружности S_1. Из точки M окружности S проводятся прямые MA и MB, пересекающие S_1 еще в двух точках; пусть N -- середина отрезка между этими точками пересечения. Какую линию опишет точка N, когда M движется по окружности S ?



Решение. Рассмотрим случай остроугольного треугольника AMB . Пусть P,Q -- точки пересечения с S_1 прямых MA и MB соответственно, и пусть C -- центр S_1, т.е. середина AB. Угол $\angle PCQ$ -- центральный угол окружности S_1, значит он вдвое больше вписанного угла $\angle PAQ$. Но $\angle PAQ = 90^\circ - \angle AMQ$, т.к. угол AQB -- прямой (он опирается на диаметр AB).

Обозначим $r = AC$ и $\alpha = \angle AMQ$ (этот угол опирается на хорду AB окружности S, поэтому он -- постоянный; точнее, при переходе точки M по другую сторону от AB угол α меняется на дополнительный до 180°). Тогда $\angle PCQ = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha$,т.е. при движении точки M по S угол PCQ остается постоянным. В равнобедренном треугольнике PCQ медиана CN равна $r \cdot \cos\frac{\angle PCQ}{2} = r \cdot \sin\alpha$. Итак, точка M принадлежит окружности радиуса $r\sin\alpha$ с центром в точке C.

Аналогично рассматриваются два других случая расположения в зависимости от того, по какую сторону от AB лежат точки P, Q.

Ответ: окружность, концентрическая с S_1.

43. а) По кругу надо расставить 100 чисел, каждое из которых может принимать одно из 10 значений: $1,2,\ldots,10$. Сколькими способами можно расставить числа так, чтобы суммы любых трех подряд идущих чисел совпадали? (Две расстановки мы не различаем, если одна из другой получается поворотом).

б) Тот же вопрос для 99 чисел (остальные данные те же: числа принимают 10 значений, суммы трех подряд идущих одинаковы).

Решение. а) Так же, как в 4-й задаче для 8-го класса получаем, что все числа должны быть одинаковы. Таким образом, имеется 10 расстановок.

б) Числа, расположенные через два должны совпадать: $a_{i+3} = a_i$ (где индексы берутся как остатки при делении на 99). Поэтому расстановка определяется тремя числами a_1, a_2, a_3 . Обратно: задав любую упорядоченную тройку чисел (a,b,c) и повторяя эту тройку 33 раза, мы получим требуемую расстановку. Будем называть ее расстановкой вида (a,b,c) .

Если числа a,b,c различны, то есть еще ровно две расстановки, совпадающие с расстановкой вида (a,b,c) -- это расстановки вида (b,c,a) и (c,a,b). Таким образом, расстановок, определяемых тройками различных чисел, в три раза меньше, чем упорядоченных троек, т.е. всего $(10 \cdot 9 \cdot 8) : 3 = 240$ расстановок.

Расстановка вида (a,a,b) совпадает с расстановками вида (a,b,a) и (b,a,a), значит, таких расстановок столько же, сколько упорядоченных пар (a,b), ãäå $a \neq b$, т.е. $10 \cdot 9 = 90$.

Наконец, есть 10 расстановок вида (a,a,a). Итак, всего $240 + 90 + 10 = 340$ расстановок.

Ответ: а) 10 ; б) 340

44. Для данных целых чисел b,c,d рассматриваются две функции

$$f(x) = x^2 + bx + c \ \ (mod\ 4\ ), \ \ g(x) = x^2 + (b+3)x + d \ \ (mod\ 4\ )$$

целого аргумента x, где $(mod\ 4\ )$ означает остаток при делении на 4, т.е. для вычисления значения функции вычисляют значение квадратного трехчлена, а потом берут остаток при делении на 4. Докажите, что во множестве значений функций f è g ровно одно общее.

Решение. Коэффициенты при x у многочленов f и g разной четности. Пусть для определенности b -- четное число: $b = 2b_1$. Тогда $x^2 + 2b_1x = (x + b_1)^2 - b_1^2$. Квадраты целых чисел при делении на 4 дают остатки 0 или 1, а $f(x)$ отличается от $(x + b_1)^2$ $(mod\ 4)$ только постоянным слагаемым, значит, $f(x)$ принимает какие-то два соседних значения во множестве остатков.

Для $g(x)$ первые два слагаемых дают всегда четное число: $x^2 + (b+3)x = x(x + 2b_1 + 3)$ (произведение чисел разной четности). Значит, $g(x)$ принимает во множестве остатков два значения, отличающиеся на 2 (т.е. $\{0, 2\}$ или $\{1, 3\}$). Теперь становится очевидным, что значения f и g пересекаются ровно в одной точке.

45. а) В Совете акционеров компании "Блат-Инвест" 8 человек, причем у каждого не менее 4 друзей в Совете. Им нужно выбрать из своего состава президента и вице-президента компании. Естественно, они хотят это сделать так, чтобы каждый невыбранный был другом хотя бы одного из двух выбранных. Докажите, что они смогут организовать нужные выборы.

б) Справедливо ли то же утверждение для 9 человек, у каждого из которых не менее 4 друзей ?

Решение. а) Количество (неупорядоченных) пар, которые можно составить из n человек равно $\frac{n(n-1)}{2}$. У каждого члена Совета не более трех недругов, значит для него "плохих" пар (т.е. тех, которые ему не следует выбирать) -- не более трех (= $\frac{3\cdot(3-1)}{2}$). Тогда всего "плохих" пар -- не более $8\cdot 3 = 24$. С другой стороны, число всех пар из 8 человек равно $\frac{8\cdot(8-1)}{2} = 28$. Значит, найдется пара, которая не является " плохой" ни для одного.

б) Контрпример можно описать следующим образом. Рассмотрим 9 клеток таблицы 3×3 и каждую клетку объявим "членом Совета", а друзьями -- те 4 клетки , которые находятся в том же столбце или той же строке. Очевидно, что какую бы пару клеток ни взять, после вычеркивания их столбцов и строк останется одна или две невычеркнутые клетки, т.е. данная пара для невычеркнутой клетки будет "плохой".

Ответ: б) не справедливо.

46. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^{100} + y^{100} & = 1 \\ |x| + |y| & = a \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

Решение. Очевидно, множество решений системы на плоскости xOy симметрично относительно координатных осей и начала координат, поэтому достаточно рассмотреть первый квадрант. Очевидно, при $a \le 0$ система решений не имеет, поэтому можно считать $a > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^{100} + (a-x)^{100}$ при $x \in [0; a]$. Имеем:

$f'(x) = 100(x^{99} - (a-x)^{99})$. Тогда $f'(x) = 0$ при $x = a/2$, причем $f'(x) < 0$ при

$x < a/2$ и $f'(x) > 0$ при $x > a/2$. Значит, $f(x)$ достигает наибольшего значения a^{100} на концах отрезка $[0;a]$ и наименьшего значения $a^{100}/2^{99}$ -- в его середине $a/2$, а любое значение между $a^{100}/2^{99}$ и a^{100} функция принимает в двух точках, симметричных $a/2$.

Из этого рассмотрения вытекает следующее:

1) если $a^{100} < 1$ или $a^{100}/2^{99} > 1$, т.е. при $a < 1$ или $a > 2^{99/100}$ функция $f(x)$ не достигает значения $y = 1$, значит система решений не имеет.

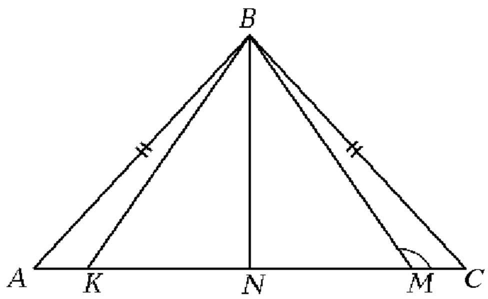
2) если $1 < a < 2^{99/100}$, то $f(x)$ достигает значение 1 в двух точках внутри $[0;a]$, тогда в первом квадранте будет два решения, а на всей плоскости -- восемь.

3) при $a = 1$ имеем ровно 4 решения: $(1;0), (-1;0), (0;1), (0;-1)$

4) при $a = 2^{99/100}$ также имеем ровно 4 решения: $(\frac{a}{2};\frac{a}{2}), (\frac{a}{2};-\frac{a}{2}), (-\frac{a}{2};\frac{a}{2}), (-\frac{a}{2};-\frac{a}{2})$.

Ответ: при $a = 2^{99/100}$; $a = 1$.

47. Дан $\Delta A_1B_1C_1$, вписанный в единичную окружность T. Биссектрисы треугольника продолжаются до пересечения с T . Точки пересечения с T являются вершинами треугольника $\Delta A_2B_2C_2$. И так далее: $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ получается из $\Delta A_nB_nC_n$ при пересечении продолжений его биссектрис с T . Таким образом, имеем последовательность треугольников, вписанных в единичную окружность. Найти предел последовательности площадей: $\lim_{n\to\infty} S_{\Delta A_nB_nC_n}$.



Решение. Пусть $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ -- углы $\Delta A_nB_nC_n$. Тогда, как следует из решения 2-й задачи для 9 класса, углы $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ равны $\frac{1}{2}(\beta_n + \gamma_n)$, $\frac{1}{2}(\alpha_n + \gamma_n)$, $\frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)$.

Обозначим $d_n = (\alpha_n - \frac{\pi}{3})^2 + (\beta_n - \frac{\pi}{3})^2 + (\gamma_n - \frac{\pi}{3})^2$, это число выражает меру отклонения углов от среднего значения $\frac{\pi}{3} = \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n}{3}$. Вычислим, как связаны d_n и d_{n+1}.

$$d_{n+1} = (\alpha_{n+1} - \frac{\pi}{3})^2 + (\beta_{n+1} - \frac{\pi}{3})^2 + (\gamma_{n+1} - \frac{\pi}{3})^2 =$$

$$= \left(\frac{\beta_n + \gamma_n}{2} - \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n}{3}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_n + \gamma_n}{2} - \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n}{3}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2} - \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n}{3}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n+\gamma_n}{3}-\alpha_n\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n+\gamma_n}{3}-\beta_n\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n+\gamma_n}{3}-\gamma_n\right)^2=\frac{d_n}{4}$$

Таким образом, d_n стремится к нулю. Поэтому углы $\Delta A_nB_nC_n$ стремятся к $\frac{\pi}{3}$, а центральные углы единичной окружности, лежащие против сторон $\Delta A_nB_nC_n$ стремятся к $\frac{2\pi}{3}$. Площадь $S_{\Delta A_nB_nC_n}$ равна сумме площадей трех равнобедренных треугольников с единичными боковыми сторонами и указанными центральными углами при вершине. Поэтому $S_{\Delta A_nB_nC_n}$ стремится к $3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

48. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(n)=n(n-1)(n-2)(n-3)+(100-n)(99-n)(98-n)(97-n)$ целого аргумента $n,\ 0\le n\le 100$.

Решение. Сделав замену $m=n-50$, получим $-50\le m\le 50$ и

$$f(n)=f(m+50)=(50+m)(49+m)(48+m)(47+m)+(50-m)(49-m)(48-m)(47-m)$$

После приведения подобных членов останутся только члены с четными степенями, причем коэффициенты при m^4, m^2 и m^0 положительны. Значит, $f(m+50)$ наименьшего значения $2\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47$ достигает при $m=0$, а наибольшего значения $100\cdot 99\cdot 98\cdot 97$ -- при $m=\pm 50$

Другой (комбинаторный) способ решения основан на том, что $f(n)$ отличается лишь множителем 4! от величины $C_n^4+C_{100-n}^4$. Тогда вычитая $f(n+1)-f(n)$ и пользуясь известным свойством сочетаний $C_{n+1}^{m+1}=C_n^{m+1}+C_n^m$, получим тот же результат.

Ответ: наименьшее значение $2\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47$ достигается при $n=50$, наибольшее значение $100\cdot 99\cdot 98\cdot 97$ -- при $n=0$ и $n=100$.

49. Многочлен $P(x)$ степени $n\ge 6$ с целыми коэффициентами имеет n различных целых корней. Доказать, что многочлен $P(x)-3$ имеет n действительных корней.

Решение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ -- корни $P(x)$ в порядке возрастания. Тогда

$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, где старший коэффициент a_0 -- целое число. В интервалах $(-\infty; x_1), (x_1; x_2), \ldots, (x_n; +\infty)$ происходит чередование знаков. Другими словами, если взять по точке из этих интервалов, то знаки $P(x)$ в этих точках будут чередоваться. Покажем, что и для многочлена $P(x)-3$ можно найти $n+1$ точек в порядке возрастания, в которых знаки чередуются. Тем самым будет доказано наличие n корней.

Пусть $z=(x_i+x_{i+1})/2$ -- середина интервала между корнями x_i и x_{i+1}. Заметим, что расстояния от z до корней -- числа вида $m/2$, где m -- целое. Самое маленькое расстояние не меньше $\frac{1}{2}$ и оно может достигаться не более, чем для двух корней (справа и слева от z), следующее по величине расстояние не меньше $\frac{3}{2}$ и оно также достигается не более чем для двух корней, и т.д. Таким образом,

$$|P(z)| = |a_0| \cdot |z - x_i| \cdot |z - x_{i+1}| \cdot |z - x_{i-1}| \cdot |z - x_{i+2}| \cdots \geq 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{225}{64} > 3$$

Возьмем середины конечных интервалов $(x_i\,; x_{i+1})$, и кроме того такие две точки из $(-\infty\,; x_1)$ и $(x_n\,; +\infty)$ соответственно, в которых значение $P(x)$ по модулю больше трех. Получим $n+1$ точек. По доказанному значения многочленов $P(x)$ и $P(x)-3$ в этих точках имеют одинаковые знаки . Таким образом, имеем $n+1$ точек, в которых знаки многочлена $P(x)-3$ чередуются.

50. а) В классе 30 человек, причем у каждого -- ровно по два друга в этом классе, и за каждой из 15 парт сидят друзья. Классный руководитель Анна Васильевна решила, что в этом кроется причина плохой успеваемости и взялась каждый день менять между собой местами по паре друзей, не сидящих за одной партой. Докажите, что она сможет не более, чем за 10 дней добиться того, чтобы ни за одной партой не сидели друзья.

б) Может ли так быть, что не удастся рассадить всех друзей менее, чем за 10 дней.

Решение. Рассмотрим данного ученика A и возьмем его друга, затем у этого друга возьмем его друга и т.д., в конце концов цепочка замкнется на À -- это следует из того условия, что у каждого ровно 2 друга. Таким образом, класс разбивается на замкнутые цепочки друзей (на языке теории графов : граф распадается на циклы). Очевидно, что в каждой цепочке -- четное число людей (удвоенное число парт, на которых они сидят), причем это число не меньше четырех.

Рассмотрим одну цепочку, пусть в ней $2m$ человек, т.е. они сидят за m партами. Если m четно, то друзей в цепочке можно рассадить за $m/2$ дней (см. рис. к 5-й задаче для девятого класса). Если же m нечетно -- в этом случае называем цепочку нечетной -- то друзей можно рассадить за $(m+1)/2$ дней.

Пусть в классе L нечетных цепочек . Тогда из наших рассуждений следует, что всех друзей в классе можно рассадить за $N = (15+L)/2$ дней (15 -- это сумма значений m по всем цепочкам, т.е. число парт; каждая нечетная цепочка добавляет единичку, итого добавляется L единиц). Но $L \leq \frac{30}{6}$, т.к. 6 -- это самая маленькая длина нечетной цепочки. В итоге получаем $N \leq 10$, причем N достигает наибольшего значения 10, когда класс разбит на 5 цепочек длины 6. В последнем случае такой класс, очевидно, нельзя рассадить меньше, чем за 10 дней (каждую цепочку нельзя рассадить меньше, чем за два дня).

Ответ: б) может.

51**.** Найти все пятизначные числа, обладающие следующим свойством: если у такого числа зачеркнуть две первые цифры, то получится трехзначное число, которое в 17 раз меньше исходного.

Решение. Пусть a -- двузначное число, составленное из первых двух цифр, и b -- трехзначное число из трех последних цифр искомого числа. Тогда из условия задачи следует, что $1000a + b = 17b$. Отсюда $2b = 125a$. Значит, a -- четное число: $a = 2k$, и $b = 125k$. Поскольку a -- двузначное число, а b -- трехзначное, то $2k \geq 10$ и $125k \leq 999$, то есть $5 \leq k \leq 7$. Таким образом, имеем три решения $125 \cdot 17 \cdot k$ при $k = 5$, $k = 6$ и $k = 7$.

Ответ: $10625, 12750, 14875$.

52**.** Дан равнобедренный треугольник ABC . На его основании AC взята точка M такая, что $AM = BM + MC$. Найти $\angle BMC$.

Решение

Проведем высоту BN и построим отрезок BK , симметричный отрезку BM относительно прямой BN. Поскольку треугольник ABC -- равнобедренный, то $AN = NC$ и $AK = MC$. Поэтому соотношение $AM = BM + MC$ запишется в виде: $KM = BM$. Таким образом, треугольник KBM -- равносторонний, значит $\angle BMA = 60^\circ$ и $\angle BMC = 120^\circ$.

Ответ: 120°.

53**.** В некоторые клетки квадратной таблицы 8×8 поставили знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 4×4, в которых одинаковое количество плюсов.

Решение. Подсчитаем сначала количество квадратов 4×4 в таблице 8×8. Каждый такой квадрат однозначно определяется положением своей левой нижней вершины. Этой вершиной может быть любая узловая точка той части таблицы, которая останется, если из таблицы 8×8 отрезать сверху и справа каемку в 4 клетки: останется левый нижний квадрат размера 4×4. В таком квадрате $5^2 = 25$ узловых точек. Итак, имеется 25 квадратов 4×4.

Различных вариантов (по количеству плюсов) заполнения квадрата 4×4 имеется 17 "штук" (число плюсов -- от 0 до 16). Значит, найдутся хотя бы два квадрата 4×4 с одинаковым количеством плюсов.

5**4.** Единичный квадрат первой четверти декартовой системы координат ($x, y \in [0,1]$) разбит на квадратики со стороной $\frac{1}{2000}$. Сколько узлов этого разбиения внутри квадрата лежит на параболе $y = x^2$?

Решение. Внутренние узлы разбиения имеют координаты $x = \frac{k}{2000}$, $y = \frac{m}{2000}$, где $k = 1,2,\ldots,1999,\ m = 1,2,\ldots,1999$. Данный узел $(\frac{k}{2000}, \frac{m}{2000})$ лежит на параболе $y = x^2$, если $\frac{m}{2000} = (\frac{k}{2000})^2$. Отсюда $2000\cdot m = k^2$. Значит, k^2 делится на $2000 = 2^4\cdot 5^3$ и поэтому k делится на $2^2\cdot 5^2 = 100$. Тогда $k = 100\cdot l$, где $l < \frac{2000}{100}$, т.е. l принимает значения $1,2,\ldots,19$; соответствующие значения m получим из равенства $2000m = (100l)^2$, откуда $m = 5l^2$.

Ответ: 19.

55. а) Из квадратной доски 5×5 вырезали угловую клетку. Какое наибольшее число шахматных коней можно разместить на этой доске так, чтобы они не били друг друга?

б) Тот же вопрос для доски $(2n-1)\times(2n-1), n > 2,$ с отрезанной угловой клеткой.

Решение а) Если разместить коней на всех черных клетках доски, раскрашенной в шахматном порядке, то очевидно, что эти 12 коней не бьют друг друга (конь может бить только клетку другого цвета).

Докажем, что больше 12 коней разместить не удастся. Для этого разобьем нашу доску на 12 пар клеток так, чтобы клетки любой пары соответствовали ходу коня. Тогда при требуемом размещении коней в каждой такой паре клеток может находиться не более одного коня. Примеров разбиения на пары можно привести очень много; можно даже привести способ обхода нашей доски шахматным конем (см. рис.), тогда соответствующие пары -- это клетки $1-2, 3-4, \ldots, 23-24$.

б) Так же, как в пункте а), размещая коней на черных клетах, получим

$((2n-1)^2-1)/2 = 2n^2-2n$ коней. Теперь, чтобы доказать максимальность этого числа, надо нашу доску разбить на пары клеток. На рисунке показано, как можно разбить на пары некоторые куски доски и показано, как доску 7×7 с отрезанной клеткой можно разбить на такие куски.

На следующем рисунке показано, как, имея разбиение на пары для данной доски, можно получить разбиение на пары для новой доски, у которой на каждой стороне на 4 клетки больше, т.е. для доски $(2n+3)\times(2n+3)$ с отрезанной клеткой. Таким образом, начиная с разбиения доски 5×5 или 7×7 с отрезанной клеткой и затем постепенно увеличивая стороны на 4, мы получим разбиение нашей доски.

Ответ: а) 12; б) $2n^2-2n$

56. Решить уравнение $\sqrt{x+1999} = \sqrt{x} + y$ в целых числах x, y .

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим: $2y\sqrt{x} = 1999 - x$. Поскольку $y \neq 0$, то $\sqrt{x}$ -- рациональное число. Но корень из целого числа x может быть рациональным числом только в том случае, когда x -- полный квадрат (действительно, если $\sqrt{x} = p/q$ -- несократимая дробь, то $x = p^2/q^2$ и поэтому p делится на любой простой делитель числа q, что при $q > 1$ противоречит взаимной простоте p и q).

Итак, $x = z^2$ для некоторого натурального z , и требуется найти z так, чтобы число z^2+1999 было полным квадратом:

$$z^2+1999 = t^2 \Leftarrow (t-z)(t+z) = 1999 .$$

Поскольку 1999 -- простое число, то имеем единственную возможность разложения 1999 на натуральные множители: $t-z=1, t+z=1999$. Отсюда $t=1000, z=999$ и тогда $x=999^2$, $y=1$. Легко непосредственно проверить это решение.

Ответ: $x = 999^2$, $y = 1$.

57. Дан треугольник ABC. На его сторонах как на диаметрах во внешнюю сторону построены полукруги. Объединение треугольника и полукругов образует фигуру T . Доказать, что диаметр фигуры T равен полупериметру ΔABC . (Диаметр фигуры -- это наибольшее расстояние между ее точками).

Решение Пусть A_1, B_1, C_1 -- середины сторон BC, AC и AB соответственно. Очевидно, что если MN -- диаметр фигуры T , то M и N -- точки на границе T (иначе отрезок MN можно было бы продолжить до границы).

Могут быть два случая: 1) M и N -- точки одной полуокружности, построенной, скажем, на AB, и 2) M, N принадлежат двум разным полуокружностям, построенным, скажем, на AB и BC. В первом случае, очевидно, длина MN не превосходит длины AB. Во втором случае проведем прямую C_1A_1 и точки пересечения с полуокружностями обозначим P и Q. Тогда MN не превосходит длины ломаной MC_1A_1N, а эта длина равна PQ. Таким образом, во втором случае MN достигает наибольшего значения PQ, когда M совпадает с P, а N совпадает с Q. Длина PQ равна полупериметру ΔABC, т.к. $PC_1 = \frac{AB}{2}, A_1Q = \frac{BC}{2}, C_1A_1 = \frac{AC}{2}$ (по свойству средней линии треугольника).

Поскольку полупериметр треугольника больше любой стороны, то получаем, что на самом деле имеет место второй случай, причем возможны ровно три положения отрезка MN, при которых длина MN достигает значения полупериметра ΔABC (по одному положению для каждой пары полуокружностей).

58**.** Для каждого из 12 чисел на циферблате часов подсчитали сумму двух соседних чисел (справа и слева). Подсчитанные числа записали по кругу -- получили результат первой процедуры. С новыми числами повторили указанную процедуру, и так далее: всего эту процедуру проделали 20 раз. Найти сумму чисел по кругу после 20-й процедуры.

Решение. Заметим, что в результате одной процедуры сумма чисел на круге удваиваивается. Действительно, в течение одной процедуры каждое число дважды участвует в качестве слагаемого, а именно, один раз -- когда вычисляют сумму для его правого соседа, и другой раз -- для левого. Таким образом, в результате 20 процедур сумма чисел станет равной $(1+2+\ldots+12)\cdot 2^{20} = 78\cdot 2^{20}$.

Ответ: $78\cdot 2^{20}$.

59. а) Из таблицы 6×6 вырезали квадрат из четырех клеток. Докажите, что оставшуюся часть таблицы можно разбить на доминошки (прямоугольники 2×1) так, что число горизонтальных доминошек равно числу вертикальных.

б) Верно ли то же утверждение для таблицы 8×8 с вырезанным квадратом из четырех клеток?

Решение. а) Можно считать, что отрезанный квадрат находится среди первых четырех горизонталей (иначе перевернем таблицу). Те две горизонтали, где находится квадрат, покроем четырьмя вертикальными доминошками, а остальные две горизонтали среди первых четырех -- шестью горизонтальными доминошками. Пятую и шестую горизонтали покроем двумя горизонтальными и четырьмя вертикальными доминошками. Таким образом, получим требуемое разбиение.

б) Докажем, что если вырезать в любом месте таблицы 8×8 квадрат 2×2, то оставшуюся часть нельзя покрыть доминошками с указанными требованиями. Раскрасим всю таблицу в четыре цвета следующим образом (см. рис.) и предположим противное, т.е. предположим, что требуемое покрытие существует. Обозначим через v_1, v_2, v_3, v_4 количество клеток, соответственно, цвета 1, 2, 3, 4, занятых вертикальными доминошками, и аналогичное обозначение g_1, g_2, g_3, g_4 введем для горизонтальных доминошек. По нашему предположению имеем:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 30, (1)$$

т.к. осталось 60 клеток, занятых поровну горизонтальными и вертикальными доминошками.

Очевидно, отрезанный квадрат содержит клетки всех четырех цветов, поэтому остается по 15 клеток каждого цвета. Поэтому

$$v_1 + g_1 = v_2 + g_2 = v_3 + g_3 = v_4 + g_4 = 15.(2)$$

Кроме того, в силу расположения цвета клеток (см. рис.) имеем:

$$g_2 = g_3,\, g_1 = g_4,\, v_1 = v_2,\, v_3 = v_4.$$

Используя (2), из равенства $g_2 = g_3$ получим: $15 - v_2 = 15 - v_3$, т.е. $v_2 = v_3$. Таким образом, $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$. Подставляя в (1), получим противоречие (т.к. 30 не делится на 4).

Замечание. Аналогичное доказательство проходит для таблиц $(4n+2)\times(4n+2)$ в задаче а) и для таблиц $4n \times 4n$ в задаче б).

Ответ: б) нет

60. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ с целочисленными координатами вершин в декартовой системе координат. Докажите, что $ABCD$ содержит параллелограмм с целочисленными координатами вершин. (Вершины параллелограмма и четырехугольника могут совпадать).

Решение Проведем диагональ BD и пусть для определенности $S_{\Delta ABD} \geq S_{\Delta CBD}$. Рассмотрим ΔAB_1D_1, где $\overleftarrow{AB_1} = 2\overleftarrow{AB}$ и $\overleftarrow{AD_1} = 2\overleftarrow{AD}$. Пусть C_1 -- середина B_1D_1. Точка C обязана лежать в трапеции BB_1D_1D, т.к. в силу выпуклости $ABCD$ она принадлежит $\angle BAD$, а в силу неравенства $S_{\Delta ABD} \geq S_{\Delta CBD}$ она находится в полосе между BD и B_1D_1.

Если $C \in BC_1D$, то отразим C симметрично относительно середины отрезка BD. Полученная точка C' удовлетворяет соотношению: $\frac{1}{2}(\overleftarrow{OC} + \overleftarrow{OC'}) = \frac{1}{2}(\overleftarrow{OB} + \overleftarrow{OD})$, где O -- начало координат. Отсюда $\overleftarrow{OC'} = \overleftarrow{OB} + \overleftarrow{OD} - \overleftarrow{OC}$. Значит, C' имеет целочисленные координаты и, поскольку $C' \in \Delta ABD$, то $BCDC'$ -- искомый параллелограмм.

Если $C \in \Delta BB_1C_1$, то сдвинем C на вектор $\overleftarrow{BA}$, т.е. $\overleftarrow{CC'} = \overleftarrow{BA}$. Поскольку этот вектор целочисленный и $C' \in \Delta ABC$, то $ABCC'$ -- искомый параллелограмм.

Случай $C \in \Delta DC_1D_1$ полностью аналогичен последнему.

61. Найти все значения параметра α, при которых уравнение $x^2 - (2\sin^3\alpha)x - \cos 2\alpha = 0$ имеет корень на отрезке $[1, 2]$.

Решение. При всех α ветви параболы $y = x^2 - (2\sin^3\alpha)x - \cos 2\alpha$ направлены вверх, а ее вершина имеет абсциссу $\sin^3\alpha \leq 1$. Значит, на отрезке [1,2] функция $y(x)$ возрастает, и условие задачи равносильно системе неравенств $\begin{cases} y(1) \leq 0 \\ y(2) \geq 0 \end{cases}$. Второе неравенство системы принимает вид: $4 - 4\sin^3\alpha - \cos 2\alpha \geq 0 \Leftarrow 3 - 4\sin^3\alpha + 2\sin^2\alpha \geq 0$. Если $\sin\alpha \leq 0$, то левая часть последнего неравенства положительна. Если же $\sin\alpha > 0$, то $\sin\alpha \geq \sin^3\alpha$ (т.к. $\sin\alpha \leq 1$) и поэтому $3 - 4\sin^3\alpha + 2\sin^2\alpha \geq 3 - 4\sin\alpha + 2\sin^2\alpha > 0$ при всех α , поскольку этот квадратный трехчлен относительно $\sin\alpha$ имеет отрицательный дискриминант. Итак, второе неравенство всегда выполнено.

Первое неравенство системы ($y(1) \le 0$) принимает вид:

$$1 - 2\sin^3\alpha - \cos 2\alpha \le 0 \Leftarrow 2\sin^2\alpha(1-\sin\alpha) \le 0 \Leftarrow \sin\alpha = 0 \text{ èëè } \sin\alpha = 1, \text{ò.å. } \alpha = 2\pi k \text{ èëè } \alpha = \frac{\pi}{2} + 2$$

.

Ответ: $\alpha = 2\pi k$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n (k, n \in Z)$.

62**.** Единичный квадрат $ABCD$ перемещается в первой четверти декартовой системы координат так, что сторона AB скользит, упираясь в координатные оси Ox и Oy.

а) По какой линии движется центр квадрата? б) Какой путь пройдет центр квадрата, когда вершина A переместится по оси Ox из начала координат в точку $(1;0)$?

Решение. а) Пусть M -- центр квадрата $ABCD$. Построим окружность на стороне AB как на диаметре. Поскольку $\angle BOA = \angle BMA = 90^\circ$, то точки O и M лежат на этой окружности. Поэтому $\angle MOA = \angle MBA = 45^\circ$. Значит, во время движения квадрата его центр находится на биссектрисе первого кординатного угла, т.е. на прямой $y = x$.

б) Если "прикрепить" указанную окружность к ее диаметру AB и следить за положением точек M и O относительно этого диаметра, то замечаем, что M -- это постоянная точка, а именно середина полуокружности по одну сторону от AB, в то время как точка O перемещается от A к B по другую сторону полуокружности, причем точка O движется "без возвращений" (т.к. во время движения $\angle MOA$ возрастает). Таким образом, при этом движении точки O до середины пути длина OM возрастает от $\sqrt{2}/2$ до 1, а после середины -- убывает 1 от до $\sqrt{2}/2$. Учитывая результат пункта а), получаем, что центр квадрата проходит путь $2 - \sqrt{2}$.

Ответ: а) по прямой $y = x$; б) $2 - \sqrt{2}$.

63. Подсчитать сумму

$$\sum_{i=1}^{1999}[\frac{i^2}{2000}] + \sum_{i=1}^{1999}[-\frac{i^2}{2000}] = [\frac{1^2}{2000}] + [\frac{2^2}{2000}] + \ldots + [\frac{1999^2}{2000}] + [-\frac{1^2}{2000}] + [-\frac{2^2}{2000}] + \ldots + [-\frac{1999^2}{2000}],$$

где $[a]$ означает целую часть числа a , т.е. наибольшее целое, не превосходящее a.

Решение. Заметим, что если a -- целое число, то $[a] + [-a] = a - a = 0$. Если же $a \notin Z$, то $[a] + [-a] = -1$, т.к. $a = m + a_1$, где $m \in Z$, $0 < a_1 < 1$ и поэтому $[a] = m, [-a] = -m - 1$.

Если в искомой сумме сгруппировать слагаемые $[\frac{i^2}{2000}] + [-\frac{i^2}{2000}]$, то задача, таким образом, состоит в подсчете целых чисел вида $\frac{i^2}{2000}$. Записав $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, мы видим, что для делимости нацело i^2 на $2^4 \cdot 5^3$ нужно, чтобы i делилось на $2^2 \cdot 5^2 = 100$. Таких чисел i ровно 19, а именно $100, 200, \ldots, 1900$. Поэтому искомая сумма равна $-1999 + 19 = -1980$.

Ответ: -1980

64. В некоторые клетки квадратной таблицы 25×25 поставлен знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 3×3 с одинаковым расположением плюсов (т.е. при параллельном переносе квадраты совпадут).

Решение. Как показано в решении задачи 3 для 8-го класса, число квадратов 3×3 в таблице 25×25 можно подсчитать так: $(25-3+1)^2 = 529$. Различные варианты расположения плюсов (с точки зрения условий задачи) в квадрате 3×3 -- это различные упорядоченные наборы из 9 элементов, каждый из которых может быть двух видов: "плюс" или пустая клетка. Поэтому различных вариантов будет $2^9 = 512$. Поскольку число квадратов больше числа вариантов, получаем утверждение задачи.

65. а) В компании "Братан-инвест" 1999 акционеров, у каждого акционера -- меньше 1 000 акций. Доказать, что всех акционеров можно разбить на две группы "по справедливости", т.е. так, чтобы пакет акций одной группы отличался от пакета акций другой группы меньше, чем на 1 000 акций.

б) Доказать, что имеется не менее 1000 таких разбиений.

Решение. а) Будем считать, что все 1999 человек рассажены за большим круглым столом в некотором (фиксированном) порядке. Возьмем произвольного человека и занумеруем сидящих за столом, начиная с него, против часовой стрелки. Обозначим соответствующие количества акций у сидящих $a_1, a_2, \ldots, a_{1999}$ и пусть $M = a_1 + a_2 + \ldots + a_{1999}$. Складывая последовательно слагаемые, начиная с первого, мы обязательно найдем такой номер k, что сумма S_k первых k слагаемых попадет в интервал $(\frac{M}{2} - 500, \frac{M}{2} + 500)$, т.к. длина этого интервала равна 1 000. Для найденного k имеем: $S_k = \frac{M}{2} + c$, где $|c| < 500$, и тогда $M - S_k = \frac{M}{2} - c$. Таким образом, S_k отличается от $M - S_k$ на $2c$, причем $|2c| < 1000$.

б) Поскольку в качестве a_1 можно взять любое слагаемое, мы получаем 1999 вариантов, но некоторые пары вариантов могут давать одно и то же разбиение (в такой паре две группы, участвующие в разбиении, просто меняются местами). Очевидно, что из 1999 вариантов можно набрать не более 999 пар, значит различных разбиений не менее 1000.

66. Найти все значения параметра α, при которых уравнение $x^2 - (\frac{5}{2}\sin^3\alpha)x - \cos 2\alpha = 0$ имеет корень на отрезке $[1, 2]$.

Решение. Можно сразу рассматривать только случай $\sin\alpha \geq 0$, т.к. при $\sin\alpha < 0$ вершина параболы $y = x^2 - (\frac{5}{2}\sin^3\alpha)x - \cos 2\alpha$ имеет абсциссу $\frac{5}{4}\sin^3\alpha < 0$, а значения $y(1)$ и $y(2)$ положительны.

Покажем, что неравенство $y(2) \geq 0$ выполняется при всех α. Действительно, $y(2) = 3 - 5\sin^3\alpha + 2\sin^2\alpha = 3(1-\sin^3\alpha) + 2(1-\sin^2\alpha) \geq 0$.

Неравенство $y(1) \le 0$ преобразуем к виду: $2\sin^2\alpha(1-\frac{5}{4}\sin\alpha) \le 0$. Значит, при условиях $\sin\alpha \ge \frac{4}{5}$ èëè $\sin\alpha = 0$ на отрезке $[1,2]$ имеется корень. Если же $\sin\alpha < \frac{4}{5}$ и $\sin\alpha \ne 0$, то $y(1) > 0$, причем на отрезке $[1,2]$ функция $y(x)$ возрастает, т.к. в этом случае абсцисса вершины параболы меньше единицы ($\frac{5}{4}\sin^3\alpha < \frac{5}{4}(\frac{4}{5})^3 < 1$).

Ответ: $\alpha = 2\pi k$; $\arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n \le \alpha \le \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n$ $(k, n \in Z)$.

67. Рассматривается множество окружностей, вписанных в данный полукруг. а) Какую линию представляет собой множество центров вписанных окружностей? б) Какая из двух частей, на которые эта линия делит полукруг, имеет бî′льшую площадь?

Решение а) Введем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с центром полукруга, а ось x шла вдоль его диаметра (см. рис.) Пусть R -- радиус полукруга. Координаты центра $M(x, y)$ вписанной окружности удовлетворяют уравнению $y = R - \sqrt{x^2 + y^2}$. Отсюда $(y-R)^2 = x^2 + y^2$, т.е. $y = \frac{R}{2} - \frac{x^2}{2R}$. Итак, искомая линия -- это парабола с вершиной в точке $(0, \frac{R}{2})$ и с ветвями, направленными вниз.

б) Ответить на второй вопрос нетрудно, вычислив площади частей при помощи интегрирования. Однако еще проще решить этот вопрос, рассуждая следующим образом. Для каждой вписанной окружности с центром $M(x, y)$ рассмотрим точку $N(x, 2y)$ -- верхнюю точку этой окружности, и пусть множество точек N образует линию l' (тоже, очевидно, параболу). Площадь под l' вдвое больше площади под l, т.к. ординаты l' вдвое больше ординат l для тех же абсцисс. Поэтому площадь под l равна площади между l и l' . Значит, большую площадь имеет та часть полукруга, которая выше l.

Ответ: а) параболу, б) большую площадь имеет часть полукруга, прилегающая к полуокружности.

68. Решить уравнение в целых числах:

$$[\lg(\sqrt{x+1000} + \sqrt{x}\,)] + [\lg(\sqrt{x+1000} - \sqrt{x}\,)] = 3,$$

где $[a]$ означает целую часть числа a, т.е. наибольшее целое, не превосходящее a.

Решение. Заметим, что

$$\lg(\sqrt{x+1000} + \sqrt{x}) + \lg(\sqrt{x+1000} - \sqrt{x}) = \lg\left((\sqrt{x+1000}\,)^2 - (\sqrt{x}\,)^2\right) = \lg 1000 = 3$$

Поэтому если обозначить $a = \lg(\sqrt{x+1000} + \sqrt{x})$, то исходное уравнение примет вид: $[a] + [3-a] = 3$, или $[a] + [-a] = 0$. Это означает, что число a -- целое.

Таким образом, надо решить в целых x, y уравнение $\lg(\sqrt{x+1000} + \sqrt{x}) = y$. Отсюда $\sqrt{x+1000} + \sqrt{x} = 10^y$, причем $y \in N$. Так же, как в задаче 1 для 9 класса получаем отсюда, что x -- это полный квадрат: $x = z^2, z \in N$. Тогда уравнение в натуральных числах z, y приобретает вид:

$$\sqrt{z^2+1000}=10^y-z \Leftarrow 1000=10^y(10^y-2z).$$

При $y \geq 3$ правая часть делится на 2^4, а при $y \leq 1$ правая часть меньше 100. Поэтому остается единственная возможность $y=2$, тогда $z=45$. В результате $x=45^2$.

Ответ: $x=2025$

69. В некоторые клетки квадратной таблицы 16×16 поставлен знак "крестик" или "нолик" (некоторые клетки могут оставаться пустыми). Докажите, что найдутся такие два квадрата 4×4, что у них одинаковое число крестиков и одинаковое число ноликов (квадраты могут пересекаться; число крестиков в них может отличаться от числа ноликов) .

Решение Так же, как в задаче 3 для 8 класса подсчитываем число квадратов 4×4 в таблице 16×16 : оно равно $(16-4+1)^2=169$. Подсчитаем теперь, сколько имеется различных вариантов (с точки зрения условий задачи) заполнения квадрата 4×4 крестиками и ноликами. Если крестиков в квадрате нет, то имеется 17 вариантов (по количеству ноликов: от 0 до 16). Если крестик в квадрате один, то имеем 16 вариантов заполнения, и так далее. Всего получим $17+16+15+\ldots+1=\frac{17 \cdot 18}{2}=153$ варианта (для "знатоков": 153 -- это число сочетаний с повторениями из 3 по 16, т.к. клеток в квадрате 16, и их заполняем тремя видами элементов -- крестик, нолик и пустая клетка). Таким образом, поскольку число квадратов больше числа вариантов, получаем утверждение задачи.

70. а) Доказать, что внутри выпуклого пятиугольника с целочисленными координатами вершин на плоскости (в декартовой системе координат) найдется точка с целочисленными координатами. б) Та же задача для выпуклого плоского пятиугольника с целочисленными координатами вершин в пространстве.

Решение. а) Хотя ответ на вопрос пункта а) получается как следствие рассуждений пункта б), можно привести независимое (и более простое) доказательство.

Из пяти вершин пятиугольника по крайней мере у двух четности координат совпадают, т.к. координаты могут быть четырех типов: (чет, чет), (чет, нечет), (нечет, чет), (нечет, нечет). Пусть A, B -- такие вершины. Тогда середина P отрезка AB принадлежит пятиугольнику и имеет целые координаты.

Если AB -- диагональ пятиугольника, то все доказано. Если же AB -- его сторона, то возьмем вершину C, соседнюю с B (и отличную от A) и отрежем от пятиугольника треугольник PBC. Тогда получится снова выпуклый пятиугольник с целыми координатами вершин, содержащий меньше целых точек (по крайней мере на одну: в нем нет B). Заметим, что в ограниченной фигуре имеется конечное число целых точек, т.к. эту фигуру можно заключить в прямоугольник с целыми вершинами, со сторонами, параллельными координатным осям. Поэтому процесс отрезания треугольников приведет к ситуации, когда середина некоторой диагонали -- целая точка.

б) Для решения задачи пункта б) можно использовать как лемму утверждение задачи 5 для 9 класса в такой форме: выпуклый плоский четырехугольник с целочисленными координатами вершин в пространстве содержит параллелограмм с целочисленными координатами вершин. Действительно, доказательство, приведенное в решении этой задачи, чисто векторное и проходит для пространства. Пусть $ABCDE$ -- наш пятиугольник и, для определенности, AB и CD не параллельны. Тогда $ABCD$ -- не параллелограмм и, в силу леммы, в нем найдется еще целая точка. Если эта точка лежит на стороне пятиугольника, то отрежем от пятиугольника треугольник, как в пункте а), и заметим, что в $ABCDE$ конечное число целых точек (для этого поместим $ABCDE$ в большой куб). Поэтому процесс отрезания не может быть бесконечным и приведет к целой внутренней точке.

71. Дан квадрат со стороной $a = 1$. При проведении окружности радиуса $R = 0{,}56$ с центром в центре квадрата в круге образуются 4 одинаковых сегмента, а в квадрате -- 4 одинаковых "колпачка" (части квадрата, не принадлежащие кругу). Что больше: площадь сегмента или площадь "колпачка"? И на сколько больше?

Решение. Пусть S_0 -- площадь общей части квадрата и круга. Тогда имеем:

$$S_{\text{êâàä.}} = 1 = S_0 + 4S_{\text{êîë.}},$$

$$S_{\text{êðóãà}} = \pi(0{,}56)^2 = S_0 + 4S_{\text{ñåã.}}.$$

Вычитая эти уравнения и учитывая, что $\pi = 3{,}14... < 3{,}15$, получим

$$4\left(S_{\text{êîë.}} - S_{\text{ñåã.}}\right) = 1 - \pi(0{,}56)^2 > 1 - 3{,}15 \cdot 0{,}3136 = 0{,}01216 > 0.$$

Ответ: площадь "колпачка" больше на $\dfrac{1-\pi(0{,}56)^2}{4}$.

72. Найти наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой квадрат некоторого натурального числа.

Решение. Очевидно, среди цифр искомого числа x нет нуля. Произведение всех цифр от 1 до 9 равно $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$. Поэтому x не может содержать ни цифру 5, ни цифру 7 (иначе произведение цифр числа x должно было бы делиться на 5^2 или 7^2). Значит, x содержит не более семи оставшихся цифр, и $2^7 \cdot 3^4$ делится на произведение его цифр. Поскольку $2^7 \cdot 3^4$ не является квадратом натурального числа, x не может содержать все эти семь цифр.

Если мы удалим цифру 2, то оставшиеся шесть цифр дадут в произведении $2^6 \cdot 3^4 = 72^2$. Удаление вместо двойки любой другой цифры (кроме восьмерки), очевидно, не дает произведения, равного квадрату натурального числа. Удаление восьмерки приведет к меньшему шестизначному числу, а удаление нескольких цифр приводит к числу, состоящему из пяти или менее цифр. Значит, x состоит из цифр 1, 3, 4, 6, 8, 9, и требование максимальности приводит к результату: $x = 986\,431$.

Ответ: 986 431.

73. а) Ученикам 8^a класса объявили, что для них организуются три кружка: математики, физики и биологии, и каждый ученик должен записаться в один или два кружка. В кружок математики записались 14 человек, в кружок физики -- 13 человек, в кружок биологии -- 12 человек; при этом "чистых математиков" (то есть тех, кто записался только в кружок математики) оказалось 7 человек, "чистых физиков" -- 8 человек, "чистых биологов" -- 6 человек. Сколько человек в классе?

б) Классный руководитель 8^a Марья Петровна убеждена, что каждый ученик должен посещать только один интересующий его кружок, и что во всех трех кружках должно быть равное количество учеников. Сможет ли Марья Петровна в соответствии со своими убеждениями распределить учеников по кружкам?

Решение. а) Пусть x_{mf} -- количество "матфизиков", то есть тех, кто посещает кружок физики и кружок математики. Аналогично, x_{bf} -- количество "биофизиков", x_{mb} -- количество "матбиологов". Тогда из условий задачи получаем систему уравнений:

Сложив эти уравнения, имеем:

$$2(x_{mf} + x_{mb} + x_{bf}) = 18,$$

$$x_{mf} + x_{mb} + x_{bf} = 9,$$

тогда первое уравнение системы дает $x_{bf} = 2$, аналогично, второе и третье уравнения дают: $x_{mb} = 4$, $x_{mf} = 3$. Итак, в классе $(7+8+6)+(2+4+3) = 30$ человек.

б) По 10 человек они могут распределиться, например, таким способом: все 4 матбиолога идут на кружок биологии, все 3 матфизика -- на кружок математики, и оба биофизика -- на кружок физики.

Ответ: а) 30 человек; б) сможет.

74. Дано 21-значное натуральное число, обладающее следующим свойством: все его цифры -- четные и идут в неубывающем порядке (слева направо). Доказать, что в этом числе можно подчеркнуть несколько цифр подряд так, чтобы подчеркнутое число делилось на 2002.

Решение. Различных цифр у нашего числа может быть не более четырех, а именно: 2, 4, 6, 8 (0, очевидно, отсутствует). Поэтому по принципу Дирихле найдется цифра, скажем A, повторяющаяся по меньшей мере 6 раз. Подчеркнем тогда шестизначное число $\overline{AAAAAA} = A \cdot 111111 = (A \cdot 1001) \cdot 111$. Поскольку A четно, число $A \cdot 1001$ делится на 2002.

75. Тренер баскетбольной команды " Свирепые Бизоны" набрал команду со средним ростом ровно 2 м, причем рост каждого игрока отличается от 2 м не более, чем на 5 см. Спонсор команды собирается устроить проверку, которая состоит в следующем: тренер выстраивает всех игроков в линию, а спонсор произвольно выбирает несколько подряд стоящих игроков и вычисляет их суммарный рост. Если полученное число не более чем на 10 см отличается от $2n$ (метров), где n -- число выбранных игроков, то проверка считается успешной. Доказать, что тренер сможет построить игроков для успешной проверки.

Решение. Вычтем 200 (см) из роста каждого игрока (в сантиметрах) и рассмотрим полученные числа. Тогда задачу можно сформулировать так: имеется несколько чисел с нулевой суммой, причем каждое число по модулю не превосходит 5, и требуется занумеровать эти числа так, чтобы сумма любой группы последовательных чисел не превосходила по модулю 10.

Нумеровать числа будем таким образом: первое число x_1 возьмем произвольно. Второе число x_2 возьмем так, чтобы $x_1 \cdot x_2 \le 0$ (это можно сделать, так как иначе сумма всех чисел не была бы нулевой). Заметим, что $|x_1| \le 5$ и $|x_1 + x_2| \le 5$, поскольку число $(x_1 + x_2)$ лежит между x_1 и x_2. Далее x_3 выберем так, чтобы $(x_1 + x_2) \cdot x_3 \le 0$ (это можно сделать в силу того же условия нулевой общей суммы). Тогда $|x_1 + x_2 + x_3| \le 5$, поскольку $(x_1 + x_2 + x_3)$ лежит между $(x_1 + x_2)$ и x_3.

И так далее: на очередном, k-ом шаге выбираем x_k так, чтобы $(x_1 + x_2 + ... + x_{k-1}) \cdot x_k \le 0$. Пользуясь тем, что на предыдущем шаге было выполнено неравенство $|x_1 + x_2 + ... + x_{k-1}| \le 5$, получим, что и на k-ом шаге будет выполнено $|x_1 + x_2 + ... + x_k| \le 5$. Таким образом, мы занумеруем все числа, и неравенство $|x_1 + x_2 + ... + x_k| \le 5$ будет выполнено для любого $k = 1,2,...,N$, где N -- количество всех чисел (строго говоря, это следует из принципа математической индукции).

Наконец заметим, что для любой группы последовательных чисел x_k, x_{k+1}, ..., x_l мы имеем

$$|x_k + x_{k+1} + ... + x_l| = |(x_1 + x_2 + ... + x_l) - (x_1 + x_2 + ... + x_{k-1})| \le$$

$$\le |x_1 + x_2 + ... + x_l| + |x_1 + x_2 + ... + x_{k-1}| \le 5 + 5 = 10.$$

76 Найти наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой третью степень некоторого натурального числа.

Решение. Очевидно, среди цифр искомого числа x нет нуля. Произведение всех цифр от 1 до 9 равно $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$. Поэтому x не может содержать ни цифру 5, ни цифру 7 (иначе произведение цифр числа x должно было бы делиться на 5^3 или 7^3). Значит, x содержит не более семи оставшихся цифр, и $2^7 \cdot 3^4$ делится на произведение его цифр. Поскольку $2^7 \cdot 3^4$ не является третьей степенью натурального числа, x не может содержать все эти семь цифр.

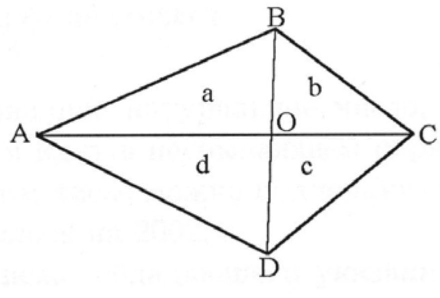
Если мы удалим цифру 6, то оставшиеся шесть цифр дадут в произведении $2^6 \cdot 3^3 = 12^3$. Удаление вместо шестерки любой другой цифры, очевидно, не дает произведения, равного третьей степенью натурального числа. А удаление нескольких цифр приводит к числу, состоящему из пяти или менее цифр. Значит, x состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 8, 9, и требование максимальности приводит к результату: $x = 984\,321$.

Ответ: 984 321.

77. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника. Оказалось, что все эти треугольники имеют целочисленные площади. Доказать, что площадь исходного четырехугольника -- число составное.

Решение. Пусть O -- точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$.

Обозначим, $a = S_{AOB}$, $b = S_{COB}$, $c = S_{COD}$, $d = S_{AOD}$. Заметим, что из формулы для нахождения площади треугольника через две стороны и угол между ними следует:



$$ac = \frac{1}{4} AO \cdot OB \cdot OC \cdot OD \cdot \sin^2(AOB) = bd.$$

Таким образом,

$$S_{ABCD} = a+b+c+d = a+b+c+\frac{ac}{b} = (a+b)+\frac{c(a+b)}{b} = \frac{(a+b)(b+c)}{b}.$$

Поскольку S_{ABCD} -- целое число, то b можно представить в виде произведения делителей $b_1 \cdot b_2$ так, что $(a+b) \vdots b_1$ и $(b+c) \vdots b_2$. Но $a+b > b \geq b_1$ и $b+c > b \geq b_2$. Поэтому, $\left(\frac{a+b}{b_1}\right)\cdot\left(\frac{b+c}{b_2}\right)$ -- произведение двух чисел, больших единицы, то есть число составное.

78. а) Ученикам 9^a класса объявили, что для них организуются три кружка: математики, физики и биологии, и каждый ученик должен записаться в один или два кружка. В кружок математики записались 14 человек, в кружок физики -- 10 человек, в кружок биологии -- 10 человек; при этом "чистых математиков" (то есть тех, кто записался только в кружок математики) оказалось 11 человек, "чистых физиков' -- 8 человек, "чистых биологов" -- 7 человек. Сколько человек в классе?

б) Классный руководитель 9^a Марья Петровна убеждена, что каждый ученик должен посещать только один интересующий его кружок, и что во всех трех кружках должно быть равное количество учеников. Сможет ли Марья Петровна в соответствии со своими убеждениями распределить учеников по кружкам?

Решение. а) Пусть x_{mf} -- количество "матфизиков", то есть тех, кто посещает кружок физики и кружок математики. Аналогично, x_{bf} -- количество "биофизиков", x_{mb} -- количество "матбиологов". Тогда из условий задачи получаем систему уравнений:

Сложив эти уравнения, имеем:

$$2(x_{mf} + x_{mb} + x_{bf}) = 8,$$
$$x_{mf} + x_{mb} + x_{bf} = 4,$$

тогда первое уравнение системы дает $x_{bf} = 1$, аналогично, второе и третье уравнения дают: $x_{mb} = 2$, $x_{mf} = 1$. Итак, в классе $(11+8+7)+(1+2+1) = 30$ человек.

б) "Чистых математиков" -- 11 человек, что больше, чем третья часть класса. Следовательно, распределить учеников не удастся.

Ответ: а) 30 человек; б) не сможет.

79. Дано 21-значное натуральное число, обладающее следующим свойством: все его цифры -- четные и идут в неубывающем порядке (слева направо).

а) Доказать, что в этом числе можно подчеркнуть несколько цифр подряд так, чтобы подчеркнутое число делилось на 2002;

б) для 18-значного числа, обладающего указанным свойством, доказать, что в нем можно подчеркнуть несколько цифр подряд так, чтобы подчеркнутое число делилось либо на 2002, либо на 2003.

Решение. а) См. задачу 48.

б) Если в нашем 18-значном числе есть цифра, повторяющаяся по меньшей мере 6 раз, то в нем можно подчеркнуть несколько цифр подряд так, чтобы подчеркнутое число делилось на 2002 (см. п. а)).

Если в нашем 18-значном числе нет цифры, повторяющейся по меньшей мере 6 раз, то все 4 цифры (2, 4, 6, 8) в нем присутствуют и каждая из них повторяется, по меньшей мере, 3 раза (действительно, если какая-то цифра повторяется не более двух раз, то на остальные три приходится не менее 16 мест, и, значит, хотя бы одна из них повторяется по меньшей мере 6 раз). Подчеркнем тогда число $444666 = 2003 \cdot 222$.

80. Дан правильный 2002-угольник и точка M внутри него. Произвольно выбранная вершина 2002-угольника обозначена A_1, следующие (против часовой стрелки) вершины -- A_2, A_3, ..., A_{2002}. Пусть h_i -- расстояние от M до прямой A_iA_{i+1} ($i = 1,2,...,2002$; $A_{2003} = A_1$). Доказать, что величина $h_1 + h_{1+7} + h_{1+2\cdot7} + ... + h_{1+285\cdot7}$ не зависит от того, какая вершина была выбрана в качестве A_1.

Решение. Рассмотрим правильный 286-угольник, центр которого совпадает с центром нашего 2002-угольника, а последовательные стороны содержат соответственно A_1A_2, A_8A_9, $A_{15}A_{16}$, ..., $A_{1996}A_{1997}$ (здесь используется то, что $2002 = 7 \cdot 286$). Если обозначить длину стороны 2002-угольника через l, а 286-угольника -- через L, то, учитывая тот факт, что эти 2 многоугольника описаны около одной и той же окружности, будем иметь:

$$L \cdot \mathrm{ctg}\frac{\pi}{286} = l \cdot \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2002}.$$

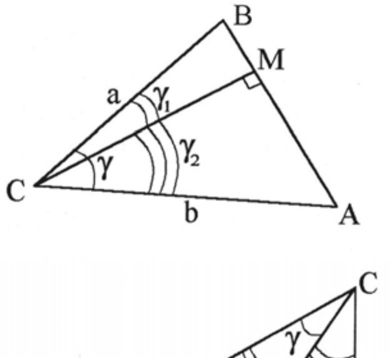
Соединим точку M с вершинами 286-угольника. Тогда 286-угольник разобьется на 286 треугольников с общей вершиной -- точкой M. В этих треугольниках высоты равны $h_1, h_{1+7}, h_{1+2\cdot7}, ..., h_{1+285\cdot7}$. Поэтому площадь 286-угольника равна

$$S = \frac{1}{2}L \cdot (h_1 + h_{1+7} + h_{1+2\cdot7} + ... + h_{1+285\cdot7}).$$

Поскольку S и L -- величины постоянные (они определяются только величиной l), утверждение доказано.

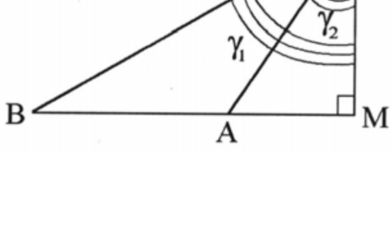
81. В треугольнике ABC выполняется $c = (a+b)\sin\frac{\gamma}{2}$, где $c = AB$, $a = BC$, $b = AC$, $\gamma = \angle BCA$. Доказать, что $a = b$.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда углы при вершинах A и B -- не тупые. Опустим высоту CM. Пусть $h = CM$, $\gamma_1 = \angle BCM$, $\gamma_2 = \angle ACM$. Тогда условие задачи запишется так:



$$h(\mathrm{tg}\,\gamma_1 + \mathrm{tg}\,\gamma_2) = h\left(\frac{1}{\cos\gamma_1} + \frac{1}{\cos\gamma_2}\right)\sin\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right) \Leftarrow$$

$$\frac{\sin(\gamma_1+\gamma_2)}{\cos\gamma_1\cos\gamma_2} = \frac{\cos\gamma_1+\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}\cdot\sin\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right) \Leftarrow$$



$$2\sin\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right.$$

$$\cos\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right)=1 \Leftarrow \gamma_1=\gamma_2 \Leftarrow a=b.$$

Пусть теперь один из углов $\angle A$ или $\angle B$ -- тупой (для определенности $\angle A$). Тогда условие задачи запишется так:

$$h(\operatorname{tg}\gamma_1-\operatorname{tg}\gamma_2)=h\left(\frac{1}{\cos\gamma_1}+\frac{1}{\cos\gamma_2}\right)\sin\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right)\Leftarrow$$

$$\frac{\sin(\gamma_1-\gamma_2)}{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}=\frac{\cos\gamma_1+\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}\cdot\sin\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right)\Leftarrow$$

$$2\sin\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right)\Leftarrow$$

$$\cos\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right)=1 \Leftarrow \gamma_1+\gamma_2=2\pi,$$

но это противоречит тому, что γ_1 и γ_2 -- острые. Следовательно, углы $\angle A$ и $\angle B$ не могут быть тупыми.

82. Найти наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой четвертую степень некоторого натурального числа.

Решение. Очевидно, среди цифр искомого числа x нет нуля. Произведение всех цифр от 1 до 9 равно $2^7\cdot 3^4\cdot 5^1\cdot 7^1$. Поэтому x не может содержать ни цифру 5, ни цифру 7 (иначе произведение цифр числа x должно было бы делиться на 5^4 или 7^4). Значит, x содержит не более семи оставшихся цифр, и $2^7\cdot 3^4$ делится на произведение его цифр. Поскольку $2^7\cdot 3^4$ не является четвертой степенью натурального числа, x не может содержать все эти семь цифр.

Если мы удалим цифру $8=2^3$, то оставшиеся шесть цифр дадут в произведении $2^4\cdot 3^4=6^4$. Удаление вместо восьмерки любой другой цифры, очевидно, не дает произведения, равного четвертой степени натурального числа. А удаление нескольких цифр приводит к числу, состоящему из пяти или менее цифр. Значит, x состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 6, 9, и требование максимальности приводит к результату: $x=964\,321$.

Ответ: 964 321.

83. Для натурального числа n обозначим через $P(n)$ произведение всех его натуральных делителей (включая n).

а) Вычислить $P(2002)$.

б) Решить уравнение $P(x)=(2003)^{2002}$.

Решение. а) Разложим 2002 на простые множители:

$$2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13.$$

Каждый четный делитель этого числа имеет вид $2\cdot 7^a\cdot 11^b\cdot 13^c$, где показатели a, b, c принимают два значения: 0 или 1. Количество таких упорядоченных троек (a,b,c) равно

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Итак, имеется ровно 8 четных делителей, и поэтому в произведение двойка войдет в восьмой степени. Аналогично, остальные простые делители -- 7, 11, 13 -- войдут в произведение в восьмой степени. Таким образом,

$$P(2002) = 2^8 \cdot 7^8 \cdot 11^8 \cdot 13^8 = (2002)^8.$$

б) Поскольку 2003 -- простое число, то x обязан быть степенью числа 2003 (иначе $P(x)$ содержало бы отличные от 2003 простые множители). Пусть $x = 2003^y$. Тогда делителями 2003^y будут числа 1, 2003^1, 2003^2, ..., 2003^y. Поэтому

$$P(2003^y) = 1 \cdot 2003^1 \cdot 2003^2 \cdot ... \cdot 2003^y = 2003^{1+2+...+y}.$$

Отсюда, $(1+2+3+...+y) = 2002$. Таким образом, требуется решить в натуральных числах уравнение

$$\frac{y(y+1)}{2} = 2002,$$

$$y^2 + y - 4004 = 0.$$

Дискриминант полученного квдратного уравнения равен 16017, это число заключено между полными квадратами чисел 126 и 127:

$$(126)^2 < 16017 < (127)^2.$$

Значит, квадратное уравнение не имеет целых (и даже рациональных) решений.

Ответ: а) 2002^8; б) нет решений.

84. Для уравнения $9 \cdot x^{6x} = 1$ определить число

а) положительных действительных корней;

б) действительных корней.

Решение. При $x = 0$ левая часть уравнения не определена. Рассмотрим случай $x > 0$. Тогда после логарифмирования получим уравнение, эквивалентное исходному при $x > 0$:

$$x \cdot \ln x = -\frac{\ln 3}{3}.(*)$$

Исследуем на монотонность функцию левой части (*):

$$y = x \ln x \Rightarrow y' = 1 + \ln x.$$

Тогда $y' > 0$ при $x > \frac{1}{e}$ и $y' < 0$ при $0 < x < \frac{1}{e}$. Поэтому функция $y = x \ln x$ убывает в интервале $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ и возрастает в интервале $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$. В точке $x_0 = \frac{1}{e}$ функция достигает наименьшего значения $y_0 = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. На границе области определения функция $y = x \ln x$ имеет пределы

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

(здесь мы применили правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$; можно найти этот предел и более элементарными методами) ,

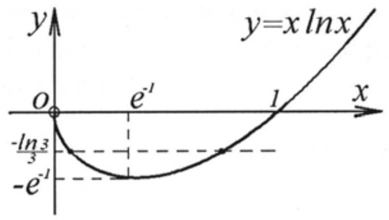
$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty.$$

Теперь сравним наименьшее значение $y_0 = -\dfrac{1}{e} = -\dfrac{\ln e}{e}$ с числом в правой части (*), то есть с $-\dfrac{\ln 3}{3}$. Для этого исследуем на монотонность функцию $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ при $x \ge e$.

$$g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \ \text{ïðè} \ x > e.$$

Значит, $g(x)$ убывает в промежутке $[e; +\infty)$. Отсюда

$$g(3) < g(e) \Rightarrow -\frac{\ln e}{e} < -\frac{\ln 3}{3}.$$



Итак, мы получаем, что уравнение (*) имеет 2 корня при $x > 0$.

Для полного решения исходной задачи рассмотрим также случай $x < 0$. В этом случае выражение x^{6x} будет определено лишь при условии, что $6x$ -- целое число. Очевидно, что $6x$ должно быть четным числом (иначе $x^{6x} < 0$). Пусть $x = -\dfrac{k}{3}$, где k -- натуральное число. Тогда

$$\left(\frac{k}{3}\right)^{-2k} = \frac{1}{9} \Leftarrow \left(\frac{3}{k}\right)^{k} = \frac{1}{3};$$

$$3^{k+1} = k^k \Rightarrow k = 3n;\ 3^{3n+1} = (3n)^{3n},\ n^{3n} = 3.$$

Значение $n = 1$ последнему уравнению не удовлетворяет, а при $n \ge 2$ левая часть, очевидно, больше правой. Итак, отрицательных корней исходное уравнение не имеет.

Ответ: а) 2 корня; б) 2 корня.

85. На координатной плоскости начертили параболу, затем оси координат стерли. Требуется через данную точку на параболе провести касательную к параболе, пользуясь циркулем и линейкой.

Решение. Можно считать, что в некоторой прямоугольной системе координат уравнение параболы имеет вид $y = ax^2$. Если провести две параллельные прямые, пересекающие параболу в двух точках каждая, то середины двух отрезков прямых между точками пересечения с параболой будут иметь одинаковые абсциссы. Действительно, если у этих прямых угловой коэффициент равен k, то из решения квадратного уравнения для нахождения точек пересечения с параболой следует, что середины указанных отрезков имеют абсциссу $\frac{k}{2a}$.

Таким образом, проведя прямую через середины этих двух отрезков, мы получим прямую l, параллельную оси Oy. Проведем к ней перпендикулярную прямую, пересекающую параболу в двух точках. Найдя середину отрезка этой прямой между точками пересечения с параболой, мы, очевидно (в силу симметрии параболы), получим точку на оси Oy. Повторив указанные построения с другой прямой, перпендикулярной l, мы найдем другую точку на оси Oy и тем самым, построим ось Oy. В точке пересечения этой оси с параболой будет находиться вершина параболы, а прямая, проходящая через вершину параболы и перпендикулярная Oy, является осью Ox.

Отметим следующее свойство касательной к параболе $y = ax^2$ в данной точке $M_0(x_0, y_0)$: эта касательная пересекает ось Oy в точке M_1 с координатами $(0, -y_0)$. Действительно, уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = 2ax_0 \cdot (x - x_0)$$

и при $x = 0$ получим

$$y = -2ax_0^2 + y_0 = -2ax_0^2 + ax_0^2 = -y_0.$$

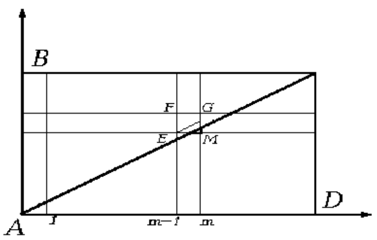
Отсюда следует построение точки M_1: для этого надо спроектировать M_0 на ось Oy и отразить полученную точку симметрично относительно оси Ox. Прямая M_0M_1 есть искомая касательная. (В случае, когда M_1 совпадает с M_0, точка M_0 есть вершина параболы, и касательная есть ось Ox.)

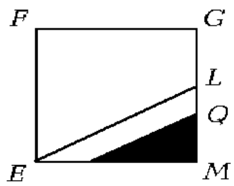
86. В классе учится $3n$ человек (n -- натуральное). Ученики посещают три кружка. Каждый посещает хотя бы один кружок, и нет ни одного, кто бы посещал все три кружка. Известно, что для каждого из кружков число учеников, посещающих его, не меньше n, а число учеников, посещающих только этот кружок -- не больше n. Доказать, что, если назначить очередное занятие трех кружков на одно и то же время, то все ученики смогут распределиться по кружкам так, чтобы каждый ученик пошел в свой кружок и во всех кружках было одинаковое количество кружковцев.

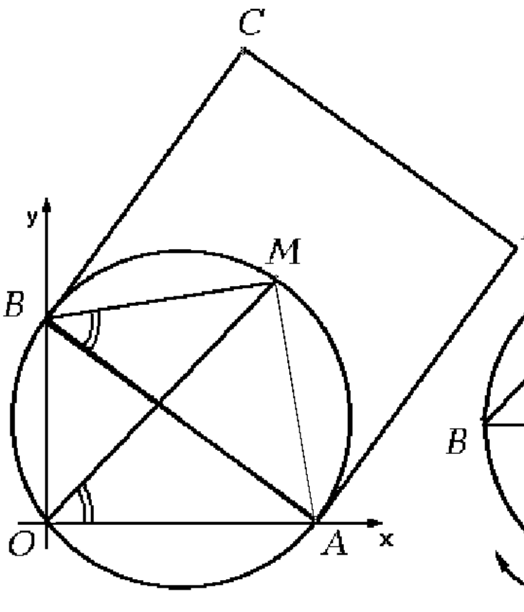
Решение. Назовем кружки в классе кружками математики, физики и биологии. Пусть x_m -- число "чистых математиков", то есть тех, кто посещает только кружок математики. Аналогично, x_f -- число "чистых физиков", x_b -- число "чистых биологов"; x_{mf} -- количество "матфизиков", то есть тех, кто посещает кружок физики и кружок математики, x_{bf} -- количество "биофизиков", x_{mb} -- количество "матбиологов". Докажем утверждение задачи индукцией по числу $N = x_{mf} + x_{bf} + x_{mb}$ (то есть по числу "смешанных" кружковцев). Если $N = 0$, то, очевидно, каждый кружок посещает ровно n "чистых" учеников, и утверждение справедливо.

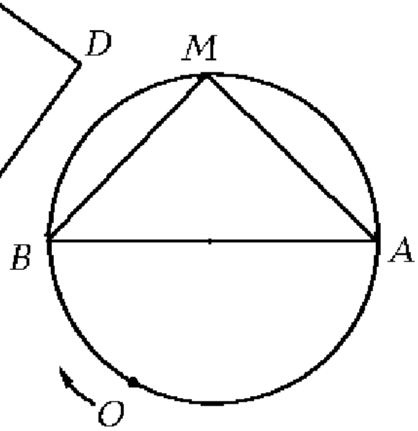
Пусть утверждение доказано для всех $N \le k$. Докажем его для $N = k + 1$. Пусть, для определенности, $x_{mf} > 0$. Тогда случай, когда $x_m = n$ и $x_f = n$, невозможен, поскольку иначе кружок биологии посещало бы $3n - (x_m + x_f + x_{mf}) = n - x_{mf} < n$ (человек). Если $x_m = n$ а $x_f < n$, то попросим одного матфизика стать "чистым" физиком. Тогда все условия задачи будут выполнены, а число N станет на единицу меньше и по предположению индукции утверждение будет доказано (при этом "наш бывший матфизик, естественно, идет при распределении на кружок физики).

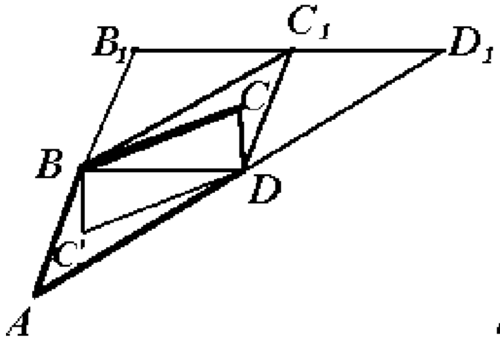
Итак, пусть теперь $x_m < n$ и $x_f < n$. Если число всех математиков (то есть $x_m + x_{mf} + x_{mb}$) равно n и число всех физиков (то есть $x_f + x_{mf} + x_{bf}$) равно n, то чистых биологов останется $3n - n - n + x_{mf} > n$ (человек). Это противоречит условию задачи, и поэтому можно считать, что, например, $x_m + x_{mf} + x_{mb} > n$. Тогда мы (как и раньше) можем перевести одного матфизика в "чистые" физики, не нарушив условие задачи, и, тем самым, добиться того, чтобы N стало на единицу меньше. По принципу математической индукции утверждение доказано.

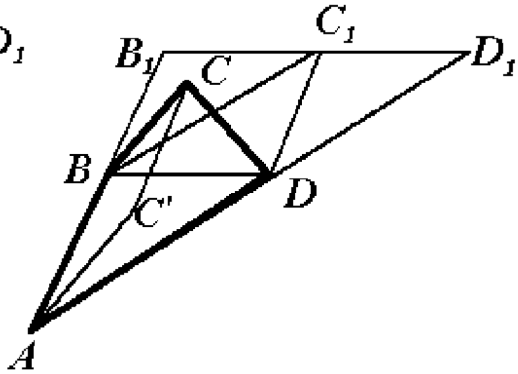


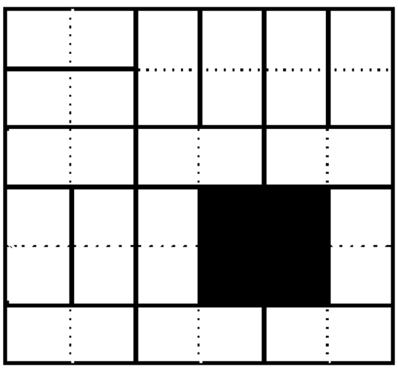




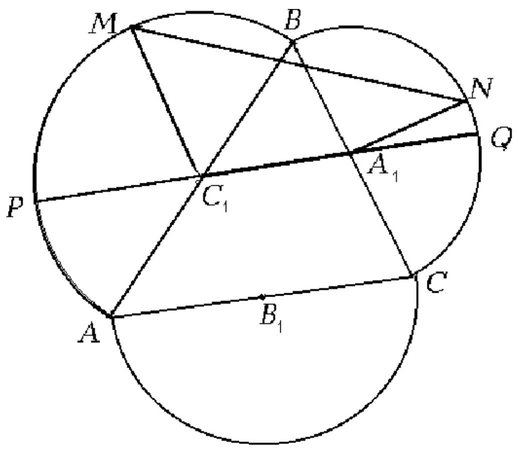


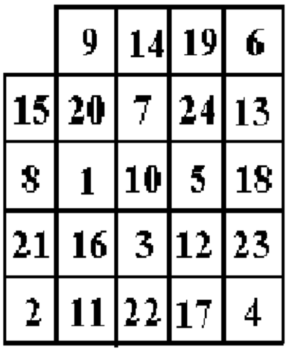




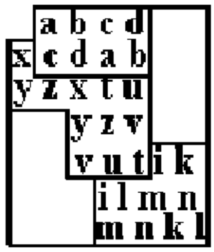


2	3	2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4	1	4
2	3	2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4	1	4
2	3	2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4	1	4
2	3	2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4	1	4

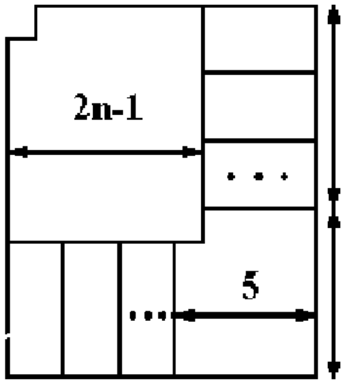




5x5



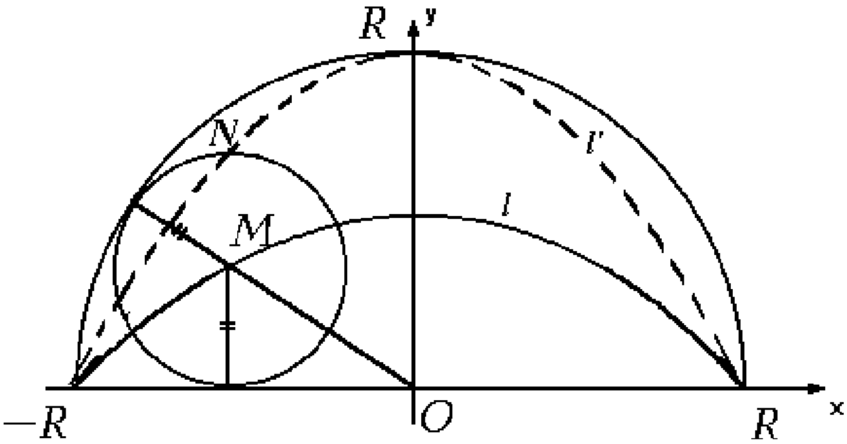
7x7



(2n+3)x(2n+3)

Проведем отрезки AP, MQ и ND и докажем, что $S_{\Delta ABP} + S_{\Delta QND} = 2S_{\Delta PMQ}$.

Поскольку основания AP, PQ и QD этих треугольников равны, остается доказать, что высоты BB_1, MM_1 и NN_1 удовлетворяют соотношению $BB_1 + NN_1 = 2MM_1$. Но это соотношение следует из того, что B_1BNN_1 -- трапеция со средней линией MM_1. Аналогично доказывается, что



$S_{\Delta PBM} + S_{\Delta DNC} = 2S_{\Delta QMN}$.

87. К числу 2011 припишите справа и слева по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45. (Найдите все возможные решения.)

Ответ. 520110 или 920115. **Указание.** Из признака делимости на 5 следует, что справа нужно приписать либо 0, либо 5. В первом случае слева требуется приписать 5, что следует из признака делимости на 9. Аналогично, во втором случае слева требуется приписать 9.

Комментарий. Кроме девятки, участники олимпиады могли слева приписать и 0, и получить «третье решение» задачи, но такое «решение» неестественно (числа не начинаются с нулевой цифры), однако при проверке наличие или отсутствие такого «решения» никак не учитывалось.

88. 8 чисел: 1, 2, …, 8 расставили в некотором порядке в вершинах куба. Затем для каждого ребра куба подсчитали сумму двух чисел на его концах. Докажите, что среди этих сумм есть совпадающие.

Указание. Предположим противное, тогда на ребрах будет 12 различных чисел среди возможных сумм: от минимальной, равной 3 = 1 + 2, до максимальной, равной 15 = 8 + 7. Таким образом, среди этих 13 возможных чисел есть только один пробел (не занятый суммами на ребрах). Если этого пробела нет среди чисел {3; 4; 5; 6}, то число 3 на ребре получается как сумма 1 + 2 на его концах. Далее, число 4 получается только как сумма 1 + 3 на концах, а число 5 получается как сумма 1 + 4 (представление 2 + 3 невозможно, т.к. вершины 2 и 3 уже определены как противоположные вершины в квадрате с вершинами 1, 2, 3). Наконец, получаем противоречие с числом 6, которое невозможно представить как сумму двух чисел, т.к. представление 6 = 1 + 5 противоречит тому, что из вершины 1 ведут всего 3 "использованные" ребра, а другое представление (6 = 2 + 4) невозможно в силу того же рассуждения, что и выше для представления 5 = 2 + 3. Полностью аналогичные рассуждения приводят к противоречию в случае, когда пробела нет среди чисел 15, 14, 13, 12.

89. Стороны тупоугольного треугольника равны n, $n + 1$, $n + 2$, где n – натуральное число. Найдите n.

Ответ. $n = 2$. **Указание.** При $n = 1$ не выполняется неравенство треугольника. При $n = 3$ получается прямоугольный треугольник ($5^2 = 3^2 + 4^2$), а при $n > 3$ – остроугольный треугольник, т.к. $(n+2)^2 < n^2 + (n+1)^2 \Leftrightarrow (n-1)^2 > 4 \Leftrightarrow n > 3$. При $n = 2$ выполняется и неравенство треугольника, и неравенство для тупого угла: $4^2 > 2^2 + 3^2$.

90. В выпуклом четырехугольнике площади $S = 35$ проведены диагонали, разбивающие четырехугольник на 4 треугольника. Площади двух из них, примыкающих к противоположным сторонам четырехугольника, равны 6 и 10. Найдите площади остальных двух треугольников..

Ответ. 4 и 15. **Указание.** Пусть искомые площади двух треугольников равны x и y. Во-первых, имеем уравнение из условия на площади: $x + y + 6 + 10 = 35$. Второе уравнение для определения x и y таково: $xy = 6 \cdot 10$; его можно вывести либо из формулы для площадей треугольников по двум сторонам и углу между ними, либо из отношения $\frac{x}{6} = \frac{10}{y}$, следующего из формулы площади по стороне и опущенной высоте. Решая квадратное уравнение для полученной системы, записываем ответ: x=4, y=15 (или : x=15, y=4).

91. Решите уравнение $\sqrt{x+2011} - \sqrt{x} = y$ в натуральных числах x, y.

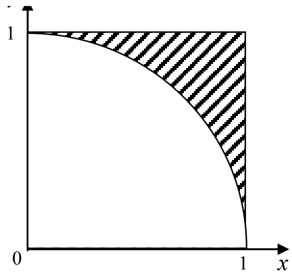
Ответ. $x = 1005^2$; $y = 1$. **Указание.** Перенесем $\sqrt{x}$ в правую часть и возведем уравнение в квадрат. Получим $y(2\sqrt{x} + y) = 2011$. Поскольку $y \neq 0$, то $\sqrt{x}$ – число рациональное, а значит, целое (действительно, если $\sqrt{x} = \frac{p}{q}$, где p и q – взаимно простые числа, то после возведения в квадрат получим, что p должно делиться на q). Далее, надо заметить (и проверить), что 2011 – простое число, и поэтому единственное разложение на множители дает $y = 1$, $2\sqrt{x} + y = 2011$, откуда следует ответ.

92. 8 чисел: 1, 2, …, 8 расставили в некотором порядке в вершинах куба. Затем для каждого ребра куба подсчитали сумму двух чисел на его концах. Докажите, что среди этих сумм есть совпадающие.

Указание. См. задачу 2 для 9 класса.

Аналитические методы геометрических задач

93. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости системой неравенств $\begin{cases} x \geq \sqrt{1-y^2} \\ y \geq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$.



Ответ. $1-\dfrac{\pi}{4}$.

Указание. Фигура имеет вид, показанный на рисунке – это следует из исходных неравенств после возведения в квадрат с учетом ОДЗ. Отсюда получается ответ задачи.

94. В выпуклом четырехугольнике площади $S = 35$ проведены диагонали, разбивающие четырехугольник на 4 треугольника. Площади двух из них, примыкающих к противоположным сторонам четырехугольника, равны 6 и 10. Найдите площади остальных двух треугольников..

Ответ. 4 и 15.

Указание. См. задачу 4 для 9 класса.

95. Решите уравнение $\sqrt{x+2011}-\sqrt{x} = y$ в натуральных числах x, y.

Ответ. $x = 1005^2$; $y = 1$.

Указание. См. задачу 5 для 9 класса.

96. Найдите значение параметра a, при котором уравнение $x^4 - ax^2 + 1 = 0$ имеет 4 корня, образующие арифметическую прогрессию.

Ответ. $\dfrac{10}{3}$.

Указание. Обозначим $t = x^2$. Тогда уравнение $t^2 - at + 1 = 0$ должно иметь два положительных корня t_1, t_2 ($t_1 < t_2$), а корни исходного уравнения будут иметь вид $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$. Условие задачи об арифметической прогрессии дает соотношение $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1}$, т.е. $\sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2 = 9t_1$. Из теоремы Виета имеем $t_1t_2 = 1$ и $t_1 + t_2 = a$. Отсюда: $9t_1^2 = 1 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{1}{3}$ (учитывая положительность t_1) и $a = t_1 + 9t_1 = 10t_1 = \dfrac{10}{3}$.

97. Решите уравнение $\sqrt{-x^2+x+2}\cdot(\sin 2x - \pi\cos x) = 0$.

Ответ. $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = \dfrac{\pi}{2}$.

Указание. Поскольку $-x^2 + x + 2 \geq 0$, получаем ОДЗ: $-1 \leq x \leq 2$. Приравнивая к нулю скобку $\sin 2x - \pi\cos x = 0$, получаем совокупность $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$. Первое уравнение совокупности с учетом ОДЗ дает $x = \frac{\pi}{2}$, а второе решений не имеет, т.к. $\frac{\pi}{2} > 1$.

98. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости системой неравенств $\begin{cases} x \ge \sqrt{1-y^2} \\ y \ge \sqrt{1-x^2} \end{cases}$.

Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}$. **Указание: С**м. задачу 2 для 10 класса**.**

99. У прямоугольного параллелепипеда объема $V = 2011$ все вершины имеют целочисленные координаты в декартовой системе координат. Найдите диагональ параллелепипеда.

Ответ. $\sqrt{2011^2 + 2} = \sqrt{4044123}$. **Указание.** Пусть размеры параллелепипеда a×b×c. Тогда имеем $abc = 2011$, и в силу простоты числа 2011 (это следует проверить), получаем, что ребра a, b, c равны (в некотором порядке) 2011, 1, 1, поэтому диагональ равна $\sqrt{2011^2 + 1^2 + 1^2}$**.**

Комментарий. В приведенном выше указании неявно предполагается, что ребра тетраэдра параллельны координатным осям и поэтому имеют целую длину. На самом деле это можно доказать, но доказательство представляет более сложную задачу (хотя и доступную школьникам), и от участников первого (предварительного) тура оно фактически не требовалось.

100. Найдите значение параметра a, при котором уравнение $x^4 - ax^2 + 1 = 0$ имеет 4 корня, образующие арифметическую прогрессию.

Ответ. $\frac{10}{3}$**. Указание.** См. задачу 5 для 10 класса.

101. Докажите, что уравнение $y^2 - x^2 = 2011x^3$ имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y.

Указание. Перепишем уравнение в виде $y^2 = x^2(2011x + 1)$. Для разрешимости этого уравнения в натуральных числах нужно, чтобы скобка $2011x + 1$ представляла собой точный квадрат: $2011x + 1 = t^2 \Leftrightarrow (t-1)(t+1) = 2011x$. Тогда достаточно в качестве t брать числа вида $t = 2011k + 1$, где k – любое натуральное число. Из последнего выражения имеем $x = (t+1)k = (2011k + 2)k$, и поэтому из исходного уравнения получаем $y = xt = (2011k + 2)(2011k + 1)k$. Поскольку k – любое натуральное число, x и y в указанных формулах принимают бесконечное множество значений. Утверждение доказано.

102. К числу 2011 припишите справа двузначное число так, чтобы полученное число делилось на 36.

Ответ. 32 или 68. **Указание.** Пусть справа приписываются цифры a и b. По признаку делимости на 9 сумма цифр приписываемого числа должна быть равна либо 5, либо 5 + 9 = 14. Если $a + b = 5$, то варианты 50, 41, 32, 23, 14, 05 дают только одно число 32, делящееся на 4 (по признаку делимости на 4 как раз и надо проверить число, составленное из последних двух цифр). Если $a + b = 14$, то варианты 95, 86, 77, 68, 59 дают число 68.

103. Дан единичный квадрат. При проведении окружности радиуса 0,56 с центром в центре квадрата образуются 4 одинаковых сегмента в круге, а в квадрате – 4 одинаковых "колпачка" (части квадрата, не принадлежащие кругу). Что, и насколько, больше: площадь сегмента или площадь "колпачка"?

Ответ. Площадь "колпачка" больше площади сегмента на $\frac{1-\pi(0{,}56)^2}{4}$. **Указание.** Пусть S_0 – площадь общей части круга и квадрата. Тогда $S_{\text{квадр.}} = 1 = S_0 + 4S_{\text{колп.}}$, $S_{\text{кр.}} = \pi(0{,}56)^2 = S_0 + 4S_{\text{сегм.}}$. Из этих равенств после вычитания получим $4(S_{\text{колп.}} - S_{\text{сегм.}}) = 1 - \pi(0{,}56)^2 > 1 - 3{,}15 \cdot 0{,}3136 = 0{,}01216 > 0$.

104. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой квадрат натурального числа.

Ответ. 986431. **Указание.** Очевидно, среди этих цифр нуля нет. Далее, имеем $1\cdot2\cdot\ldots\cdot9=2^7\cdot3^4\cdot5^1\cdot7^1$. Поэтому надо убрать цифры 5, 7 и нечетную степень двойки, а значит, надо убрать цифру 2 (очевидно, не следует убирать цифры 6 и 8, т.к. нам нужен максимальный результат). Ясно, что оставшиеся цифры нужно расположить в порядке убывания.

105. Существует ли выпуклый четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, а длины трех последовательных сторон равны 2010, 2011, 60?

Ответ. Не существует. **Указание.** Предположим, что такой четырехугольник $ABCD$ существует. Пусть $a = AB = 2010$, $b = BC = 2011$, $c = CD = 60$, $d = AD$. Далее, пусть O – точка пересечения диагоналей и $x = AO$, $y = BO$, $z = CO$, $t = DO$. Тогда по теореме Пифагора

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$$

. Отсюда $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Подставляя длины сторон, получим $2010^2 + 60^2 = 2011^2 + d^2$, тогда $d^2 = 60^2 - (2011^2 - 2010^2) = 60^2 - (2011+2010) = 3600 - 4021 < 0$. Противоречие.

106. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $(x + y)^2 - 2011 = y^2$?

Ответ. 4 решения. **Указание.** После возведения в квадрат и приведения подобных членов уравнение записывается в виде $x(x + 2y) = 2011$. Поскольку 2011 – простое число (это следует проверить), будем иметь следующие возможные разложения на целые множители

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 2011 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y = -2011 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2011 \\ x + 2y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -2011 \\ x + 2y = -1 \end{cases}.$$

Решения указанных систем дают (1; 1005), (–1; –1005), (2011; –1005), (–2011; 1005).

107. Дан единичный квадрат. При проведении окружности радиуса 0,56 с центром в центре квадрата образуются 4 одинаковых сегмента в круге, а в квадрате – 4 одинаковых "колпачка" (части квадрата, не принадлежащие кругу). Что, и насколько, больше: площадь сегмента или площадь "колпачка"?

Ответ. Площадь "колпачка" больше площади сегмента на $\frac{1-\pi(0{,}56)^2}{4}$. **Указание.** См. задачу 2 для 9 класса.

108.. Существует ли выпуклый четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, а длины трех последовательных сторон равны (в указанном порядке) : **а**) 2010, 2011, 60 ? **б**) 2010, 2011, 65 ?

Ответ. **а**) не существует; **б**) существует. **Указание.** **а**) Предположим, что такой четырехугольник $ABCD$ существует. Пусть $a = AB = 2010$, $b = BC = 2011$, $c = CD = 60$, $d = AD$. Далее, пусть O – точка пересечения диагоналей и $x = AO$, $y = BO$, $z = CO$, $t = DO$. Тогда по теореме Пифагора

$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$. Отсюда $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Подставляя длины сторон, получим $2010^2 + 60^2 = 2011^2 + d^2$, тогда $d^2 = 60^2 - (2011^2 - 2010^2) = 60^2 - (2011+2010) = 3600 - 4021 < 0$. Противоречие.

б) В условиях пункта б) получим значение $d^2 = 65^2 - 4021 = 4225 - 4021 = 204 > 0$. Для построения четырехугольника возьмем длину отрезка $x = AO$ так, чтобы $x^2 < a^2$ и $x^2 < d^2$, т.е. $x^2 < 204$. Тогда $y^2 = a^2 - x^2 > 0$, $z^2 = b^2 - a^2 + x^2 > 0$, (т.к. $b > a$), и $t^2 = c^2 - b^2 + a^2 - x^2 = d^2 - x^2 > 0$. Отложив последовательно найденные отрезки *x, y, z, t* от одной точки вдоль двух перпендикулярных прямых, получим вершины искомого четырехугольника.

109. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой квадрат натурального числа.

Ответ. 986431. **Указание.** См. задачу 3 для 9 класса.

110. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых корни уравнения $(x - \sqrt{a})(x^2 - 3ax + 2a^2) = 0$ образуют арифметическую прогрессию.

Ответ. $a = \frac{1}{9}$; $a = \frac{4}{9}$; (a=0).**Указание.** (Рассмотрение тривиального случая a=0 или его отсутствие никак не учитывалось при проверке). Итак, рассмотрим только значения $a > 0$ (неотрицательность a следует из ОДЗ), и поэтому $a < 2a$. Корни данного уравнения равны $\sqrt{a}$, a, $2a$, они могут располагаться одним из трех способов: 1) $a < 2a < \sqrt{a}$; 2) $a < \sqrt{a} < 2a$; 3) $\sqrt{a} < a < 2a$. В первом случае из условия на арифметическую прогрессию и неравенства $a > 0$ имеем $a + \sqrt{a} = 4a \Leftrightarrow 3a = \sqrt{a} \Leftrightarrow 9a^2 = a \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$. Аналогично, во втором случае получим $3a = 2\sqrt{a} \Leftrightarrow a = \frac{4}{9}$. В третьем случае получим $a = 0$.

110. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $(x + y)^2 - 2011 = y^2$?

Ответ. 4 решения.

Указание. После возведения в квадрат и приведения подобных членов уравнение записывается в виде $x(x + 2y) = 2011$. Поскольку 2011 – простое число (это следует проверить), будем иметь следующие возможные разложения на целые множители

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 2011 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y = -2011 \end{cases}, \begin{cases} x = 2011 \\ x + 2y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -2011 \\ x + 2y = -1 \end{cases}.$$

Решения указанных систем дают (1; 1005), (–1; –1005), (2011; –1005), (–2011; 1005).

111. Решите уравнение $2\cos 2x + \sqrt{5}\sin x = 0$.

Ответ. $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{37}}{8}\right) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$**.**

Указание. Обозначим $t = \sin x$ и, заменив $\cos 2x$ на $1 - 2\sin^2 x$, получим уравнение $4t^2 - \sqrt{5}t - 2 = 0$. Его корни $t_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{37}}{8}$ и $t_2 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{37}}{8}$. Поскольку

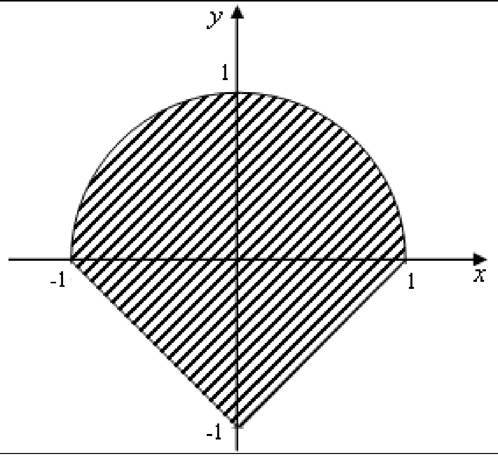
$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{37}}{8} > \frac{2+6}{8} = 1$, то уравнение $\sin x = t_1$ решений не имеет. Для корня t_2 выполнено $|t_2| = \frac{\sqrt{37}-\sqrt{5}}{8} < \frac{7-2}{8} = \frac{5}{8} < 1$, и поэтому уравнение $\sin x = t_2$ имеет решения.

112. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости неравенствами $|x| - 1 \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 1$.

Указание. Фигура имеет вид, показанный на рисунке: она ограничена снизу графиком $y = |x| - 1$, а сверху – полуокружностью $y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y > 0 \end{cases}$.

Площадь фигуры складывается из площади полукруга единичного радиуса и половинки квадрата с диагональю, равной 2.



113. В пространстве с декартовой системой координат дан тетраэдр $OABC$. Точка O – начало координат, точки A, B и C лежат на координатных осях и имеют целые координаты. Известно, что длины OA, OB и OC попарно различны, а объем тетраэдра равен 1. Найдите длину наибольшего ребра тетраэдра.

Ответ. $\sqrt{13}$. **Указание.** Пусть длины ребер, идущих вдоль координатных осей, равны a, b, c. Тогда объем тетраэдра $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) \cdot c = \frac{abc}{6} = 1$. По условию целочисленности a, b, c имеем (с точностью до порядка) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Наибольшая длина ребра равна $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

114. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых корни уравнения $(x-\sqrt{a})(x^2-3ax+2a^2) = 0$ образуют арифметическую прогрессию.

Ответ. $a = \frac{1}{9}$; $a = \frac{4}{9}$; (a=0).**Указание.** См. задачу 4 для 10 класса.

115. Решите уравнение $x! + 24 = y^2$ в натуральных числах x, y. (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

Ответ. (1; 5), (5; 12). **Указание.** Непосредственно проверяется, что числа $x = 1$; $x = 5$ удовлетворяют уравнению при y=5 и y=12 соответственно, а числа $2 \le x \le 4$ не подходят. При $x \ge 6$ левая часть ($x! + 24$) делится на 3, но не делится на 9, т.к. $x!$ делится на 9, а 24 на 9 не делится.