Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего

профессионального образования

"Нижегородский государственный университет имени

Н.И.Лобачевского"

Подготовительный факультет

Кафедра довузовской подготовки

Пособие по математике для абитуриентов.

Нижний Новгород

2005

Пособие по математике для абитуриентов. Сост. М.В.Котельникова — Нижний Новгород: ННГУ , 2005.- 159 с.

Учебное пособие содержит основной теоретический материал по всем разделам элементарной математики. Приводится ряд задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в ННГУ. Для некоторых из них рассматриваются решения, некоторые предлагаются для самостоятельного решения. Для старшеклассников и абитуриентов ВУЗов.

Составитель: ассистент Котельникова М.В.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент кафедры математической физики А.В.Калинин.

Использовались следующие сокращения названий факультетов:

РФ - радиофизический факультет;

ФзФ - физический факультет;

ВМК - факультет вычислительной математики и кибернетики;

ММ - механико-математический факультет;

ЭФ - экономический факультет;

ФнФ - финансовый факультет;

ФСН - факультет социальных наук (отделение психологии).

Занятие 1.

Часть I. Действительные числа.

1. Натуральные числа (N) - множество $(1, 2, 3, \ldots)$; оно бесконечно, наименьший элемент 1.

2. Если a и $b \in N$ и $a \geq b$, то всегда найдутся два целых неотрицательных числа q и r таких, что $a = b \cdot q + r$, причем $r < b$.

3. Десятичное представление натурального числа.

   Если $a_n, a_{n-1} \ldots, a_2, a_1, a_0$ — цифры числа, которое имеет запись в десятичной системе исчисления в виде $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$, то это означает, что его можно представить так :

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

$$\text{пример:} \quad 743 = 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

4. Целые числа (Z) — это все натуральные, им противоположные и ноль.

5. Рациональные числа (Q) — это числа, представимые в виде несократимой дроби $r = \dfrac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$.

   Любое рациональное число можно представить в виде периодической десятичной дроби.

6. Иррациональные числа (I) — числа, которые нельзя представить в виде несократимой дроби $\dfrac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$.

   Любое иррациональное число можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

7. Множество рациональных и иррациональных чисел образуют множество действительных (вещественных) чисел.

Задачи.

1. Доказать что $\sqrt{2}$ есть число иррациональное.

   Доказательство.

   От противного: пусть $\sqrt{2}$ - рациональное число. Тогда существуют $m \in Z$ и $n \in N$ такие, что $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ и эта дробь несократимая. Так как $\sqrt{2}$ положительное число, то $m \in N$. Возведем обе части в квадрат, получим $m^2 = 2 \cdot n^2$.Правая часть является четным числом, следовательно число m можно представить как $m = 2 \cdot k$, $k \in N$, тогда $n^2 = 2 \cdot k^2$, значит n^2 четное число. Тогда $n = 2 \cdot l$, $l \in N$. Несократимая дробь $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$ на самом деле сократима. Мы пришли к противоречию, следовательно $\sqrt{2}$ есть число иррациональное.

2. Найти двузначное число, сумма цифр которого равна 10 и которое на 36 больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

   Решение.

   Искомое число $\overline{xy}$, т.е. $\overline{xy} = 10x+y$, соответственно другое число $\overline{yx} = 10y+x$. Тогда

$$\begin{cases} x + y & = 10, \\ 10x + y & = 10y + x + 36; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y & = 10, \\ x - y & = 4; \end{cases}$$

   Следовательно $x = 7$,$y = 3$.

   Ответ: 73.

3. Найти все простые p и q такие, что $p^2 - 2q^2 = 1$.

Решение.

Исходное выражение можно записать в виде $p^2-1=2q^2$, тогда $q^2=\frac{(p-1)(p+1)}{2}$.

Произведение простых чисел q и q равно произведению $\frac{(p-1)(p+1)}{2}$, так как число $(p-1)$ меньше $(p+1)$ и q простое, то $p-1=\frac{p+1}{2}$.

Тогда $p=3$,$q=2$.

Ответ: $(3;2)$.

Часть 2. Определение модуля.Линейная и квадратичная функции.

1. Если каждому $x \in X$ можно поставить в соответствие по известному закону единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на числовом множестве X задана функция, которая обозначается обычно $f(x)$ или $y(x)$.

2. Множество X — это область определения функции, Y — область изменения функции.

3. В равенстве $y=f(x)$ x — независимая переменная или аргумент, y —зависимая переменная, или функция.

4. Модуль действительного числа — или абсолютная величина действительного числа— это само число , если оно неотрицательно, и противоположное этому числу число, если оно отрицательно.

   $|x|=x$ при $x \geq 0$;

   $|x|=-x$ при $x<0$.

5. $|-x|=|x|$,

   $|x^n|=|x|^n$

   $|x| \geq x$

$-|x| \le x \le |x|$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$x = \sqrt{x^2}$ при $x \ge 0$

$x = -\sqrt{x^2}$ при $x < 0$

$|xy| = |x||y|$

$|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}(y \ne 0)$

$|x - y| = |y - x|$

$|x + y| \le |x| + |y|$

$|x - y| \le |x| + |y|$

$|x| - |y| \le |x + y|$

6. Неравенство $|x - a| > b$ определяет на числовой оси множество точек, для которых $x > a + b$ или $x < a - b \quad (b > 0)$. Неравенство $|x - a| < b$ определяет на числовой оси множество точек, для которых $-b + a < x < a + b \quad (b > 0)$.

7. Линейная функция.

   $y = kx + b$, $k, b \in R$. График — прямая. Область определения $X \equiv R$.

8. Графики линейных функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ —

   параллельны при $k_1 = k_2$ (угловые коэффициенты),

   перпендикулярны при $k_1 \cdot k_2 = -1$.

9. Смотрим рис.1

   $\mathrm{tg}\alpha = k_1$

   $\mathrm{tg}\beta = k_2$

   $\theta = \beta - \alpha$

   $\mathrm{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

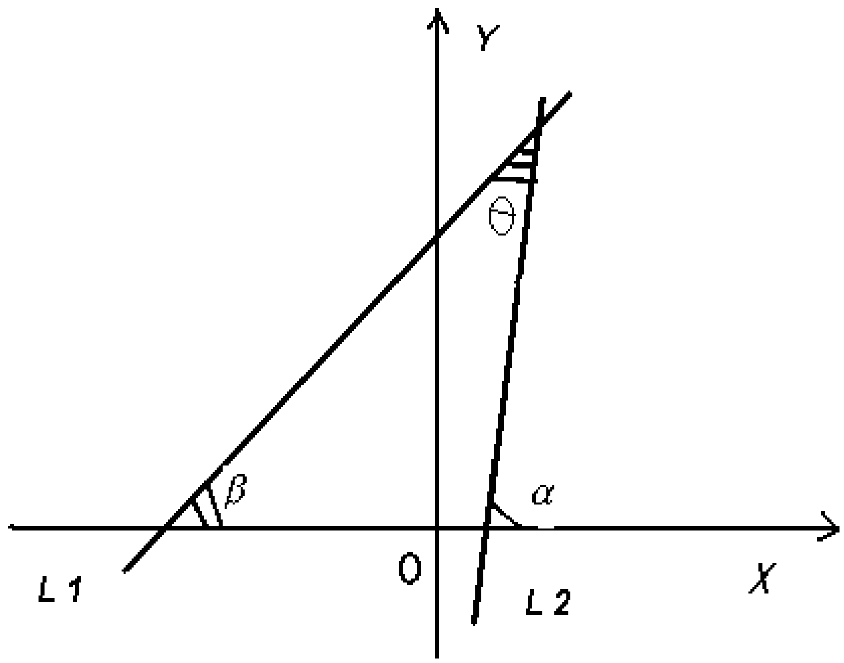


Рис. 1:

10. Квадратичная функция.

    $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

    График — парабола. При $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ ветви направлены вниз.

    Координаты вершины параболы : $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

$$y_0 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Задачи.

1. Найти область определения функции $y = \arcsin(\lg \frac{x}{10})$.

   Решение.

   $-1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1$

   $-1 \leq \lg x - \lg 10 \leq 1$

   $0 \leq \lg x \leq 2$

   $1 \leq x \leq 100$

   Ответ:$[1; 100]$

2. Исследовать четность-нечетность функции ‘ $y = a^x + a^{-x}$.

Решение.

$y(x) = a^x + a^{-x}$

$y(-x) = a^{-x} + a^x \Longrightarrow y(x) = y(-x) \Longrightarrow$ функция четная.

3. Построить график функции $y = x^2 + 4x - \frac{9}{4}$.

Решение.

$a > 0 \Longrightarrow$ ветви параболы направлены вверх.

$x_0 = \frac{-4}{2} = -2, y_0 = 4 - 8 - \frac{9}{4} = -6,25$

$y(0) = -\frac{9}{4}$

$x^2 + 4x - \frac{9}{4} = 0$, $x_1 = -4,5$, $x_2 = 0,5$ (см.рис.2)

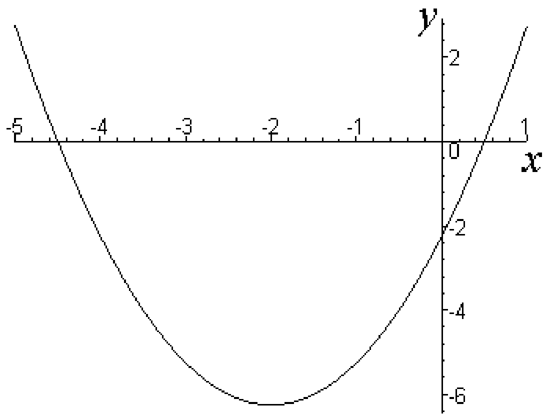


Рис. 2:

4. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ при $x = 1$ принимает наибольшее значение, равное 3, а при $x = -1$ обращается в 0. Какое значение трехчлен принимает при $x = 5$?

Решение.

$y(1) = a + b + c$, $y(-1) = a - b + c \Longrightarrow 2b = 3 \Longrightarrow b = 1,5$. Графиком данной функции является парабола и при $x = 1$ достигается наибольшее значение. Это возможно только тогда, когда ветви направлены вниз, а $(1;3)$ координата вершины параболы. По формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$

$1 = -\frac{1,5}{2a} \Longrightarrow a = -0,75, a + c = 1,5 \Longrightarrow c = 2,25$.

$y(5) = -0,75 \cdot 5^2 + 1,5 \cdot 5 + 2,25 = -9$.

Ответ: -9.

5. Найти область определения и множество значений функции

$f(x) =$
$= \sqrt{6x - x^2 - 5}$.

Решение.

О.О.Ф. : $6x - x^2 - 5 \geq 0$

$(x-1)(x-5) \leq 0$

$1 \leq x \leq 5$;

Множество значений: $6x - x^2 - 5 = 4 - (x-3)^2 \leq 4$, $f(x) \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq f(x) =$
$= \sqrt{6x - x^2 - 5} \leq \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow [0; 2]$

Ответ: $[1; 5][0; 2]$.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Если между цифрами двузначого числа вписать это же число, то полученное четырехзначное будет в 77 раз больше первоначального. Найти число.

   (ответ:15)

2. Построить график функции $y = x^2 - x + 1$

3. Найти область определения и множество значений функции $f(x) =$
   $= \sqrt{21 + 4x - x^2}$. (ответ: $[-3; 7]$ $[0; 5]$)

Занятие 2.

Часть I. Сдвиги и деформации графиков.

Предположим, задан график функции $y = f(x)$. Далее покажем как построить графики некоторых функций.

1. $y = -f(x)$. Для построения нужно зеркально отобразить график функции $y = f(x)$ относительно OX.

   Пример: (см.рис. 3)

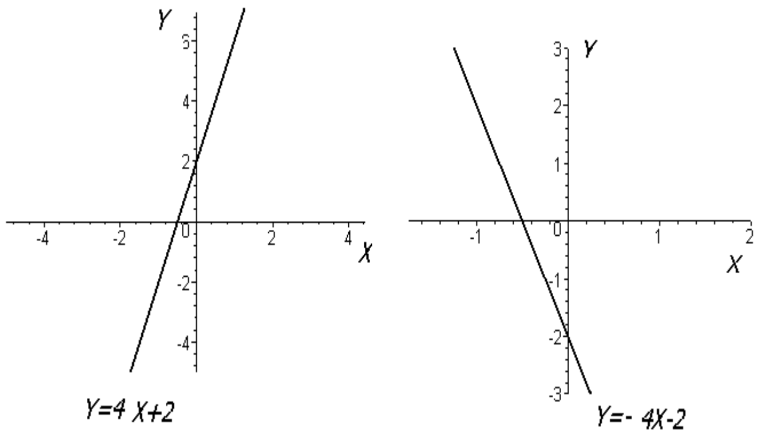


Рис. 3:

2. $y = f(-x)$. Для построения нужно зеркально отобразить график функции $y = f(x)$ относительно OY.

   Пример. Исходная функция $y = 4x + 2$ (график см. выше) , (см.рис. 4)

3. $y = f(x) + b$. Для построения надо сдвинуть гр. функции $y = f(x)$ на $|b|$ единиц вдоль оси ординат вверх при $b > 0$, и вниз при $b < 0$.

4. $y = f(x) + b$. Для построения надо сдвинуть гр. функции $y = f(x)$ на $|b|$ единиц вдоль оси ординат вверх при $b > 0$, и вниз при $b < 0$.

   Пример.(см.рис.4)

5. $y = f(x + c)$. Для построения сдвигаем график ф. $y = f(x)$ на $|c|$ единиц вдоль оси абсцисс — вправо при $c < 0$, влево при $c > 0$. (см.рис.5)

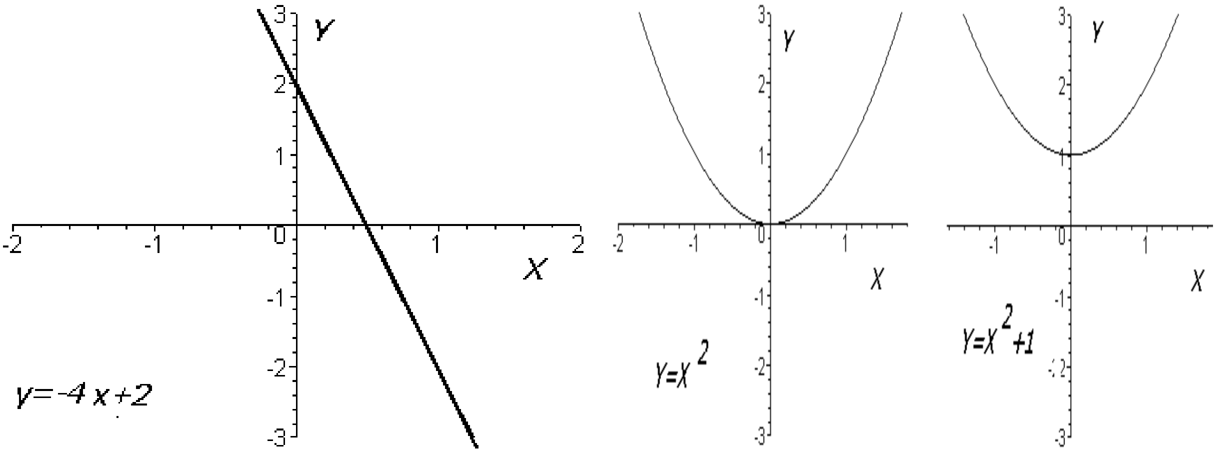


Рис. 4:

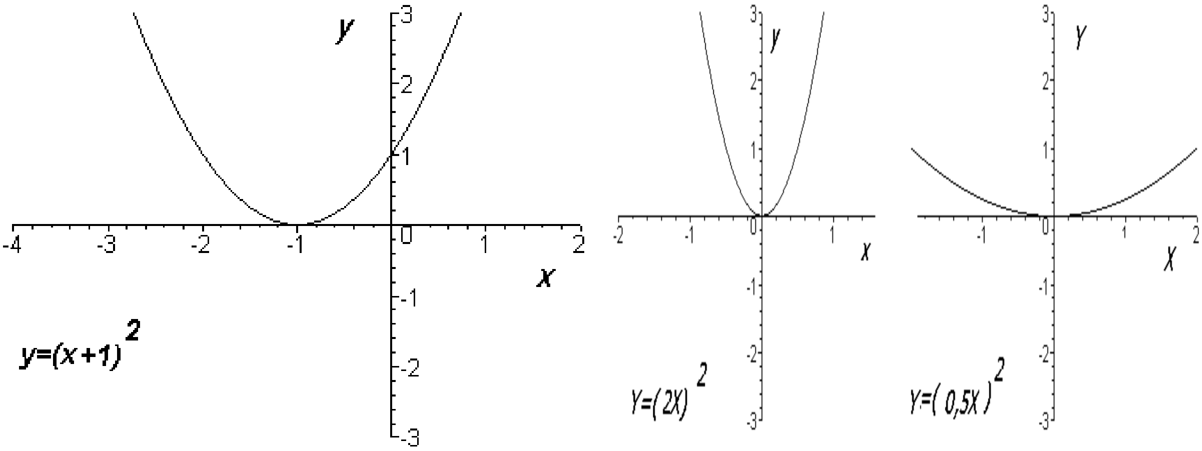


Рис. 5:

6. $y = f(ax)$, $a > 0$. Для построения нужно "сжать"график функции $y = f(x)$ в a раз вдоль оси OX при $a > 1$ или "растянуть"в $\frac{1}{a}$ раз при $a < 1$.

   Пример. Исходный график функции $y = x^2$. Построим $y = (2x)^2$. (см.рис.5)

7. $y = Af(x)$, $A > 0$. Для построения надо "сжать"график функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{A}$ раз вдоль оси OY при $A < 1$ или "растянуть"в A раз при $A > 1$.

   Пример. За исходный возьмем график функции $y = (x+1)^2$. Построим $y = 5(x+1)^2$. (см.рис.6)

8. $y = Af(ax + c) + b$, $A > 0, a > 0, c > 0, b > 0$. Для построения график функции $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси абсцисс влево на $\frac{c}{a}$ единиц,затем полученный график "сжать"в a раз, если $a > 1$, или "растянуть"в $\frac{1}{a}$ раз если

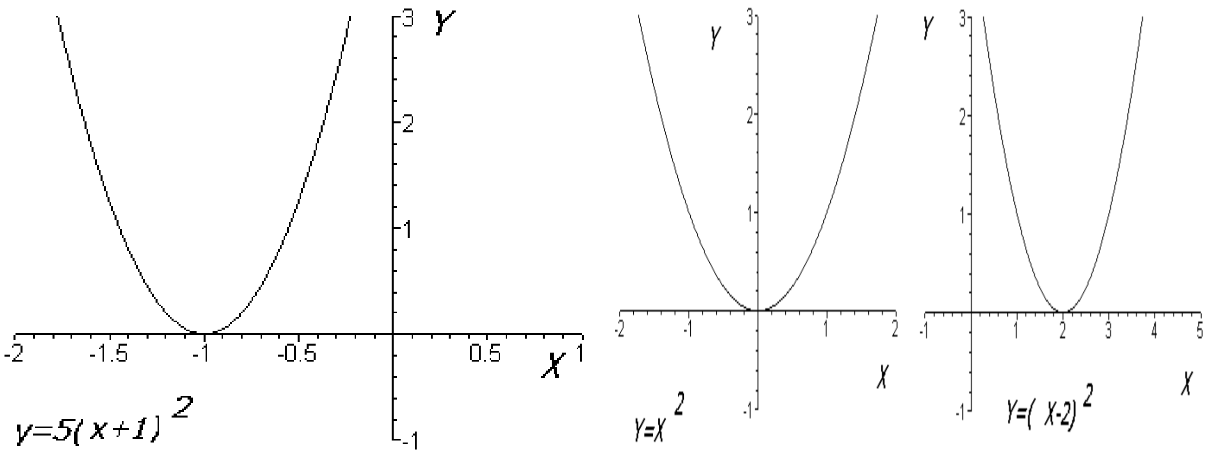


Рис. 6:

$a < 1$ вдоль оси абсцисс , а потом "растянуть"в A раз вдоль оси ординат если $A > 1$ или "сжать"в $\frac{1}{A}$ раз, если $A < 1$ и ,наконец, сдвинуть последний график вдоль оси ординат на b единиц вверх.

Пример. $y = 8x - 2x^2$

$8x - 2x^2 = -2((x-2)^2 - 4)$. Далее строим график функции $y = x^2$. (см.рис. 6)

Затем переносим его вдоль оси OX на 2 единицы длины вправо.

Опускаем на 4 единицы вниз. (см.рис. 7)

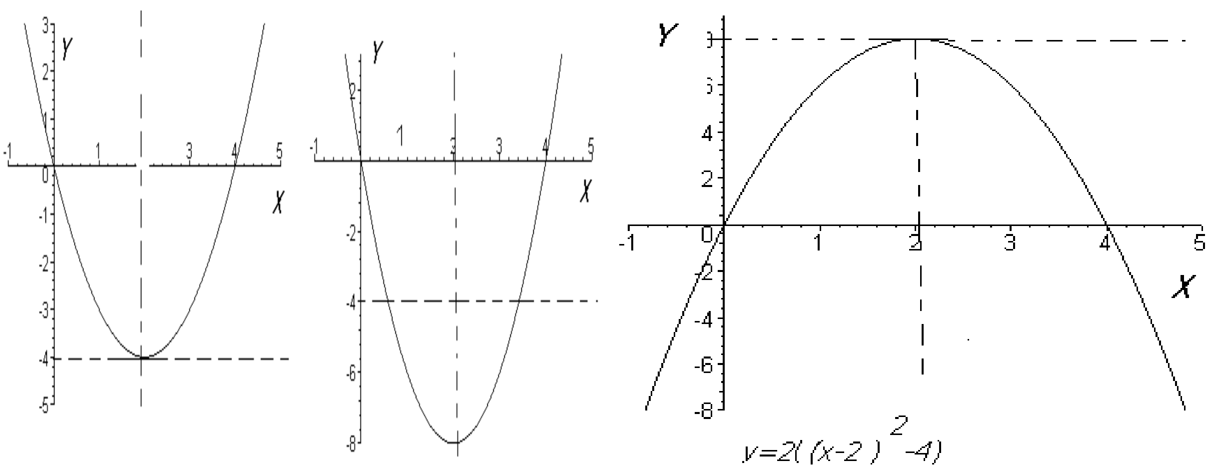


Рис. 7:

Затем растягиваем полученный график вдоль оси OY в 2 раза.

После этого симметрично отобразим график относительно OX.(см.рис.7)

Часть 2.Графики с модулем. Графики кубической функции, дробно - линейной,функции четвертой степени.

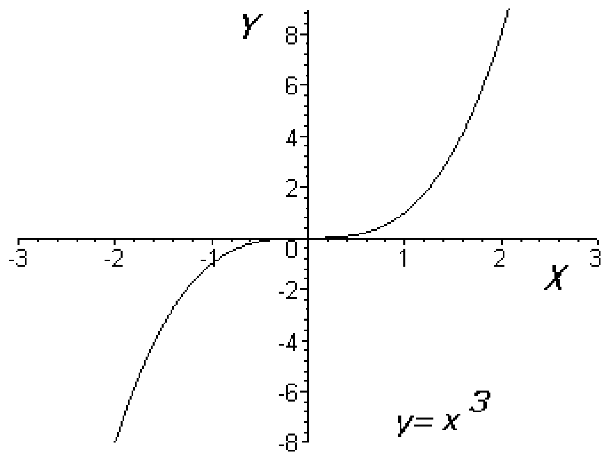
1. Для того, чтобы построить график функции $y = |f(x)|$ нужно построить график функции $y = f(x)$, затем часть графика, расположенную ниже оси OX зеркально отобразить относительно этой оси.

2. Кубическая функция $y = x^3$.

   Область существования $(-\infty; +\infty)$.

   Область изменения $(-\infty; +\infty)$.

   Функция нечетная ,значит график симметричен относительно начала координат. Проходит через точку $(0; 0)$. (см.рис.8)



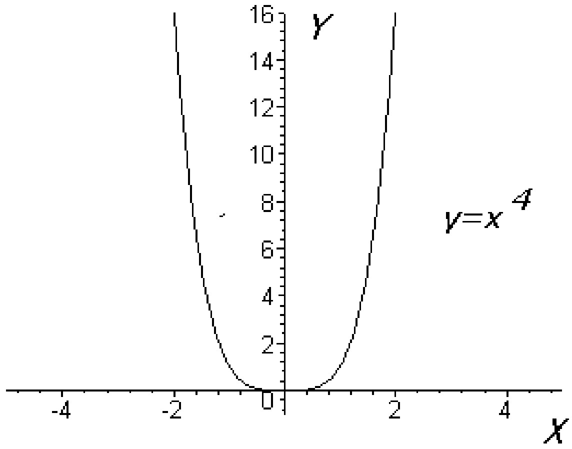


Рис. 8:

3. Функция четвертой степени $y = x^4$.

   Область существования $(-\infty; +\infty)$.

   Область изменения $(0; +\infty)$.

   Функция четная, значит график симметричен относительно оси OY. Вершина —$(0; 0)$. График имеет тот же вид, что и гр. ф. $y = x^2$, только круче. (см.рис.8)

4. График функции $y = \frac{k}{x}$ называется гиперболой.

   Область определения $x \in R$, $x \neq 0$. Функция нечетная. При $k > 0, y \to +\infty$, если $x \to +0$; $y \to -\infty$ если $x \to -0$. Т.е. $x = 0$ — вертикальная асимптота графика.

5. Для построения графика дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ нужно выделить целую часть дроби, а затем вести построение путем преобразования графиков.

   Пример. $y = \frac{2x+3}{x-1}$. Выделим целую часть

   $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2x-2+5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$. Затем последовательно построим графики:

   $y = \frac{1}{x}$

   $y = \frac{5}{x}$

   $y = \frac{5}{x-1}$

   $y = 2 + \frac{5}{x-1}$. (см.рис. 9)

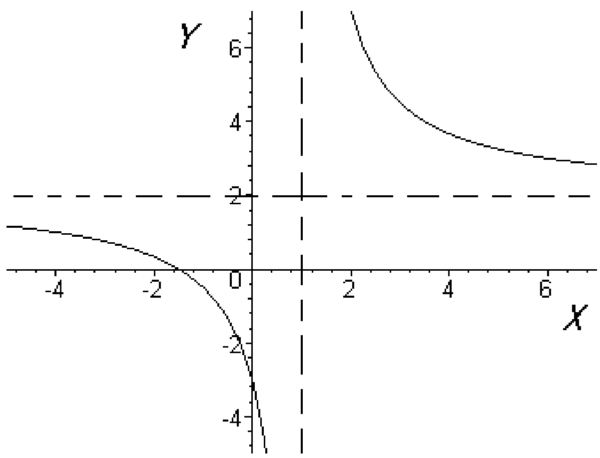


Рис. 9: $y = \frac{2x+3}{x-1}$

Задачи.

1. Построить график функции $y = -|x|$. (см.рис. 10)

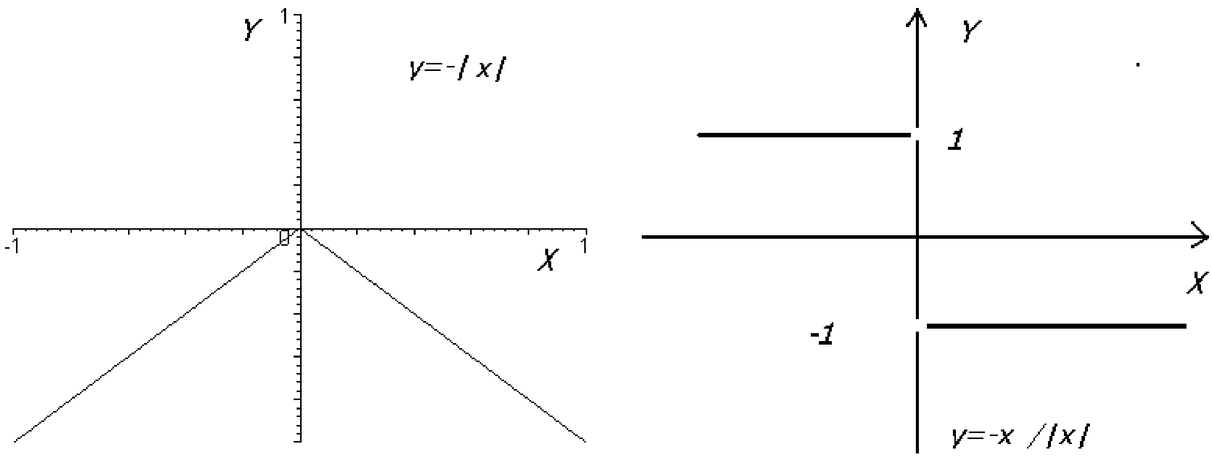


Рис. 10:

2. Построить график функции $y = \frac{-x}{|x|}$.

   Область существования $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Функция нечетная. Правая ветвь (при $x > 0$)—полупрямая $y = \frac{-x}{x}$ или $y = -1$; левая (при $x < 0$)— симметрична правой относительно начала координат. (см.рис. 10)

3. Построить график функции $y = x|x|$.

   Функция нечетная. При $x \geq 0$,$y = x^2 \Longrightarrow$ правая ветвь квадратичной параболы. При $x < 0$ симметрия относительно начала координат. (см.рис. 11)

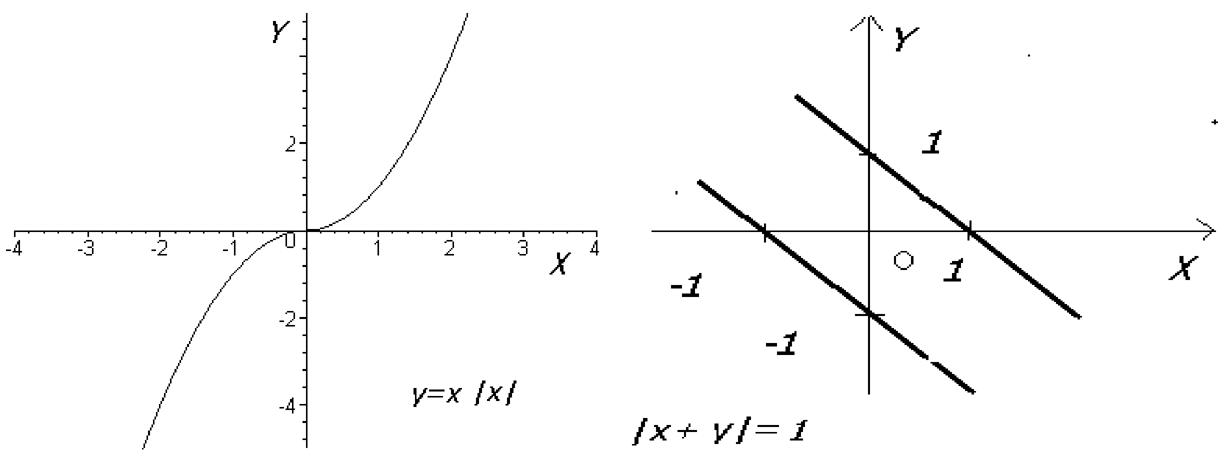


Рис. 11:

4. Построить график функции $|x + y| = 1$.

   $x + y = 1 \Longrightarrow y = -x + 1$

$x+y=-1 \Longrightarrow y=-x-1$. (см.рис. 11)

5. Построить график функции $(x+|x|)^2+(y+|y|)^2=4$.

   Заданное уравнение распадается на 4:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ (x+x)^2+(y+y)^2 & =4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ x^2+y^2 & =1; \end{cases}$$

   Это уравнение окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

$$\begin{cases} x \leq 0, y \geq 0, \\ (x-x)^2+(y+y)^2 & =4; \end{cases}$$

   $y=1; x \leq 0$—уравнение прямой параллельной оси абсцисс.

$$\begin{cases} x \leq 0, y \leq 0, \\ (x-x)^2+(y-y)^2 & =4; \end{cases}$$

   Это невозможно, функция не существует.

$$\begin{cases} x \geq 0, y \leq 0, \\ (x+x)^2+(y-y)^2 & =4; \end{cases}$$

   $x=1; y \leq 0$ — уравнение прямой. (см.рис. 12)

6. Построить график функции $y=x^{\log_{\sqrt{x}}(x+1)}$. (февр.2004 ФСН).

   О.Д.З.

$$\begin{cases} x>0, \;\; x \neq 1, \\ x+1 & >0; \end{cases}$$

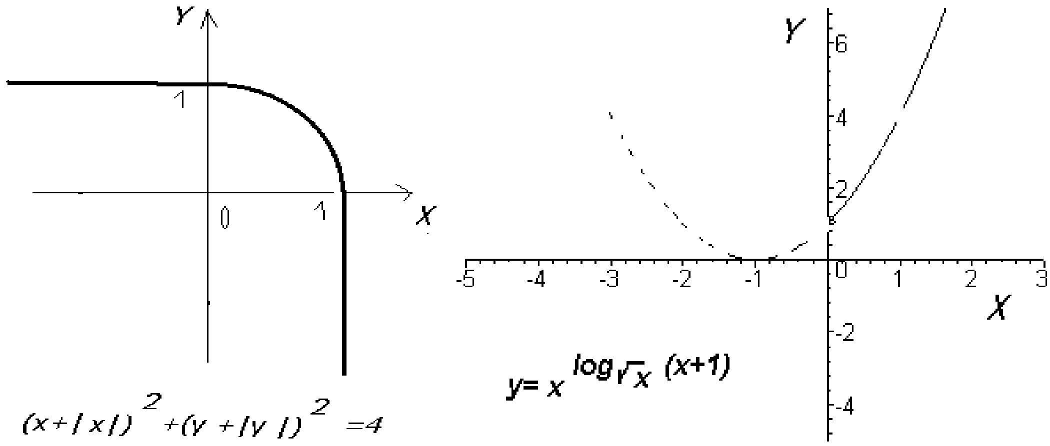


Рис. 12:

$\Longrightarrow x > 0, x \neq 1.$

Упростим $x^{\log_{\sqrt{x}}(x+1)} = (x^{\log_x(x+1)})^2 = (x+1)^2$ (см.рис. 12)

7. Построить график функции $y = \frac{3-2x}{1-x}$.

   Преобразуем $y = -\frac{1}{x-1} + 2$. Строим график исходной функции $y = -\frac{1}{x}$, затем сдвигаем по OX на 1 вправо, на 2 по OY вверх. (см.рис. 13)

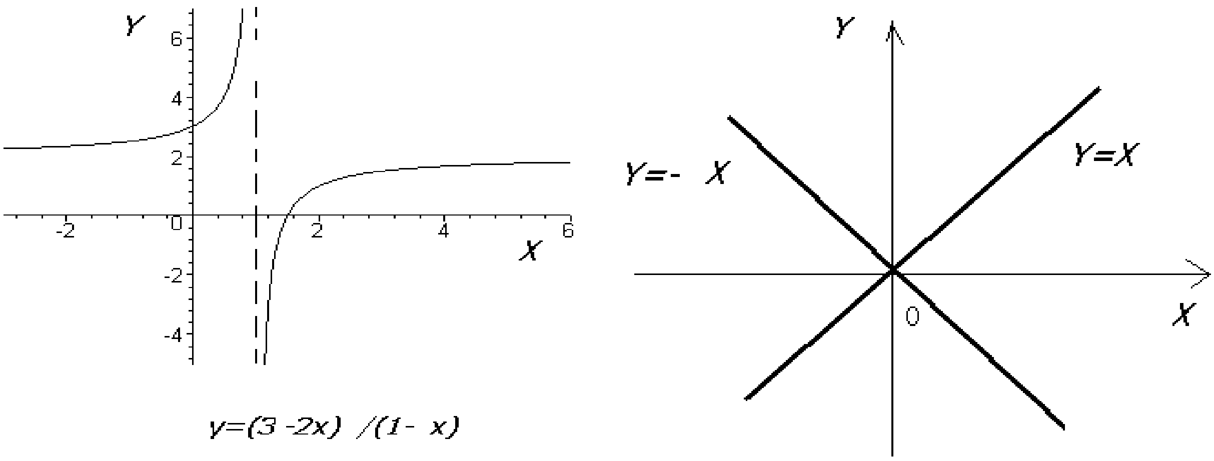


Рис. 13:

8. Построить график функции $|y| = |x|$.

   Т.к. $|-y| = |y|$, $|-x| = |x|$, то график симметричен относительно OX и OY. В первой четверти при $x \geq 0$, $y \geq 0$ имеем $x = y$. В остальных четвертях достраиваем симметрично относительно обеих осей. (см.рис. 13)

9. Построить график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

   Функция нечетная. Проведем построение для $x > 0$.

   Вспомогательные графики $y = x$, $y = \frac{1}{x}$. Прямая $y = x$ асимптота искомого графика. (см.рис. 14)

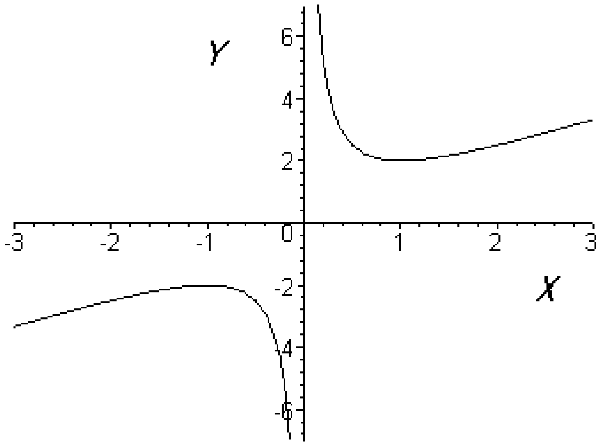


Рис. 14: $y = x + \frac{1}{x}$

10. График квадратного трехчлена $y = ax^2 + (a-3)x + a$ лежит выше оси абсцисс. Какому промежутку принадлежит a?

    Решение.

    Т.к. график лежит выше оси абсцисс, то $a > 0$. Рассмотрим дискриминант $D = (a-3)^2 - 4a^2 = -3(a^2 + 2a - 3)$. Если $a^2 + 2a - 3 > 0$, то график лежит выше оси абсцисс, т.е. если $a > 1, a < -3$. С учетом условия $a > 0$, имеем: $a > 1$.

    Ответ: $(1; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Построить график функции $y = |2x^2 - x|$.

2. Построить график функции $y = 2x^2 - |x|$.

3. Построить график функции $y = (5 - |x|)(x + 1)$.

Занятие 3.
Часть I. Уравнения.

1. Уравнение— это равенство, содержащее переменную, значение которой необходимо найти. При этом значении равенство является верным.

   Уравнение с одной переменной — $f(x) = g(x)$; $f(x), g(x)$— данные аналитические выражения.

2. Два уравнения $f(x) = g(x)$ $(*)$

   и $f_1(x) = g_1(x)$ $(**)$ наз. равносильными на некотором множестве M, если каждый корень уравнения $(*)$ из M является корнем уравнения $(**)$ из множества M и, наоборот, каждый корень уравнения $(**)$ из M является корнем уравнения $(*)$ из M.

   Пример. $x + 4 = 3x$ равносильно $x - 2 = 0$

   $x^2 + x = 0$ не равносильно $\frac{x^2+1}{x} = \frac{1-x}{x}$.

3. В процессе решения уравнения производятся преобразования для приведения его к более простому эквивалентному уравнению. При этом нельзя нельзя терять и приобретать посторонние корни , т.е. нарушать равносильность переходов. Для этого нужно либо определить О.Д.З., либо делать в конце проверку.

   Пример.

   1)$x^3 - x = 0$

   разделим обе части уравнения на x ,тогда

   $x^2 = 1$

   $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ при делении потерян корень $x_3 = 0$.

   2) $x^2 + 6 + \frac{1}{x-2} = 5x + \frac{1}{x-2}$

$x^2-5x+6=0$

$x_1=2$, $x_2=3$

приобретен корень $x=2$, который не входит в область определения уравнения.

Часть 2. Линейные,квадратные уравнения. Уравнения с параметрами.

1. Уравнения вида $ax+b=0$ называются линейными.

   При $a\neq 0$ $x=-\frac{b}{a}$— единственный корень;

   при $a=0, b=0$ — решения все $x\in R$;

   при $a=0, b\neq 0$ —решений нет.

2. Квадратные уравнения — $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.

   При $a=1$ — приведенное кв. уравнение $x^2+px+q=0$;

   При $D\geq 0$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ — 2 действительных корня;

   $D=0$ корни совпадают;

   $D<0$ —действительных корней нет.

3. Теорема Виета.

   $x^2+px+q=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2 &= -p, \\ x_1x_2 &= q; \end{cases}$$

Задачи.

1. Решить уравнение

   $2x^2+\frac{1}{x^2-4}=8+\frac{1}{x^2-4}$.

   О.Д.З.

$x \neq \pm 2;$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x_{1,2} = \pm 2$

Ответ: нет решений.

2. Выделить полный квадрат:

   $2x^2 + 3x + 4.$

   $2x^2+3x+4 = 2(x^2+1,5x+2) = 2(x^2+1,5x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{32}{16}) = 2(x+0,75)^2+\frac{23}{8}.$

3. Решить уравнение

   $x(\frac{5-x}{x+1})(x+\frac{5-x}{x+1}) = 6.$

   О.Д.З.

   $x \neq -1.$

   Пусть $y = \frac{5-x}{x+1}.$

$$\begin{cases} y & = \frac{5-x}{x+1}, \\ xy(x+y) & = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{xy+y+x-5}{x+1} & = 0, \\ xy(x+y) & = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy+y+x-5 & = 0, \\ xy(x+y) & = 6; \end{cases}$$

Пусть $u = x+y, v = xy.$

$$\begin{cases} u+v &= 5, \\ uv &= 6; \end{cases}$$

Следовательно , по теореме обратной теореме Виета $z^2 - 5z + 6 = 0$

$z_1 = 3$;$z_2 = 2. \Longrightarrow u = 2, v = 3$ или $u = 3, v = 2$

$$\begin{cases} x+y &= 2, \\ xy &= 3; \end{cases}$$

$z^2 - 2z + 3 = 0$, $D < 0 \Longrightarrow$ действительных корней нет и система не имеет решений; или

$$\begin{cases} x+y &= 3, \\ xy &= 2; \end{cases}$$

$z^2 - 3z + 2 = 0$

$z_1 = 2$, $z_2 = 1 \Longrightarrow x = 2, y = 1$ или $x = 1, y = 2.$

Ответ:$x_1 = 1; x_2 = 2.$

4. (июль 2003,ВМК). Даны 3 уравнения с действительными коэффициентами:

   1)$x^2 - (a+b)x + 8 = 0,$

   2)$x^2 - b(b+1)x + c = 0,$

   3)$x^4 - b(b+1)x^2 + c = 0.$

   Каждое из них имеет, по крайней мере, один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше 1 . Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения, и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c, если $b > 3$.

Решение.

Если x_1, x_2 — корни первого уравнения,

тогда из первого уравнения $x_1 x_2 = 8$,

а из третьего $x_1^2 x_2^2 = c = 64 \Longrightarrow c = 64$.

Пусть x_0 — общий корень трех уравнений.

Тогда x_0^2 является корнем второго уравнения и $x_0 \neq x_0^2$ (поскольку $x_0 > 1$)

$\Longrightarrow x_0$ и x_0^2 различные корни.

Значит $c = x_0^3 = 64 \Longrightarrow x_0 = 4$.

Кроме того $b(b+1) = x_0 + x_0^2 \Longrightarrow b + b^2 = x_0 + x_0^2$.

Решая последнее уравнение относительно b имеем:

$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x_0+4x_0^2}}{2} = \frac{-1 \pm (2x_0+1)}{2}$

$b_1 = x_0$, $b_2 = -1 - x_0 < 0$-посторонний корень.

Значит $b = 4$. Подставляя значение $b = 4$ в первое уравнение, находим $a = 2$.

Покажем, что других значений нет.

Действительно, x_0 корень первого уравнения $(x_0 = b)$,

тогда $b^2 - (a+b)b + 8 = 0 \Longleftrightarrow ab = 8$, $a = \frac{8}{b}$— второй корень этого уравнения.

Рассмотрим третье уравнение: $x^4 - b(b+1)x^2 + b^3 = 0$.

Решая его , получим: $x_1^2 = b^2$, $x_3^2 = b \Longrightarrow x_1 = b, x_2 = -b, x_3 = \sqrt{b}, x_4 = -\sqrt{b}$.

Корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения, поэтому:

1)$\frac{8}{b} = b, b^2 = 8, b = \pm 2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} < 3 \Longrightarrow$— не подходит;

2)$\frac{8}{b} = -b$— нет решений;

3)$\frac{8}{b} = \sqrt{b}, \sqrt{b} = 2, b = 4$;

4)$\frac{8}{b} = -\sqrt{b}$ — нет решений.

Ответ: $a = 2, b = 4, c = 64$.

5. (март 2004 Ф.) Найти все значения параметра a , при которых уравнение имеет ровно 3 корня .

$(x^2+3x+2+a^2)^2 = 4a^2(2x^2+3x+2)$.

Решение.

$(x^2+3x+2+a^2)^2 = 4a^2(2x^2+3x+2)$

$(x^2+3x+2)^2 + 2a^2(x^2+3x+2) + a^4 = 4a^2(x^2+3x+2) + 4a^2x^2$

$(x^2+3x+2-a^2)^2 = 4a^2x^2$

$(x^2+3x+2-a^2-2ax)(x^2+3x+2-a^2+2ax) = 0$

$x^2+x(3-2a)+2-a^2 = 0$ или $x^2+x(3+2a)+2-a^2 = 0$, тогда

а) $D_1 = (3-2a)^2 - 8 + 4a^2 = 9 - 12a + 4a^2 - 8 + 4a^2 = 8a^2 - 12a + 1$

$8a^2 - 12a + 1 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$

$D_2 = (3+2a)^2 - 8 + 4a^2 = 9 + 12a + 4a^2 - 8 + 4a^2 = 8a^2 - 12a + 1$

$8a^2 - 12a + 1 = 0$

$a_{3,4} = \frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$

$a_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$

$a_{3,4} = \frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$

в)x_0- общий корень, $2ax_0 = 0$, тогда либо $a = 0$

$\Longrightarrow x^2+3x+2 = 0 \ D < 0 \Longrightarrow$ решений нет,

либо $x = 0$, тогда $a = \pm\sqrt{2}$

и после непосредственной подстановки убеждаемся, что данное уравнение имеет ровно 3 корня.

Ответ: $a = \frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$, $a = \frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$, $a = \pm\sqrt{2}$.

6. (март 2002)Найти наименьшее из значений x, для которого существуют числа y,z, удовлетворяющие уравнению $x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1$.

Решение.

Запишем уравнение как квадратное относительно z:

$z^2-z(x+y)+x^2+2y^2+xy-1=0$.

Уравнение имеет решения при условии:

$D_1=(x+y)^2-4(x^2+2y^2+xy-1)=-3x^2-7y^2-2xy+4\geq 0$

или $7y^2+2xy+3x^2-4\leq 0$.

В свою очередь это квадратное относительно y неравенство имеет решения если

$D_2=4x^2-28(3x^2-4)=112-80x^2\geq 0$

$\Longrightarrow x^2\leq \frac{7}{5}$

$\Longleftrightarrow -\sqrt{\frac{7}{5}}\leq x\leq \sqrt{\frac{7}{5}}$

Ответ: $x=-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Решить уравнение: $x\frac{50-x}{x+1}(x+\frac{50-x}{x+1})=576$.

   (ответ: $x_1=2, x_2=16$.)

2. Решить уравнение: $\frac{22-4x}{(x-1)(x-3)}+3=\frac{5}{x-3}$.

   (ответ:4).

3. (февраль 2004 ФзФ) Решить уравнение: $(2x-1)(x-1)(2x^2+5x+1)=9x^2$.

   (ответ: $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}; x_{3,4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$).

Занятие 4.

Часть I. Уравнения высших степеней.

1. Алгебраическое уравнение называется целым, если все его коэффициенты целые, а показатели степеней неизвестных натуральные, т.е. это уравнение вида:

   $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$

2. Целое приведенное уравнение ($a_0 = 1$).

   $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$

3. Все целые корни целого приведенного уравнения являются делителями свободного члена.

4. Целое неприведенное уравнение.

   $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$

   Для его решения можно ввести новую переменную y и с помощью замены $x = \frac{y}{a_0}$

   прийти к уравнению

   $y^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_0^{n-2}y + a_na_0^{n-1} = 0$ — оно уже приведенное. Сначала найдем целые корни, а затем и все остальные.

   Пример.

   $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

   $x = \frac{y}{2}$

   $2\frac{y^3}{8} - 3\frac{y^2}{4} - \frac{11y}{2} + 6 = 0$

   $\frac{y^3}{4} - \frac{3y^2}{4} - \frac{11y}{2} + 6 = 0| \cdot 4$

   $y^3 - 3y^2 - 22y + 24 = 0$

   $D(24) = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \mp8, \pm12, \pm24\}$

После подстановки находим $y_1 = 1$.

Теперь разделим многочлен $y^3 - 3y^2 - 22y + 24 = 0$ на $y - 1$.

В частном получим :$y^2 - 2y - 24 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, получаем еще 2 корня :$y_2 = 6, y_3 = -4$.

Теперь получим обратно х— $x_1 = 0,5, x_2 = 3, x_3 = -2$.

Ответ:$0,5; 3; -2$.

5. Алгебраическое уравнение вида $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

   называется трехчленным уравнением.

   При $n = 1$ квадратное, при $n = 2$ биквадратное.

   Решение сводится к решению квадратного уравнения $az^2+bz+c = 0$ заменой $z = x^n$.

   Пример. $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$

   $z = x^3$

   $8z^2 + 7z - 1 = 0$

   $z_1 = -1$; $z_2 = \frac{1}{8}$

   $x^3 = -1 \Longrightarrow x_1 = -1$; $x^3 = \frac{1}{8} \Longrightarrow x_2 = 0,5$

   Ответ: $-1; 0,5$.

6. Уравнение с целыми степенями относительно неизвестного называется возвратным, если его коэффициенты, равноотстоящие от концов левой части равны между собой,т.е.

   $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0.$

7. Возвратное уравнение нечетной степени

   $ax^{2n+1} + bx^{2n} + cx^{2n-1} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$ всегда имеет корень $x = -1$.

Пример.

$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$ — возвратное уравнение четной степени.

$x=0$ не является корнем.

Разделим обе части уравнения на x^2 $(x^4=x^2x^2)$.

$2x^2+3x-16+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0.$

Сгруппируем $2(x^2+\frac{1}{x^2})+3(x+\frac{1}{x})-16=0.$

Сделаем замену:$y=x+\frac{1}{x}$,

причем $y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$2(y^2-2)+3y-16=0$

$2y^2+3y-20=0$

$y_1=-4; y_2=2,5.$

Тогда $x+\frac{1}{x}=-4$

$\Longrightarrow x^2+4x+1=0$

$\Longrightarrow x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3};$

$x+\frac{1}{x}=2,5 \Longrightarrow 2x^2-5x+2=0$

$\Longrightarrow x_3=2, x_4=0,5$

Ответ:$-2\pm\sqrt{3}; 2; 0,5.$

8. Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения :

   $a\varphi(x)+b(\varphi(x))^{-1}+c=0.$

   Заменой $\varphi(x)=z$ сводятся к квадратным относительно z.

   Пример.

   $x^3-x^2=2+\frac{8}{x^3-x^2}.$

   О.Д.З. $x(x-1)\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0$; $x\neq 1.$

Замена $x^3 - x^2 \neq 0$

$z = 2 + \frac{8}{z}$

$z^2 - 2z - 8 = 0$

$z_1 = 4; z_2 = -2$

$x^3 - x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2$

$x^3 - x^2 = -2 \Longrightarrow x = -1$

Ответ: 2;-1.

9. Уравнения вида $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = p$

   сводятся к квадратному относительно z заменой

   $z = (x + a)(x + d)$ если $a + d = b + c$

   $z = (x + a)(x + b)$ если $a + b = c + d$

   $z = (x + a)(x + c)$ если $a + c = b + d$.

   Пример.

   $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120$

   $a + d = b + c \Longrightarrow$ замена $z = (x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$

   $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 4 + 2$

   $z(z + 2) = 120$

   $z^2 + 2z - 120 = 0$

   $z_1 = -12; z_2 = 10$

   $x^2 + 5x + 4 = -12 \Longrightarrow D < 0 \Longrightarrow$ действительных корней нет;

   $x^2 + 5x + 4 = 10 \Longrightarrow x_1 = -6, x_2 = 1$

   Ответ: $-6; 1$.

10. Уравнения вида

$x^2 + \frac{b^2x^2}{(x-b)^2} = c$ и $x^2 + \frac{b^2x^2}{(x+b)^2} = c$

можно решить выделением полного квадрата вида

$(x + \frac{bx}{x-b})^2$ и $(x - \frac{bx}{x+b})^2$ соответственно.

Пример.

$x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7.$

О.Д.З. $\quad x \neq -3;$

выделяем полный квадрат:

$(x^2 - 2\frac{3x^2}{x+3} + \frac{9x^2}{(x+3)^2}) + \frac{6x^2}{x+3} = 7$

$(x - \frac{3x}{x+3})^2 + \frac{6x^2}{x+3} = 7$

$\frac{x^4}{(x+3)^2} + 6\frac{x^2}{x+3} - 7 = 0$

замена

$z = \frac{x^2}{x+3}$

$z^2 + 6z - 7 = 0$

$z_1 = -7$; $z_2 = 1$

$\frac{x^2}{x+3} = -7 \Longrightarrow D < 0 \Longrightarrow$— действительных корней нет;

$\frac{x^2}{x+3} = -7 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

11. Уравнения вида $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

приводятся к биквадратному заменой $x = t - \frac{a+b}{2}$.

Также данное уравнение можно решить выделением полного квадрата вида

$((x + a)^2 + (x + b)^2)^2$.

Пример.

$(x+5)^4+(x+3)^4=2.$

$x=t-4$

$(t+1)^4+(t-1)^4=2$

$2t^4+12t^2=0$

$t=0$

$x=0-4=-4$

Ответ: -4.

12. Однородное уравнение относительно $u(x)$ и $v(x)$.

$a_1u^n+a_2u^{n-1}v+\ldots+a_nv^n=0.$

Решение уравнения сводится к решению уравнения n-го порядка относительно неизвестного

$z=\frac{u}{v}, v\neq 0$ делением уравнения на v^n.

Пример.

$(\frac{x+1}{x-1})^2-2(\frac{x-2}{x-1})-3(\frac{x-2}{x+1})^2=0$

Разделим обе части уравнения на $(\frac{x-2}{x+1})^2\neq 0$.

О.Д.З.

$x\neq \pm 1.$

$\frac{(x+1)^4}{(x-1)^2(x-2)^2}-2\frac{(x+1)^2}{(x-2)(x-1)}-3=0$

$z=\frac{(x+1)^2}{(x-2)(x-1)}$

$z^2-2z-3=0$

$z_1=3; z_2=-1$

$\frac{(x+1)^2}{(x-2)(x-1)}=3$

$2x^2-11x+5=0$

$\Longrightarrow x_1 = 5; x_2 = 0,5$

$\frac{(x+1)^2}{(x-2)(x-1)} = -1$

$2x^2 - x + 3 = 0$

$\Longrightarrow D < 0 \Longrightarrow$— действительных корней нет.

Ответ: $0,5; 5$.

13. Уравнение вида $f(f(x)) = x$.

Решение сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} f(x) & = t, \\ f(t) & = x; \end{cases}$$

Пример.

$(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3 = x$

$f(x) = x^2 - x - 3 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 & = t, \\ t^2 - t - 3 & = x; \end{cases}$$

$(x^2 - t^2) - (x - t) = t - x$

$x^2 - t^2 = 0$

$t = x \ ; \ t = -x$

$x^2 - x - 3 = x$

$\Longrightarrow x_1 = -1 \ ; \ x_2 = 3$

$x^2 - x - 3 = -x \Longrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$

Ответ: $-1; 3; \pm\sqrt{3}$.

Часть 2.Уравнения с модулем.

Пример.

$3|3-x|+|x-1|-2|2-x|=4$

$3|x-3|+|x-1|-2|x-2|=4$

Корни двучленов под знаком модуля : $x=3$;$x=1$; $x=2$.

Они разбивают числовую ось OX на промежутки, в каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак. Рассмотрим данное уравнение на каждом из полученных промежутков.

1. $x \geq 3$

   $3(x-3)-2(x-2)+(x-1)=4$

   $2x=10$

   $x=5 \in [3;+\infty) \Longrightarrow$— это собственный корень.

2. $2 \leq x < 3$

   $-3(x-3)-2(x-2)+(x-1)=4$

   $-4x=-8$

   $x=2 \in [2;3)$.

3. $1 \leq x < 2$

   $-3(x-3)+2(x-2)+(x-1)=4$

   $0=0 \Longrightarrow$ все $x \in [1;2)$ - решения.

4. $x < 1$

   $-3(x-3)+2(x-2)-(x-1)=4$

   $x=1$ — не принадлежит заданному интервалу,следовательно, посторонний корень.

   Ответ: $1 \leq x \leq 2$; $x=5$.

Часть 3. Иррациональные уравнения.

Некоторые методы решения и виды уравнений.

1. Освобождение от иррациональности уединением радикала.

   Пример.

   $\sqrt{3-x}-5=3x$

   Уединим радикал $\sqrt{3-x}=5+3x$

   О.Д.З.

   $x \leq 3;$

   причем $5+3x \geq 0, x \geq -\frac{5}{3};$

   возведем в квадрат $3-x=25+30x+9x^2$

   $\Longrightarrow x_1=-1, x_2=-\frac{22}{9}$— посторонний корень.

   Ответ: -1.

2. Метод подстановки.

   Пример.

   $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2=2$

   О.Д.З.

   $x \geq 0;$

   замена: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=t$

   $t^3+t^2=2$

   $t_1=1$

   $t^2+2t+2=0$

   $\Longrightarrow D<0 \Longrightarrow$— нет действительных корней;

   $\Longrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x}=1$

$\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{x}$ при $1 - \sqrt{x} \geq 0$

возводим обе части в квадрат и получаем:

$x + 1 = 1 - 2\sqrt{x} + x$

$x = 0$

Ответ:0.

3. Однородные уравнения.

   Пример.

   $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 3\sqrt[3]{(x-1)^2} = 4\sqrt[3]{x^2-1}.$

   Уравнение является однородным относительно

   $\sqrt[3]{x+1}$ и $\sqrt[3]{x-1}$,

   после деления обеих частей уравнения на $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ $(x \neq 1)$,

   получим

   $\sqrt[3]{(\frac{x+1}{x-1})^2} + 3 = 4\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}};$

   замена $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$,

   $t^2 + 3 = 4t$

   $t_1 = 1; t_2 = 3$

   $\frac{x+1}{x-1} = 1$

   $\Longrightarrow$— действ. корней нет;

   $\frac{x+1}{x-1} = 27 \Longrightarrow x = \frac{14}{13}$

   Ответ: $\frac{14}{13}$.

4. Сведение уравнения к системе уравнений.

   Пример.

   $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

О.Д.З.

$x \geq 1$;

заменим $\sqrt[3]{x-2} = u$,$\sqrt{x+1} = v$

$\Longrightarrow x - 2 = u^3$, $x + 1 = v^2$

выразим $x = u^3 + 2$ и получим систему

$$\begin{cases} u^3 - v^2 + 3 & = 0, \\ u + v & = 3; \end{cases}$$

достаточно найти все значения одной из переменных $v = 3 - u$

$u^3 - 9 + 6u - u^2 + 3 = 0$

$u^3 - u^2 + 6u - 6 = 0$

$(u - 1)(u^2 + 6) = 0$

$u = 1$

$x - 2 = 1$

$x = 3$

Ответ: 3.

5. Решение уравнения $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = a$.

Пример.

$\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1.$

Возведем в куб обе части уравнения

$5x + 7 - 3(\sqrt[3]{5x+7})^2\sqrt[3]{5x-12} + 3\sqrt[3]{5x+7}(\sqrt[3]{5x-12})^2 - 5x + 12 = 1$

$3\sqrt[3]{5x+7}\sqrt[3]{5x-12}(\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12}) = 18$

в силу исходного уравнения $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1$ получим:

$3\sqrt[3]{5x+7}\sqrt[3]{5x-12}=18$

возведем обе части в куб:

$25x^2-60x+35x-84=216$

$x^2-x-12=0$

$x_1=4; x_2=-3$

Т.к. возможно приобретение посторонних корней, сделаем проверку.

$\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{8}=1 \Longrightarrow 1=1 \Longrightarrow$ верно;

$\sqrt[3]{-8}-\sqrt[3]{-27}=1 \Longrightarrow 1=1 \Longrightarrow$ верно.

Ответ: $4; -3$.

6. Уравнение вида

$\sqrt[\varphi(x)]{a}+\sqrt[\varphi(x)]{b}=c$ если $ab=1$.

Пример.

$\sqrt[x]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[x]{2-\sqrt{3}}=4$

заметим, что $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$,

умножим обе части уравнения на $\sqrt[x]{2+\sqrt{3}}$

$(\sqrt[x]{2+\sqrt{3}})^2-4\sqrt[x]{2+\sqrt{3}}+1=0$

$t=\sqrt[x]{2+\sqrt{3}}$

$t^2-4t+1=0$

$t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$

$\sqrt[x]{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$\Longrightarrow \sqrt[x]{2+\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^{-1}$

$\Longrightarrow x_1=-1$

$\sqrt[x]{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$\Longrightarrow x_2 = 1$

Ответ: ± 1.

Задачи для самостоятельной работы.

Решить уравнения.

1. $|1 - x| + |x + 1| - |3 - x| = x + 2$

   (ответ:$\pm 2, 5$)

2. $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{7 - x} = 2$

   (ответ:$7; -1$)

3. $7(x + \frac{1}{x}) - 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) = 9$

   (ответ:$2; 0,5$).

Занятие 5.

Часть I. Системы алгебраических уравнений.

1. Совокупность нескольких уравнений, рассматриваемых совместно, называется системой уравнений.

2. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, а система,не имеющая ни одного решения, называется несовместной.

3. Система уравнений называется линейной, если каждое ее уравнение является линейным относительно всех входящих в систему неизвестных.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2; \end{cases}$$

   $a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0$ —коэффициенты.

4. Если $c_1 = c_2 = 0$, то система однородна и всегда имеет хотя бы одно решение. Приемы решения линейных систем хорошо известны из школьного курса.

5. Нелинейные системы с однородным уравнением.

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 &= 0; \end{cases}$$

   Можно решать следующим способом:

   1. разделить второе (однородное) уравнение на $y^2 \neq 0$

   $a_1(\frac{x}{y})^2 + b_1\frac{x}{y} + c_1 = 0$

   Это уравнение возможно имеет решения относительно $\frac{x}{y}$:

   $\frac{x}{y} = \alpha_1$; $\frac{x}{y} = \alpha_2$;

2. подставим поочередно $x = \alpha_1 y$ и $x = \alpha_2 y$ в первое уравнение,

получим 2 квадратных уравнения относительно у ;

их корни — y_1 и y_2, y_3 и y_4;

3. найдем x_1 и x_2, x_3 и x_4.

Нужно обязательно выяснить вопрос о возможной потере решения системы вида

$y = 0, x = x_0$.

6.

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f & = 0, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 & = 0; \end{cases}$$

Система сводится к предыдущему виду, если сложить эти уравнения, предварительно умножив первое на d_1 , а второе на $-d$. После этого нужно решить систему из полученного уравнения и любого уравнения системы.

Пример. (июль 2003 мех-мат. тест).

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 1 & = 0, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 & = 13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 & = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 & = 13; \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 13 и сложим со вторым:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 & = 0, \\ x^2 - 3xy + y^2 & = -1; \end{cases}$$

разделим обе части первого уравнения на $y^2 \neq 0$ ($y = 0$ не является корнем), получим:

$2(\frac{x}{y})^2 - 5\frac{x}{y} + 2 = 0$

$\frac{x}{y} = k$

$2k^2 - 5k + 2 = 0$

$k_1 = 2$; $k_2 = 0,5$

$x_1 = 2y_1$;$x_2 = 0,5y_2$

$4y^2 - 6y^2 + y^2 = -1$

$y^2 = 1$

$y_1 = 1; y_2 = -1$

$x_1 = 2; x_2 = -2$

и $0,25y^2 - 1,5y^2 + y^2 = -1$

$y^2 = 4$

$y_3 = 2; y_4 = -2$

$x_3 = 1; x_4 = -1$

Ответ: $(2;1),(-2;-1),(1;2),(-1;-2)$.

7. Системы вида

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 & = dx + ey, \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 & = Dx + Ey; \end{cases}$$

сводятся к системам с однородным уравнением, если умножить левую часть первого уравнения на правую часть второго, а правую часть первого уравнения на левую часть второго и приравнять их. Полученное уравнение будет уже однородным.

8. Нелинейные симметрические системы— это системы уравнений с двумя неизвестными x и y , которые не меняются при перестановке местами неизвестных.

Пример.

$$\begin{cases} x^4 + y^4 &= x^2y^2 + 13, \\ x^2 + y^2 &= xy + 3; \end{cases}$$

$u = x + y; v = xy$

$$\begin{cases} (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 &= v^2 + 13, \\ u^2 - 2v &= v + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u^2 - 2v)^2 - 3v^2 &= 13, \\ u^2 - 3v &= 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^4 - 4u^2v + 4v^2 - 3v^2 &= 13, \\ u^2 - 3v &= 3; \end{cases}$$

$v = \frac{u^2-3}{3}$

$u^4 - 4u^2\frac{u^2-3}{3} + \frac{u^4-6u^2+9}{9} = 13$

$9u^4 - 12u^4 + 36u^2 + u^4 - 6u^2 + 9 = 117$

$u^4 - 15u^2 + 54 = 0$

$u^2 = k > 0$

$k^2 - 15k + 54 = 0$

$k_1 = 9; k_2 = 6$

$u^2 = 9; u^2 = 6$

$v_1 = 2; v_2 = 1$

Тогда получаем 2 системы:

$$\begin{cases} xy &= 2, \\ (x+y)^2 &= 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy &= 1, \\ (x+y)^2 &= 6; \end{cases}$$

Каждая из них в свою очередь распадается еще на 2 системы. В итоге имеем 4 системы двух уравнений с двумя неизвестными.

1)

$$\begin{cases} xy &= 2, \\ x+y &= 3; \end{cases}$$

По теореме обратной теореме Виета :

$z^2 - 3z + 2 = 0$

$z_1 = 2; z_2 = 1$

$x_1 = 2; x_2 = 1$

$y_1 = 1; y_2 = 2$

2)

$$\begin{cases} xy &= 2, \\ x+y &= -3; \end{cases}$$

$z^2 + 3z + 2 = 0$

$z_1 = -2; z_2 = -1$

$x_3 = -2; x_4 = -1$

$y_3 = -1; y_4 = -2$

3)

$$\begin{cases} xy & = 1, \\ x+y & = \sqrt{6}; \end{cases}$$

$z^2 - \sqrt{6}z + 1 = 0$

$z_{1,2} = \frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$

$x_{5,6} = \frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$

$y_{5,6} = \frac{\sqrt{6}\mp\sqrt{2}}{2}$

4)

$$\begin{cases} xy & = 1, \\ x+y & = -\sqrt{6}; \end{cases}$$

$z^2 + \sqrt{6}z + 1 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$

$x_{7,8} = \frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$

$y_{7,8} = \frac{-\sqrt{6}\mp\sqrt{2}}{2}$

Ответ:$(\pm1;\pm2), (\pm2;\pm1), (\frac{\pm\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}),$

$(\frac{\pm\sqrt{6}\mp\sqrt{2}}{2})$

9. Метод неопределенных коэффициентов.

Пример.

Найти $6x - 3y + z$, если $2x + 4y - 3z = 7$ и $3y - 2z = 12$.

В данной задаче не требуется находить x , y , z , а требуется найти некоторую их линейную комбинацию , а именно $6x - 3y + z$.

Это возможно сделать,применив метод неопределенных коэффициентов, т.е. найти некоторые α и β, удовлетворяющие условиям:

$\alpha(2x+4y-3z)+\beta(3y-2z)=6x-3y+z$

$2\alpha x+4\alpha y-3\alpha z+3\beta y-2\beta z=6x-3y+z$

$2\alpha x+(4\alpha+3\beta)y-(3\alpha+2\beta)z=6x-3y+z$

$2\alpha=6, \alpha=3$

$4\alpha+3\beta=-3$, $\beta=-5$

$\Longrightarrow 6x-3y+z=3\cdot 7-5\cdot 12=-39$

Ответ: -39.

Задачи.

1. (март 2002). Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 3-(y+1)^2 & =\sqrt{x-y}, \\ x+8y & =\sqrt{x-y-9}; \end{cases}$$

О.Д.З.

$x-y-9\geq 0;$

$x-y\geq 9 \Longrightarrow \sqrt{x-y}\geq 3,$

но из первого уравнения получаем:

$\sqrt{x-y}=3-(y+1)^2\leq 3,$

тогда единственное решение

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} & =3, \\ 3-(y+1)^2 & =3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y & =9, \\ (y+1)^2 & =0; \end{cases}$$

$x = 8; y = -1$

Ответ: $(8; -1)$.

2. (март 2002)

$$\begin{cases} |xy-2| & = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 & = 2xy; \end{cases}$$

Решение.

О.Д.З.

$6 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6};$

1. $xy - 2 \geq 0$

$xy \geq 2$

$$\begin{cases} xy-2 & = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 & = 2xy; \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на -2 ,

второго на -8 и сложим полученные результаты:

$-2x^2 - 24y^2 + 14xy = 0;$

получаем систему:

$$\begin{cases} x^2 + xy & = 8, \\ x^2 + 12y^2 - 7xy & = 0; \end{cases}$$

Разделим обе части второго уравнения на $y^2 \neq 0$.

$$\begin{cases} x^2 + xy & = 8, \\ (\frac{x}{y})^2 + 12 - 7\frac{x}{y} & = 0; \end{cases}$$

$\frac{x}{y} = k$

$k^2 - 7k + 12 = 0$

$k_1 = 4; k_2 = 3$

$x_1 = 4y; x_2 = 3y$

$16y^2 + 4y^2 = 8$

$y_{1,2} = \pm\sqrt{0,4}$

$x_{1,2} = \pm 4\sqrt{0,4}$

$9y^2 + 3y^2 = 8$

$y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$x_{3,4} = \pm 3\sqrt{\frac{2}{3}}$

Проверим условие $xy \geq 2$

$y_1 x_1 = \frac{8}{5} < 2 \Longrightarrow y_{1,2}, x_{1,2}$ —посторонние корни.

$y_3 x_3 = 2, x_{3,4} = \pm\sqrt{6}$ удовлетворяют О.Д.З. $\Longrightarrow x_{3,4}, y_{3,4}$ корни уравнения.

2. $xy < 2$

$$\begin{cases} xy - 2 & = x^2 - 6, \\ 2 + 3y^2 & = 2xy; \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на -2,

второго на 4 ,полученные уравнения сложим.

Имеем систему:

$$\begin{cases} x^2 - xy & = 4, \\ x^2 + 6y^2 - 5xy & = 0; \end{cases}$$

Обе части второго уравнения разделим на $y^2 \neq 0$. Получим:

$(\frac{x}{y})^2 - 5\frac{x}{y} + 6 = 0$

$\frac{x}{y} = k$

$k^2 - 5k + 6 = 0$

$k_3 = 3; k_4 = 2$

$x_3 = 3y; x_4 = 2y$

$9y^2 - 3y^2 = 4$,

$y_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_{5,6} = \pm 3\sqrt{\frac{2}{3}}$

$4y^2 - 2y^2 = 4,$

$y_{7,8} = \pm\sqrt{2}, x_{7,8} = \pm 2\sqrt{2}$

Проверим условие $xy < 2$:

$x_5 y_5 = 2 \Longrightarrow x_{5,6}, y_{5,6}$—посторонние корни;

$x_7 y_7 = 4 \Longrightarrow x_{7,8}, y_{7,8}$—посторонние корни.

Ответ: $(\sqrt{6}; \sqrt{\frac{2}{3}}), (-\sqrt{6}; -\sqrt{\frac{2}{3}})$.

3. (май 2002)

$$\begin{cases} \sqrt{7x+6y} + \sqrt{4x+3y} & = 7, \\ 3\sqrt{4x+3y} - 2\sqrt{2x+9y+2} & = 3; \end{cases}$$

Решение.

Пусть $\sqrt{7x+6y} = u \geq 0$

$\sqrt{4x+3y} = v \geq 0$

$\sqrt{2x+9y+2} = w \geq 0$

$\Longrightarrow u^2 = 7x + 6y$ (1)

$v^2 = 4x + 3y$ (2)

$w^2 = 2x + 9y + 2$ (3)

Умножим обе части второго равенства на 3 и вычтем из полученного третье $\Longrightarrow$

$3v^2 - w^2 = 10x - 2$. Теперь умножим обе части второго равенства на 2 и вычтем из него первое, получим:

$2v^2 - u^2 = x$.

$$\begin{cases} 3v^2 - w^2 & = 10x - 2, \\ 2v^2 - u^2 & = x; \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на -1,

второго на 10 и полученное сложим:

$17v^2 + w^2 - 10u^2 = 2.(*)$

Исходная система через введенную замену выглядит :

$$\begin{cases} u + v & = 7, \\ 3v - 2w & = 3; \end{cases}$$

Выразим $u = 7 - v; w = \frac{3v-3}{2}$

и подставим в полученное равенство (*)

$17v^2 + \frac{9v^2-18v+9}{4} - 10(49 - 14v + v^2) = 2$

$37v^2 + 542v - 1959 = 0$

$v_1 = -\frac{653}{37}$ - посторонний корень;

$v_2 = 3 \Longrightarrow u = 4, w = 3$

$$\begin{cases} 7x + 6y & = 16, \\ 4x + 3y & = 9; \end{cases}$$

$y = \frac{1}{3}, x = 2$

Ответ: $(2; \frac{1}{3})$.

4. (февраль 2003 , МВЭФн). Найти все значения параметра а ,при которых система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x - 5 & = a - 2y + y^2, \\ x^2 + (2 - a - a^2)y^2 = 0 & ; 0 \leq y \leq 2; \end{cases}$$

Учтем , что

$2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{-1}$.

Если система имеет решение $(x_0; y_0)$,

то она будет иметь решение и $(-x_0; y_0)$,

поэтому должно быть $x_0 = 0$, т.к. система имеет единственное решение.

Подставим $x = 0$ во второе уравнение $\Longrightarrow (2 - a - a^2)y = 0 \Longrightarrow y = 0; 2 - a - a^2 = 0$.

а) Пусть $y = 0$, подставим в первое $\Longrightarrow a = -3$;

б) пусть $2 - a - a^2 = 0 \Longrightarrow a_1 = 1, a_2 = -2$;

1) если $a = 1$, то из второго уравнения $x = 0$,

а из первого $-3 = 1 - 2y + y^2 \Longrightarrow$ —нет решений ;

2) если $a = -2$, то система имеет вид:

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x & = 3 - 2y + y^2, \\ x^2 = 0 & ; 0 \leq y \leq 2; \end{cases}$$

$\Longrightarrow x = 0$

$\Longrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow y = 1,$

получаем единственное решение $(0;1)$;

3) исследуем теперь количество решений при $a=-3 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x & = 2-2y+y^2, \\ x^2-4y^2=0 & ; 0 \le y \le 2; \end{cases}$$

Т.к. $f(x)=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x \ge 0$,

причем $f(x)>2$, если $x \ne 0$, а $2-y-y^2 \le 2$,

если $0 \le y \le 2$, то д.б. $x=0, y=0$ единственное решение.

Ответ: $a=-2; a=-3$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y & = 2|x-2|+2, \\ y & = 4-2|x-1|; \end{cases}$$

(ответ: $[1;2], y=6-2x$.)

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y & = |x|, \\ 2y+|x-4| & = 4; \end{cases}$$

(ответ: $[0;4], y=0,5x$)

3. Решить систему уравнений :

$$\begin{cases} \sqrt{6x+3y}+\sqrt{12x-y} & = 5, \\ \sqrt{12x-y}-\sqrt{y-2x} & = 1; \end{cases}$$

(Ответ: $(0,5;2)$).

Занятие 6.

Часть I. Доказательство неравенств.

Задачи.

1. Доказать, что $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14 > 2a + 12b + 6c$.

   Доказательство:

   рассмотрим разность левой и правой частей.

   $a^2+4b^2+3c^2+14-2a-12b-6c = (a^2-2a+1)+(4b^2-12b+9)+(3c^2-6c+3)+1 =$

   $= (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 + 1 > 0.$

   Это неравенство выполняется при любых действительных a, b, c. Ч.т.д.

2. Доказать, что

   $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

   Доказательство:

   очевидно, что

   $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5},$

   $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \ldots, \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$

   после перемножения всех неравенств

   $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101} = (\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{98} \cdot \frac{101}{100})^{-1}$

   обозначим

   $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}$

   из последнего неравенства $y < \frac{1}{101y}$

   или $y^2 < \frac{1}{101} \Longrightarrow y < \frac{1}{10}$ ч.т.д.

3. Доказать, что при $a, b, c, d \geq 0$

   $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

Доказательство.

Используем неравенство Коши , или неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом :

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,

$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{(a+b)(c+d)}{4}}$ в свою очередь

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,

$\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd} \Longrightarrow$

$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\frac{(a+b)(c+d)}{4}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$. Ч.т.д.

4. Доказать неравенство

$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ при $n \geq 2$.

Доказательство.

Применим метод математической индукции.

При $n = 2$— $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ или $\sqrt{2} + 1 > 2$ или $\sqrt{2} > 1$ — истина.

Пусть имеет место

$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}(*)$,

докажем

$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$

преобразуем левую часть используя (*):

$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

и, наконец, докажем, что

$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$

$\sqrt{k(k+1)} + 1 > k+1$

$k(k+1) > k^2$ — это выполняется при любых допустимых k. Ч.т.д.

Часть 2.Алгебраические неравенства.

1. Линейные неравенства.

   $ax > b$.

   при$a > 0$, имеем $x > \frac{b}{a}$

   при $a < 0$ — $x < \frac{b}{a}$

   при $a = 0$ — $0 > b$

   при $b \geq 0$ нет решений, при $b < 0$, х - любое действительное число.

2. Квадратичные неравенства.

   $ax^2 + bx + c > 0$, где $a \neq 0$.

3. Рациональные неравенства.

   Пример.

   $\frac{2x-5}{x+3} \geq 1$

   О.Д.З.

   $x \neq -3$;

   $\frac{2x-5}{x+3} - 1 \geq 0$

   $\frac{x-8}{x+3} \geq 0$

   $x \leq -3; x \geq 8$

   Ответ: $x < -3; x \geq 8$.

4. Неравенства с модулем.

   Решения в большинстве случаев проводятся аналогичными методами что и для уравнений с модулем.

   Пример 1.

   Решим неравенство $|x - 1| < 2$ тремя способами.

Способ 1.

1)при $x \geq 1$, $x - 1 < 2 \Longrightarrow x < 3 \Longrightarrow 1 \leq x < 3$

2) при $x < 1$, $-x + 1 < 2 \Longrightarrow x > -1 \Longrightarrow -1 < x < 1$

объединяем эти решения $-1 < x < 3$

Ответ: $(-1; 3)$

Способ 2.

Т.к. $|x - 1| \geq 0$, $2 > 0 \Longrightarrow$

$(x - 1)^2 < 4$

$x^2 - 2x - 3 < 0$

$-1 < x < 3$

Ответ: $(-1; 3)$

Способ 3.

$|x - 1|$ — расстояние между точками x и 1, все точки x ,которые удалены от 1 на расстояние, меньшее 2 образуют интервал $(-1; 3)$.

Ответ: $(-1; 3)$.

Пример 2.

$|1 + \frac{1}{x}| - |x - 3| > 2$

Неравенства , в которые входят комбинации модулей, решаются аналогично уравнениям.

О.Д.З.

$x \neq 0$

$\frac{|x+1|}{|x|} - |x - 3| > 2$

$|x + 1| - |x||x - 3| > 2|x|$

1)$x \geq 3$

$x+1-x(x-3)>2x$

$x^2-2x-1<0$ $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$

решений нет

$2) 0<x<3$

$x+1+x(x-3)>2x$

$x^2-4x+1>0$

$x>2+\sqrt{3}; x<2-\sqrt{3}$

$\Longrightarrow 0<x<2-\sqrt{3}$

3) $-1\leq x<0$

$x+1-x(x-3)>-2x \quad 3-\sqrt{10}<x<3+\sqrt{10} \Longrightarrow 3-\sqrt{10}<x<0$

4) $x<-1$

$-(x+1)-x(x-3)>-2x \Longrightarrow \quad -x^2-1+4x>0$ решений нет

Ответ: $3-\sqrt{10}<x<2-\sqrt{3}, x\neq 0.$

Задачи.

1. $|3x-1|<|2x+1|$ Т.к. обе части неотрицательны, можно возвести в квадрат:

   $9x^2-6x+1<4x^2+4x+1$

   $5x(x-2)<0 \Longrightarrow 0<x<2$

   Ответ: $(0;2)$.

2. $\frac{x^2+5x+4}{x^2-6x+5}<0$

   $\frac{(x+4)(x+1)}{(x-5)(x-1)}<0$

   $-4<x<-1$; $1<x<5$

   Ответ: $(-4;-1),(1;5)$.

3. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{|x|-1}\geq\frac{2}{x-1}$

О.Д.З. $\quad x\neq\pm 1$

1) $x\geq 0$

$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}\geq\frac{2}{x-1}\Longleftrightarrow\frac{1}{x+1}\geq 0\Longleftrightarrow x\geq 0$

2)$x<0$

$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{-x-1}\geq\frac{2}{x-1}\Longleftrightarrow\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}\leq 0\Longleftrightarrow\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)}\leq 0$

$$\begin{cases} \phantom{-\frac{1}{3}\leq{}} x<-1, \\ -\frac{1}{3}\leq x<0; \end{cases}$$

учтем О.Д.З.

Ответ: $x<-1; x\geq-\frac{1}{3}; x\neq 1.$

Задачи для самостоятельной работы.

1. $\frac{1}{|x+1|-1}\geq\frac{2}{|x+1|-2}$

(ответ:$(-3;-2)\cup\{-1\}\cup(0;1)$).

2. $|x-3|+|2x+1|>5$

(ответ:$(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$).

3. Доказать, что

$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

при $a,b,c>0.$

(Пояснение : использовать неравенство Коши.)

Занятие 7.

Часть I. Иррациональные неравенства.

1. $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

   О.Д.З.

   $f(x) \geq 0$

   В области, где $g(x) \geq 0$ обе части неравенства можно возвести в квадрат

   $f(x) \geq g(x)^2$, т.е.

$$\begin{cases} g(x) & \geq 0, \\ f(x) & \geq g(x); \end{cases}$$

   В области , где $g(x) < 0$ неравенство справедливо при всех х из О.Д.З.

$$\begin{cases} g(x) & < 0, \\ f(x) & \geq 0; \end{cases}$$

2. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > a$, где $a > 0$

   О.Д.З.

$$\begin{cases} g(x) & \geq 0, \\ f(x) & \geq 0; \end{cases}$$

   т.к. обе части неравенства > 0, то оно равносильно неравенству

   $f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x) > a^2$

   $2\sqrt{f(x)g(x)} > a^2 - f(x) - g(x)$—относится к типу 1.

3. $a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{g(x)} + c\sqrt{\varphi(x)} > 0$

О.Д.З.

$f(x) \geq 0; g(x) \geq 0; \varphi(x) \geq 0;$

Если $a, b, c \geq 0$, то неравенство справедливо при любых х из О.Д.З. В противном случае нужно преобразовать неравенство к такому виду, чтобы в обеих частях неравенства были неотрицательные величины.

Так, если $a, b \geq 0, c < 0$, то

$a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{g(x)} > -c\sqrt{\varphi(x)}$

Возведем в квадрат обе части и придем к типу 1.

Пример.

$\sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2 > 0$

О.Д.З.

$$\begin{cases} x+8 & \geq 0, \\ 5x+20 & \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & \geq -8, \\ x & \geq -4; \end{cases}$$

$\Longrightarrow x \geq -4$

$\sqrt{x+8} + 2 > \sqrt{5x+20}$

обе части неотрицательны, возведем в квадрат

$\sqrt{x+8} > x + 2$

а) $x + 2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -2$

$x + 8 > x^2 + 4x + 4$

$(x-1)(x+4) < 0$

$-4 < x < 1$

$\Longrightarrow -2 \leq x < 1$

b) $x+2<0 \Longrightarrow$ неравенство справедливо при любом x из О.Д.З.

$-4 \leq x < -2$

Ответ: $-4 \leq x < -2$.

4. При решении неравенств часто бывает эффективной замена переменных тех же типов, что и при решении иррациональных уравнений. В нестандартных ситуациях бывает выйгрышным функциональный подход: исследование областей изменения, использование графических приемов и т.д.

Задачи.

1. (ФнФ июль 2003)

$\frac{\sqrt{3x+22}}{x+4} < 1$

О.Д.З.

$x \neq -4; 3x+22 \geq 0 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x & \geq -\frac{22}{3}, \\ x & \neq -4; \end{cases}$$

рассмотрим 2 случая:

а) пусть $x+4>0 \Longrightarrow x > -4$

$\sqrt{3x+22} < x+4$

$3x+22 < x^2+8x+16$

$x^2+5x-6>0$

$x>1$; $x<-6$

учитывая О.Д.З.— $x > 1$.

b) $x < -4 \Longrightarrow$ левая часть неположительна и меньше 1 $\Longrightarrow -\frac{22}{3} \leq x < -4$.

Ответ: $[-\frac{22}{3}; -4), (1; +\infty)$

2. (июль 2003 Рф). Найти все целые x , удовлетворяющие неравенству

   $\sqrt[6]{x+1} < \sqrt[8]{7-x}$.

   О.Д.З.

   $x \geq -1; x \leq 7 \Longrightarrow -1 \leq x \leq 7;$

   Функция $\sqrt[6]{x+1}$ монотонно возрастает по x ,

   а функция $\sqrt[8]{7-x}$ монотонно убывает на О.Д.З.

   При $x = -1 \quad 0 < \sqrt[8]{8} \Longrightarrow$ неравенство выполнено;

   при $x = 2 \quad \sqrt[6]{3} < \sqrt[8]{5}$ возводим обе части в 24-ю степень

   $\Longrightarrow 3^4 < 5^3 \quad \Longrightarrow 81 < 125$

   при $x = 3 \quad \sqrt[6]{4} \neq \sqrt[8]{4} \Longrightarrow x = 3$ не решение.

   Ответ: $x = -1; 0; 1; 2$.

3. (июль 2002). $\frac{1}{(\sqrt{\frac{2-x}{x}} - \frac{x+1}{2x})^2} \geq 0$

   О.Д.З.

$$\begin{cases} \frac{2-x}{x} & \geq 0, \\ x \neq 0; & \sqrt{\frac{2-x}{x}} - \frac{x+1}{2x} \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} & 0 < x \geq 2, \\ \sqrt{\frac{2-x}{x}} & \neq \frac{x+1}{2x}; \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{2-x}{x}} = \frac{x+1}{2x}$

$$\begin{cases} 8x-4x^2 & = x^2+2x+1, \\ x>0, & x\le -1; \end{cases}$$

$x=1; x=0,2$

Ответ: $0<x\le 2, x\ne 0,2; x\ne 1.$

Часть 2. Неравенства высших степеней.

Задачи.

1. $(x+1)(x-1)^2(x-2)(x+3)(x-5)^2>0$

   Ответ:$x>2; x\ne 5; -3<x<-1.$

2. $x^3-2x^2+4x-8<0$

   $(x-2)(x^2+4)<0$

   $x<2$

   Ответ:$x<2.$

3. (март 2002). $\quad 3x^4+4<13x^2$

   пусть $x^2=t$, $t\ge 0$

   $3t^2-13t+4<0$

   $3(t-4)(t-\frac{1}{3})<0$

   $\frac{1}{3}<t<4$

   $\frac{1}{3}<x^2<4$

   $-2<x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

   $\frac{\sqrt{3}}{3}<x<2$

   Ответ: $(-2;-\frac{\sqrt{3}}{3}),(\frac{\sqrt{3}}{3};2).$

4. (март 2002). $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3) \geq 5$

пусть $t = x^2+3x+1, \Longrightarrow x^2+3x-3 = t-4$

$t^2-4t-5 \geq 0$

$(t-5)(t+1) \geq 0$

$t \geq 5$; $t \leq -1$

$x^2+3x+1 \leq -1$,и $x^2+3x+1 \geq 5 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq -1$, $x \leq -4$, $x \geq 1$

Ответ: $x \leq -4$, $-2 \leq x \leq -1$, $x \geq 1$.

Часть 3. Неравенства с параметрами.

1. (апрель 2002). Для каждого действительного а решить неравенство

$(a^2+3a-4)x \geq a^2-4a+3$.

$a^2+3a-4=0$,

$a_1 = -4$, $a_2 = 1$

$a^2+3a-4 < 0$ при $-4 < x < 1$,

$a^2+3a-4 > 0$ при $a < -4, a > 1$.

1)$a=-4$, $0 \cdot x \geq 35 \Longrightarrow$ нет решений,

2)$a=1$, $0 \cdot x \geq 0 \Longrightarrow x \in R$,

3)$-4 < x < 1$,

$x \leq \frac{(a-1)(a-3)}{(a-1)(a+4)} = \frac{a-3}{a+4}$,

4) $a < -4$, $a > 1$ $x \geq \frac{a-3}{a+4}$.

Ответ: 1)$a=-4$— нет решений,

2)$a=1, x \in R$,

3)$-4 < x < 1$, $x \leq \frac{a-3}{a+4}$,

4) $a < -4, a > 1$, $x \geq \frac{a-3}{a+4}$.

2. При каких значениях а неравенство

$\frac{x-a+1}{x+2a-3} < 0$

выполнено для любых $x \in [1;5]$?

Неравенство справедливо при

$x_1 < x < x_2$, $x_1 = min(a-1; -2a+3)$, $x_2 = max(a-1; -2a+3)$ для того , чтобы оно выполнялось для любых $x \in [1;5] \Longleftrightarrow$, чтобы отрезок $[1;5]$ лежал внутри интервала $(x_1; x_2)$.

1) $a - 1 < -2a + 3 \Longrightarrow a < \frac{4}{3}$ при этом требуемое будет выполнено ,если

$$\begin{cases} a-1 & < 1, \\ -2a+3 & > 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & < 2, \\ a & < -1; \end{cases}$$

$\Longrightarrow a < -1$

2)$a - 1 > -2a + 3 \Longrightarrow a > \frac{4}{3}$

$$\begin{cases} a-1 & > 5, \\ -2a+3 & < -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & > 1, \\ a & > 6; \end{cases}$$

$\Longrightarrow a > 6$

Ответ: $a < -1, a > 6$.

Задачи для самостоятельной работы.

1. $\sqrt{2x+5} > \sqrt{x-1}$

   (ответ: $x \geq 1$)

2. $3x^3 - 14x^2 + 20x > 8$

   (ответ: $x > \frac{2}{3}, x \neq 2$)

3. $(x^2 - 2x - 5)(x^2 - 2x - 6) \geq 6$

   (ответ: $x \leq -2$, $-1 \leq x \leq 3$, $x \geq 4$)

4. $|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}| \leq 1$

   (ответ: $[0; \frac{8}{5}], x \geq 2,5$).

Занятие 8.

Часть I. Текстовые задачи:работа.

Задачи.

1. Трубы А и Б вместе наполняют бассейн на 5ч 20мин. быстрее,чем трубы А и С вместе. Если бы труба Б наливала, а С выливала воду, то бассейн наполнился бы на $\frac{21}{16}$ часа быстрее, чем бассейн вдвое большего объема трубами А и Б. За сколько времени наполнят бассейн трубы А и Б вместе, если трубы А и С наполняют его более чем за 8 часов?

Решение.

Объем бассейна примем за 1. Производительность труб: А - x , Б - y , С - z   долей бассейна.

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{16}{3} & = \frac{1}{x+z}, \\ \frac{1}{y-z} + \frac{21}{16} & = \frac{2}{x+y}, \frac{1}{x+z} > 8; \end{cases}$$

Нужно найти $\frac{1}{x+y}$.

Пусть $\frac{1}{x+y} = u$, $\frac{1}{x+z} = v$.

$$\begin{cases} u + \frac{16}{3} & = v, \\ 2u = \frac{21}{16} + \frac{uv}{v-u}, & v > 8; \end{cases}$$

$\frac{1}{y-z} = \frac{uv}{v-u}$

$2u = \frac{21}{16} + \frac{u(u+\frac{16}{3})}{u+\frac{16}{3}-u}$

$3u^2 - 16u + 21 = 0$

$u_1 = 3 \Longrightarrow v_1 = 8\frac{1}{3}$

$u_2 = \frac{7}{3} \Longrightarrow v_2 = 7\frac{2}{3}$

Т.к. $v > 8 \Longrightarrow u_2$ и v_2 не подходят

$\Longrightarrow \frac{1}{x+y} = 3$

Ответ: трубы А и Б наполняют бассейн за 3 часа.

2. Трое рабочих должны сделать 80 деталей. За 1 час они вместе могут сделать 20 деталей. Сначала первый сделал 20 деталей, затратив более 3 часов. Потом второй и третий вместе изготовили остальные. Общее время работы составило 8 часов. За какое время мог бы выполнить всю работу первый рабочий?

   Решение.

   Пусть за 1 час первый рабочий изготавливает x деталей, второй y деталей, третий z деталей.

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \quad , \\ \frac{20}{x} + \frac{60}{y+z} = 8, \qquad \frac{20}{x} > 3; \end{cases}$$

$y + z = 20 - x$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{3}{20-x} & = \frac{2}{5}, \\ \frac{20}{x} & > 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 15x + 50 & = 0, \\ \frac{20}{x} & > 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5, \quad x_2 = 10, \\ \frac{20}{x} \qquad > 3; \end{cases}$$

$\frac{20}{x_1} = 4 > 3$,

$\frac{20}{x_2} = 2 < 3 \Longrightarrow x_2 = 10$ - посторонний корень.

Значит, первый рабочий изготавливал 5 деталей в час , и всю работу он выполнил бы за 16 ч.

Ответ:16 ч.

3. (июль 2003 ,РФ,ФФ). Два трактора разной мощности, работая вместе, вспахали поле за 2 ч. 40 мин. Если бы первый трактор увеличил скорость вспашки в 2 раза, а второй в 1,5 раза, то поле было бы вспахано за 1 ч. 36 мин. За какое вспахал бы поле первый трактор, работая с первоначальной скоростью?

   Решение.

   Пусть v_1 км в час, v_2 км в час — скорости вспашки поля соответственно первым и вторым тракторами.

   Т.к. работая с первоначальной скоростью, трактора вместе вспахали бы поле за 2 часа 40 мин., то площадь S га всего поля выражается:

   $S = (2v_1 + v_2)2\frac{2}{3}$.

   Т.к. после увеличения скоростей поле было вспахано за 1ч.36 мин., то площадь всего поля выражается:

   $S = (2v_1 + 1,5v_2)1\frac{3}{5}$

   Из соотношения

   $(v_1 + v_2)2\frac{2}{3} = (2v_1 + 1,5v_2)1\frac{3}{5}$

   получаем $2v_1 = v_2$.

   Тогда все поле первый трактор, работая с первоначальной скоростью,

   вспахал бы за

   $\frac{S}{v_1} = \frac{v_1+v_2}{v_1}2\frac{2}{3} = (1+2)\frac{8}{3} = 8$

   Ответ: 8ч.

Часть 2. Текстовые задачи:движение.

1. Из двух городов одновременно вышли навстречу друг другу двое и шли до встречи. Если бы первый вышел на 1 ч. раньше, а второй на 30 мин. позже намеченного срока , то встреча произошла бы на 18 мин. раньше, чем это было на самом деле. Если бы первый вышел на 30 мин. позже ,а второй на 1 ч. раньше намеченного срока, то они встретились бы в 5,6 км от места, где встреча произошла в действительности. Найти скорости путников.

   Решение. (см.рис. 15)

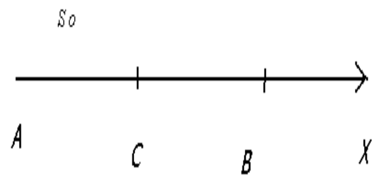


Рис. 15:

1) Пусть скорости путников v_1 и v_2, S - весь путь. Тогда в действительности происходило следующее:

$S = t_1(v_1 + v_2) \Longrightarrow t_{1\text{встр}} = \frac{S}{v_1+v_2}$

t_1 -время в пути пешеходов,

$x_{\text{встр}} = \frac{S}{v_1+v_2} v_1$

2)$x_1 = v_1(t + 1)$

$x_2 = S - v_2(t - 0,5)$

при встрече координаты путников равны:

$x_1 = x_2$

$v_1(t + 1) = S - v_2(t - 0,5)$

$t_{\text{встр}2} = \frac{S+0,5v_2-v_1}{v_1+v_2}$

$t_{\text{встр}2} = t_{\text{встр}1} - \frac{18}{60}$

$\frac{S+0{,}5v_2-v_1}{v_1+v_2} = \frac{S}{v_1+v_2} - \frac{18}{60}$

$7v_1 = 8v_2$

$v_1 = \frac{8v_2}{7}$

$3)x_1 = v_1(t-0,5)$

$x_2 = S - v_2(t+1)$

$x_1 = x_2 \Longrightarrow v_1(t-0,5) = S - v_2(t+1)$

$t_{\text{встр}3} = \frac{S-v_2+0{,}5v_1}{v_1+v_2}$

$x_{\text{встр}3} = v_1(t_{\text{встр}3} - 0,5) = v_1(\frac{S-v_2+0{,}5v_1}{v_1+v_2} - 0,5) = \frac{v_1}{v_1+v_2}(S - \frac{3v_2}{2})$

$x_{\text{встр}1} = \frac{S}{v_1+v_2}v_1$

$\frac{3}{2}\frac{v_1}{v_1+v_2}v_2 = 5,6 = x_{\text{встр}1} - x_{\text{встр}3}$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{8}{7}v_2 & , \\ \frac{v_1}{v_1+v_2}\frac{3v_2}{2} & = 5,6; \end{cases}$$

$\frac{\frac{8v_2}{7}}{\frac{8v_2}{7}+v_2}\frac{3v_2}{2} = 5,6$

$\frac{4v_2}{5} = 5,6$

$v_1 = 8, v_2 = 7$

Ответ: 7км/ч , 8км/ч.

2. (март 2003 Рф). Из пункта А в пункт Б вышел пешеход. Вслед за ним через 3 ч. выехал велосипедист, а еще через 45 мин. - мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от А до Б. На сколько минут раньше пешехода в пункт Б прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт Б на 1ч. 40 мин. позже мотоциклиста?

Решение.

Пусть С - точка между пунктами А и Б , в которой одновременно оказались пешеход, велосипедист и мотоциклист. Обозначим через S_1, S_2 расстояния АС и БС, через u, v, w- скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста, t - искомое время.

$\frac{S_1}{u} = \frac{S_1}{v} + 3 \Longrightarrow S_1 = \frac{3}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}$

$\frac{S_1}{u} = \frac{S_1}{w} + \frac{15}{4} \Longrightarrow$

$S_1 = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{w}}$

$\frac{S_1+S_2}{u} = \frac{S_1+S_2}{v} + t \Longrightarrow$

$t = (S_1 + S_2)(\frac{1}{u} - \frac{1}{v})$

$\frac{S_1+S_2}{u} = \frac{S_1+S_2}{w} + \frac{5}{3} \Longrightarrow$

$S_1 + S_2 = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{w}}$

$\Longrightarrow t = \frac{\frac{5}{3}(\frac{1}{u} - \frac{1}{v})}{\frac{1}{u} - \frac{1}{w}}$

$\frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{w}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

$t = \frac{4}{3}$

Ответ: 1ч. 20 мин.

Часть 3. Текстовые задачи:смеси и сплавы.

1. Имеются 2 слитка меди и олова. Первый содержит 40 процентов меди, второй 70 процентов меди. Какого веса нужно взять куски этих слитков, чтобы после их совместной переплавки получить 10 кг сплава, содержащего 50 процентов меди?

   Решение.

   Проследим за содержанием меди. Если из первого сплава взять x кг, а из второго y кг, то в новом сплаве чистой меди будет:

$\frac{40}{100}x + \frac{70}{100}y.$

С другой стороны, чистой меди в новом сплаве содержится $\frac{50}{100}10$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{40}{100}x + \frac{70}{100}y & = \frac{50}{100}10, \\ x + y = 10 & ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 7y & = 50, \\ x + y & = 10; \end{cases}$$

$y = \frac{10}{3},$

$x = \frac{20}{3}$

Ответ:$\frac{20}{3}$ кг ,$\frac{10}{3}$ кг.

2. Имеются 2 различных сплава меди. Если взять по 1 кг каждого и переплавить, то получим сплав с 65 процентным содержанием меди. Если взять кусок А из первого и кусок Б из второго с суммарной массой 7 кг и их переплавить, то получим сплав с 60 процентным содержанием меди. Какова масса меди в сплаве, полученном при переплавке куска С первого сплава , равному по массе куску Б и куска Д второго, массой равной массе куска А?

   Решение.

   Пусть масса А - х кг, масса Б - у кг.C_1 - в процентах - концентрация меди в первом сплаве,C_2 - во втором. Тогда при переплавке 1 кг каждого сплава, новый сплав будет содержать чистой меди:

   $\frac{C_1}{100} + \frac{C_2}{100} = 2\frac{65}{100}$

   $x + y = 7$

При переплавке x кг куска А с y кг куска Б получим сплав, содержащий чистой меди

$x\frac{C_1}{100} + y\frac{C_2}{100} = (x+y)\frac{65}{100}$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = 130, \\ x + y = 7, & C_1x + C_2y = 420; \end{cases}$$

Найти значения всех неизвестных не получится , но этого и не нужно. Требуется определить массу меди в сплаве из куска С - массы y , концентрации C_1 и куска Д массы x , концентрации C_2. Т.е. $z = x\frac{C_2}{100} + y\frac{C_1}{100} = \frac{C_2x + C_1y}{100}$

умножим $(C_1 + C_2)(x + y) = 910$

$(C_1 + C_2)(x + y) - (C_1x + C_2y) = 490$

$C_2x + C_1y = 490$

$z = 4,9$

Ответ: 4,9 кг .

Задачи для самостоятельной работы.

1. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5 процентов и 40 процентов. Сколько нужно взять каждого сорта, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля 30 процентов? (ответ: 40 т , 100 т).

2. Есть 4 раствора соли различной концентрации. Если смешать первый, второй, третий растворы в весовом отношении 3:2:1, то получим 15 процентный раствор. Второй, третий, четвертый в равной пропорции дают при смешении 24 процентный раствор. Какая концентрация получится при смешении второго и четвертого в пропорции 2:1, если первый и третий растворы в равных пропорциях дают 10 процентную смесь?

   (ответ: 29 процентов).

3. Два трактора , работая вместе, вспахают поле за 30 ч. После 6 ч. совместной работы первый трактор вышел из строя и всю оставшуюся работу закончил второй за 40 ч. За сколько часов каждый из тракторов вспашет все поле в одиночку?

   (ответ: 75 ч. ,50 ч.)

4. Турист проплыл по реке на лодке 90 км, а затем прошел пешком 10 км. При этом на пеший путь было затрачено на 4 ч. часа меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько времени, сколько он плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько шел пешком, то эти расстояния были бы равны. Сколько времени турист шел пешком и сколько плыл по реке?

   (ответ: 2 ч., 6ч.).

Занятие 9.

Часть I. Текстовые задачи:прогрессии.

1. Арифметическая прогрессия — это числовая последовательность, каждый член которой,начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом d, называемым разностью.

   $a_{k+1} = a_k + d$, $k \in N$

   если $d > 0$ - прогрессия возрастающая, если $d < 0$ -прогрессия убывающая.

   $a_k = a_1 + (k-1)d$ -общий член прогрессии;

   $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$,

   $S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}n$— сумма n первых членов.

2. Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности число $q \neq 0$.

   $u_k = u_{k-1}q$, $k \in N, k \geq 2$

   $u_k = u_1 q^{k-1}$ —общий член,

   $S_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$ — сумма n первых членов,

   $S = \frac{u_1}{1-q}$ — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $0 < |q| < 1$.

Задачи.

1. Найти арифметическую прогрессию, сумма n первых членов которой выражается

   $S_n = 5n^2 + 6n$.

   Решение.

   Посчитаем $S_1 = 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 11$— это первый член прогрессии.

Теперь $S_2 = 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 32$ — это сумма первого и второго,значит второй член равен 21. Тогда прогрессия $11, 21, 31 \ldots$.

Ответ:$11, 21, 31 \ldots$.

2. (авг. 2003 РФ,ФзФ, в/о). Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый члены этой прогрессии являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии.Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

   Решение.

   Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии с первым членом b и знаменателем q

   $b\frac{q^5-1}{q-1} = 62$ если $q \neq 1$

   и равна $5b = 62$ если $q = 1$.

   Будем считать, что $b \neq 0$, $q \neq 0$.

   Тогда из условия следует $b_5 = bq^4$, $b_8 = bq^7$, $b_{11} = bq^{10}$ — являются первым, вторым, десятым членами арифметической прогрессии, т.е.

   $bq^4 = a$, $bq^7 = a + d$, $bq^{10} = a + 9d$. Тогда

   $\frac{bq^{10} - bq^4}{9} = d = bq^7 - bq^4$

   $q^6 - 9q^3 + 8 = 0$

   $q_1^3 = 8$

   $q_2^3 = 1$

   $q_1 = 2$, $q_2 = 1$

   $b = 2$, $b = 12,4$

   Ответ: $q_1 = 2$,$q_2 = 1$,$b_1 = 2$, $b_2 = 12,4$.

Часть 2. Текстовые задачи: сложные проценты.

1. В сосуде объемом $V = 10$ л содержится $p = 70$ процентный раствор кислоты. Из сосуда выливается $a = 2$ л смеси и доливается $a = 2$ л воды. Эта процедура повторяется $n = 5$ раз. Определить концентрацию кислоты в последнем растворе.

   Решение.

   Первоначальное количество кислоты в растворе $\frac{pV}{100}$.

   После того, как вылили а л смеси кислоты, осталось

   $\frac{pV}{100} - \frac{pa}{100} = \frac{pV}{100}(1 - \frac{a}{V})$.

   После добавления воды концентрация стала

   $C_1 = \frac{p}{100}(1 - \frac{a}{V})$ (т.к. объем сохранился).

   После второго отливания в растворе останется кислоты

   $\frac{pV}{100}(1 - \frac{a}{V}) - C_1 a = \frac{pV}{100}(1 - \frac{a}{V})^2$,

   а после доливания водой концентрация стала

   $C_2 = \frac{p}{100}(1 - \frac{a}{V})^2$.

   Заметим, что после n переливаний концентрация будет

   $C_n = \frac{p}{100}(1 - \frac{a}{V})^n$

   В нашем случае $C_5 = \frac{70}{100}(1 - \frac{2}{5})^5 = \frac{70 \cdot 8^5}{10^7}$

   Ответ: $\frac{70 \cdot 8^5}{10^7}$.

2. В банк положили сумму $S_0 = 1$ млн. руб. под $p = 20$ процентов годовых. В конце каждого года со счета снимали одну и ту же сумму. Определить ее, если после третьей операции снятия на счету не останется ничего.

   Решение.

   В конце первого года на счету будет

$S_0 + \frac{p}{100}S_0 = S_0(1+\frac{p}{100})$ руб.

Пусть снимается сумма в x руб., тогда в начале второго года на счете останется

$S_1 = S_0(1+\frac{p}{100}) - x.$

После второго снятия на счете останется

$S_2 = S_1(1+\frac{p}{100}) - x = S_0(1+\frac{p}{100})^2 - x(1+\frac{p}{100}) - x,$

после третьего

$S_3 = S_2(1+\frac{p}{100}) - x = S_0(1+\frac{p}{100})^3 - x(1+\frac{p}{100})^2 - x(1+\frac{p}{100}) - x$

Известно, что $S_3 = 0$, тогда

$S_0(1+\frac{p}{100})^3 - x(1+\frac{p}{100})^2 - x(1+\frac{p}{100}) - x = 0$

$1 \cdot 1,2^3 - x \cdot 1,2^2 - x \cdot 1,2 - x = 0$

$x = \frac{1{,}728}{3{,}64}$

Ответ: $\frac{1728000}{3{,}64}$руб.

3. Население города ежегодно увеличивается на $\frac{1}{50}$ часть наличного числа жителей. Через сколько лет население города утроится?

   Решение.

   $S_n = S_0(1+\frac{2}{100})^n$

   $3S_0 = S_0(\frac{51}{50})^n$

   $3 = (\frac{51}{50})^n$

   $n = \frac{\ln 3}{\ln 51 - \ln 50} \approx 55$ лет.

   Ответ: ≈ 55 лет.

4. (апрель 2003 МВЭФн). Брокерская фирма приобрела 2 пакета акций, а затем продала их на общую сумму 7 млн. 680 тыс. руб. , получив при этом 28 прцентов прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов

акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40 процентов, а при продаже второго 20 процентов?

Решение.

Пусть первый пакет акций был приобретен за x тыс. руб., а второй за y тыс. руб.,тогда

$$\begin{cases} 1,28(x+y) &= 7680, \\ 1,4x+1,2y &= 7680; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y &= 6000, \\ 7x+6y &= 38400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 2400, \\ y &= 3600; \end{cases}$$

Ответ: 2400 и 3600 тыс. руб.

5. (май 2003). В банк помещен вклад в размере 3900 руб. под 50 процентов годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725 процентов. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Решение.

Пусть x тыс. руб. искомая сумма

$((((3900 \cdot 1,5 + x) \cdot 1,5 + x) \cdot 1,5 + x) \cdot 1,5 + x) \cdot 1,5 = 3900 \cdot 8,25$

$x = 210$

Ответ: 210 руб.

Часть 3. Примеры нестандартных задач.

1. Задачи с целочисленными неизвестными.

1. Найти 2 целых числа, сумма которых равна их произведению.

   Решение.

   $xy = x + y$

   $y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

   в нашем случае y- целое , $1 + \frac{1}{x-1}$- целое, $\frac{1}{x-1}$- целое.

   $\Longrightarrow x - 1 = \pm 1$

   $x_1 = 0, \quad x_2 = 2 \qquad y_1 = 0, \;\; y_2 = 2$

   Ответ: $(0; 0), (2; 2)$.

2. Задачи с альтернативными условиями.

1. Имеются 3 несообщающихся между собой резервуара, причем объем третьего не меньше объема второго. Первый резервуар имеет объем V и может быть заполнен первым шлангом за 3 ч., вторым шлангом за 4 ч., третьим - за 5ч. К каждому из резервуаров можно подключить любой из этих трех шлангов. После того, как произведено подключение к каждому из резервуаров по одному шлангу каким-либо способом, все шланги одновременно включаются. Как только какой-то резервуар наполняется, соответственный шланг отключается и не может быть подключен в дальнейшем к другому резервуару. При самом быстром способе подключения заполнение окончится через 6 ч. Если бы все резервуары сообщались, то заполнение окончилось бы через 4 ч. Найти объемы второго и третьего резервуаров.

   Решение.

   Обозначим производительность первого, второго, третьего шлангов:

$1 : x = \frac{V}{3}$

$2 : y = \frac{V}{4}$

$3 : z = \frac{V}{5}$

Дано также $V_3 \geq V_2$

Так как сообщающиеся резервуары наполняются за 4 ч., то

$4(\frac{V}{3} + \frac{V}{4} + \frac{V}{5}) = V + V_2 + V_3$

$V_2 + V_3 = \frac{32}{15}V$

Т.к. первый резервуар не наполняется никаким шлангом за 6ч., то либо V_2, либо V_3 заполняется за 6 ч. каким-либо шлангом. Т.к. $V_3 \geq V_2$ и шланг1 перекачивает жидкость быстрее, то выгоднее по времени заполнять V_3 через шланг1 , а V_2 через шланг2, тогда либо

$V_3 = 6x = 2V$, $V_2 = \frac{2V}{15}$;

либо $V_2 = 6y = \frac{3V}{2}, V_3 = \frac{19V}{30}$

Второго случая быть не может, т.к. должно быть $V_3 \geq V_2$.

Ответ: $(V; \frac{2}{15}V; 2V)$.

3. Логические задачи.

1. Среди семи внешне одинаковых монет есть одна фальшивая, более легкая по весу. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь, найти фальшивую монету?

   Решение.

   Разложим на 3 кучки: 3, 3,1 монеты. Взвесим монеты в одинаковых кучках, если равны, то оставшаяся фальшивая. Если не равны, то берем более легкую кучку, выбираем из нее 2 монеты и взвешиваем, если равны — третья фальшивая,если не равны, то более легкая фальшивая.

2. Можно ли из 36 спичек, не ломая их, сложить прямоугольный треугольник?

   Решение.

   В прямоугольном треугольнике $c^2 = a^2 + b^2$.

   Наименьшие целые, удовлетворяющие этому условию: $c = 5$, $a = 4$, $b = 3$. Их сумма 12. Чтобы $a + b + c = 36$ нужно увеличить каждую сторону в 3 раза. Получим $c = 15$, $a = 12$, $b = 9$. $\quad 15^2 = 12^2 + 9^2$

   Ответ: да.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Найти сумму первых 19 членов всякой арифметической прогрессии, у которой сумма третьего и девятого членов равна 6, а их произведение $8\frac{7}{16}$.

   (ответ:76 или 38)

2. Цена на товар повышена на 25 процентов. На сколько процентов ее надо снизить теперь чтобы получить первоначальную цену товара?

   (ответ: 20 процентов)

3. Вася и Петя поделили 39 орехов. Число орехов, доставшихся любому меньше удвоенного числа, доставшихся другому. Квадрат трети орехов Пети меньше числа орехов Васи. Сколько орехов у каждого?

   (ответ: 25 ,14)

4. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими 2 свойствами: —первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр; —разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

   (ответ:233, 466, 699, 390.).

Занятие 10.

Часть I. Показательная, логарифмическая и степенная функции.

1. Функция вида $y = x^n$, где $n \in R$ называется степенной.

2. Основные свойства степенной функции с $n \in N$.

   1. Обл. определения $X \equiv R$;

   2. Чет. при чет. n , неч. при неч. n.

   3. при $x > 0$ $n \in N$ функция возрастает, при $x < 0$, $n = 2k - 1$ функция возрастает, при $n = 2k$ убывает.

   4. если $|x| < 1$, то гр. функции x^n лежит тем ближе к OX , чем больше n; если $|x| > 1$, то гр. функции x^n лежит тем ближе к OX , чем меньше n.

   Пример.

   $y = \sqrt{x}$ — степенная функция. (см.рис. 16)

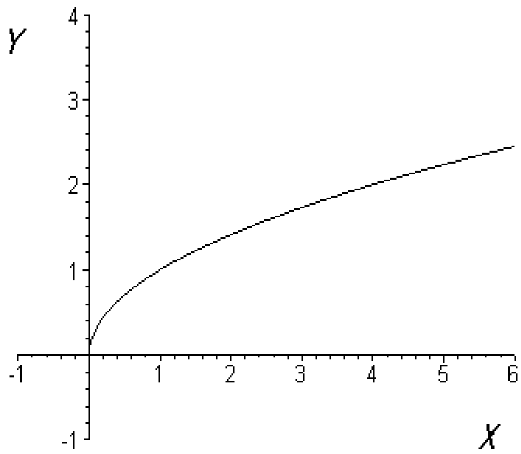


Рис. 16: $y = \sqrt{x}$

3. Функция вида $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ наз. показательной функцией.

4. Основные свойства показательной функции.

   1. Обл. определения $X \equiv R$;

2. $y = a^x > 0$ при любом $x \in R$;

3. если $a > 1$, то $y = a^x > 1$ при $x > 0$, $y = a^x < 1$ при $x < 0$.

4. если $a > 1$, то функция возрастает по всей области определения;

5. если $0 < a < 1$, то функция является убывающей по всей области определения;

6. OX — ассимптота графика функции;

7. графики функций a^x и $(\frac{1}{a})^x$ симметричны относительно OY;

8. при $a > 1$ гр. функции $y = a^x$ лежит тем ближе к OY, чем больше основание а, а при $0 < a < 1$ гр. функции лежит тем ближе к оси OY, чем меньше основание а.

5. Функция $y = a^x$ имеет обратную, которая наз. логарифмической и обозначается $y = \log_a x$.

6. Все свойства логарифмической функции можно получить как свойства обратной функции к показательной.

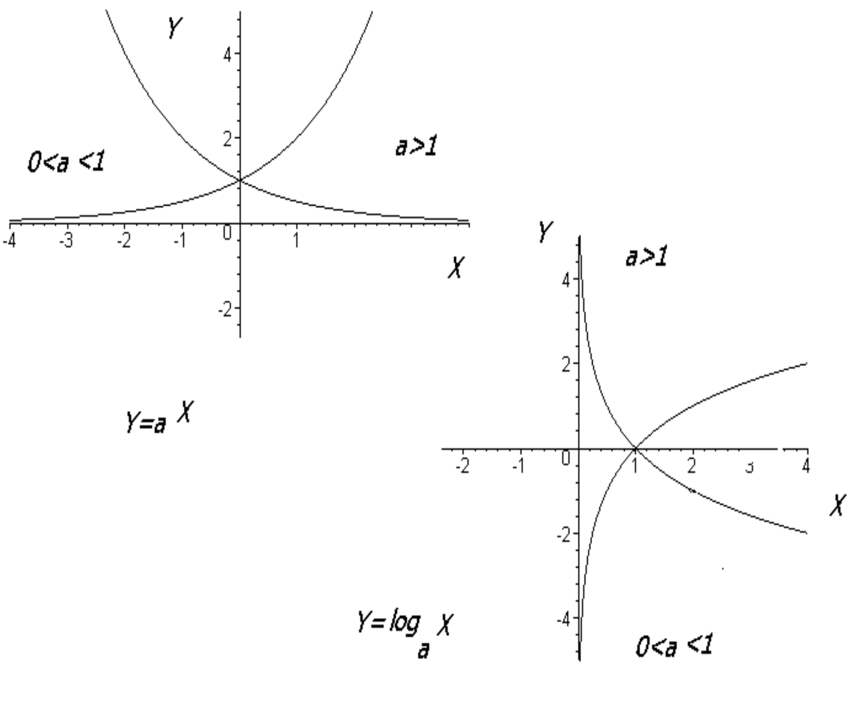


Рис. 17:

7. Логарифмом положительного числа b по положительному основанию a ($a \neq 1$) наз. показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

8. Основное логарифмическое тождество

   $a^{\log_a b} = b$,

   $a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$

9. Свойства логарифмов.

   1. $b_1 = b_2 \Longleftrightarrow \log_a b_1 = \log_a b_2$;

   2. если $a > 1$, то $b_1 > b_2 \Longleftrightarrow \log_a b_1 > \log_a b_2$;

   3. если $0 < a < 1$, то $b_1 > b_2 \Longleftrightarrow \log_a b_1 < \log_a b_2$;

   4. $\log_a 1 = 0$;

   5. $\log_a a = 1$.

10. Операции над логарифмами.

   1. $\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$;

   2. $\log_a(b_1 b_2 b_3) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3$;

   3. $\log_a(\frac{b_1}{b_2}) = \log_a b_1 - \log_a b_2$;

   4. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$;

   5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;

   6. $\log_a^\beta b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a b$;

   7. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$;

11. Если положительные числа — основание и логарифмируемое число , лежат по одну сторону от 1 , то логарифм положителен, а если по разные — отрицателен. Обратное также справедливо.

Задачи.

1. Построить график функции $y = \lg|x|$.

   Решение.

   Функция чет., обл. существования $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. При $x > 0$ построим правую ветвь, левая будет ей симметрична относительно OY. (см.рис. 18)

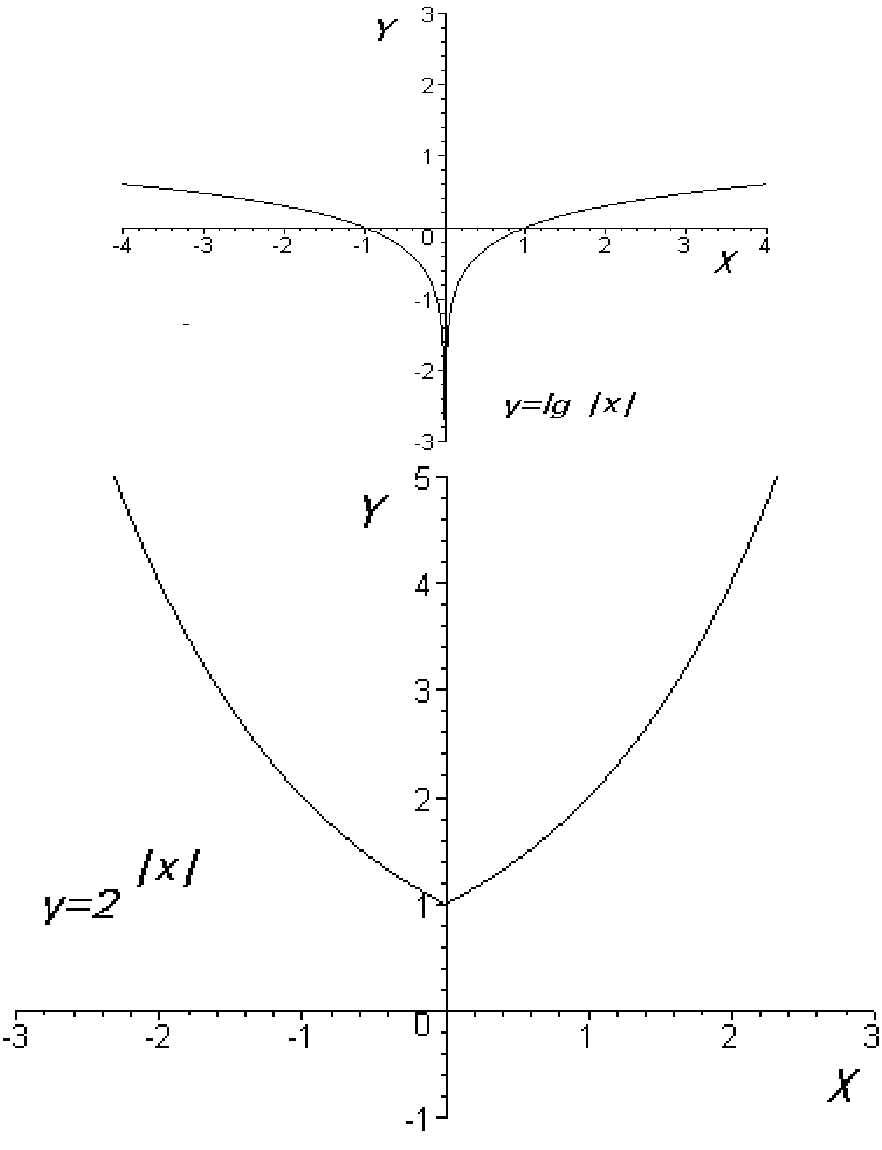


Рис. 18: $y = \lg|x|$

2. Построить гр. функции $y = 2^{|x|}$.

   Решение.

   Функция четная, контрольная точка $(2; 4)$. (см.рис. 18)

Часть 2. Показательные уравнения.

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $(a > 0, a \neq 1)$ и все к нему приводящиеся. В основе метода решения лежит положение о том , что $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0$, $a \neq 1 \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$.

2. $a^{f(x)} = b$

   $f(x) = \log_a b$

   пример: $2^x = 3 \Longrightarrow x = \log_2 3$.

3. $F(a^{f(x)}) = 0$. Замена $t = a^{f(x)}$ сводит уравнение к алгебраическому.

4. $a^{f_1(x)} = b^{f_2(x)} c^{f_3(x)}$

   $f^1(x) \lg a = f_2(x) \lg b + f_3(x) \lg c$

   пример: $2^{x^2} = 3^x \cdot 5$

   $x^2 \lg 2 = x \lg 3 + \lg 5$ это квадратное уравнение относительно x.

5. $\alpha a^{2x} + \beta a^x + \gamma = 0$.

   замена $a^x = t$ приводит уравнение к квадратному относительно t.

6. $\alpha a^{2x} + \beta a^x b^x + \gamma b^{2x} = 0$

   разделим обе части уравнения на $b^{2x} \neq 0$,

   т.к. это уравнение однородно относительно a^x и b^x;

   после деления получим квадратное уравнение относительно $t = \frac{a^x}{b^x}$.

7. $\alpha(a + \sqrt{a^2 - 1})^{f(x)} + \beta(a - \sqrt{a^2 - 1})^{f(x)} + \gamma = 0$

   т.к. $(a + \sqrt{a^2 - 1})^{f(x)}(a - \sqrt{a^2 - 1})^{f(x)} = 1$

   сделаем замену $(a + \sqrt{a^2 - 1})^{f(x)} = t$

   $\Longrightarrow \alpha t^2 + \gamma t + \beta = 0$,

   стоит учесть, что $a + \sqrt{a^2 - 1} = \frac{1}{a - \sqrt{a^2 - 1}}$.

8. Уравнения, решаемые исследованием областей изменения функций, входящих в уравнение.

   $2^{x^2} = \sqrt{2 \cdot 3^x - 3^{2x}}$

   $2^{x^2} \geq 1$

   $\sqrt{2 \cdot 3^x - 3^{2x}} = \sqrt{1 - (3^x - 1)^2} \leq 1$

   $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} 2^{x^2} & = 1, \\ \sqrt{2 \cdot 3^x - 3^{2x}} & = 1; \end{cases}$$

   $x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

   Ответ: $x = 0$.

9. Уравнения, решаемые подбором корней и доказательством отсутствия других корней.

   $3^{x-1} = 5 - x$

   $x = 2$ — корень, причем единственный, т.к. 3^{x-1} с ростом х монотонно возрастает, как показательная функция с основанием больше 1, показатель которой возрастает, а $5 - x$ является монотонно убывающей функцией.

Часть 3. Показательно - степенные уравнения.

1. $(a(x))^{b(x)} = (a(x))^{c(x)}$

   О.Д.З. $a(x) > 0$;

   исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

   $b(x) = c(x)$ и $a(x) = 1$.

2. $(a(x))^{b(x)} = (c(x))^{b(x)}$

О.Д.З. $a(x)>0, c(x)>0$;

Поделим обе части уравнения на$(c(x))^{b(x)}$,

получим равносильное уравнение $(\frac{a(x)}{c(x)})^{b(x)}=1$

$\Longrightarrow b(x)=0$ или $a(x)=c(x)$.

Часть 4. Логарифмические уравнения.

1. $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ — метод решения потенцирование, т.е. переход к уравнению вида $f(x)=g(x)$ при $f(x)>0, g(x)>0$. В частности, уравнение $\log_a f(x)=b$ равносильно уравнению $f(x)=a^b$.

   Пример.

   $\log_{6-x} x=2$

   О.Д.З.

$$\begin{cases} \quad 0<x<6, \\ x \quad \neq 5; \end{cases}$$

   $x=(6-x)^2$

   $x^2-13x+36=0$

   $x_1=4$, $x_2=9$

   Ответ: $x=4$.

2. Переход к логарифмам по одному основанию.

   $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ сводится к виду

   $\log_a f(x)=\frac{\log_a g(x)}{\log_a b}$ или

   $\log_a f(x)=\log_a g(x)^{\frac{1}{\log_a b}}$, а это уравнение вида 1).

3. Замена переменного.

   $F(\log_a f(x)) = 0$ заменой $\log_a f(x) = t$ сводится к алгебраическому.

4. $\alpha a^{\log_c x} + \beta x^{\log_c a} = \gamma$

   заметив, что $a^{\log_c x} = x^{\log_c a}$,

   получим $(\alpha + \beta) a^{\log_c x} = \gamma$— простейшее показательное уравнение.

5. Уравнения, решаемые исследованием областей изменения функций, входящих в уравнение.

   $x^2 = \log_3 \sqrt{2 \cdot 3^x - 3^{2x}}$

   $x^2 \geq 0$,

   $\log_3 \sqrt{2 \cdot 3^x - 3^{2x}} = 0,5 \log_3(1 - (3^x - 1)^2) \leq 0$

   т.к. основание логарифма $3 > 1$, а $(1 - (3^x - 1)^2) \leq 1$,

   то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 & = 0, \\ \log_3 \sqrt{2 \cdot 3^x - 3^{2x}} & = 0; \end{cases}$$

   $x = 0$

   Ответ: $x = 0$.

6. Уравнения, решаемые подбором корней и доказательством отсутствия других корней.

   $\log_2(31 + x) = 6 - x$

   $x = 1$— корень.

   Единственность его следует из того, что $\log_2(31 + x)$ является функцией монотонно возрастающей при $x > -31$, а $6 - x$ монотонно убывающей.

Задачи.

1. $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$

   $9^x(1+\frac{1}{3}) = 2^x(\sqrt{2^7}+\sqrt{2})$

   $(\frac{9}{2})^x = (\frac{9}{2})^{\frac{3}{2}}$

   $x = \frac{3}{2}$

   Ответ: $x = \frac{3}{2}$.

2. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$

   $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = (\sqrt{4-3})^x = 1$

   $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = t$

   $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = \frac{1}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x}$

   $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = \frac{1}{t}$

   $\frac{1}{t} + t = 4$

   $t^2 - 4t + 1 = 0$

   $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$

   $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

   Ответ: $x_{1,2} = \pm 2$.

3. $\sqrt[x]{4} + \sqrt[x]{6} = \sqrt[x]{9}$

   $\sqrt[x]{2^2} + \sqrt[x]{2\cdot 3} - \sqrt[x]{3^2} = 0$

   разделим обе части уравнения на $\sqrt[x]{3^2} \neq 0$

   $\sqrt[x]{(\frac{2}{3})^2} + \sqrt[x]{\frac{2}{3}} - 1 = 0$

   $\sqrt[x]{\frac{2}{3}} = y > 0$

   $y^2 + y - 1 = 0$

   $y_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt[x]{\frac{2}{3}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\lg(\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}} = \lg(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$

$x = \frac{\lg\frac{2}{3}}{\lg(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})} =$

$= \log_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \frac{2}{3}$

Ответ: $x = \log_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \frac{2}{3}$.

4. (март 2002). $8^x - 4^x = 2^x$

$2^x = t > 0$

$t^3 - t^2 - t = 0$

$t = 0$ посторонний корень,

$t^2 - t - 1 = 0$

$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$2^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x = \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x = \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. $x^{1-\lg x} = 0,01$

О.Д.З. $x > 0$;

$(1 - \lg x)\lg x = -2$

$\lg x = t$

$(1-t)t = -2$

$t^2 - t - 2 = 0$

$t_1 = 2$, $t_2 = -1$

$\lg x = 2$, $\lg x = -1$

$x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{10}$

Ответ: $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{10}$

Задачи для самостоятельной работы.

1. $8^x + 2^{2x+1} = 2^{x+2}$

   (ответ: $x = \log_2(\sqrt{5} - 1)$).

2. $125^x + 5^{2x+1} = 5^{x+1}$

   (ответ: $x = \log_5 \frac{3\sqrt{5}-5}{2}$).

3. $\log_{5-x}(2x^2 - 5x - 11) = 2$

   (ответ: $x = -9$).

Занятие 11.

Часть I. Логарифмические и показательные уравнения с параметрами.

Задачи.

1. При каких значениях а уравнение имеет решения?

   $4^{\frac{2}{x}} + a4^{\frac{1}{x}} - a - 1 = 0$

   Решение.

   О.Д.З. $x \neq 0$

   $4^{\frac{1}{x}} > 0$

   $y^2 + ay - (a+1) = 0$

   $y_1 = 1$, $y_2 = -a - 1$

   $4^{\frac{1}{x}} = 1 \Longrightarrow$ —решений нет,

   $4^{\frac{1}{x}} = -a - 1$

   $-a - 1 > 0$, $-a - 1 \neq 1$

   $a < -1$, $a \neq -2$

   Ответ: $a < -1, a \neq -2$

2. Найти все действительные а , при которых уравнения

   $9^x + a3^x + 9 = 0$, $9^x + 3^{x+1} + 3a = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

   Решение.

   Положим $3^x = t$

   $t^2 + at + 9 = 0$

   $t^2 + 3t + 3a = 0$

   пусть t_0 общий корень этих уравнений; вычитая из первого второе, получим

$at_0 - 3t_0 + 9 - 3a = 0$

$(a-3)(t_0-3) = 0$

a) $t_0 = 3 \Longrightarrow x = 1$— это значение является корнем при $a = -6$,

b)$a = 3$, $t^2 + 3t + 9 = 0, D < 0 \Longrightarrow$ не подходит.

Ответ: $a = -6$.

3. (июль 2003). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$(3x)^2 + (3^{\frac{1}{a}+3} - 15)x + 4 = 0$ имеет ровно одно решение.

Решение.

Обозначим $c = 3^{\frac{1}{a}+3} - 15 > -15 \Longrightarrow$

$9x^2 + cx + 4 = 0$ имеет единственное решение ,

когда его $D = c^2 - 144 = 0 \Longrightarrow c = \pm 12$

a) если $3^{\frac{1}{a}+3} - 15 = 12$,

то $3^{\frac{1}{a}+3} = 27 \Longrightarrow \frac{1}{a} = 0 \Longrightarrow$— решений нет.

b) если $3^{\frac{1}{a}+3} - 15 = -12$, то $3^{\frac{1}{a}+3} = 3$, $a = -0,5$

Ответ: $a = -0,5$.

Часть 2.Системы уравнений.

Задачи.

1.

$$\begin{cases} x^2 & = y^3, \\ \log_4 \frac{x}{y} & = \frac{\log_4 x}{\log_4 y}; \end{cases}$$

О.Д.З. $x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^3} & , \\ \log_4(\frac{x}{y}) & = \log_y x; \end{cases}$$

$\log_4 \frac{\sqrt{y^3}}{y} = \log_y \sqrt{y^3}$

$\frac{1}{2}\log_4 y = \frac{3}{2}$

$y = 64$, $x = \sqrt{8^6} = 512$

Ответ: $(512; 64)$.

2.

$$\begin{cases} y = \log_2 x, \\ x^{y^2-2y-3} \quad = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \log_2 x, \\ y^2 - 2y - 3 = 0, \quad x = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \log_2 x, \\ y_2 = 3, y_3 = -1, \quad x_1 = 1; \end{cases}$$

Ответ:$(1; 0), (8; 3), (0,5; -1)$.

3.

$$\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{x+y} & = 56, \\ 3 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^{x+y} & = 87; \end{cases}$$

пусть $2^x = z > 0$, $3^{x+y} = k > 0$

$$\begin{cases} z + 2k & = 56, \\ 3z + 3k & = 87; \end{cases}$$

$k = 27$, $z = 2$

$x = 1$, $y = 2$

Ответ: $(1; 2)$.

4.

$$\begin{cases} 7 &= \log_5 x + 3^{\log_3 y}, \\ x^y &= 5^{12}; \end{cases}$$

Решение.

О.Д.З. $x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} 7 &= \log_5 x + y, \\ x^y &= 5^{12}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - y &= \log_5 x, \\ \log_5 x &= \frac{12}{y}; \end{cases}$$

$y^2 - 7y + 12 = 0$

$y_1 = 3$, $y_2 = 4$

$x_1 = 625$, $x_2 = 125$

Ответ: $(625; 3), (125; 4)$.

5.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{xy} &= 10, \\ (\lg x)^2 + (\lg y)^2 &= 20; \end{cases}$$

Решение.

О.Д.З. $x > 0, y > 0;$

$xy = 10^4$

$(\lg \frac{10^4}{y})^2 + (\lg y)^2 = 20$

$\lg y = z, \quad 2z^2 - 8z - 4 = 0$

$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}, \quad \lg y = 2 \pm \sqrt{6}$

Ответ: $(10^{2\mp\sqrt{6}}; 10^{2\pm\sqrt{6}})$.

6.

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} & = 2, \\ 3^{\lg(2y-x)} & = 1; \end{cases}$$

Решение.

О.Д.З. $x < 2y$;

$2^{\frac{x-y}{4}} = k > 0, \qquad k^2 - k - 2 = 0, \qquad k_1 = 2$, $k_2 = -1$— посторонний корень, $\quad 2^{\frac{x-y}{4}} = 2$

$$\begin{cases} 4 & = x - y, \\ \lg(2y - x) & = 0; \end{cases}$$

Ответ: $(9; 5)$.

Задачи для самостоятельной работы.

1.

$$\begin{cases} x^y & = 2, \\ (2x)^{y^2} & = 64; \end{cases}$$

(ответ: $(\sqrt[3]{0,5}; -3), (\sqrt{2}; 2)$)

2.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt[y]{9} & = 9^{\frac{x}{2y}}, \\ 16\sqrt[x]{2^{x+3y}} & = 2^{\frac{2x}{y}}; \end{cases}$$

(ответ: $(-2; 4), (1,5; 0,5)$).

3.

$$\begin{cases} (1+y)^x & = 100, \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} & = \frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}; \end{cases}$$

(ответ: $(\log_{102} 100; 101)$).

Занятие 12.

Часть I. Показательные неравенства.

1. Показательные неравенства , как правило, приводятся к виду

   $a^{f(x)} > a^{\phi(x)}$, $a > 0, a \neq 1$

2. Относительно этого неравенства справедливо:

   Теорема 1. Если $a > 1$, то неравенство

   $a^{f(x)} > a^{\phi(x)} \Longleftrightarrow f(x) > \phi(x)$

   Теорема 2. Если $0 < a < 1$, то неравенство

   $a^{f(x)} > a^{\phi(x)} \Longleftrightarrow f(x) < \phi(x)$

3. Частные виды показательных неравенств.

   1. при $a > 1$

   имеет место: $a^{\phi(x)} > 1 \Longleftrightarrow \phi(x) > 0$

   $a^{\phi(x)} > a^b \Longleftrightarrow \phi(x) > b$

   2. при $0 < a < 1$

   имеет место: $a^{\phi(x)} > 1 \Longleftrightarrow \phi(x) < 0$

   $a^{\phi(x)} > a^b \Longleftrightarrow \phi(x) < b$

   3. степенно - показательное неравенство $(\phi(x))^{f(x)} > 1$

   эквивалентно двум системам:

$$\begin{cases} \phi(x) & > 1, \\ f(x) & > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \phi(x) & < 1, \\ f(x) & < 0; \end{cases}$$

Часть 2. Логарифмические неравенства.

1. Как правило, приводятся к виду $\log_a f(x) > \log_a \phi(x)$, $a > 0, a \neq 1$

2. Относительно этого неравенства имеют место:

   Теорема 1. При $a > 1$ неравенство $\log_a f(x) > \log_a \phi(x) \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) > 0, \phi(x) & > 0, \\ f(x) & > \phi(x); \end{cases}$$

   Теорема 2. При $0 < a < 1$ неравенство $\log_a f(x) > \log_a \phi(x) \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \phi(x) > 0, \\ f(x) & < \phi(x); \end{cases}$$

3. Частные виды логарифмических неравенств.

   1. При $a > 1$ имеет место:

   $\log_a f(x) > 0 \Longleftrightarrow f(x) > 1$

   $\log_a f(x) > b \Longleftrightarrow f(x) > a^b$

   2. При $0 < a < 1$ имеет место:

   $\log_a f(x) > 0 \Longleftrightarrow 0 < f(x) < 1$

   $\log_a f(x) > b \Longleftrightarrow 0 < f(x) < a^b$

   3. Логарифмическое неравенство $\log_{g(x)} f(x) > c$ эквивалентно двум системам:

$$\begin{cases} f(x) > 0, & g(x) > 1, \\ f(x) & > (g(x))^c; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > 0, & 0 < g(x) < 1, \\ f(x) & < (g(x))^c; \end{cases}$$

Задачи.

1. $\log_{x^2}(x^2+6) > 2$

Решение.

О.Д.З. $x \neq \pm 1, x \neq 0$;

неравенство эквивалентно двум системам:

1)

$$\begin{cases} x^2+6 & > x^4, \\ x^2 & > 1; \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x^2+6 & < x^4, \\ 0 < x^2 & > 1; \end{cases}$$

$x^2 = t$

1)

$$\begin{cases} t^2 - t - 6 & < 0, \\ t & > 1; \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} t^2 - t - 6 & > 0, \\ 0 < t < 1 & ; \end{cases}$$

решений нет

1)

$$\begin{cases} -2 & < t < 3, \\ t & > 1; \end{cases}$$

$1 < t < 3$

$1 < |x| < \sqrt{3}$

Ответ: $1 < |x| < \sqrt{3}$.

2. $(x^2 + x + 1)^x < 1$

Решение.

Неравенство эквивалентно двум системам

1)

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 & > 1, \\ x & < 0; \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 & < 1, \\ x & > 0; \end{cases}$$

нет решений

1)

$$\begin{cases} x(x+1) & > 0, \\ x & < 0; \end{cases}$$

Ответ: $x < -1$.

3. (июль 2003 , ВМК).

$\log_{\sqrt{2}+1}(2x + 7 + \sqrt{x+4} + \log_{\sqrt{2}-1}(x + 6 + 2\sqrt{x+4}) \leq 0$

Решение.

О.Д.З.

$$\begin{cases} x \geq -4, 2x + 7 + \sqrt{x+4} & > 0, \\ x + 6 + 2\sqrt{x+4} & > 0; \end{cases}$$

пусть $y = \sqrt{x+4} \geq 0 \Longrightarrow x = y^2 - 4$

$$\begin{cases} 2y^2 + y - 1 & > 0, \\ y^2 + 2y + 2 & > 0; \end{cases}$$

$\Longrightarrow y > 0,5$

заметим, что $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$

$\log_{\sqrt{2}+1}(2y^2 + y - 1) \leq \log_{\sqrt{2}+1}(y^2 + 2y + 2)$

т.к. основание $\sqrt{2} + 1 > 1$

$2y^2 + y - 1 \leq y^2 + 2y + 2$

$y^2 - y - 3 \leq 0$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \leq y \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{1}{2} < y \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{1}{2} < \sqrt{x+4} \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{-15}{4} < x \leq \frac{\sqrt{13}-1}{2}$

Ответ: $(\frac{-15}{4}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}]$

4. (август 2003 , РФ, ФзФ, в/о).

$\frac{\sqrt{x-0,5}}{\log_3 x^2} \geq 0$

Решение.

О.Д.З.

$$\begin{cases} x & \geq 0,5, \\ \log_3 x^2 & \neq 0; \end{cases}$$

$0,5 \leq x < 14$, $x > 1$

$x=0,5$ удовлетворяет исходному неравенству. При любом х из промежутка $0,5 \le x < 1$ имеем $x-0,5>0$ и $\log_3 x^2 < 0 \Longrightarrow$ ни одно из х из этого промежутка не является решением исходного неравенства. При любом х из промежутка $x>1$ имеем $x-0,5>0$ и $\log_3 x^2 > 0 \Longrightarrow$ любое х из этого промежутка является решением.

Ответ: $x=0,5; x>1$.

5. (март 2002 МЭФн). Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x^2-\log_2(y\sqrt{2}+6)^3-16 & \ge y^4-3x-y^2, \\ x^2-y^2 & \le \log_2(y\sqrt{2}+6)+x+1; \end{cases}$$

Решение.

О.Д.З. $y\sqrt{2}+6>0$

$$\begin{cases} 2x^2-3\log_2(y\sqrt{2}+6)-16 & \ge y^4-3x-y^2, \\ 3x^2-3y^2 & \le 3\log_2(y\sqrt{2}+6)+3x+3; \end{cases}$$

складывая неравенства одного смысла, получим:

$2x^2+3x-13 \ge y^4-3x-4y^2+3x^2 \Longleftrightarrow$

$(y^2-2)^2+(x-3)^2 \le 0$

возможно только при

$$\begin{cases} x & =3, \\ y & =\pm\sqrt{2}; \end{cases}$$

Проверка:

$x=3$, $y=\sqrt{2}$

$$\begin{cases} 18-9-16 & \geq 4-9-2, \\ 9-2 & \leq 3+3+1; \end{cases}$$

верно

$x = 3$, $y = -\sqrt{2}$

$$\begin{cases} 18-6-16 & \geq 4-9-2, \\ 9-2 & \leq 2+4; \end{cases}$$

неверно

Ответ: $x = 3; y = \sqrt{2}$.

Задачи для самостоятельной работы.

1. $4^x - 2^x - 2 > 0$

   (ответ: $x > 1$)

2. $\log_3(x+3) < \log_9(1-3x)$

   (ответ:$-3 < x < -1$)

3. $\log_{\frac{1}{1-x^2}} 2 < \log_{2x^2} \frac{1}{2}$

   (ответ:$(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$)

4. $7^{x-\frac{x^2}{8}} < 7^{1-x}(\sqrt[8]{7})^{x^2} + 6$

   (ответ:$x < 4 - 2\sqrt{2}, x > 4 + 2\sqrt{2}$)

Занятие 13.
Введение в тригонометрию.

1. Свойства функции синус. (см.рис. 19)

   1. Обл. определения — множество действительных чисел,

   2. периодична с периодом 2π,

   3. нечетная,

   4. обл. изменения $Y \in [-1; 1]$.

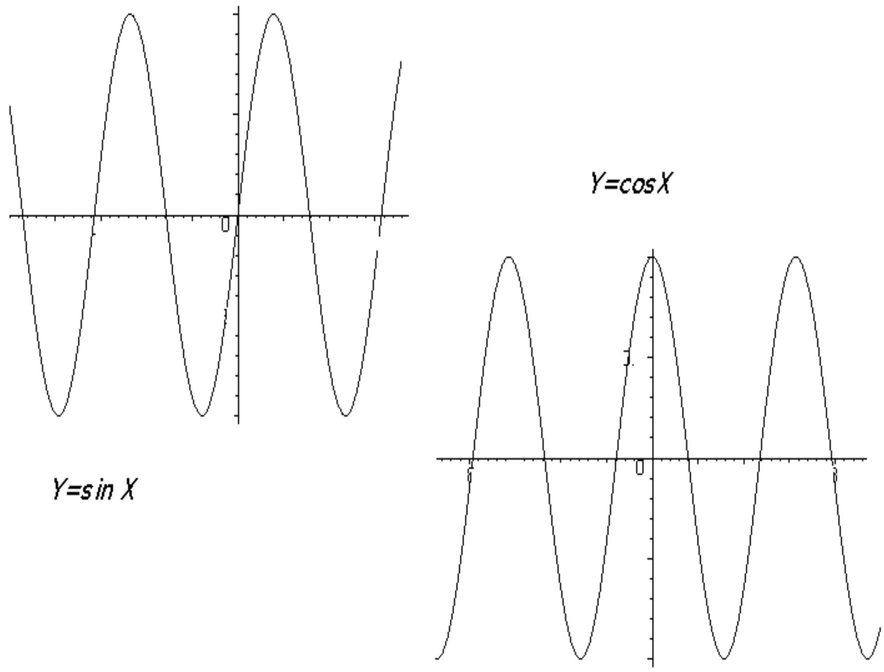


Рис. 19:

2. Свойства функции косинус. (см.рис. 19)

   1. Обл. определения — множество действительных чисел,

   2. периодична с периодом 2π,

   3. четная,

   4. обл. изменения $Y \in [-1; 1]$.

3. Свойства функций тангенс и котангенс. (см.рис. 20)

1. О.о. тангенса $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$,

котангенса $x \neq \pi k, k \in Z$,

2. периодична с периодом π,

3. нечетная,

4. обл. изменения $Y \in [-\infty; \infty]$.

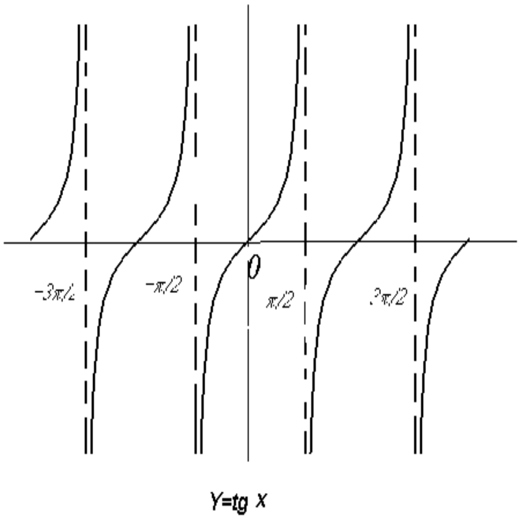


Рис. 20:

4. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.

   $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

   $\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

   $\mathrm{tg} x \cdot \mathrm{ctg} x = 1$

   $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

5. Формулы сложения аргументов.

   $\sin(x \pm y) = \sin x \cos x \pm \cos x \sin y$

   $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

   $\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg} x \pm \mathrm{tg} y}{1 \mp \mathrm{tg} x \mathrm{tg} y}$

6. Формулы двойного аргумента.

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\mathrm{tg} 2x = \frac{2\mathrm{tg} x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$

7. Формулы половинного аргумента.

$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

8. Формулы преобразования суммы в произведение.

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\mathrm{tg} x \pm \mathrm{tg} y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x \cos y}$

9. Формулы преобразования произведения в сумму.

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

10. Формулы приведения к острому углу.

$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos\alpha$

$\sin(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$

$\cos(3\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{ctg}\alpha$

$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{tg}\alpha$

$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha$

$\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$

$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha$

$\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$

$\mathrm{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm \mathrm{tg}\alpha$

$\mathrm{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm \mathrm{ctg}\alpha$

11. Выражение тригонометрических функций через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

    $\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$

    $\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$

12. Обратные тригонометрические функции.

    На участках монотонности функций $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

    $y = \cos x, x \in [0; \pi]$,

    $y = \mathrm{tg}x, x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,

    $y = \mathrm{ctg}x, x \in [0; \pi]$

    допускаются обратные, которые обозначаются соответственно:

    $y = \arcsin x, x \in [-1; 1], y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

    $y = \arccos x, x \in [-1; 1], y \in [0; \pi]$

    $y = \mathrm{arctg}x, x \in [-\infty; \infty], y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

    $y = \mathrm{arcctg}x, x \in [-\infty; \infty], y \in [0; \pi]$ (см.рис. 21)

Задачи.

1. Найти $\cos \alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

   Решение.

   По основному тригонометрическому тождеству

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{8}{9}$

$\cos\alpha < 0$ т.к. $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$

$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \mathrm{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$

$\mathrm{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}.$

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \mathrm{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\mathrm{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}$.

2. Найти $\sin 4\beta$, если $\mathrm{tg}\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Решение.

   $\sin 4\beta = 2\sin 2\beta \cos 2\beta$

   $\mathrm{tg}\beta > 1 \Longrightarrow \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$

   $1 + \mathrm{tg}^2\beta = 1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

   $\Longrightarrow \cos^2\beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$

   $\sin^2\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

   $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

   поскольку $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$,

   то $\frac{\pi}{2} < 2\beta < \pi$ и $\sin 2\beta > 0$

   $\Longrightarrow \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

   $\sin 4\beta = -\frac{4}{5}$

   Ответ: $-\frac{4}{5}$.

3. (апрель 2004 , ФСН). Известно , что $\sin\alpha + \sin\beta = a$

   $\cos\alpha + \cos\beta = b$.

   Найти $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$.

   Решение.

   Поделим

$\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}}{\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}} = \mathrm{tg}\frac{(\alpha+\beta)}{2} = t = \frac{a}{b}$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$

Ответ: $\frac{2ab}{a^2+b^2}, \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$.

4. Доказать , что

$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$

Доказательство.

Т.к. $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$,

то левая часть равенства примет вид

$-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\cdot$

$\cdot(\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}) = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7} =$

$= -\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

ч.т.д.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Доказать, что $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$

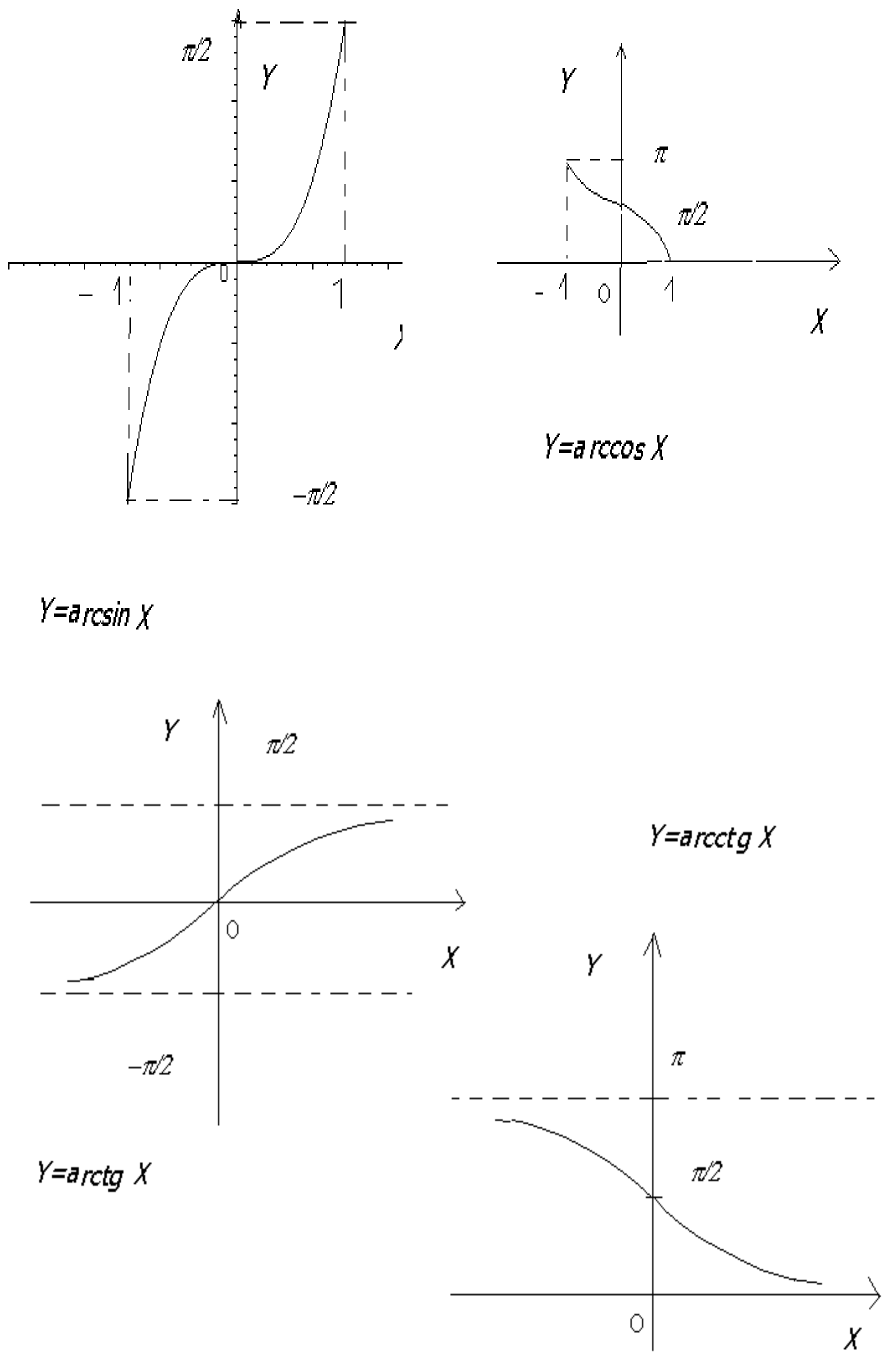
2. Вычислить $\sin\alpha$, если $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha) = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in (-\frac{\pi}{2};\pi)$

   (ответ:$\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$).

3. Доказать тождество $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

   если $\alpha = \beta + \gamma$.

4. Построить график функции $y = 2 - \sin|x + \frac{\pi}{3}|$.



π/2
Y
– 1
0
1
–π/2
Y=arcsin X
Y
π
π/2
- 1
0
1
X
Y=arccos X
Y
π/2
0
X
–π/2
Y=arctg X
Y=arcctg X
Y
π
π/2
0
X

Рис. 21:

Занятие 14.
Тригонометрические уравнения.

1. Простейшие тригонометрические уравнения.

   $\sin x = a$,$|a| \leq 1$,$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$

   $\cos x = a$, $|a| \leq 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

   $\mathrm{tg} x = a$,$a \in R$, $x = \arctan a + \pi n, n \in Z$

   $\mathrm{ctg} x = a$, $a \in R$,$x = \mathrm{arcctg} a + \pi n, n \in Z$

2. Уравнения вида $f(\sin(x)) = 0$ решаются с помощью замены $y = \sin x$, которая приводит уравнение к алгебраическому.

   Пример.

   $\sin x + \cos^2 x + 1 = 0$

   $\sin x + 1 - \sin^2 x + 1 = 0$

   $y = \sin x$

   $y^2 - y - 2 = 0$

   $y_1 = -1$, $y_2 = 2$— посторонний корень

   $\sin x = -1$

   Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

3. Уравнения , однородные относительно $\sin x, \cos x$.

   $a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_0 \cos^n x = 0$

   при $a_n \neq 0$ значения x, удовлетворяющие $\cos x = 0$ не являются решениями уравнения. Разделим обе части уравнения на $\cos^n x$, получим алгебраическое уравнение относительно $y = \mathrm{tg} x$.

4. Уравнения , приводящиеся к однородным.

$a_2 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_0 \cos^2 x = d$

это уравнение сведется к однородному , если представить

$d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$a_3 \sin^3 x + a_2 \sin^2 x \cos x + a_1 \sin x \cos^2 x + a_0 \cos^3 x = b \sin x + c \cos x$

это уравнение также сведется к однородному , если записать его правую часть в виде

$b \sin x + c \cos x = (b \sin x + c \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

5. Линейное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$.

   $a \cos x + b \sin x = c$ при $a^2 + b^2 \neq 0$

   разделим уравнение на $\sqrt{a^2 + b^2}$

   $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

   $\sin \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

   $\phi \in [0; 2\pi]$

   $\sin(x + \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

   $|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}| \leq 1$

   $x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k - \phi$, $k \in Z$

6. Метод замены переменного.

   Если тригонометрическое уравнение выражает связь $\sin x \pm \cos x$ и $\sin 2x$,

   то рекомендуется сделать замену переменного

   $t = \sin x + \cos x$

   или $z = \sin x - \cos x$.

   Тогда $\sin 2x = t^2 - 1$

   или $\sin 2x = 1 - z^2$,

после чего уравнение сводится к алгебраическому.

Пример.

$2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$

$t = \sin x + \cos x$

$t^2 + 2t = 0$

$t_1 = 0$, $t_2 = -2$—посторонний корень,

$\sin x + \cos x = 0$

$\mathrm{tg} x = -1$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

В уравнениях, связывающих косинус двойного угла и четную степень синуса или косинуса, полезной оказывается замена $t = \cos 2x$, которая приводит уравнение к алгебраическому.

Пример.

$\cos 2x + 4\cos^2 x = 1$

$t = \cos 2x$

$3t + 1 = 0$

$\cos 2x = -\frac{1}{3}$

$2x = \pm \arccos(-\frac{1}{3}) + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{3}) + \pi k, k \in Z$.

7. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Всякое рациональное уравнение относительно тригонометрических функций одного аргумента сводится к алгебраическому специальной заменой переменного, называемой тригонометрической подстановкой. $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$

При этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\mathrm{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}$

Осуществляя унив. тригоном. подстановку , можно потерять корни, а именно те, при которых $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ не существует, т.е.$x = \pi + 2\pi k$ Необходимо проверкой убедиться, не являются ли эти значения корнями исх. уравнения.

Пример.

$\sin x - \cos x = 1$

$Tg\frac{x}{2} = t$

$2t - 1 + t^2 = 1 + t^2$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

при этом потеряны корни

$x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

8. Уравнения вида $\sin f(x) = \cos g(x)$.

   по формулам приведения $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

   $\sin f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - g(x))$

   $2\sin\frac{f(x)-\frac{\pi}{2}+g(x)}{2}\cos\frac{f(x)+\frac{\pi}{2}-g(x)}{2} = 0$

   $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

   $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

9. Группировка и разложение на множители.

   Пример.

   $2\sin x\cos x + 2\cos 2x - 1 - \sin x = 0$

   $2(\cos 2x - 0,5)(\sin x + 1) = 0$

   $\cos 2x = 0,5$,

$\sin 2x = -1$

Ответ: $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k; x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, k, n \in Z$.

10. Частные приемы.

Если в уравнении можно уменьшить аргумент, увеличивая степени функций, или понизить степени, увеличивая аргумент, то чаще бывает полезнее последнее.

Пример.

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 0,5\sin^2 x$

$1 - 0,5\sin^2 x = 1$

Ответ:$x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Если в уравнение входят суммы синусов или косинусов разных аргументов, то иногда бывает полезно превратить суммы в произведения.

Пример.

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

$2\sin 2x \cos x + 2\sin 3x \cos x = 0$

$2\cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 0$

$4\cos x \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$

$\cos x = 0, \sin\frac{5x}{2} = 0, \cos\frac{x}{2} = 0$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$,$x = \frac{2\pi n}{5}$, $x = \pi + 2\pi l, n, k, l \in Z$

Если в уравнение входят произведения синусов и косинусов , бывает удобным представить их в виде суммы или разности функций.

Пример.

$4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$

$2\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x) = \sin 4x$

$2\sin 2x \cos 4x = 0$

$\sin 2x = 0$, $\cos 4x = 0$

$x = \frac{\pi k}{2}$,

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, k, n \in Z$

Ответ:$x = \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, k, n \in Z$

11. Функциональный подход.

Некоторые типы нестандартных тригонометрических уравнений решаются с помощью изучения областей значения функций , входящих в уравнение, использования других свойств этих функций.

Пример.

$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{1+\sin x} + \sqrt{\sin x}$

О.Д.З.

$\sin x \geq 0$

при этом $1 + \sin x \geq 1$

$\cos\frac{x}{2} \leq 1$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{1+\sin x} + \sqrt{\sin x} &= 1, \\ \cos\frac{x}{2} &= 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= \pi n, \\ x &= 4\pi k; \end{cases}$$

Ответ: $x = 4\pi k, k \in Z$.

Задачи.

1. $\sin x = \cos x^2$

   $\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x^2$

   $2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+x^2}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-x^2}{2} = 0$

   $\frac{x-\frac{\pi}{2}+x^2}{2} = \pi k, k \in Z$

   $\frac{x+\frac{\pi}{2}-x^2}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

   $\Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+2\pi+8\pi k}}{2}, k \geq o$

   $x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{1-2\pi-8\pi n}}{2}, n < -1$

   Ответ: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+2\pi+8\pi k}}{2}, k \geq o$

   $x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{1-2\pi-8\pi n}}{2}, n < -1.$

2. $\cos x\cos 3x = \cos 5x\cos 7x$

   $0,5(\cos 2x + \cos 4x) = 0,5(\cos 2x + \cos 12x)$

   $\cos 4x - \cos 12x = 0$

   $2\sin 8x\sin 4x = 0$

   $\sin 8x = 0$, $\sin 4x = 0$

   Ответ: $\frac{\pi n}{8}, n \in Z.$

3. (февр. 2002). $\mathrm{tg} x + \mathrm{tg}\frac{2x^2}{\pi} = 0$ на отрезке $[0;\pi]$

   Решение.

   О.Д.З.

$$\begin{cases} \cos x & \neq 0, \\ \cos\frac{2x^2}{\pi} & \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x & \neq \pm\frac{\pi}{2}\sqrt{1+2m}, m \geq 0, m \in Z; \end{cases}$$

$\frac{\sin(x+\frac{2x^2}{\pi})}{\cos x \cos\frac{2x^2}{\pi}} = 0$

$\Longleftrightarrow \sin(x+\frac{2x^2}{\pi}) = 0$

$2x^2 + x\pi - \pi^2 n = 0$

$x_{1,2} = \frac{-\pi\pm\pi\sqrt{1+8n}}{4}, n \in Z, n \geq 0$

$0 \leq \frac{-\pi\pm\pi\sqrt{1+8n}}{4} \leq \pi$

выполняется лишь при

$n = 0, 1, 2, 3$

$\Longrightarrow n = 0 \Longrightarrow x = 0$

$n = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ — не уд. О.Д.З.

$n = 2 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}(\sqrt{17}-1)$

$n = 3 \Longrightarrow x = \pi$

Ответ: $0; \frac{\pi}{4}(\sqrt{17}-1); \pi$.

4. $3^{x+3} = 3 + \cos\sqrt[100]{x} - 11^{100x}$

Решение.

$y_1 = 3(3^{x+2}-1)$— возрастающая показательная функция ,

$y_2 = \cos\sqrt[100]{x} - 11^{100x}$— убывающая показательная функция,

О.Д.З.

$x \geq 0 \Longrightarrow$

все значения функции $y_1 \geq 24$

$|\cos\sqrt[100]{x}| \leq 1,\ -11^{100x} \leq -1 \Longrightarrow$

y_2 имеет только отрицательные значения , значит корней нет.

Ответ: корней нет.

5. (март 2004 , ФСН). $4\mathrm{tg}^2\pi(x+y)+\mathrm{ctg}^2\pi(x+y)=3+\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}$

Решение.

Используем неравенство Коши.

$(2\mathrm{tg}\pi(x+y))^2+(\mathrm{ctg}\pi(x+y))^2\geq 2\cdot 2\mathrm{tg}\pi(x+y)\mathrm{ctg}\pi(x+y)=4$

$\Longrightarrow 3+\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}\geq 4$

$\frac{2x-1-x^2}{1+x^2}\geq 0$

$\frac{(x-1)^2}{1+^2}\leq 0$ — справедливо только при $x=1$

$4\mathrm{tg}^2\pi(1+y)+\mathrm{ctg}^2\pi(1+y)=3+1, \quad \mathrm{tg}^2\pi(1+y)=k$

$4k+\frac{1}{k}-4=0, \quad k_{1,2}=0,5$

$\mathrm{tg}\pi(1+y)=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$

$y=\frac{\mathrm{arctg}(\frac{\pm\sqrt{2}}{2})}{\pi}+k-1$, $x=1$

Ответ: $y=\frac{\mathrm{arctg}(\frac{\pm\sqrt{2}}{2})}{\pi}+k-1$, $x=1$

Задачи для самостоятельной работы.

1. $2\cos^2 x-\sin x=1$

   (ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, n,k\in Z$)

2. $x+\arccos(\cos 15x+2\cos 4x\sin 2x)=\frac{\pi}{12}$

   (ответ: $x=-\frac{\pi}{26}; x=\frac{\pi}{34}$)

3. $5\sin 2x=2\sin 9x-\sin 5x$

   (ответ:$x=\frac{\pi n}{2}, n\in Z$)

4. $\frac{4\sin x-2\cos 2x-1}{\cos 2x+\sqrt{3}\cos x-2}=0$

   (ответ:$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, n\in Z$)

Занятие 15.

Часть I. Тригонометрические системы уравнений.

1. (апрель 2003 МЭФн).

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y &= \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y &= \frac{\sqrt{6}}{4}, \cos x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \cos^2 x + 1 - \sin^2 y &= \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y &= \frac{\sqrt{6}}{4}, \cos x \geq 0; \end{cases}$$

сложим

$$\begin{cases} (\sin y + \cos x)^2 &= \frac{5+2\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geq 0; \end{cases}$$

получаем две системы

1)

$$\begin{cases} \sin y + \cos x &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \sin y &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}; \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} \sin y + \cos x &= -\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \sin y &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}; \end{cases}$$

1)

$$\begin{cases} \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin y &= \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin y &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} x &= \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \\ y &= (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x &= \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, \\ y &= (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} \cos x &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \cos x &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin y &= -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

т.к. косинус неотрицателен , то система 2) решений не имеет.

Ответ:

$$\begin{cases} x &= \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \\ y &= (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, \\ y &= (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; \end{cases}$$

Часть 2.Тригонометрические неравенства.

Задачи.

1. $\sin^2 x > 0,5$

   $1 - \cos 2x > 1$

   $\cos 2x < 0$

   Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

2. $\sin x - \cos x > 1$

   $\sin(x - \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

   Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in Z$.

3. $\cos(\sin x) < 0$

   $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \sin x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

   $-1 \leq \sin x \leq 1$

   Ответ: решений нет.

4. (март 2004 , ВМЭФ). $2\cos 2x + 7 + \frac{9}{\cos 2x - 1} > 0$

   Решение.

   О.Д.З.

   $\cos 2x \neq 1 \Longrightarrow x \neq \pi k, k \in Z;$

   $\cos 2x = t$

   $\frac{2(t+2)(t+0,5)}{t-1} > 0$

   $t > 1$, $-2 < t < -0,5$

   $\Longrightarrow -1 \leq t < -0,5$

   $-1 \leq \cos 2x < -0,5$

   Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

5. При каждом значении действительного параметра a найти все значения x , удовлетворяющие неравенству

$\cos x + \frac{1}{\cos x} \leq a^2$

Решение.

О.Д.З.

$\cos x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$

1) если $\cos x < 0 \Longrightarrow$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

то неравенство справедливо при любом действительном a.

2) пусть

$\cos x > 0 \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi m < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z.$

$\cos^2 x - a^2 \cos x + 1 \leq 0$

$t = \cos x$

$t^2 - a^2 t + 1 \leq 0$

$D = a^4 - 4$

1. если $D < 0$, $|a| < \sqrt{2}$— решений нет,

2. $D = 0$,$a = \pm\sqrt{2}$ — неравенство имеет одно решение $t = 1$,$\cos x = 1 \Longrightarrow$ $x = 2\pi k, k \in Z$

3. если $D > 0$, $|a| > \sqrt{2}$ то неравенство имеет решения

$t_1 \leq t \leq t_2$

где $t_1 = \frac{a^2 - \sqrt{a^4-4}}{2}$,$t_2 = \frac{a^2 + \sqrt{a^4-4}}{2}$

$0 < t_1 < t_2$

заметим, что

$t_2 > \frac{a^2}{2} > 1 \Longrightarrow t \leq t_2$ верно при всех допустимых t , т.к. $0 < t \leq 1$.

Кроме того $0 < t_1 < 1$, т.к. по теореме Виета $t_1 t_2 = 1 \Longrightarrow$ множество решений исходного неравенства при $|a| > \sqrt{2}$ не пусто и имеет вид

$t_1 = \frac{a^2 - \sqrt{a^4}}{2} \leq t$

$2\pi k - \arccos\frac{a^2-\sqrt{a^4}}{2} \leq x \leq \arccos\frac{a^2-\sqrt{a^4}}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: при любом действительном а $\frac{\pi}{2} + 22\pi m < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z*$

при $a = \pm\sqrt{2}$ кроме $*x = 2\pi n, n \in Z$

при $a < -\sqrt{2}, a > \sqrt{2}$ кроме $*$ решением являются все x удовлетворяющие неравенству

$2\pi k - \arccos\frac{a^2-\sqrt{a^4}}{2} \leq x \leq \arccos\frac{a^2-\sqrt{a^4}}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Часть 3. Системы тригонометрических неравенств.

1. При решении системы элементарных тригонометрических неравенств иногда трудно найти пересечение бесконечного множества промежутков, являющихся решением каждого неравенства. Для упрощения прибегают к следующему приему: находят общий период T всех функций , входящих в систему. Решают каждое неравенство системы на любом промежутке длины T, т.е. на $[0; T]$ или $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ и т.п. Находят решение системы как общую часть решений всех неравенств в отмеченном промежутке. Если интервал $(\alpha; \beta) \subset [0; T]$ является решением системы , то все множество интервалов $nT + \alpha < x < \beta + nT$, где $n \in Z$ будет представлять решение системы.

   Пример.

   $\sin\frac{x}{2}\cos x > 0$

   неравенство равносильно объединению двух систем

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} & > 0, \\ \cos x & > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} & < 0, \\ \cos x & < 0; \end{cases}$$

общий период $T = 4\pi \Longrightarrow$ решаем каждую систему только на $[0; 4\pi]$ (см.рис. 22)

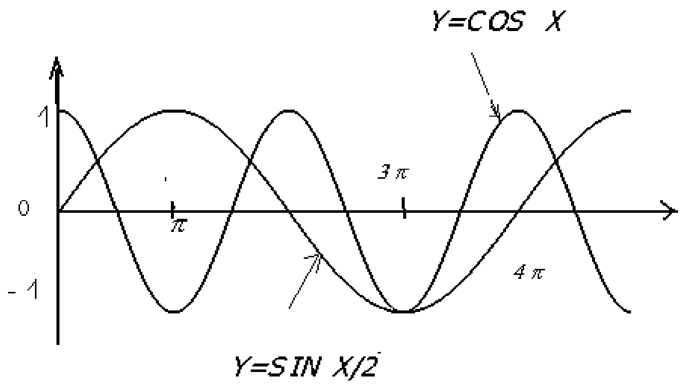


Рис. 22:

Ответ:$4\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 4\pi k$; $\frac{3\pi}{2} + 4\pi n < x < 2\pi + 4\pi n$;

$\frac{5\pi}{2} + 4\pi l < x < \frac{7\pi}{2} + 4\pi l, k, n, l \in Z$

2. При решении систем тригонометрических неравенств можно воспользоваться единичной окружностью.

   Пример.

$$\begin{cases} \sin x & > 0,5, \\ \cos x & > 0,5; \end{cases}$$

Находим на единичной окружности дуги , отвечающие решению каждого из неравенств. Решением системы будет дуга , которая соответствует значению угла

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.

Значит , решением системы будет совокупность интервалов

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Последний метод неудобен , если в систему входят функции с периодом большим 2π.

Задачи для самостоятельной работы.

1. $\sin^2 x < 0,5$

   (ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$)

2. $\sin x + \cos x > -\sqrt{2}$

   (ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k$).

Занятие 16.

Производная и ее применение. Касательная. Задачи на наибольшее и наименьшее значение.

1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δe в этой точке x к соответствующему приращению аргумента Δx при стремлении последнего к 0, т.е.

   $y'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, при условии , что предел существует.

2. Правила дифференцирования.

   1. $(cu(x))' = cu'(x)$, если $u'(x)$ существует.

   2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

   3.$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

   4. $[\frac{u(x)}{v(x}]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, если $v(x) \neq 0$.

3. Производные элементарных функций.

   1.$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,$\alpha = const$

   2.$(\sin x)' = \cos x$

   3.$(\cos x)' = -\sin x$

   4.$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

   5.$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   6.$(a^x)' = a^x \ln a$

   7.$(e^x)' = e^x$

   8.$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

   9.$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4. Производная сложной функции $(\phi(f(x)))'_x = \phi'(u)f'(x)$.

5. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$:

   $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Задачи.

1. Построить график функции $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

   Функция определена, положительна и непрерывна

   на интервале $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

   Тогда $x = 0$ является точкой разрыва, т.к. $y \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +0$ и $y \longrightarrow 0$ при $x \longrightarrow -0$.

   Значит прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции.

   Определим экстремумы функции. Для этого находим первую производную.

   $y' = 2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = 2(x - \frac{1}{2})e^{\frac{1}{x}}$

   $y'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0,5$

   Посчитаем вторую производную $y'' = 2e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} =$

   $= \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(2x^2 - 2x + 1) > 0$

   функция выпукла вниз всюду , а в точке $x = 0,5$ имеет минимум

   $y(0,5) = \frac{1}{4}e^2$

   По результатам исследований строим график. (см.рис. 23)

2. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y = x^4 - 4x^2$

   Решение.

   $y' = 4x^3 - 8x$

   $y' = 0 \Longrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

   Ответ: ф. убывает при $x < -\sqrt{2}$, $0 < x < \sqrt{2}$, возрастает при $-\sqrt{2} < x < 0$, $x > \sqrt{2}$, точки минимума $x = \pm\sqrt{2}$, точка максимума $x = 0$.

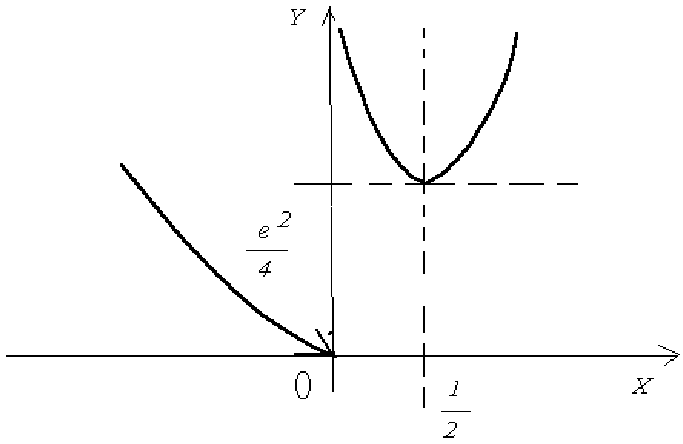


Рис. 23:

3. В полукруг единичного радиуса вписан прямоугольник наибольшей площади, одна из сторон которого лежит на диаметре. Найти стороны прямоугольника.

   Решение. (см.рис. 24)

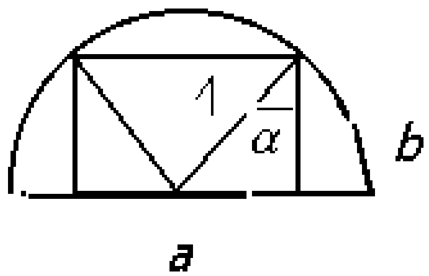


Рис. 24:

   $S = ab$, $a = 2 \cdot 1 \cdot \sin\alpha$, $b = 1 \cdot \cos\alpha$

   $S = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha, \quad S' = 2\cos 2\alpha \quad S' = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

   Ответ: $a = \sqrt{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Найти угол наклона касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 5$

   в точках $x = 0,5; 1; 3$.

   Решение.

   $y' = 2x - 2 \Longrightarrow y'(0,5) = -1$; $y'(1) = 0$; $y'(3) = 4 \Longrightarrow$

   $\mathrm{tg}\alpha = -1 \Longrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$

$\mathrm{tg}\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0, \quad \mathrm{tg}\alpha = 4 \Longrightarrow \alpha = \mathrm{arctg}4$

Ответ:$\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\alpha = 0$, $\alpha = \mathrm{arctg}4$.

5. (авг. 2003). При каком наибольшем значении а функция

   $f(x) = -\frac{x^3}{2} + ax^2 - 4ax + 3$

   убывает на всей числовой прямой?

   Решение.

   $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2ax - 4a \leq 0$ для любого х

   $\Longrightarrow$ функция не возрастает на всей числовой прямой ,

   значит $3x^2 - 4ax + 8a \geq 0$ т.к. ветви параболы направлены вверх , то неравенство будет выполнено на всей числовой прямой, если $\frac{D}{4} = 4a^2 - 24a \leq 0$

   $0 \leq a \leq 6$

   Ответ:6.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Найти экстремумы функций:

   1. $y = 3x^5 - 125x^3$

   2. $y = \frac{\ln x}{x}$

   (ответ: 1.$(-5; 6250), (5; -6250)$;

   2.$(e; \frac{1}{e})$).

2. Сумма двух чисел равна а. Каковы должны быть числа , чтобы их произведение было наибольшим?

   (ответ: $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$).

Занятие 17.

Часть I. Применение координат и векторов к решению задач.

1. Расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$:

   $A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |A_1A_2|$

   где $\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1 \ ; y_2 - y_1)$.

2. Координаты середины отрезка $(x_*; y_*)$ с концами $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$:

   $x_* = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_* = \frac{y_1+y_2}{2}$

3. Уравнение прямой , проходящей через точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$:

   $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

4. Общее уравнение прямой $\quad ax + by + c = 0$

5. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0; y_0)$:

   $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

6. Пусть даны 2 вектора $\overline{a} = (a_x \ ;a_y)$, $\overline{b} = (b_x; b_y)$ и число λ , тогда:

   $\overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y)$;

   $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y)$.

7. Скалярным произведением $\overline{a} \cdot \overline{b}$

   векторов $\overline{a} = (a_x; a_y), \overline{b} = (b_x; b_y)$

   называется число $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\phi$,

   где ϕ угол между векторами.

   $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + b_x b_y$.

8. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов

$\overline{a} = (a_x; a_y)$, $\overline{b} = (b_x; b_y)$:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

или $a_x b_x + b_x b_y = 0$.

9. Пусть даны 2 точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

   Тогда в прямоугольной декартовой системе координат длина отрезка A_1A_2 , модуль вектора $\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ будут равны:

   $A_1A_2 = |A_1A_2| = |\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

10. Координаты $(x_*; y_*; z_*)$ середины отрезка с концами $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$:

    $x_* = \frac{x_1+x_2}{2}; y_* = \frac{y_1+y_2}{2}; z_* = \frac{z_1+z_2}{2}$.

11. Модуль вектора $\overline{a} = (a_1; a_2, a_3)$:

    $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

12. $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$,

    $\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

13. Скалярное произведение векторов $\overline{a} = (a_1; a_2, a_3)$ и $\overline{a} = (b_1; b_2, b_3)$

    $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos \phi$

    $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

14. Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $(x_0; y_0; z_0)$:

    $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Задачи.

1. (ВМК март 2005). Числа x, y, z таковы, что $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   Какое наименьшее значение может принимать выражение $2x - y + z$?

   При каких x, y, z оно достигается?

Решение.

Используем скалярное произведение двух векторов.

Введем в рассмотрение 2 вектора: $\overline{a} = (\sqrt{2}x; y; z)$ и $\overline{b} = (\sqrt{2}; -1; 1)$.

С одной стороны $\overline{a}\overline{b} = 2x - y + z$

С другой стороны $\overline{a}\overline{b} = \sqrt{2x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{2+1+1}\cos\phi = 2\cos\phi$

Наименьшее значение $\overline{a}\overline{b} = -2$

при $\cos\phi = -1 \Longrightarrow \phi = \pi$

$\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}} = \frac{y}{-1}\frac{z}{1} = t, t < 0$

$\Longrightarrow x = t, y = -t, z = t$

$2t^2 + t^2 + t^2 = 1 \Longrightarrow t = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$

Ответ: -2; при $x = z = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$.

Часть 2. Некоторые основные понятия планиметрии.

1. Произвольный треугольник (a,b,c — стороны ; α, β, γ—противолежащие им углы; p— полупериметр; R, r— радиусы описанной и вписанной окружностей; S—площадь; h_a, h_b, h_c—высоты , проведенные соответственно к сторонам a,b,c; m_a, m_b, m_c—медианы , проведенные соответственно к сторонам a, b, c; l_a, l_b, l_c—биссектрисы углов α, β, γ соответственно; c_a, c_b—прилежащие соответственно к сторонам a и b отрезки , на которые биссектриса угла γ делит сторону c.

   $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$;

   $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta$;

   $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$—формула Герона;

   $r = \frac{S}{p}$

$R = \frac{abc}{4S}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$— теорема косинусов, равенство имеет место для каждой стороны треугольника, записывается аналогично.

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$—теорема синусов.

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$;

$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}$, для остальных двух сторон аналогично.

$\frac{c_a}{c_b} = \frac{a}{b}$

$l_c = \sqrt{ab - c_a c_b}$

$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$ (для других сторон аналогично)

$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

2. Прямоугольный треугольник (a, b— катеты; c—гипотенуза; a_c, b_c—проекции катетов на гипотенузу)

$S = \frac{ab}{2}$

$S = \frac{ch_c}{2}$

$r = \frac{a+b-c}{2}$

$R = \frac{c}{2}$

$c^2 = a^2 + b^2$— теорема Пифагора;

$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}$

$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}$

$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}$

$a = c\ \sin\alpha = c\ \cos\beta = b\ \mathrm{tg}\alpha = b\ \mathrm{ctg}\beta$

3. Равносторонний треугольник.

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

4. Подобные треугольники (k-коэффициент подобия).

   $k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{h_{1a}}{h_{2a}} = \frac{h_{1b}}{h_{2b}} = \frac{h_{1c}}{h_{2c}} = \frac{m_{1a}}{m_{2a}} = \frac{m_{1b}}{m_{2b}} = \frac{m_{1c}}{m_{2c}} = \frac{l_{1a}}{l_{2a}} = \frac{l_{1b}}{l_{2b}} = \frac{l_{1c}}{l_{2c}}$

   $k^2 = \frac{S_1}{S_2}$

   (индексы 1 и 2 указывают соответственно на первый и второй подобные треугольники).

5. Произвольный выпуклый четырехугольник ($d_1 d_2$—диагонали, ϕ— угол между ними , S— площадь)

   $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\phi.$

6. Параллелограмм (a, b смежные стороны , α угол между ними , h_a, h_b— высоты, проведенные к сторонам a, b соответственно):

   $S = ah_a = bh_b = ab\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\phi.$

7. Ромб : $S = ah_a = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2.$

8. Прямоугольник: $S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\phi.$

9. Квадрат (d—диагональ): $S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$

10. Трапеция (a, b основания , h — высота , m —средняя линия):

    $m = \frac{a+b}{2},$

    $S = \frac{a+b}{2} h = mh$

11. Равнобедренная трапеция со взаимно перпендикулярными диагоналями:

    $S = h^2.$

12. Равнобедренная трапеция , в которую можно вписать окружность:

    $h^2 = ab$

13. Описанный многоугольник

    (p—полупериметр, r—радиус вписанной окружности):

    $S = pr$

14. Правильный многоугольник

    (a_n—сторона правильного n-угольника, R— радиус описанной окружности, r—радиус вписанной окружности):

    $a_3 = R\sqrt{3}$;

    $a_4 = R\sqrt{2}$;

    $a_6 = R$;

    $S = \frac{na_nr}{2}$

15. Окружность, круг (r—радиус, c—длина окружности, S—площадь круга):

    $c = 2\pi r$

    $S = \pi r^2$

16. Вписанный угол составляет половину центрального, опирающегося на ту же дугу.

17. Угол, составленный двумя секущими, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

18. Угол, составленный касательной и хордой, измеряется

    половиной дуги,заключенной внутри него.

19. Сектор (l—длина дуги, ограничивающей сектор, n^0, α—градусная и радианная меры центрального угла соответственно):

    $l = \frac{\pi r n^0}{180^o} = r\alpha$

    $S = \frac{\pi r^2 n^0}{360^o} = \frac{1}{2}r^2\alpha$

Задачи для самостоятельной работы.

1. (июль 2002). В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найти длины сторон треугольника.

   (ответ: 8 , 15 , 17 см).

2. (февраль 2002). Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F, $EF = 8$.Найти основания трапеции, если их отношение равно 4.

   (ответ: 20 ; 5).

3. (февраль 2004, ФзФ). В ромбе ABCD из вершины D на сторону BC опущен перпендикуляр DK. Найти стороны ромба , если $AC = 2\sqrt{6}$, $AK = \sqrt{14}$.

   (ответ: $2\sqrt{2}$).

Занятие 18.
Задачи по планиметрии.

1. $\triangle ABC$ не имеет тупых углов. На стороне AC этого треугольника взята точка D так, что $AD = \frac{3}{4}AC$. Найти $\angle BAC$, если известно, что прямая BD разбивает $\triangle ABC$ на два подобных треугольника.

   Решение. (см.рис. 25)

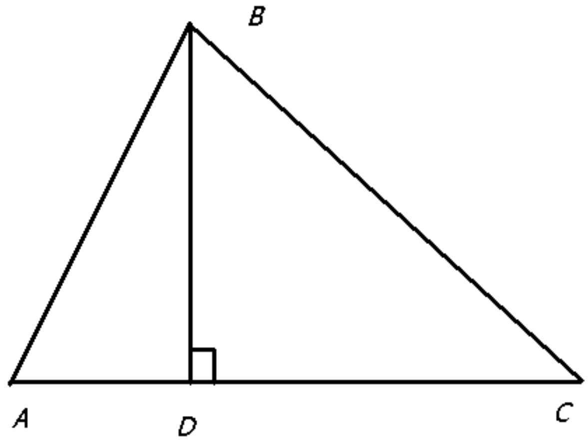


Рис. 25:

   Если прямая BD разбивает треугольник на два подобных треугольника, то углы треугольников не могут быть больше 90 градусов, значит, BD является высотой $\triangle ABC$.

   Пусть $BD = h$, $AC = x$,$\angle BAC = \alpha$. Т.к. $\triangle ABD$ подобен $\triangle BCD$, то $\frac{h}{0{,}75x} = \frac{0{,}25x}{h}$

   $\mathrm{tg}\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

   Ответ: $\alpha = 30^o$.

2. Сумма острых углов трапеции равна 90 градусов, а основания и высота соответственно 12 см , 16 см , 2 см. Найти боковую сторону трапеции.

   Решение. (см.рис. 26)

   $\triangle ABF$ подобен $\triangle CDE$ (по 2 углам),

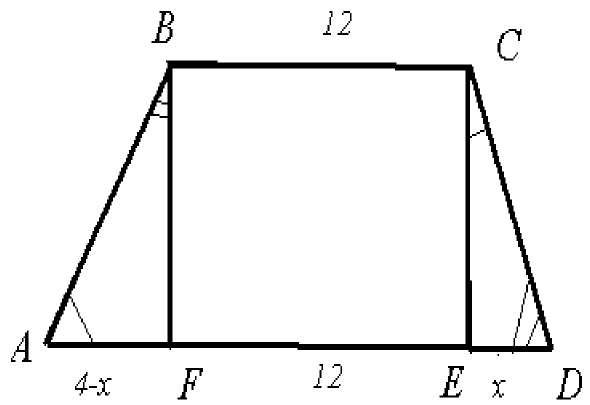


Рис. 26:

т.к. сумма острых углов равна 90 градусов, $\angle A = \angle C$

$\frac{x}{2} = \frac{2}{4-x}$, $x = 2$, $CD = 2\sqrt{2}, AB = 2\sqrt{2}$

Ответ: $2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$.

3. Длина диагоналей ромба и длина его стороны образуют геометрическую прогрессию Найти синус угла между стороной ромба и его большей диагональю, если известно, что он больше 0,5.

   Решение. (см.рис. 27)

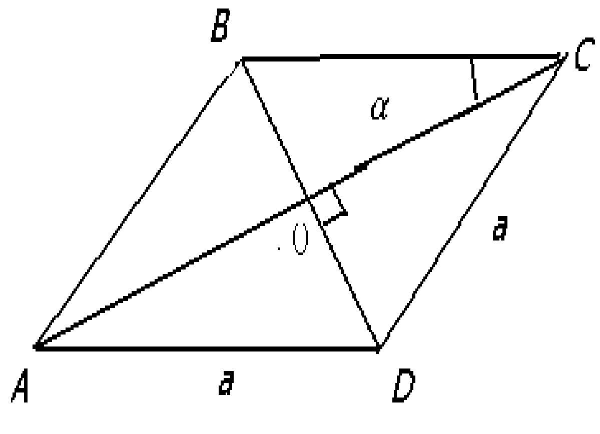


Рис. 27:

$BD = aq$, $AC = aq^2$, $BO = \frac{aq}{2}$, $AO = \frac{aq^2}{2}$,

$\triangle ABO \Longrightarrow a^2 = (\frac{aq}{2})^2 + (\frac{aq^2}{2})^2$

$q^4 + q^2 - 4 = 0$

$q = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$

$\sin\alpha = \frac{q}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$.

4. (апрель 2004 Ф). В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC. Окружность, проходящая через вершины C и D касается стороны AB в точке E , отличной от B и A. Найти площадь треугольника CED, если $BC = b$, $AD = a$,$CD = c$.

Решение. (см.рис. 28)

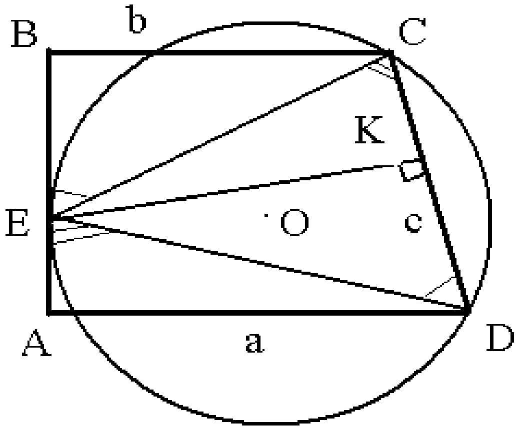


Рис. 28:

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}EK \cdot c$,

$\angle BEC = \frac{1}{2} \smile EC$ (по теореме),

$\Longrightarrow \triangle BEC$ подобен $\triangle EKD$ (по 2 углам),

$\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{EK} = \frac{BE}{KD}$,

$\triangle AED$ подобен $\triangle ECK$ (аналогично),

$\frac{EC}{ED} = \frac{EK}{AD} = \frac{CK}{EA}$,

$\Longrightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{EK}{AD} = \frac{BC}{EK}$,

$EK^2 = AD \cdot BC = ab \Longrightarrow EK = \sqrt{ab}$,

$S_{\triangle CED} = \frac{c\sqrt{ab}}{2}$,

Ответ: $S_{\triangle CED} = \frac{c\sqrt{ab}}{2}$.

Задачи для самостоятельной работы.

1. (июль 2003). В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18 , площадь треугольника BPQ равна 2 , а длина отрезка PQ $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

   (ответ: 4,5).

2. (май 2003 , ММ-тест). Найти площадь треугольника, если две его стороны равны соответственно 27 и 29 , а медиана к третьей стороне 26.

   (ответ: 270).

3. (март 2003 , ММ-тест). В прямоугольный равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса r . Найти длину катета этого треугольника.

   (ответ: $r(2+\sqrt{2})$).

4. (март 2003 , РЭФнФзС). В равнобедренной трапеции средняя линия равна 3, а диагонали взаимно перпендикулярны . Найти площадь трапеции.

   (ответ: 9).

Занятие 19.
Стереометрия.

1. Произвольная призма

   (l—боковое ребро , P—периметр основания, S—площадь основания, H—высота, $P_{\perp \text{сеч}}$—периметр перпендикулярного сечения, $S_{\text{бок}}$—площадь боковой поверхности, V—объем)

   $S_{\text{бок}} = P_{\perp \text{сеч}}\ l$,

   $V = SH$.

2. Прямая призма: $S_{\text{бок}} = Pl$.

3. Прямоугольный параллелепипед

   (a, b, c—его измерения, d—диагональ).

   $S_{\text{бок}} = PH$,

   $V = abc$,

   $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

4. Куб (a—ребро).

   $V = a^3$,

   $d = a\sqrt{3}$.

5. Произвольная пирамида

   (S—площадь основания, H—высота, V—объем):

   $V = \frac{SH}{3}$.

6. Правильная пирамида

   (P—периметр основания, l—апофема, $S_{\text{бок}}$—площадь бок. поверх.):

   $S_{\text{бок}} = \frac{Pl}{2}$,

$V = \frac{SH}{3}$.

7. Произвольная усеченная пирамида

   (S_1 и S_2 —площади оснований, h—высота, V—объем):

   $V = \frac{h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})}{3}$.

8. Правильная усеченная пирамида

   (P_1 и P_2— периметры оснований, l—апофема, $S_{бок}$— площадь боковой поверхности):

   $S_{бок} = \frac{(P_1+P_2)l}{2}$.

9. Цилиндр

   (R—радиус основания, H— высота, $S_{бок}$—площадь боковой поверхности, V—объем):

   $S_{бок} = 2\pi RH$,

   $V = \pi R^2 H$.

10. Конус

    (R—радиус основания, H—высота, l—образующая, $S_{бок}$—площадь боковой поверхности, V—объем):

    $S_{бок} = \pi Rl$,

    $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$.

11. Шар , сфера

    (R—радиус шара, S—площадь сферической поверхности, V—объем):

    $S = 4\pi R^2$,

    $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

12. Шаровой сегмент

(R—радиус шара, h—высота сегмента, S—площадь сферической поверхности сегмента, V—объем):

$S = 2\pi Rh$,

$V = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$.

13. Шаровой сектор

(R—радиус шара, h—высота сегмента, V—объем):

$V = \frac{2\pi R^2 h}{3}$.

Задачи.

1. (июль 2003 , ММ-тест). Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Найти радиус описанного шара.

Решение. (см.рис. 29)

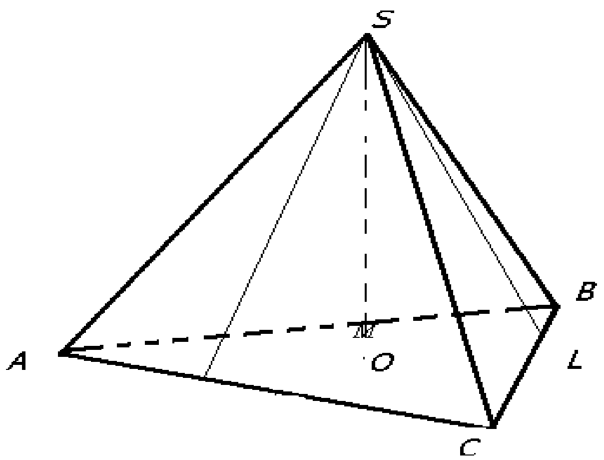


Рис. 29:

Пусть SO высота (точка O —точка пересечения диагоналей квадрата),

$\Longrightarrow AC = 2\sqrt{2}$,

$AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$,

из прямоугольного треугольника AOS $\Longrightarrow SO = \sqrt{2}$

$\Longrightarrow$ точка O равноудалена от вершин пирамиды, поэтому

$OS = AO = R = \sqrt{2}$ —радиус описанной сферы.

Ответ: $\sqrt{2}$.

2. (февраль 2003 МРВ). Основанием пирамиды SABC является прямоугольный треугольник ABC (C—вершина прямого угла). Все боковые грани пирамиды наклонены к ее основанию под одинаковым углом, равным $\arcsin\frac{5}{13}$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если SO—высота пирамиды, $AO = 1$, $BO = 3\sqrt{2}$.

Решение. (см.рис. 30)

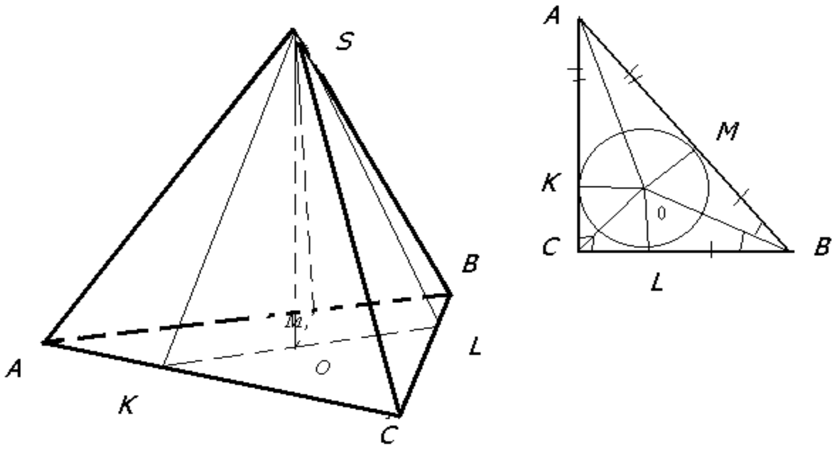


Рис. 30:

Проведем высоты SK, SL, SM в треугольниках ASC, CSB, ASB.

По условию $\angle SKO = \angle SMO = \angle SLO$.

Поэтому прямоугольные треугольники SOK, SMO, SOL равны

$\Longrightarrow OK = OL = OM$ и точка O —центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Рассмотрим $\triangle ABC \Longrightarrow$

$\angle AOB = \pi - (\angle OAB + \angle OBA) = \pi - \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA) = \frac{3\pi}{4}$.

$\triangle AOB : AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB\cos(\angle AOB) = 25$

$\Longrightarrow AB = 5$.

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin(\angle AOB) = \frac{AB \cdot OM}{2}$

$\Longrightarrow OM = \frac{3}{5} = r,$

$AC+BC = KC+CL+KA+LB = OL+OK+AM+MB = 2OM+AB \Longrightarrow$

$\triangle ABC : p = 2AB + 2r = \frac{56}{5}.$

$\triangle SKO : SK = \frac{13}{20}.$

$\cos(\angle SKO) = \sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13},$

$S_{\text{б}\ SABC} = \frac{pSK}{2} = \frac{91}{25}.$

Ответ: $\frac{91}{25}$.

3. В четырехугольной пирамиде SABCD основание ABCD — прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найти SD.

Решение. (см.рис. 31)

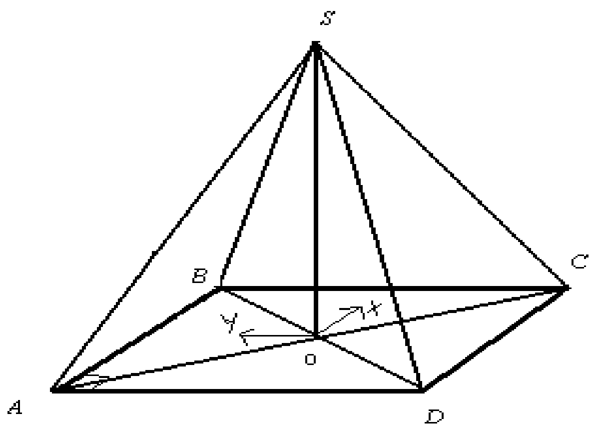


Рис. 31:

Пусть $AB = CD = 2a$; $BC = AD = 2b$,

введем декартову систему координат Oxyz с началом координат в т. O и осями Ox и Oy паралллельными сторонам AB и BC так, чтобы в этой системе

$A = A(-a; b; 0),$

$B = B(a; b; 0),$

$C = C(a; -b; 0)$,

$D = D(-a; -b; 0)$,

Если $S = S(x; y; z)$, то

$AS^2 = (x + a)^2 + (y - b)^2 + z^2$,

$BS^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2$,

$DS^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2 + z^2$,

$CS^2 = (x - a)^2 + (y + b)^2 + z^2$,

$\Longrightarrow SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$

$4 + 16 = 9 + x^2$,

$x = \sqrt{11}$

Ответ: $\sqrt{11}$

Задачи для самостоятельной работы.

1. Около шара описан прямой круговой усеченный конус. Отношение объема усеч. конуса к объему шара равно 13: 6 . Найти угол между образующей конуса и его основанием.

   (ответ: $\frac{\pi}{6}$).

2. (март 2003, ММ-тест). Найти объем треугольной пирамиды, каждая грань которой представляет собой треугольник со сторонами $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$.

   (ответ: 2).

3. В четырехугольной пирамиде SABCD основание ABCD—прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найти SD.

   (ответ: $\sqrt{11}$)

Занятие 20.
Примеры экзаменационных работ.
1.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y &= 3, \\ x^2 + y^2 &= 17; \end{cases}$$

2. Решить уравнение

   $\lg(x+1)^2 - \lg(x-1)^2 = 4\lg\sqrt{3}$

3. При каждом значении действительного параметра a , найти все значения x , удовлетворяющие неравенству:

   $\mathrm{tg}^2 x + \cos^2 x \geq a - 1.$

4. В прямоугольнике ABCD точка M— середина AD, точка N—середина BC. На продолжении DC за точку D взята точка P так, что $S_{\triangle QNM} = \frac{1}{10} S_{ABNM}$, где Q— точка пересечения прямых PM и AC. Найти отношение длин отрезков QN и PN.

Решения.

1. $(-1; -4)$, $(4; 1)$,

2. О.Д.З.

   $x \neq \pm 1;$

   $(x+1)^2 = 9(x-1)^2,$

   $x + 1 = \pm 3(x-1),$

   $x_1 = 2$, $x_2 = 0,5,$

   Ответ: 2 ; 0,5.

3. после преобразования получим

$\frac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x \geq a \quad (2)$

О.Д.З.

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

согласно неравенству Коши:

$\frac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x \geq 2 \Longrightarrow$

если $a \leq 2$, то $\quad (2) \quad$ выполняется при любом x из О.Д.З.

Рассмотрим случай, когда $a > 2$

$t = \cos^2 x$, $0 < t \leq 1 \Longrightarrow,$

$t^2 - at + 1 \geq 0$

$D > 0 \quad$ при$a > 2$

$t_1 = \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$, $t_2 = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$

$0 < t_1 < t_2$

$t \leq t_1$, $t \geq t_2$

т.к. $t_2 > \frac{a}{2} > 1$ при $a > 2$, то второе неравенство $t = \cos^2 x \geq t_2$

решений не имеет. Кроме того, при $a > 2$ выполняется неравенство $0 < t_1 < 1,$

т.к. по т. Виета произведение корней $t_1 t_2 = 1$, тогда в О.Д.З. это эквивалентно

$0 < t \leq \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$

$\Longleftrightarrow 0 < |\cos x| \leq \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$

$\pi k + \arccos\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}} \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\pi k - \frac{\pi}{2} < x \leq \pi k - \arccos\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$, $k \in Z$

Ответ: при $a \leq 2$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

при $a > 2$,$\pi k + \arccos\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}} \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\pi k - \frac{\pi}{2} < x \leq \pi k - \arccos\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$, $k \in Z.$

4. Решение. (см.рис. 32)

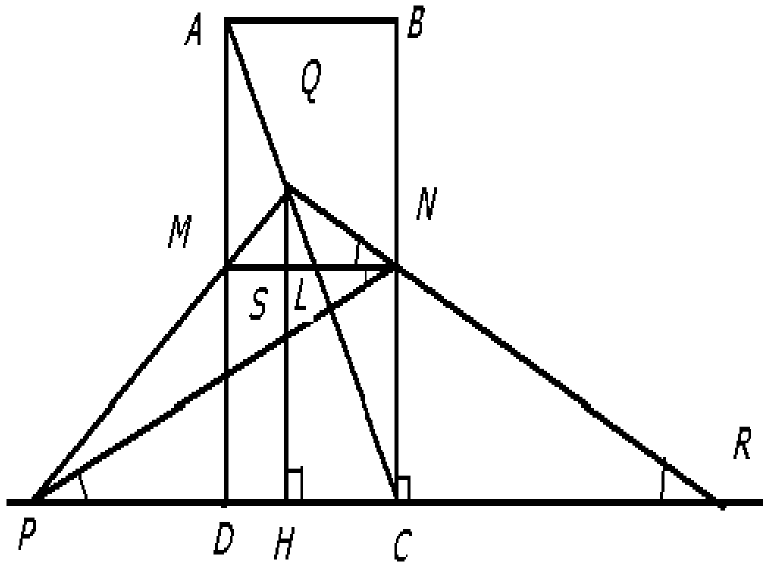


Рис. 32:

$OH \perp DC$ $, S_{\triangle QMN} = \frac{SQ \cdot MN}{2} \Longrightarrow$

$\frac{S_{\triangle QMN}}{S_{ABNM}} = \frac{SQ}{2SH} = \frac{1}{10} \Longrightarrow$

$\frac{QS}{SH} = \frac{1}{5},$

$\frac{QS}{SH} = \frac{MQ}{MP}$,

($\angle PQH$ пересечен $ML || PC$)

$\triangle AML = \triangle CLN \Longrightarrow ML = NL,$

$\triangle MQL$ подобен $\triangle PQC \Longrightarrow \frac{ML}{PC} = \frac{QL}{QC},$

$\triangle QLN$ подобен $\triangle QCR \Longrightarrow \frac{NL}{RC} = \frac{QL}{QC},$

$\frac{ML}{PC} = \frac{LN}{CR} \Longrightarrow PC = CR,$

$\triangle PNR$ равнобедренный $\Longrightarrow PN = NR,$

$\frac{MQ}{MP} = \frac{QN}{NR} \Longrightarrow \frac{MQ}{MP} = \frac{QN}{NP},$

$\Longrightarrow \frac{QN}{NP} = \frac{1}{5}.$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

2.

(17.04.2005)

1. Решить неравенство $3x + \sqrt{2x-1} > 1$

2. Решить уравнение $(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 = 1$

3. Четырехугольник ABCD вписан в окружность с центром в точке О. Диагонали четырехугольника перпендикулярны. $\angle AOB = 3\angle COD$. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью, если $CD = 10$.

4. Вычислить сумму $2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ двоек}}$

Решения.

1. О.Д.З. $\quad x \geq 0,5,$

   $\sqrt{2x-1} > 1 - 3x.$

$$\begin{cases} 1 - 3x & \geq 0, \\ 2x - 1 & > 1 - 6x + 9x^2; \end{cases}$$

   или 2)

$$\begin{cases} 1 - 3x & < 0, \\ x & \geq 0,5; \end{cases}$$

   1)

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{3} & , \\ \frac{4-\sqrt{7}}{9} < x & < \frac{4+\sqrt{7}}{9}; \end{cases}$$

   $\Longrightarrow$ решений нет,

   $x \geq 0,5.$

   Ответ: $x \geq 0,5.$

2. $2-2\cos 2x+2\sin 2x=0$

$\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}-2x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

3. Решение. (см.рис. 33)

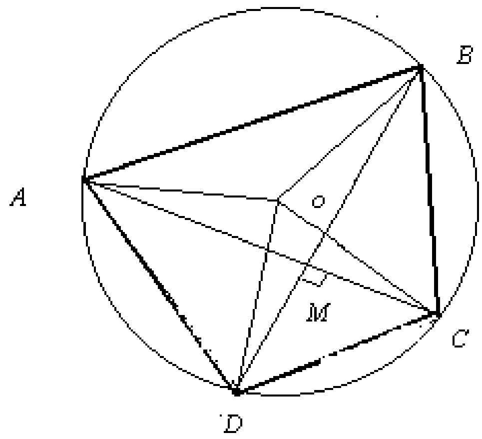


Рис. 33:

$\angle CMD=\frac{\smile DC}{2}+\frac{\smile AB}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{3\alpha}{2}=2\alpha$ (по теореме)

$90=2\alpha\Longrightarrow\alpha=45^o$

$\triangle ODC: DC^2=OD^2+OC^2-2OD\cdot OC\cos 45^o$

$100=r^2(2-\sqrt{2})$

$S=50(\sqrt{2}+2)\pi$

Ответ: $S=50(\sqrt{2}+2)\pi.$

4. $2+22+222+\ldots+\underbrace{22\ldots2}_{k\text{ двоек}}=$

$=2+2\cdot10+2\cdot100+\ldots+2\cdot10^{k-1}=\frac{2\cdot10^k-2}{9}$ $S=\frac{1}{9}[2\cdot10^1-2+2\cdot10^2-2+\ldots+2\cdot10^n-2]$
$=\frac{1}{9}[\frac{2\cdot10^{n+1}-2\cdot10^1}{9}-2n]=\frac{2}{81}[10^{n+1}-9n-10]$

Ответ: $\frac{2}{81}[10^{n+1}-9n-10]$

Вариант работы для самостоятельного решения.

1. Решить уравнение $|x^2 - 7x + 12| = 2|x - 3|$.

2. Решить уравнение $\log_{1/3}(\log_2 x + 2) = -2$.

3. При каких значениях параметра а множество решений уравнения

   $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$

   совпадает с множеством решений уравнения $a + 2\cos^2 2x = -(2a + 1)\cos 2x$

4. В куб вписан шар, а в шар вписан другой куб. Найти отношение длин ребер этих кубов.

   Ответы: 1) 2 ; 3 ; 6 .

   2) 2^7.

   3) $a = 0$.

   4) $\sqrt{3}$.

Содержание.

Литература.

1. Н.И. Авдонин , В.К. Голубев "30 уроков репетитора по математике"Н.Новгород, 2001 г.

2. "Математика — 2002. Летнее тестирование перед вступительными экзаменами", Тихов М.С. , Алексеев А.А. , Калинин А.В. , Н.Новгород, 2002 г.

3. "Математика : 2002. Предварительное тестирование ", Тихов М.С. , Алексеев А.А. , Калинин А.В. , Н.Новгород, 2002 г.

4. "Математика : 2003. Предварительное тестирование ", Тихов М.С. , Алексеев А.А. , Н.Новгород, 2003 г.

5. "Математика :2003. Летнее тестирование ", Тихов М.С. , Алексеев А.А. , Н.Новгород, 2003 г.

6. "Математика. Предварительное тестирование ", Авдонин Н.И. , Алексеев А.А. , Калинин А.В. ,Новоженов М.М., Н.Новгород, 2004 г.

7. "Математика: от школы к вузу. По материалам вступительных экзаменов в ННГУ", Жукова Н.И. , Колданов А.П., Шашков В.М., Н.Новгород, 1996.

8. "Типовые задачи вступительных экзаменов в ВУЗы по математике"под редакцией А.И.Болотина М. "Машиностроение",1992 г.

Отзыв

на методическое пособие

"Пособие по математике для абитуриентов"

Составитель: М.В. Котельникова

Предлагаемое методическое пособие содержит оновной теоретический материал по элементарной математике и задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в ННГУ. Всё пособие разделено на 20 занятий. Каждое занятие включает в себя определённую теоретическую часть и задачи по данной теме. Часть задач содержат решения, к некоторым приведены только ответы.

Пособие может быть использовано учениками старших классов и абитуриентами ВУЗов.

Пособие выполнено на достаточно хорошем уровне и может быть рекомендован для опубликования офсетным способом.

Доцент кафедры
математической физики А.В.Калинин