Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Нижегородский Государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Агеев В.В.

Тихов М.С.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Н.Новгород

2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение. Актуальность вероятностных представлений.

В разговорном языке существует масса выражений, близких по значению слову «вероятность»: это и правдоподобность, и степень уверенности, и доля шансов и т.п. Аналогично, прилагательные «вероятный», «невероятный» могут относиться к тому, что не является полностью определенным и могут служить для описания более или менее возможных событий.

Следует различать два типа понимания вероятности:

1 тип: вероятность есть понятие, определяемое **системой аксиом**, т.е. теоретически обоснованных правил, позволяющих подсчитывать вероятности одних событий, когда известны вероятности других событий;

2 тип: вероятность есть **качественное понятие**, выражающее степень уверенности в наступлении (или возможности появления) некоторого события, т.е. вероятность не является формальной количественной характеристикой, задаваемой в исчислении.

Мы будем рассматривать вероятность только в смысле типа 1.

Прежде всего, возникает вопрос: существует ли необходимость в использовании вероятностных идей и что ее обуславливает? Не является ли эта необходимость временной, связанной с определенным уровнем развития науки?

Вероятностные представления довольно успешно применялись еще в 18 веке такими выдающимися учеными как Лаплас, Лагранж, Лежандр, Гаусс для оценки ошибок измерений, в результате чего уже в то время были заложены основы теории ошибок. Настоящая теория использования вероятностных идей в конкретных науках началась с 19 века. Первый урожай применения этого нового метода познания был получен в области изучения социальных явлений. Именно здесь было обращено внимание на то, что статистические закономерности, которым следуют социальные явления, получают свое объяснение на основе вероятностных представлений. Более того, этот новый способ анализа сложных социальных явлений в значительной мере способствовал обнаружению новых закономерностей в этой области. Конечно, такого рода регулярности, как устойчивый процент новорожденных одного пола, или доля писем, отправленных без адреса, могли быть открыты как чисто эмпирические правильности без привлечения понятия вероятности. Однако понимание таких важных обстоятельств, что эти закономерности могут проявляться лишь в больших совокупностях, что они не в равной степени обязаны результирующим эффектом всем элементам совокупности, не могло быть в полной мере достигнуто и обосновано помимо вероятностных представлений.

В 19 веке, по-видимому, была уже подготовлена почва для широкого проникновения вероятностно-статистических представлений в самые различные отрасли науки. Конечно, в каждой науке это происходило по-своему, и процесс этот был, прежде всего, обусловлен логикой развития каждой научной области. Внутренние проблемы ряда выросших к этому времени конкретных наук, а также потребности все более и более энергично развивавшегося производства ставят ученых перед необходимостью тщательного изучения массовых случайных явлений.

Последние десятилетия характеризуются резким повышением интереса к тем разделам математики и ее приложений, которые анализируют явления, носящие «случайный» характер. Эта тенденция в значительной степени объясняется тем, что большинство возникших в последние десятилетия новых математических дисциплин, которое ныне обозначается собирательным термином «кибернетика», оказалось тесно связанным с теорией вероятностей. Тем самым теория вероятностей стала чуть ли не самой первой по прикладному значению из всех математических дисциплин. При этом возникновение новых, в большинстве своем «порожденных» теорией вероятностей наук, скажем «теория игр», «теория информации», «страховая математика» или «стохастическая финансовая математика» привело к положению, при котором теорию вероятностей также приходится рассматривать как объединение большого числа разнородных и достаточно глубоко развитых математических дисциплин. Если же прибавить ко всему вышесказанному бесспорное методологическое значение теории вероятностей, важность понимания связи между «случайным» и «неизбежным», между «динамическими» и «статистическими» закономерностями, то станет ясным, что в наше время основы теории вероятностей должны входить в научный багаж каждого образованного человека.

Остановим свое внимание на понятии случайного явления. Не следует думать, что случайными мы называем явления, для которых мы не можем учесть все факторы, порождающие разброс какой-то величины. Незнание не тождественно понятию случайного («Люди измыслили идол случая, чтобы пользоваться им как предлогом, покрывающим их собственную нерассудительность» – Демокрит). Диалектический подход не связан с таким односторонним рассмотрением явления, носящего случайный характер.

В природе и обществе многие процессы носят статистический характер, поскольку налицо большая совокупность однородных объектов, которые взаимодействуют между собой. Если сравнивать между собой поведение не отдельного индивидуума, не одного изделия и т.д., а поведение их совокупностей, обнаруживаются необходимые и общие черты, которые имеют место во всех совокупностях (ансамблях, коллективах и т.д.) данного рода. Необходимое и общее в поведении статистических совокупностей данного типа (и на различных стадиях развития каждой из них) называют статистическими закономерностями.

Само собой разумеется, характер статистических законов зависит от специфики процесса, т.е. от природы предметов, составляющих статистическую совокупность, и их взаимодействий между собой. Закономерности, характеризующие движение отдельных частиц, принято называть динамическими. Итак, динамические закономерности управляют единичным явлением, статистические действительны для целого ансамбля явлений.

Случайные события.

Первоначальное понятие при изучении окружающего нас мира – событие. **Событие** определяется тем, что произошло или нет некоторое явление.

Наблюдение – это целенаправленное восприятие, обусловленное задачей деятельности. Основное условие научного наблюдения – объективность, т.е. возможность контроля путем либо повторного наблюдения, либо применения иных методов исследования (например, эксперимента). Наблюдение сопровождается некоторым числом характеристических признаков, которые обуславливают и дают возможность объективного получения информации в ходе наблюдения (или эксперимента) интересующего нас события. Конкретизацию этих признаков мы будем называть ***комплексом условий***. Далее будем считать, что комплекс условий может быть воспроизведен неограниченное число раз.

Эксперимент, Испытание, Опыт – это действия по воспроизведению изучаемого события при выполнении определённого комплекса условий.

Исход эксперимента (испытания, опыта) - результат наблюдения.

Очень многие математические модели, например уравнения движения тел, для практической реализации требуют полностью детерминированного представления всех исходных данных, т.е. задание числовых значений не сопряжено с какой бы то ни было неопределенностью.

Детерминированное событие можно описать так: при каждом осуществлении комплекса условий обязательно происходит событие A (т.е. условия эксперимента однозначно определяют исход A).

Примерами детерминированных событий могут служить события: смена дня и ночи, смена времен года и т.п.

Есть также явления, исход которых мы заранее предсказать не можем. Таким образом, событие будем называть ***случайным***, если его исход неоднозначно определяется условиями эксперимента - ***комплексом условий***.

Например, если на материальную точку действует известная сила и в некоторый момент времени заданы ее положение и скорость, то ее дальнейшее движение можно описать определённым уравнением. Однако эта модель не всегда удовлетворительно описывает реальные физические явления. Например, полет снаряда: он не падает в одну и ту же точку, определяемую уравнением движения при заданных начальных данных. Далее, нельзя заранее предсказать длительность жизни человека или технической системы, нельзя заранее предсказать, сколько человек придет на лекцию, какой стороной выпадет монета и т.д. Таким образом, есть события, исходы которых неоднозначно определяются условиями опыта.

Прежде всего, оговоримся, что будут изучаться только такие случайные события, которые в бесконечно длинной серии испытаний могут наступить сколько угодно раз, т.е. обладают свойством повторяемости. Их называют **массовыми** случайными событиями. Массовые явления есть результат большого, иногда необозримо большого числа испытаний. Именно с такими событиями и приходится иметь дело на практике. Например, появление брака в массовом производстве. Всюду в дальнейшем говоря о событии, мы будем подразумевать **массовое случайное событие**.

Частота события.

Определим понятие **частоты события A в n испытаниях**, где n – число повторений реализации комплекса условий. Пусть $m = m(A)$ – число тех испытаний из n, в которых произошло событие A. Тогда **частотой** события A в n испытаниях называют отношение $h_n(A) = m/n$.

Замечено, что с ростом числа наблюдений n колебания частоты становятся все меньше и меньше около некоторого постоянного числа. Например, в эксперименте с подбрасыванием монеты 20 раз были получены следующие исходы(1-«герб», 0-«решка»):

1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1.

Результаты этих наблюдений дают следующие последовательные значения частоты события ***А-выпадение герба***(1):

1) $h_1(A) = m/n = 1/1 = 1.0$

2) $h_2(A) = 1/2 = 0.5$

3) $h_3(A) = 2/3 = 0.67$

4) $h_4(A) = 3/4 = 0.75$

5) $h_5(A) = 3/5 = 0.6$

6) $h_6(A) = 4/6 = 0.67$

7) $h_7(A) = 4/7 = 0.57$

8) $h_8(A) = 4/8 = 0.5$

9) 5/9=0.56 10) 5/10=0.5 11) 5/11=0.45 12) 5/12=0.42

13) 6/13=0.46 14) 7/14=0.5 15) 8/15=0.53 16) 8/16=0.5

17) 9/17=0.53 18) 9/18=0.5 19) 10/19=0.53 20) 11/20=0.55.

На рис.1 приводится график изменения частоты при возрастании числа подбрасывания монеты.

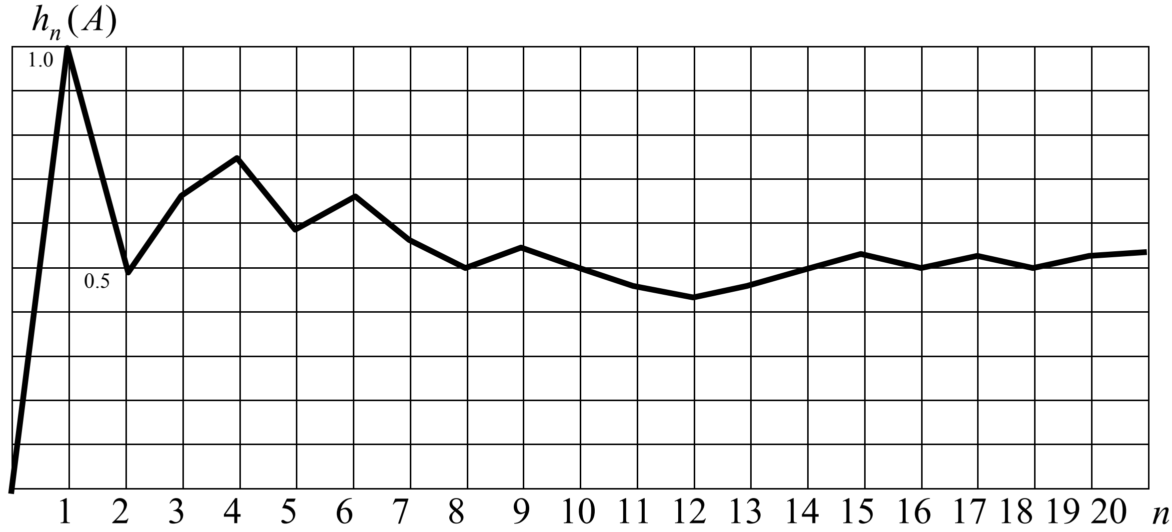

Рис. 1. Зависимость частоты $h_n(A)$ от числа испытаний n.

Итак, мы видим, что в последовательности экспериментов невозможно предсказать индивидуальные результаты исходов. Однако как только мы перенесем свое внимание с индивидуальных экспериментов на последовательность экспериментов, то обнаруживается чрезвычайно важное явление: достаточно длинные последовательности обнаруживают поразительную устойчивость – при возрастающих значениях n приближаться к некоторому постоянному значению (в приведённом примере это - 0.5). Эту тенденцию будем называть **устойчивостью частоты**. В тех случаях, когда это утверждение не оправдывается, то довольно часто обнаруживается, что неизменность условий эксперимента была, так или иначе нарушена. Мы вправе предположить, что частота приближалась бы к определенному значению, если бы соответствующий ряд экспериментов можно было бы неограниченно продолжить.

Итак, событие будем называть ***случайным***, если его исход неоднозначно определяется условиями эксперимента и если оно обладает свойством устойчивости частот (т.е. как и биологов нас интересует поведение видов, а не отдельных индивидуумов). Возникает ЗАДАЧА – построить математическую теорию явлений (случайных событий), для которых обнаруживается статистическая устойчивость. Таким образом, с практической точки зрения, всякий раз, как только мы говорим, что вероятность события A равна p, то смысл этого заключается в следующем: практически несомненно, что в длинном ряду эксперимента частота примерно равна числу p. Это утверждение **называют частотной интерпретацией вероятности.**

Пространство событий.

Первый шаг при построении **вероятностной модели** реального явления или процесса – выделение всех отдельно возможных исходов эксперимента (результатов наблюдений). Их называют **элементарными событиями**. Так при бросании монеты естественно принять, что осуществляется одно из двух элементарных событий – «выпала решка» и «выпал герб». Случаи «монета встала на ребро» или «монету не удалось найти» считаем невозможными.

При бросании трех монет элементарных событий значительно больше. Вот одно из них – «первая монета выпала гербом, вторая – решкой, третья – снова гербом». Перечислим все элементарные события в этом опыте. Для этого обозначим выпадение герба буквой Г, а решки – буквой Р. Имеется 2^3=8 элементарных событий:

ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР

– в каждой тройке символов первый показывает результат бросания первой монеты, второй – второй монеты, третий – третьей монеты.

Совокупность всех возможных исходов эксперимента, т.е. всех элементарных событий, называется **пространством элементарных событий**.

С математической точки зрения пространство (совокупность) всех элементарных событий, возможных как исход эксперимента – это некоторое **множество**, а элементарные события – его элементы. Однако в теории вероятностей для обозначения используемых понятий по традиции используются свои термины, отличающиеся от терминов теории множеств.

Мы будем рассматривать **<u>достоверное событие</u>** Ω (пространство элементарных событий), если оно с необходимостью должно произойти (при каждой реализации комплекса условий K) и **<u>невозможное событие</u>** $\varnothing$**,** если оно заведомо не может произойти (ни при одной реализации комплекса K). Достоверное и невозможное событие определяются только по отношению к заданному комплексу условий.

Мы будем говорить, что с**обытие** A **<u>влечет</u> за собой событие** B, или из A <u>следует</u> B (обозначение $A \subset B$), если при наступлении A неизбежно наступает B. Если $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$, то события A и B называются **<u>эквивалентными</u>** (обозначение $A = B$).

$A \bigcup B$

Рассмотрим n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Событие B, состоящее в том, что наступает хотя бы одно из них, называется **<u>объединением</u>** этих событий и обозначается

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ или } B = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n .$$

Событие, состоящее в одновременном наступлении событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется их **<u>пересечением</u>** (или **<u>произведением</u>**) и обозначначается

$$A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n \text{ или } A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n .$$

Два события A и B называются **<u>несовместными</u>,** если их совместное появление в одном испытании невозможно, т.е. $A \cdot B = \varnothing$. Если события A и B несовместны, то наступление события A влечет не наступление события B, и наоборот. Следовательно, $A \cdot B = \varnothing$ означает то же самое, что $A \subset \overline{B}$ и $B \subset \overline{A}$.

В тех случаях, когда события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, их объединение называют **<u>суммой</u>** событий и обозначают $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию A, если $A \bigcup \overline{A} = \Omega$ и $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

Событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит, называют **<u>разностью</u>** событий A и B, и обозначают так: $A-B$. Например, событие $A-AB$ означает, что произошло событие A, но не произошли одновременно оба события, поэтому $A-AB=A\cdot\overline{B}=A-B$.

События $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют **<u>полную группу событий</u>**, если хотя бы одно из них непременно должно произойти (при каждом осуществлении комплекса условий), т.е. если

$$B_1 \bigcup B_2 \bigcup \ldots \bigcup B_n = \Omega .$$

Особенно существенное значение имеют **<u>полные группы попарно несовместных событий</u>**, т.е. случай, когда в предыдущем случае $B_i \cdot B_j = \varnothing, i \neq j$.

Соответствие терминов теории вероятностей и теории множеств приведено в следующей таблице.

Теория вероятностей	Теория множеств
Пространство элементарных событий	Множество
Элементарное событие	Элемент этого множества
Событие	Подмножество
Достоверное событие	всё множество
Невозможное событие	Пустое подмножество $\varnothing$
Сумма событий A и B	Объединение $A \bigcup B$
Произведение AB событий A и B	Пересечение $A \bigcap B$
Событие, противоположное A	Дополнение A
События A и B несовместны	$A \bigcap B$ пусто
События A и B совместны	$A \bigcap B$ не пусто

Вероятностное пространство.

Принятый в настоящее время **аксиоматический подход** к теории вероятностей, разработанный академиком АН СССР А.Н. Колмогоровым (1903-1987), дал возможность развивать эту дисциплину на базе теории множеств и теории меры, позволил рассматривать теорию вероятностей и математическую статистику как часть математики, проводить рассуждения на математическом уровне строгости. За основу методов статистического анализа данных стало возможным брать вероятностно-статистические модели, сформулированные в математических терминах. В результате удалось четко отделить строгие утверждения от обсуждения философских вопросов случайности.

После выхода (в 1933 г. на немецком языке и в 1936 г. – на русском) основополагающей монографии [4] аксиоматический подход к теории вероятностей стал общепринятым в научных исследованиях в этой области.

Перейдем к основному понятию теории вероятностей – понятию вероятности события. В методологических терминах можно сказать, что вероятность события является мерой возможности осуществления события. Иногда можно предсказать это число из соображений **равновозможности** исходов. Так, у симметричной монеты и герб, и решка имеют одинаковые шансы после подбрасывания оказаться сверху, а именно, 1 шанс из 2, а потому вероятности выпадения герба и решетки равны 1/2.

Однако этих соображений недостаточно для развития теории. Методологическое определение не дает численных значений. Не все вероятности можно оценивать как пределы частот, и неясно, сколько опытов надо брать. На основе идеи равновозможности исходов можно решить ряд задач, но в большинстве практических ситуаций применить ее нельзя (например, для оценки вероятности дефектности единицы продукции).

Поэтому перейдем к определениям, следуя аксиоматическому подходу, предложенному А.Н.Колмогоровым (1933).

Вначале мы ограничимся пространством элементарных событий, состоящим из конечного числа элементов.

Для того чтобы получать содержательные и математически обоснованные результаты, совокупность всех рассматриваемых событий должна быть достаточно богатой и удовлетворять некоторым свойствам.

Пусть Ω – множество элементарных событий ω, $\mathcal{A}$ – множество подмножеств из Ω.

Будем предполагать, что $\mathcal{A}$ образует так называемую **<u>алгебру множеств</u>**, определяемую наличием следующих свойств:

а) $\Omega \in \mathcal{A}$;

б) если $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$;

в) если $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, то $A \bigcup B \in \mathcal{A}$.

Теперь предположим, что

1) Каждому множеству $A \in \mathcal{A}$ поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\mathbf{P}(A)$. Это число называется **вероятностью события** A, если к тому же выполнено следующее:
2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
3) Если $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \bigcap B = \varnothing$, то $\mathbf{P}(A \bigcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Совокупность объектов $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, удовлетворяющую **аксиомам** 1) – 3), будем называть **<u>вероятностным пространством</u>**.

Таким образом, сконструирован математический объект, используемый при построении вероятностных моделей.

Пример 1. Бросанию монеты соответствует вероятностное пространство с Ω = {Г, Р} – пространство элементарных событий: Г – выпал герб, Р – выпала решка. При этом P(Г) = P(Р) =0.5 (исходя из равновозможности и несовместности элементарных событий Г и Р и т.к. P(Г) + P(Р) =1 согласно аксиомам 2,3).

Пример 2. Рассмотрим опыт, состоящий в бросании игрального кубика, на гранях которого написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Считаем, что все грани кубика имеют одинаковые шансы оказаться наверху после бросания, т.е. все возможные элементарные исходы равновозможны. Построим соответствующее вероятностное пространство.

Пространство элементарных исходов Ω состоит из 6 элементов: «наверху – грань с 1», «наверху – грань с 2»,…, «наверху – грань с 6». Поскольку все грани имеют одинаковые шансы оказаться наверху после бросания кубика, то все элементарные события должны иметь одинаковую вероятность. Поскольку всего имеется 6 элементарных событий и сумма их вероятностей равна 1 , то каждое из них имеет вероятность 1/6.

Отметим, что определение Р(А) согласуется с интуитивным представлением о связи вероятностей события и входящих в него элементарных событий, а также с распространенным мнением, согласно которому «вероятность события *A* – число от 0 до1, которое представляет собой предел частоты реализации события *A* при неограниченном числе повторений одного и того же комплекса условий».

Приведём некоторые **свойства вероятности**, которые вытекают из аксиоматического определения вероятности события.

1. **Вероятность противоположного события** $\overline{A}$ определяется через вероятность события A по следующей формуле:

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

Доказательство. Из определения противоположного события имеем: $A \bigcup \overline{A} = \Omega$ и $A \cdot \overline{A} = \varnothing$. Поэтому $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \bigcup \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A})$, откуда $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

Следствие. Имеем: $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, так как $\varnothing = \overline{\Omega}$.

Замечание. Невозможному событию $\varnothing$ соответствует вероятность $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, в то время как из $\mathbf{P}(A) = 0$ не следует невозможность события A.

2. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – несовместны, то

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i). \qquad \text{(конечная аддитивность)}$$

3. Если $A \subset B$, то $\mathbf{P}(B - A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, отсюда, $\mathbf{P}(A) \le \mathbf{P}(B)$.

Следствие. Имеем: $\mathbf{P}(A) \le 1$, которое получается, если взять $B = \Omega$.

4. Если $A, B -$ произвольные события, то

$\mathbf{P}(A \bigcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \bigcap B)$. (формула включения-исключения)

Способы определения вероятностей.

<u>**Классический способ.**</u> Пусть пространство Ω содержит n элементарных исходов $e_1, e_2, \dots, e_N$, эти исходы <u>равновозможны</u>, причем событию A благоприятствуют k из них, т.е. $A = e_{i_1} \bigcup e_i \bigcup \dots \bigcup e_{i_k}$. Тогда вероятность события A определим следующим образом:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{N}.$$

В построенном вероятностном пространстве *Примера 2* рассмотрим случайное событие A-«наверху – грань с четным номером». Это событие происходит тогда, когда исходом после подбрасывания кубика является одно из трех элементарных событий – наверху оказывается 2, 4 или 6, т.е. событию A благоприятствуют 3 элементарных исхода. Пользуясь классическим способом, где $k = 3$ и $N = 6$, находим вероятность события A-«наверху – грань с четным номером» равной значению 3/6=1/2.

Пример 3. Имеется три ящика и три шара. Каждый шар (будем обозначать их буквами a, b, c) имеет одинаковую вероятность попасть в каждый из трех ящиков . Пусть событие $A -$ число шаров в первом ящике равно 1, а $B -$ число занятых ящиков равно 2. Требуется определить вероятность события $A \cdot B$. Для нахождения этой вероятности рассмотрим все возможные исходы и подсчитаем число благоприятствующих исходов (в силу условий задачи все исходы будут равновозможны).

1. $abc\,\|-\|-$	10. $a\,\|\,bc\,\|-$	19. $-\|\,a\,\|\,bc$
2. $-\|\,abc\,\|-$	11. $b\,\|\,ac\,\|-$	20. $-\|\,b\,\|\,ac$
3. $-\|-\|\,abc$	12. $c\,\|\,ab\,\|-$	21. $-\|\,c\,\|\,ab$
4. $ab\,\|\,c\,\|-$	13. $a\,\|-\|\,bc$	22. $a\,\|\,b\,\|\,c$
5. $ac\,\|\,b\,\|-$	14. $b\,\|-\|\,ac$	23. $a\,\|\,c\,\|\,b$
6. $bc\,\|\,a\,\|-$	15. $c\,\|-\|\,ab$	24. $b\,\|\,a\,\|\,c$
7. $ab\,\|-\|\,c$	16. $-\|\,ab\,\|\,c$	25. $b\,\|\,c\,\|\,a$
8. $ac\,\|-\|\,b$	17. $-\|\,ac\,\|\,b$	26. $c\,\|\,a\,\|\,b$
9. $bc\,\|-\|\,a$	18. $-\|\,bc\,\|\,a$	27. $c\,\|\,b\,\|\,a$

Благоприятствующими событию $A \cdot B$ исходами являются 10, 11, 12, 13, 14, 15. Таким образом,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

Подсчеты по классическому способу основаны на простом принципе, который был сформулирован Лапласом так: «Теория случайностей состоит в том, чтобы свести все однородные события к известному числу равновозможных случаев, т.е. таких, существование которых было бы одинаково неопределенно, и определить число случаев, благоприятствующих явлению, вероятность которого ищется. Отношение этого числа к числу всех возможных случаев и есть мера этой вероятности, которая таким образом, не что иное, как дробь, числитель которой есть число всех благоприятных случаев, а знаменатель – число всех возможных и равновозможных случаев».

Следует отметить умозрительный характер классического способа, так как в действительности никаких экспериментов здесь не проводится. Однако если равновозможность имеет место, то, как показала практика, вероятность угадывается правильно.

Ограниченность применения классического способа связана с условиями:

1) **равновозможность** элементарных исходов, которое трудно, а иногда и невозможно точно установить;
2) **конечность** числа элементарных исходов.

Так, например, если мы вместо игрального кубика рассмотрим спичечный коробок и захотим найти вероятность того, что при подбрасывании он упадет картинкой вверх, то здесь вероятность этого событий нельзя найти по классическому способу, так как нет равновозможности (грани разные).

Второе ограничение исправляет в определенной степени геометрический способ определения вероятности, где число элементарных исходов может быть бесконечным, но тоже с определёнными ограничениями.

Геометрический способ. Геометрический способ определения вероятности состоит в следующем. Пусть каждому элементарному исходу ω поставлена в соответствие точка в некоторой области $G \subset \boldsymbol{R}^n$. Это может быть отрезок на прямой ($G \subset \boldsymbol{R}^1$), область на плоскости ($G \subset \boldsymbol{R}^2$)или в пространстве ($G \subset \boldsymbol{R}^3$). И пусть мера этой области определена и равна $m(G)$. Это может быть соответственно длина, площадь или объём. Пусть, кроме того, событию A соответствуют точки (благоприятствующие исходы) из области $g \subset G$, мера которой также определена и равна $m(g)$.

Тогда, по определению, вероятность события A (вероятность попасть в точку области g при случайном бросании в область G) равна

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m(g)}{m(G)}.$$

При этом выражению «точка случайно (или наудачу) бросается в область G» придается следующий смысл: брошенная точка может попасть в какую-либо часть области G и вероятность попасть в какую-либо часть области G пропорциональна мере этой части и не зависит от ее расположения (т.е. равновероятными или равновозможными считаются все те события, которым соответствуют фигуры одинаковой площади).

Пример 4. Расстояние от пункта A до пункта B равно 120 км. В случайные моменты на интервале времени от 12 ч до 13 ч из пункта A в пункт B стартуют две машины – «Ауди» и «Фольксваген» со скоростями соответственно 100 км/ч и 80 км/ч. Какова вероятность того, что «Ауди» первой достигнет пункта B?

Решение. Найдем сначала время движения от пункта A до пункта B. Для «Ауди» оно равно (в часах) $\Delta_1 = \frac{120}{100} = \frac{6}{5}$, для «Фольксвагена» $\Delta_2 = \frac{120}{80} = \frac{3}{2}$. Если «Ауди» стартует в момент времени t_1, а «Фольксваген» в момент t_2, то первый прибывает в пункт B в момент $t_1 + \Delta_1$, а второй – в момент $t_2 + \Delta_2$. «Ауди» первой достигнет пункта B, если будет выполнено неравенство $t_1 + \Delta_1 < t_2 + \Delta_2$. Поскольку $\Delta_1 = \frac{6}{5} < \frac{3}{2} = \Delta_2$, то в случае, когда $t_1 < t_2$, будет выполнено неравенство $t_1 + \Delta_1 < t_2 + \Delta_2$, поэтому рассмотрим случай $t_1 > t_2$. В таком случае неравенство $t_1 + \Delta_1 < t_2 + \Delta_2$ равносильно неравенству $t_1 + \frac{6}{5} < t_2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow t_1 - \frac{3}{10} < t_2$. В минутах получаем неравенство $t_1 - 18 < t_2$ (см. рис.1). Множество всех возможных исходов есть квадрат: $0 \le t_1 \le 60, 0 \le t_2 \le 60$. Множество благоприятствующих исходов (см. рис.1) – соответствует заштрихованной части. Поскольку площадь незаштрихованной части равна $S_1 = \frac{(60-18)^2}{2} = 42 \cdot 21 = 882$, а площадь квадрата равна $S = 3600$, то площадь заштрихованной части равна $S_2 = 2718$,то вероятность исходного события равна $p = \frac{S_2}{S} = \frac{2718}{3600} = \frac{151}{200} = 0.755$.

Пример 5. Расстояние до самого дальнего клиента быстрой доставки – 297 км, поэтому водитель фирмы каждое утро пополняет бак автомобиля на столько, сколько нужно для того чтобы проехать $297 \times 2 + 27$ километров. Однако не всегда самый дальний клиент делает заказ. Сегодня невнимательный водитель забыл пополнить бак и выехал к клиенту с тем же количеством бензина, которое осталось после предыдущего дня. Какова вероятность того, что ему не хватит бензина?

Решение. Пусть $x -$ количество бензина, которое осталось от предыдущего дня, а $y -$ удвоенное расстояние (см. рис.2), которое проедет водитель. Тогда $0 \le x \le 2 \cdot 297 + 27 = 621$, а $0 \le y \le 2 \cdot 297 = 594$. Предположим, что x и y случайны. Если окажется, что $x < y$, то водителю не хватит бензина. Имеем: $m(G) = 594 \cdot 621 = 368874$, а $m(g) = \frac{594^2}{2} = 594 \cdot 297 = 176418$. Тогда искомая вероятность равна $p = \frac{176418}{368874} = \frac{297}{621} = \frac{11}{23} = 0.47826$.

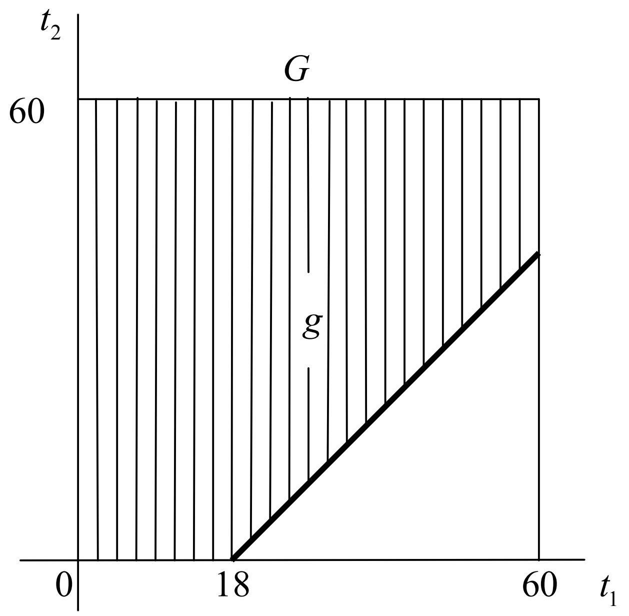

Рис. 1. Пример 4.

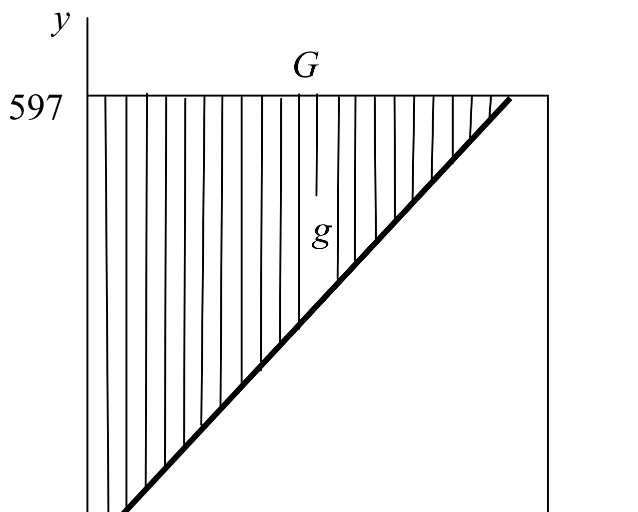

Рис. 2. Пример 5

Заметим, что ввиду указанных ограничений применения рассмотренных способов (классического и геометрического) определения вероятностей, решить с их помощью удаётся только небольшой круг задач. Но и в любом другом случае задача теории вероятностей заключается в том, чтобы зная вероятности некоторых простейших событий, полученные из опыта или теоретических допущений относительно природы изучаемого процесса, получить путем анализа или вычислений вероятности интересующих нас сложных событий.

Условная вероятность.

В основе определения вероятности события лежит некоторая совокупность условий K. Если никаких ограничений, кроме условий K, при вычислении вероятности $\mathbf{P}(A)$ не налагается, то такие вероятности называются безусловными. Однако в ряде случаев приходится находить вероятности событий при дополнительном условии, что произошло некоторое событие B, имеющее положительную вероятность. Такие вероятности мы будем называть *условными* и обозначать символом $\mathbf{P}(A|B)$ или $\mathbf{P}_B(A)$ (под условной вероятностью $\mathbf{P}(A|B)$ мы можем понимать среднюю идеализированную условную частоту, к которой тяготеют реальные частоты $h_N(A\,|\,B) = h_N(AB)/h_N(B)$).

При $P(B) > 0$ определим условную вероятность по формуле

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)}. \tag{1}$$

Можно показать, что при фиксированном событии A условная вероятность $P(B\,|\,A)$ как функция B удовлетворяет аксиомам Колмогорова. Таким образом, ее можно было назвать вероятностью, если ввести комплекс условий $K_1 = K \bigcap A$. Однако оперировать с условными вероятностями, заданными при разных условиях A_1 и A_2 как с обычными вероятностями уже нельзя. Для этого приведем пример Мизеса: Предположим, что некоторый теннисист может играть на турнире в Нью-Йорке, либо на турнире в Москве. Турниры проводятся в одно и то же время. Если он играет на турнире в Москве, то он выигрывает турнир с вероятностью 0,7. Если он играет на турнире в НЬю-Йорке, то он выигрывает его с вероятностью 0,6. Поскольку он не может играть одновременно в Москве и Нью-Йорке, то вероятность того, что он выиграет турнир или в Москве, или в Нью-Йорке равна сумме вероятностей, т.е. равна $0,7+0,6=1,3$, чего быть не может. В чем ошибка рассуждений?

Ошибка рассуждений состоит в том, что мы имеем две условные вероятности $P(B\,|\,M)=0,7$ и $P(B\,|\,NY)=0,6$, а поэтому складывать их нельзя, так как мы имеем разные комплексы условий.

Теперь заметим, что выражение (1) можно записать в виде:

$$P(A\cap B)=P(B\,|\,A)\cdot P(A).$$

Кроме того, поменяв местами события A и B, получаем:

$$P(A\cap B)=P(A\,|\,B)\cdot P(B).$$

При рассмотрении условных вероятностей используется понятие независимости случайных событий. Будем говорить, что событие B **независимо** от события A, если

$$P(B|A)=P(B).$$

Из предыдущих соотношений нетрудно видеть, что в этом случае и событие A будет независимо от события B. Однако заметим, что это определение верно тогда, когда $P(A)>0$. Умножив обе части последнего равенства на $P(A)$, мы получим, что $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

Иногда соотношение

$$P(A\cap B)=P(A\,|\,B)P(B)=P(B\,|\,A)P(A),$$

справедливое при $P(A)\cdot P(B)>0$, называют теоремой умножения вероятностей. Отсюда для независимых событий A и B получаем ещё одно полезное соотношение:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Это соотношение мы положим в основу определения ***независимости*** двух событий A и B. Его можно использовать и тогда, когда вероятность $P(A)$ или $P(B)$ будет равна 0.

Определение 1. Два события A и B называются *независимыми* (относительно вероятности $\mathbf{P}$), если

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Определение 2. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любых $k = 2, \ldots, n$ и $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbf{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Если это соотношение выполнено для $k = 2$, то заданные события называются *попарно независимыми*.

Понятие независимости событий A и B для случая $\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) > 0$ может быть выражена в терминах условных вероятностей: два события A и B *независимы*, если (доказать самим !)

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \mid B) \text{ или } \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \mid A).$$

Теперь посмотрим, следует ли из попарной независимости независимость в совокупности? Следует ли из независимости тройкой попарная независимость и т.д.

Пример 6. Подбрасываются два одинаковых симметричных кубика.

Рассмотрим события

$A =$ на первом кубике выпадает 1, 2 или 3;

$B =$ на втором кубике выпадает 4, 5 или 6;

$C =$ сумма очков на обоих кубиках делится на 6.

Покажем, что события A, B, C попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности. Действительно,

$$C = \{(1{,}5), (2{,}4), (3{,}3), (4{,}2), (5{,}1), (6{,}6)\},$$

поэтому

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(B)=\frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

$$\mathbf{P}(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B), \ \mathbf{P}(AC)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(C),$$

$$\mathbf{P}(BC)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C).$$

Но

$$\mathbf{P}(ABC)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C),$$

т.е. тройкой эти события зависимы, откуда следует, что эти события не являются независимыми в совокупности.

А теперь приведем пример того, как можно при выборочном обследовании допустить ошибку в определении того, являются ли события независимыми или нет.

Рассмотрим два события A и B (например, пусть $A-$ выздоровление, а $B-$ лечение) и рассмотрим урну, в которой встречаются шары цветов AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, $\overline{A}\cdot\overline{B}$, а именно:

Таблица 6

	B	$\overline{B}$	Сумма
A	100	200	300
$\overline{A}$	50	100	150
Сумма	150	300	450

Определим коэффициент корреляций событий A и B формулой

$$V=\frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}=\frac{\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)}{\sqrt{\mathbf{P}(A)(1-\mathbf{P}(A))\mathbf{P}(B)(1-\mathbf{P}(B))}}.$$

Для этой таблицы значение $V=0$, т.е. признаки A и $B-$ независимы (лечение не повлияло на выздоровление).

Пусть $C-$ лицо мужского пола, γ $-$ женского. Разделим исходную таблицу на две:

Таблица 7

	BC	$\overline{B}C$	Сумма
AC	90	90	180
$\overline{A}C$	30	90	120
Сумма	120	180	300

Таблица 8

	$B\gamma$	$\overline{B}\gamma$	Сумма
$A\gamma$	10	110	120
$\overline{A}\gamma$	20	10	30
Сумма	30	120	150

Для таблицы 7 $\hat{V}_7 = 0.25$,, а для таблицы 8 $\hat{V}_8 = -\,0.583$ – лечение и выздоровление – зависимые признаки, т.е. для мужчин лечение положительно сказывается на выздоровление, а для женщин – отрицательно.

Таким образом, из первой таблицы мы сделали вывод о независимости, а из двух последних – о зависимости.

Пример. Первый страхователь застраховал свое домашнее имущество на сумму в 1000 условных единиц: 1) от пожара в компании X (событие A с вероятностью 0.03); 2) от порчи в результате аварии системы горячего водоснабжения в компании Y (событие B с вероятностью 0.02); 3) от кражи в компании Z (событие C с вероятностью 0.04). По договору, если случай произошел, то компания выплачивает страховую сумму полностью, независимо от величины фактического ущерба. Процентная ставка не учитывается, рассчитывается только рисковая премия.

Единовременные рисковые премии равны Sq, где $S-$страховая сумма, которую имеет право получить страхователь, а $q-$ вероятность наступления этого события: в первом договоре 30, во втором 20, в третьем 40. Итого клиент заплатил 90 у.е.

Второй страхователь застраховал такое же имущество на ту же сумму от тех же трех рисков (на тех же условиях) в одной компании одновременно (комбинированное страхование). Найдем единовременную рисковую премию.

Поскольку одновременно может произойти не более одного из этих трех событий, то искомое событие, вероятность которого надо найти есть $E = A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\bigcup\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\bigcup\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$. Его вероятность равна

$P(E)=0{,}03\cdot 0{,}98\cdot 0{,}96+0{,}97\cdot 0{,}02\cdot 0{,}96+0{,}97\cdot 0{,}98\cdot 0{,}04=0{,}08487$. Единовременная премия равна 84,87 у.е. и уменьшилась почти на 6%.

Повторные независимые испытания.

Рассмотрим ещё один случай, где применяется свойство независимости событий. Это так называемая **схема Бернулли**, где рассматривается последовательность повторения некоторого испытания, в котором интересующее нас событие A может наступить или не наступить. При этом предполагается, что исход каждого испытания не зависит от исходов других испытаний в этой последовательности и вероятность случайного события A в каждом испытании остаётся постоянной. В таком случае говорят, что рассматриваются **повторные независимые испытания**.

Итак, пусть проводятся N повторных независимых испытаний, в которых $P(A)=p$ для каждого испытания. Необходимо найти вероятность события B_k, состоящего в том, что в этой последовательности N испытаний случайное событие A наступит ровно k раз.

Если **задать номера** тех k испытаний в последовательности, где событие A наступит и, следовательно, в $(N-k)$ остальных наступит противоположное событие $\overline{A}$ (вероятность которого $\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(A)=1-p$), то одновременное наступление всех этих событий (на определённых местах!) есть произведение N независимых событий: k раз события A и $(N-k)$ раз события $\overline{A}$. Поскольку эти события независимы, воспользуемся тем, что вероятность произведения событий равна произведению вероятностей сомножителей. Таким образом, вероятность наступления события A на определённых местах последовательности испытаний k раз равна

$$p^k(1-p)^{N-k}.$$

Однако это вероятность только одного из событий, благоприятствующих событию B_k. Чтобы получить все их, нужно перебрать все возможные места в нашей последовательности, где событие A может появиться ровно k раз. Как известно из комбинаторики число таких вариантов есть число сочетаний из N элементов по k: $\frac{N!}{k!(N-k)!}$, где символом $N!$ обозначено произведение всех натуральных чисел от 1 до N включительно (при этом принимают, что 0! = 1).

Для числа сочетаний из N элементов по k, используют обозначение C_N^k.

А поскольку каждый из этих вариантов (благоприятствующих исходов) имеет, очевидно, одну и ту же вероятность $p^k(1-p)^{N-k}$, то сумма вероятностей всех благоприятствующих B_k событий даёт нам решение задачи:

$$P(B_k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}.$$

Это равенство принято называть **формулой Бернулли**.

<u>Пример 7.</u> Если принять вероятность рождения мальчика равной 0,5 и определять вероятность того, что в роддоме среди последних десяти новорождённых окажется **ровно половина** мальчиков, то по формуле Бернулли (где $N=10$, $k=5$, $p=0{,}5$) мы получим вероятность этого события равной $0{,}25$ (всего лишь!).

Формула полной вероятности.

Предположим, что событие B может осуществиться с одним и только с одним из n попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда

$$B = \sum_{j=1}^{n} B \cap A_j,$$

где события $B \cap A_i$ и $B \cap A_j$ с разными индексами i и j несовместны. Используя приведённое выше свойство вероятности 2, имеем

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j).$$

Воспользовавшись теоремой умножения, находим, что

$$P(B)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\,|\,A_j)\,. \qquad (2)$$

Полученное соотношение (2) носит название “**формула полной вероятности**”. Она широко использовалась математиками при конкретных расчетах еще в начале 18 века, но впервые была сформулирована как одно из основных утверждений теории вероятностей П.Лапласом лишь в конце этого века. В методическом плане формула полной вероятности играет важную роль. Так при выборочном исследовании, если имеется расслоенная выборка и пропорции слоев $P(A_j)$ известны, то для определения вероятности события $P(B)$ следует (обязательно) использовать формулу полной вероятности. Т.е. нельзя (!) для определения вероятности $P(B)$ использовать вероятность $P(B\,|\,A_j)$ как это часто бывает при телефонном опросе.

Пример 8. Имеется урна, в которой M бракованных изделий и $N-M$ годных, внешне неразличимых. Найти вероятность того, что второе выбранное изделие – бракованное.

Решение. Пусть события $A_i\,,\,i=1,2$ – появление бракованного изделия при i-м извлечении. Здесь надо уточнить, что делать с первым изделием. Возможны два случая: а) выбор без возвращения; б) выбор с возвращением.

Найдем $\mathbf{P}(A_1)$ вероятность события A_1. Естественно в обоих случаях по классическому способу она равна отношению числа благоприятствующих исходов M к числу всех возможных N и равновозможных исходов, т.е.

$$\mathbf{P}(A_1)=\frac{M}{N}\,.$$

Теперь найдем $\mathbf{P}(A_2)$ вероятность события A_2. Рассмотрим случай а).

Если произошло событие A_1, то

$$\mathbf{P}(A_2|A_1)=\frac{M-1}{N-1}\,.$$

Если же произошло событие $\overline{A_1}$, то

$$\mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1) = \frac{M}{N-1}.$$

Кроме того, по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1)\mathbf{P}(\overline{A}_1) = \frac{M-1}{N-1}\cdot\frac{M}{N} + \frac{M}{N-1}\cdot\frac{N-M}{N} = \frac{M}{N}$$

и здесь $\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_1) \neq \mathbf{P}(A_2|A_1) \neq \mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1)$.

Аналогично решается актуальная студенческая задача: при подготовке к экзамену студент успел выучить только *M из N билетов.* Встаёт вопрос: «Каким по порядку среди сдающих экзамен вытаскивать (наудачу) билет, чтобы вероятность “везения” была наибольшей». Из предыдущего решения следует, что эта вероятность остаётся постоянной при вытаскивании билета, идя первым или вторым. И вообще, используя формулу полной вероятности, нетрудно показать, что вероятность вытащить «счастливый билет» **не зависит** от того, каким по порядку сдавать экзамен. Она всегда будет равна $\frac{M}{N}$, т.е. эта вероятность может увеличится, только если будет расти *M – число выученных билетов!*

Формула Байеса.

Применим формулу полных вероятностей для вывода так называемой формулы Байеса, которая иногда используют при проверке статистических гипотез.

Опять будем считать, что событие B может осуществиться с одним и только с одним из n попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Предположим, что требуется найти вероятность события A_i, если известно, что событие B произошло. Воспользуемся соотношением, приведённым при рассмотрении условной вероятности:

$$P(A_i \cap B) = P(B)P(A_i|B) = P(A_i)\, P(B|A_i).$$

Из второго равенства этого соотношения получаем

$$P(A_i\,|\,B) = \frac{P(A_i)P(B\,|\,A_i)}{P(B)}.$$

Используя формулу полной вероятности для знаменателя, находим, что

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}.$$

Две последние формулы и называют обычно формулами Байеса. Общая схема их использования такова. Пусть событие B может происходить и не происходить в различных условиях, относительно которых может быть сделано n предположений (гипотез) $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Априорные (от *a priori* (лат.) – до опыта) вероятности этих гипотез есть $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$. Известно также, что при справедливости гипотезы A_i вероятность осуществления события B равна $P(B|A_i)$. Произведен опыт, в результате которого событие B наступило. Естественно после этого уточнить оценки вероятностей гипотез. Апостериорные (от *a posteriori* (лат.) – на основе опыта) оценки вероятностей гипотез $P(A_1|B), P(A_2|B), \ldots, P(A_n|B)$ даются формулами Байеса.

Пример 9. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную – с вероятностью 0.05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

Решение. Введем обозначения

$C =$ {изделие удовлетворяет стандарту},

$\Gamma =$ {изделие является годным}.

Тогда из условий задачи получаем:

$$\mathbf{P}(C) = 0.96, \quad \mathbf{P}(\overline{C}) = 0.04, \quad \mathbf{P}(\Gamma \mid C) = 0.98, \quad \mathbf{P}(\Gamma \mid \overline{C}) = 0.05.$$

Из формулы Байеса

$$\mathbf{P}(C|\Gamma) = \frac{\mathbf{P}(\Gamma|C)\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(\Gamma)} = \frac{0.98 \cdot 0.96}{0.98 \cdot 0.96 + 0.05 \cdot 0.04} = 0.998.$$

Пример 10. Пусть есть две гипотезы относительно состава представленной урны: $H_1 -$ урна содержит 70% красных и 30% белых шаров;

$H_2 -$ урна содержит 30% красных и 70% белых шаров.

Считаем (априорно), что эти гипотезы равновозможны, т.е.

$$\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Пусть производится выбор с возвращением этих шаров – в результате эксперимента в выборке оказалось 8 красных и 4 белых шара (событие A).

Используя формулу Байеса, покажите, что $\mathbf{P}(H_1|A) = 0.97$. В такое значение апостериорной вероятности трудно поверить. Но еще более удивительным является следующее: пусть в выборке 105 красных и 101 белых шара (событие B). Тогда $\mathbf{P}(H_1|B) = 0.97$. Вероятность оказалась той же самой (она зависит от разности числа красных и белых шаров, но не их отношения). Действительно, если мы будем вынимать N **шаров** и среди них
окажется n **красных и** m **белых (событие** C**)**, то получим

$$\mathbf{P}(H_1|C) = \frac{1}{1 + (3/7)^{n-m}}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Особенности вероятностного анализа.

Закономерности, которые приходится рассматривать при анализе случайных явлений, носят именно статистический характер, так как связаны с массовыми явлениями обычно как некоторая господствующая тенденция, которая в конкретных условиях осложняется действием многих случайных факторов. Обнаружить статистические закономерности нелегко, для этого требуется проанализировать множество факторов и установить статистическую устойчивость. Здесь большую помощь оказывают количественные методы анализа, которые разрабатывает специальная математическая дисциплина – математическая статистика, ориентированная на получение выводов по результатам эксперимента, которая в свою очередь развивается на базе теории вероятностей.

Следует всегда помнить, что статистический анализ касается лишь внешней, количественной стороны явлений, не вскрывая их сущности, качественной стороны. Поэтому статистика сама по себе без глубокого анализа качественных сторон явления может привести к неверным выводам. Таким образом, результаты только количественного анализа никогда не могут явиться полным основанием для принятия того или иного решения. Но даже в тех случаях, когда в процессе принятия решений количественный анализ играет основную роль, система, ориентированная на применение методов теории вероятностей, никогда не сможет выдать информацию в объеме, достаточном для выбора однозначного способа действий, независимо от того, насколько детализирована и усовершенствована модель системы. Такого рода системы могут функционировать лишь при условии, если наряду с количественным анализом они содержат элементы качественного анализа. И наконец, необходимо заметить, что сам процесс построения систем предполагает ориентацию не только на логические операции с числовыми данными, но и на обычный здравый смысл. В то же время статистический анализ может дать направление для качественного анализа реального явления, который позволит построить целесообразную математическую (вероятностную) модель этого явления.

Литература

<u>Учебники</u>

1.*Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей – М.: Наука, 1988.

2. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. Учебник. / А.И.Орлов.- М.: Издательство «Экзамен», 2004. - 656 с.

3. *Крестова А.П.* Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для ВУЗов. / А.П.Крестова.- М.: Издательство «Экзамен», 2008. - 190 с.

<u>*Задачники.*</u>

1. *Тихов М.С., Агеев В.В., Зорин В.А.* Сборник задач по прикладной теории вероятностей: учебное пособие. – ГГУ, 1986.