МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**
**Национальный исследовательский университет**

**А.В. Леонтьева**

# СБОРНИК ЗАДАЧ
# (МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ)

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

Нижний Новгород
2014

УДК 510.2:510.6(072)
ББК В176р30
Л-47

Л-47 Леонтьева А.В. СБОРНИК ЗАДАЧ (МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 19 с.

Рецензент: к.ф.-м..н., ст. преп. **Е.А. Рябова**

В учебно-методическом пособии рассматриваются задачи по одной из основных тем математики – методу математической индукции. В пособии разбираются такие темы, как доказательство равенств, доказательство неравенств, доказательство утверждений о делимости и доказательство общих формул числовых последовательностей, заданных рекуррентным способом. По каждой теме разобраны наиболее важные типы задач. В конце пособия по каждой из тем предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов военных специальностей радиофизического факультета ННГУ, изучающих курс «Дискретная математика». Также пособие будет полезно студентам всех специальностей, изучающим курсы «Дискретная математика» и «Математический анализ».

Ответственные за выпуск:
председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.Д. Миловский**,
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 510.2:510.6(072)
ББК В176р30

## 1. Теоретические сведения

**Принцип математической индукции**

Пусть имеется какое-то утверждение, зависящее от натурального $n$. Если это утверждение истинно при $n=1$ и из истинности его при каком-то произвольном натуральном $n=k$ следует его справедливость и при следующем $n$, равном $k+1$, то данное утверждение верно для всех натуральных $n$.

**Метод математической индукции**

Способ доказательства математических утверждений с помощью принципа математической индукции называется методом математической индукции, который состоит в следующем:

1. Проверяют истинность утверждения при $n=1$ – первый шаг доказательства (первый индукционный шаг).
2. Допускают, что утверждение справедливо при $n=k$, где $k$ – произвольное натуральное число ($k \in \mathbf{N}$), и доказывают, что тогда утверждение верно и при $n=k+1$ – второй шаг доказательства (второй индукционный шаг).

Если обе части доказательства проведены, то на основании принципа математической индукции утверждение истинно для всех натуральных $n$ ($n \in \mathbf{N}$) – вывод.

В самом деле, если утверждение справедливо при $n=1$, то по доказанному в шаге 2 оно верно и при $n=1+1=2$. Далее, из того, что оно верно при $n=2$ вытекает его справедливость при $n=2+1=3$. Затем от $n=3$ переходят к $n=4$ и т.д. Ясно, что при этом рано или поздно мы доберемся до любого натурального числа $n$, а потому данное утверждение истинно для всех $n \in \mathbf{N}$.

Метод математической индукции можно применить и для доказательства утверждений, выполняющихся при всех целых $n$, начиная с некоторого целого, не равного 1. В этом случае речь идет об обобщенном принципе математической индукции.

**Обобщенный принцип математической индукции**

Если утверждение $A(n)$, в котором $n$ – целое число, истинно при $n=m$ и из истинности его для $n=k$, где $k$ – любое целое число, большее или равное $m$, следует его справедливость и для следующего $n=k+1$, то утверждение $A(n)$ верно для любого целого значения $n \geq m$.

Метод математической индукции применим для доказательства формул $n$-ых членов числовых последовательностей, заданных рекуррентным способом, т.е. выражением $n$-го члена через один или несколько предыдущих.

Иногда при рекуррентном задании числовой последовательности условиями определяются сразу два ее первых члена, а ее $n$-ый член выражается через два предыдущих. В таком случае для доказательства формулы $n$-го члена последовательности приходится использовать еще одну разновидность обобщенного принципа математической индукции.

**Обобщенный принцип математической индукции (разновидность)**

Утверждение $A(n)$, в котором $n$ – целое число, истинно для всех целых $n \geq m$ ($m \in \mathbf{Z}$), если выполнены 2 условия:

1) утверждение $A(n)$ справедливо при $n = m$ и при $n = m + 1$;

2) для всякого целого $k \geq m$ из истинности утверждений при $n = k$ и $n = k + 1$ следует справедливость утверждения при $n = k + 2$.

## 2. Доказательство равенств

*Пример 1*: Доказать, что для всех натуральных $n$ верно равенство

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (1)$$

*Доказательство:*

1) проверим, выполняется ли равенство при $n=1$. В этом случае левая часть этого равенства принимает вид $1^3=1$, а его правая часть принимает вид $1^2(1+1)^2/4$ и тоже равна 1. Значит, при $n=1$ равенство верно.

2) обозначим левую часть равенства через $S_n$:

$$S_n=1^3+2^3+3^3+...+n^3$$

Допустим, что исходное равенство (1) является истинным при каком-то произвольном $n=k$ ($k\in\mathbf{N}$), т.е. что верно равенство

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4} \text{ или } S_k=\frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Докажем, что тогда исходное равенство верно и при $n=k+1$, т.е. что справедливо равенство

$$1^3+2^3+3^3+...+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \text{ или } S_{k+1}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Рассмотрим левую часть последнего равенства и распишем $k$-ое слагаемое в этой сумме

$$1^3+2^3+3^3+...+(k+1)^3=\underbrace{1^3+2^3+3^3+...+k^3}_{\text{сумма первых } k \text{ слагаемых}}+(k+1)^3=$$

по предположению сумма первых $k$ слагаемых равна $S_k=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$,

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4(k+1)\right)}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Таким образом, доказали, что равенство (1) верно при $n=1$ и из истинности его при каком-то произвольном натуральном $n=k$ следует его справедливость и при следующем $n=k+1$. В силу принципа математической индукции это означает справедливость равенства для всех натуральных $n$.

*Пример 2*: Доказать, что для всех натуральных $n$ верно равенство

$$\frac{1}{2}\cdot 2!+\frac{2}{2^2}\cdot 3!+\frac{3}{2^3}\cdot 4!+...+\frac{n}{2^n}\cdot(n+1)!=\frac{(n+2)!}{2^n}-2*. \qquad (2)$$

---

*По определению $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$ ($0!=1$). В частности $1!=1$, $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$, $(n+2)!=n!(n+1)(n+2)=(n+1)!(n+2)$.

*Доказательство:*

1) обозначим левую часть равенства через $S_n$:

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot 2! + \frac{2}{2^2}\cdot 3! + \frac{3}{2^3}\cdot 4! + \ldots + \frac{n}{2^n}\cdot (n+1)!.$$

Проверим справедливость исходного равенства (2) при $n=1$. Левая часть равенства принимает вид $S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2! = 1$, правая – $\frac{(1+2)!}{2^1} - 2 = \frac{3!}{2} - 2 = 3 - 2 = 1$. Левая часть равенства (2) равна правой части равенства. Значит исходное равенство верно при $n=1$.

2) допустим, что исходное равенство верно при $n=k$ ($k \in \mathbf{N}$)

$$\frac{1}{2}\cdot 2! + \frac{2}{2^2}\cdot 3! + \frac{3}{2^3}\cdot 4! + \ldots + \frac{k}{2^k}\cdot (k+1)! = \frac{(k+2)!}{2^k} - 2, \text{ т.е. } S_k = \frac{(k+2)!}{2^k} - 2,$$

и докажем, что равенство (2) верно при $n = k+1$, т.е. докажем, что выполняется равенство

$$\frac{1}{2}\cdot 2! + \frac{2}{2^2}\cdot 3! + \frac{3}{2^3}\cdot 4! + \ldots + \frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot (k+2)! = \frac{(k+3)!}{2^{k+1}} - 2 \text{ или } S_{k+1} = \frac{(k+3)!}{2^{k+1}} - 2.$$

Рассмотрим левую часть последнего равенства

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}\cdot 2! + \frac{2}{2^2}\cdot 3! + \frac{3}{2^3}\cdot 4! + \ldots + \frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot (k+2)! =$$

распишем $k$-ое слагаемое в этой сумме

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2! + \frac{2}{2^2}\cdot 3! + \frac{3}{2^3}\cdot 4! + \ldots + \frac{k}{2^k}\cdot (k+1)!}_{S_k} + \frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot (k+2)! =$$

сумма первых $k$ слагаемых, по предположению, равна $S_k = \frac{(k+2)!}{2^k} - 2$,

$$= S_k + \frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot (k+2)! = \frac{(k+2)!}{2^k} - 2 + \frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot (k+2)! =$$

$$= \frac{(k+2)!}{2^{k+1}}(2+k+1) - 2 = \frac{(k+2)!(k+3)}{2^{k+1}} - 2 = \frac{(k+3)!}{2^{k+1}} - 2.$$

Поскольку выполнены оба условия принципа математической индукции, то равенство (2) справедливо для всех натуральных $n$.

<u>*Пример 3*</u>: Доказать, что при любом натуральном $n$

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (3)$$

*Доказательство:*

1) При $n=1$ формула принимает вид: $x' = 1$. Это соотношение верно. Значит, при $n=1$ формула (3) верна.

2) Предположим, что она верна при $n=k$, то есть $(x^k)' = kx^{k-1}$, и, исходя из этого, докажем, что формула (3) должна быть верна и при $n=k+1$, то есть $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$. Действительно,

$$(x^{k+1})' = (x\cdot x^k)' = x'\cdot x^k + x\cdot (x^k)' =$$

по предположению $(x^k)' = kx^{k-1}$, к тому же $x' = 1$,

$$= x^k + x \cdot kx^{k-1} = x^k + kx^k = x^k(k+1).$$

Оба условия принципа математической индукции выполняются, и поэтому формула (3) верна при любом натуральном $n$.

## 3. Доказательство утверждений о делимости

*Пример 4*: Доказать, что для всех натуральных $n$ выражение

$$4^n - 1 \text{ делится без остатка на } 3. \qquad (4)$$

*Доказательство:*

1) Если $n=1$, то $4^n - 1 = 3 \vdots 3$ – истина, так как $3/3 = 1$. Значит, исходное утверждение (4) верно при $n=1$.

2) Предположим, что выражение $4^n - 1$ кратно 3 при каком-то произвольном натуральном $n=k$, т.е. допустим, что

$$(4^k - 1) \vdots 3.$$

Докажем, что тогда выражение $4^n - 1$ делится на 3 и при $n = k+1$, т.е. докажем, что

$$(4^{k+1} - 1) \vdots 3.$$

Действительно,

$$4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4 \cdot 4^k - 4 + 3 = 4 \cdot \underbrace{(4^k - 1)}_{\vdots 3} + 3 \quad \vdots 3.$$

По допущению $4^k - 1$ кратно 3, значит $4 \cdot (4^k - 1) \vdots 3$, 3 тоже делится на 3 без остатка. Так как оба слагаемых суммы делятся на 3, то и вся сумма делится на 3. Следовательно, $(4^{k+1} - 1) \vdots 3$.

Поскольку выполнены оба условия принципа математической индукции, то $4^n - 1$ кратно 3 при всех натуральных $n$.

*Пример 5*: Доказать, что для всех натуральных $n$ выражение

$$n^3 + 5n \text{ кратно } 6. \qquad (5)$$

*Доказательство:*

1) проверим справедливость утверждения (5) при $n=1$: $1^3 + 5 \cdot 1 = 6 \vdots 6$ – верно;

2) предположим, что утверждение верно при $n=k$: $(k^3 + 5k) \vdots 6$ – пусть верно, и докажем, что (5) верно при $n = k+1$: $((k+1)^3 + 5(k+1)) \vdots 6$ – доказать.

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 3k^2 + 3k + 6 =$$
$$= \underbrace{(k^3 + 5k)}_{\vdots 6} + \underbrace{3\underbrace{k(k+1)}_{\vdots 2}}_{\vdots 6} + 6 \quad \vdots 6.$$

По допущению $k^3 + 5k$ кратно 6, второе слагаемое $3k(k+1)$ кратно 6, поскольку числа $k$ и $k+1$ – последовательные числа, а значит одно из них четное, а второе нечетное, следовательно, произведение $k(k+1)$ обязательно делится на $2$, а значит, число $3k(k+1)$ делится и на $2$ и на $3$ одновременно, значит $3k(k+1)$ делится на $6$, и, наконец, третье слагаемое $6$ делится на $6$. Следовательно, вся сумма делится на $6$ без остатка.

На основании принципа математической индукции утверждение справедливо при всех натуральных $n$.

## 4. Доказательство неравенств

<u>*Пример 6*</u>: Доказать неравенство Бернулли для всех натуральных $n$

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (x \geq 0). \tag{6}$$

*Доказательство:*

1) при $n=1$ неравенство имеет вид: $1+x \geq 1+x$ – тождественно верно для любых $x$;

2) допустим, что неравенство (6) верно при $n=k$ ($k \in \mathbf{N}$):

$$(1+x)^k \geq 1+kx,$$

и докажем, что тогда неравенство (6) верно при $n=k+1$:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Умножим верное, по допущению, неравенство на $1+x>0$, получим

$$(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+kx+x+\underbrace{kx^2}_{\geq 0} \geq 1+(k+1)x.$$

При любых $k$ $kx^2 \geq 0$, поэтому, отбрасывая в выражении $1+kx+x+kx^2$ слагаемое $kx^2$, получаем меньшее либо равное выражение. Следовательно, по свойству транзитивности

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Так как выполнены оба условия принципа математической индукции, то неравенство (6) верно для всех натуральных $n$.

<u>*Пример 7*</u>: Доказать, что при $n>6$ справедливо неравенство

$$3^n > n \cdot 2^{n+1}. \tag{7}$$

*Доказательство:*

1) при $n=7$ имеем $3^7 > 7 \cdot 2^8$ или $2187 > 1792$ – верно;

2) предположим, что неравенство (7) верно при $n=k$ ($k \in \mathbf{N}$, $k>7$), т.е. верно неравенство

$$3^k > k \cdot 2^{k+1},$$

докажем, что тогда верно неравенство при $n=k+1$:

$$3^{k+1} > (k+1) \cdot 2^{k+2}.$$

Домножим верное, по допущению, неравенство на $3$

$$3 \cdot 3^k > 3 \cdot k \cdot 2^{k+1} \text{ или } 3^{k+1} > 3k \cdot 2^{k+1}$$

и рассмотрим разность

$$3k \cdot 2^{k+1} - (k+1) \cdot 2^{k+2} = 2^{k+1}(3k - 2 \cdot (k+1)) = 2^{k+1}(k-2) > 0,$$

т.к. разность положительная, то уменьшаемое больше вычитаемого, т.е.

$$3k\cdot 2^{k+1} > (k+1)\cdot 2^{k+2}.$$

С одной стороны из предположения известно, что верно неравенство $3^{k+1} > 3k\cdot 2^{k+1}$, с другой стороны доказали, что $3k\cdot 2^{k+1} > (k+1)\cdot 2^{k+2}$, записываем двойное неравенство

$$3^{k+1} > 3k\cdot 2^{k+1} > (k+1)\cdot 2^{k+2},$$

из которого по свойству транзитивности получаем, что

$$3^{k+1} > (k+1)\cdot 2^{k+2}.$$

Оба условия обобщенного принципа математической индукции выполнены, следовательно, неравенство (7) верно для всех натуральных $n > 6$.

*Пример 8*: Доказать, что при $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \qquad (8)$$

*Доказательство:*

1) проверим справедливость неравенства при $n=1$: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ – верно;

2) предположим, что неравенство (8) верно при $n=k$, т.е. предположим, что верно неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}},$$

и докажем, что также верно неравенство при $n=k+1$, т.е нужно доказать, что верно неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Рассмотрим левую часть последнего неравенства и распишем в числителе и знаменателе дроби $k$-ые множители

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k+2)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+2)}.$$

Умножим левую и правую части верного, по допущению, неравенства на $\frac{2k+1}{2k+2} > 0$:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\frac{(2k+1)}{(2k+2)} = \frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)}.$$

Теперь рассмотрим разность

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)} - \frac{1}{\sqrt{2k+3}} = \frac{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}-(2k+2)}{(2k+2)\sqrt{2k+3}} =$$

домножим числитель и знаменатель на сопряженное числителю выражение

$$= \frac{\left(\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}-(2k+2)\right)\left(\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}+(2k+2)\right)}{(2k+2)\sqrt{2k+3}\left(\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}+(2k+2)\right)} =$$

знаменатель дроби больше нуля, поэтому знак дроби определяется знаком числителя, рассмотрим его отдельно, заметим, что в числителе получили разность квадратов

$$\left(\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}-(2k+2)\right)\left(\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}+(2k+2)\right)=(2k+1)(2k+3)-(2k+2)^2=$$
$$=4k^2+6k+2k+3-4k^2-8k-4=-1<0.$$

Разность двух дробей отрицательная, следовательно,

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

С одной стороны из предположения известно, что верно неравенство $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+2)}<\frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)}$, с другой стороны доказали, что $\frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$, записываем двойное неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+2)}<\frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

из которого по свойству транзитивности получаем, что

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Оба условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, неравенство (8) верно для всех натуральных $n$.

## 5. Доказательство формул n-ых членов числовых последовательностей, заданных рекуррентным способом

_Пример 9_: Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1=6$, $a_{n+1}=2a_n-3n+2$. Доказать, что

$$a_n=2^n+3n+1. \quad (9)$$

*Доказательство:*

1) проверим справедливость формулы (9) при $n=1$: $a_1=2^1+3+1=6$ – верно;

2) предположим, что формула (9) справедлива при $n=k$: $a_k=2^k+3k+1$ – пусть верно; и докажем, что формула (9) справедлива при $n=k+1$: $a_{k+1}=2^{k+1}+3(k+1)+1$.

Распишем $a_{k+1}$ член последовательности по рекуррентной формуле

$$a_{k+1}=2a_k-3k+2=$$

и подставим вместо $a_k$ верное по допущению равенство, затем упростим

$$=2\left(2^k+3k+1\right)-3k+2=2\cdot 2^k+6k+2-3k+2=2^{k+1}+3k+4.$$

Условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, формула (9) верна для данной последовательности для всех натуральных $n$.

*Пример 10*: Доказать, что если $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ и для всякого натурального $n$ имеет место соотношение $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, то

$$a_n = 2^n + 1. \qquad (10)$$

*Доказательство:*

1) проверим справедливость формулы (10) при $n = 1$ и при $n = 2$:

$$a_1 = 2^1 + 1 = 3 \text{ – верно, } a_2 = 2^2 + 1 = 5 \text{ – верно;}$$

2) предположим, что формула (10) справедлива при $n = k$ и при $n = k + 1$:

$$a_k = 2^k + 1 \text{ – пусть верно, } a_{k+1} = 2^{k+1} + 1 \text{ – пусть верно,}$$

докажем, что формула (10) справедлива при $n = k + 2$: $a_{k+2} = 2^{k+2} + 1$ – доказать.

Член последовательности $a_{k+2}$ распишем по рекуррентной формуле

$$a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k =$$

и подставим верные, по допущению, выражения вместо $a_k$ и $a_{k+1}$

$$= 3\left(2^{k+1} + 1\right) - 2\left(2^k + 1\right) = 3 \cdot 2^{k+1} + 3 - 2 \cdot 2^k - 2 = 6 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k + 1 =$$

$$= 4 \cdot 2^k + 1 = 2^{k+2} + 1.$$

Оба условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, формула (10) верна для данной последовательности для всех натуральных $n$.

## 6. Задачи для самостоятельного решения

**1.** Доказать, что сумма первых $n$ чисел натурального ряда равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

**2.** Доказать, что сумма первых $n$ чисел вида $a_n = 3n - 2$ равна $\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

**3.** Доказать, что сумма квадратов $n$ первых натуральных чисел равна $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Доказать, что при любом $n \in \mathbf{N}$ выполняется равенство (**4–17**):

**4.** $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

**5.** $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\dfrac{n}{a(a+n)}$

**6.** $1\cdot 3+2\cdot 5+\ldots+n(2n+1)=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

**7.** $2\cdot 2+3\cdot 5+\ldots+(n+1)(3n-1)=\dfrac{n\left(2n^2+5n+1\right)}{2}$

**8.** $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\ldots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}=n\cdot 2^{2n+1}$

**9.** $1+6+20+\ldots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3)$

**10.** $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$

**11.** $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)\left(1-\dfrac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)=\dfrac{1+2n}{1-2n}$

**12.** $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\dfrac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$

**13.** $\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+1)}{n+2}$

**14.** $1+\dfrac{7}{3}+\dfrac{13}{9}+\ldots+\dfrac{6n-5}{3^{n-1}}=\dfrac{2\cdot 3^n-3n-2}{3^{n-1}}$

**15.** $\dfrac{1}{1^2\cdot 3^2}+\dfrac{2}{3^2\cdot 5^2}+\ldots+\dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}$

**16.** $\dfrac{1\cdot 2^1}{3!}+\dfrac{2\cdot 2^2}{4!}+\dfrac{3\cdot 2^3}{5!}+\ldots+\dfrac{n2^n}{(n+2)!}=1-\dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

**17.** $3+20+168+\ldots+(2n+1)\cdot 2^{n-1}\cdot n!=2^n\cdot(n+1)!-1$

Методом математической индукции доказать, что при $n \in \mathbf{N}$ (**18–29**):

**18.** $n^3+9n^2+26n+24$ кратно $6$

**19.** $7^{2n}-1$ кратно $24$

**20.** $15^n + 6$ кратно $7$
**21.** $9^n + 3$ кратно $4$
**22.** $7^n + 3n - 1$ кратно $9$
**23.** $7^n + 12n + 17$ кратно $18$
**24.** $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ кратно $8$
**25.** $5^n - 3^n + 2n$ кратно $4$
**26.** $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно $19$
**27.** $9^{n+1} - 18n - 9$ кратно $18$
**28.** $n^3 + 11n$ делится на $6$
**29.** $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на $7$

Доказать неравенство (**30–33**):
**30.** $2^n > 5n + 1$, если $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 5$
**31.** $3^{n-1} > 2n^2 - n$, если $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 5$
**32.** $4^n \ge n^2 + 3^n$, если $n \in \mathbf{N}$
**33.** $2^n \ge n + 1$, если $n \in \mathbf{N}$

Найти все $n \in \mathbf{N}$, для которых справедливо неравенство (**34–36**):
**34.** $2^n > n^2$
**35.** $3^n \ge 2(n+1)^2$
**36.** $5^n \ge 5n^3 + 2$

Доказать формулы общего члена последовательности для любого $n \in \mathbf{N}$ (**37–38**):
**37.** Последовательность $\{b_n\}$ задана рекуррентно: $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 3b_n - 2$. Выразить $b_n$ через $n$.
**38.** Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 27$ $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 5a_n$. Найти $a_n$.

**39.** Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_n = 4a_{n-1} + 5$ ($n > 1$). Доказать, что $a_n = \dfrac{1}{3}(2 \cdot 4^n - 5)$.
**40.** Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Доказать, что $a_n = 3n - 2$.
**41.** Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением: $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Доказать, что $a_n = 2^{n-1} - 1$.
**42.** Пусть первый член арифметической прогрессии равен $a_1$, рекуррентная формула для арифметической прогрессии имеет вид: $a_{n+1} = a_n + d$ ($d$ – разность прогрессии). Доказать аналитическую формулу для арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$.

**43.** Пусть первый член геометрической прогрессии равен $b_1$ ($b_1 \neq 0$), рекуррентная формула для геометрической прогрессии имеет вид: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ ($q$ – знаменатель прогрессии, $q \neq 0$). Доказать аналитическую формулу для геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

**44.** Для рекуррентно заданной последовательности $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2\left(a_n + (2n+1)\cdot 2^n\right)$, доказать, что ее общий член может быть задан формулой $a_n = n^2 \cdot 2^n$.

**45.** Для рекуррентно заданной последовательности $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}\left(b_n + 2\cdot\frac{1}{3^n}\right)$, доказать, что ее общий член может быть задан формулой $b_n = \frac{2n+1}{3^n}$.

**46.** Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a-b}$, $a_2 = \frac{a^3 - b^3}{a-b}$, $a_{n+2} = (a+b)\cdot a_{n+1} - ab\cdot a_n$ ($a \neq b$). Задать последовательность аналитически, т.е. получить формулу $n$-го члена этой последовательности. Доказать полученную формулу.

**47.** Для последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентно $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, найти $a_{2010}$.

**48.** Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ ($n \geq 2$). Доказать, что $a_n = 2^{n-1} + 1$.

**49.** Доказать формулы для суммы первых $n$ членов арифметической и геометрической прогрессий.

**50.** Доказать тождество для всех $n \in \mathbf{N}$

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

**51.** Доказать, что квадрат суммы $n$ чисел равен сумме квадратов этих чисел, сложенной со всевозможными их удвоенными попарными произведениями, т.е. доказать формулу

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n.$$

**52.** Доказать тождество

$$\lg(a_1a_2\ldots a_n) = \lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_n \quad (a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0).$$

**53.** Доказать, что при каждом натуральном $n$ справедлива формула

$$b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}\right).$$

**54.** Доказать формулу бинома Ньютона ($n \in \mathbf{N}$)

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b^1 + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}a^1b^{n-1} + b^n \quad (a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R}).$$

**55.** Доказать тождество

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n\ \ радикалов}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

**56.** Доказать, что при любом натуральном $n$

$$[f^{n}(x)]'=nf^{n-1}(x)\cdot f'(x).$$

**57.** Доказать, что производная суммы любого фиксированного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций.

**58.** Доказать, что при любом натуральном $n$ верно неравенство

$$\left|x_1+x_2+\ldots+x_n\right|\le\left|x_1\right|+\left|x_2\right|+\ldots+\left|x_n\right|.$$

**59.** Доказать, что при любом натуральном $n$ верно неравенство

$$2^{n-1}(a^n+b^n)\ge(a+b)^n \quad (a>0,\ b>0).$$

**60.** Доказать, что при любом натуральном $n$

$$\left|\sin nx\right|\le n\left|\sin x\right|.$$

**61.** Проверить справедливость неравенства

$$\sin^{2n}\alpha+\cos^{2n}\alpha\le 1 \quad (n \text{ – натуральное число}).$$

**62.** Доказать, что $n$ различных прямых, которые лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, делят плоскость на $2n$ частей.

**63.** В плоскости проведено $n$ различных прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Доказать, что эти прямые разбивают плоскость на $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ частей.

**64.** В плоскости проведено $n$ различных окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три из них не имеют общей точки. Доказать, что окружности разбивают плоскость на $n^2-n+2$ частей.

**65.** Доказать, что $n$ плоскостей, проходящих через одну точку так, что никакие три из них не проходят через одну прямую, делят пространство на $n(n-1)+2$ частей.

**66.** Доказать, что число диагоналей выпуклого $n$-угольника равно $D_n=\dfrac{n(n-3)}{2}$, где $n\ge 3$.

Доказать, что при любом $n\in\mathbf{N}$ выполняется равенство (**67–85**):

**67.** $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

**68.** $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$

**69.** $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

**70.** $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

**71.** $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$

**72.** $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)\cdot n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}\quad (n>1)$

**73.** $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

**74.** $2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\dfrac{n(2n^2+9n+1)}{6}$

**75.** $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{n}{4(n+4)}$

**76.** $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

**77.** $\dfrac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{5}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{6}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$

**78.** $1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

**79.** $\sin x+\sin(x+\alpha)+\ldots+\sin(x+n\alpha)=\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{n\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

**80.** $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$

**81.** $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$

**82.** $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots+n\sin nx=\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin[(n+1)x]}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$

**83.** $\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx=\dfrac{(n+1)\cos nx-n\cos[(n+1)x]-1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$

**84.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x\quad (x\neq\pi k,\ k\in\mathbf{Z})$

**85.** $$\operatorname{arcctg}3+\operatorname{arcctg}5+\ldots+\operatorname{arcctg}(2n+1)=$$
$$=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n}-n\operatorname{arctg}1$$

Доказать справедливость неравенства при любом $n\in\mathbf{N}$ (**86–97**):

**86.** $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<\frac{5n-2}{2n}$

**87.** $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{17}{10}-\frac{1}{n}\quad(n>2)$

**88.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

**89.** $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!>[(n+1)!]^n\quad(n\ge 2)$

**90.** $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}\quad(n>1)$

**91.** $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\quad(n>1)$

**92.** $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$

**93.** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$

**94.** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\le n$

**95.** $2^n>n^3\quad(n\ge 10)$

**96.** $2^n>2n+1\quad(n\ge 3)$

**97.** $\frac{4^n}{n+1}\le\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Доказать, что для любого $n\in\mathbf{N}$ (**98–109**):

**98.** $5^{n+3}+11^{3n+1}$ кратно 17

**99.** $11^{n+2}+12^{2n+1}$ кратно 133

**100.** $7^{2n}-4^{2n}$ кратно 33

**101.** $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ кратно 11

**102.** $6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ кратно 17

**103.** $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$ кратно 19

**104.** $5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}$ кратно 19

**105.** $5^{n+2}+26\cdot 5^n+8^{2n+1}$ кратно 59

**106.** $10^n+18n-28$ кратно 27

**107.** $n(2n^2-3n+1)$ делится без остатка на 6

**108.** $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ делится без остатка на 11

**109.** $2^{2n-1}-9n^2+21n-14$ делится на 27

**110.** Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на $9$.

**111.** Доказать, что при любом натуральном $n$ число $2^{3^n}+1$ делится на $3^{n+1}$ и не делится на $3^{n+2}$.

**112.** Доказать, что

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

**113.** Доказать, что

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{6}-i\sin\frac{\pi n}{6}\right).$$

**114.** Доказать формулу Муавра для всех $n\in \mathbf{N}$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

**115.** Доказать, что

$$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n) = 2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$$

**116.** Доказать, что при натуральном $n>1$ и $|x|<1$ справедливо неравенство

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$

## 7. Список литературы


1. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие для 8-9 классов с углубленным изучением математики. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 269 с.
2. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 432 с.
3. Соминский И.С. Метод математической индукции. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 64 с.
4. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: задачи повышенной сложности. – М.: Издательство ЛКИ. – 2008. – 197 с.
5. Шахно К.У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. – 2-е изд., стереотип. – Минск: Высшая школа, 1965. – 523 с.

Анна Викторовна **Леонтьева**

# СБОРНИК ЗАДАЧ (МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ)

***Учебно-методическое пособие***

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.