МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

А.А. Тюхтина

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес – информатика» (профиль подготовки "Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса")

Нижний Новгород
2017

УДК 519.874
ББК 22.18
Т 98

Т 98 Тюхтина А.А. Модели управления запасами: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. –84 с.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент **А.В. Калинин**

В учебно-методическом пособии рассматриваются основные математические модели управления запасами. Приводятся задачи и упражнения для самостоятельного решения.

Содержание пособия соответствует программе дисциплины «Логистика», преподаваемой студентам Нижегородского госуниверситета, обучающимся по направлению «Бизнес – информатика» (профиль подготовки "Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса").

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
Института экономики и предпринимательства ННГУ,
к.э.н., доцент **Е.Н. Летягина**

УДК 519.874
ББК 22.18

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины Б1.В.ОД.712 «Логистика», преподаваемой студентам бакалавриата по направлению «Бизнес – информатика» (профиль подготовки "Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса") является изучение теоретических вопросов логистики и принципов математического моделирования логистических процессов.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование у выпускника следующих компетенций:

– способность использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности (ОК-3);

– способность находить организационно-управленческие решения и готов нести за них ответственность; готов к ответственному и целеустремленному решению поставленных профессиональных задач во взаимодействии с обществом, коллективом, партнерами (ОПК-2).

Управление запасами – важнейшая функция логистики, занимающая ключевое место в логистической системе.

Материальный запас – это находящиеся на разных стадиях производства и обращения продукция производственно-технического назначения, изделия народного потребления и другие товары, ожидающие вступления в процесс производственного или внутреннего (личного) потребления [8].

Запасы могут накапливаться в каждом звене логистической цепи вследствие несогласованности между входящим и исходящим материальными потоками – либо объем поставки не соответствует объему разового потребления, либо имеется разрыв во времени между моментами поступления товара и его потреблением, и предназначены для достижения самых разных целей. В зависимости от функционального назначения выделяют текущие, резервные, сезонные, спекулятивные, технологические, подготовительные запасы, запасы продвижения, а также устаревшие запасы.

Текущие (регулярные, циклические, расходные) запасы – запасы, создаваемые в течение среднестатистического производственного периода или запасы объемом в одну партию товаров. Образуются в результате несовпадения сроков и объёмов поступления и потребления материальных ресурсов, например, в условиях дискретности поставок при непрерывном потреблении или, наоборот, продажи или производства товара партиями при постепенном поступлении ресурсов, при наличии оптовых скидок или требований поставщиков к минимальному размеру партий. Величина текущих запасов постоянно меняется и соответствует уровню запаса в любой момент учета.

Текущие запасы обеспечивают непрерывность производственного или торгового процесса между поставками, позволяя немедленно обслуживать покупателей либо минимизируя простои оборудования из-за отсутствия запасных частей. Наличие запасов полуфабрикатов позволяет снизить требования к степени согласованности производственных процессов на различных участках, способствуя упрощению процесса управления производством. Увеличение размера заказываемой или выпускаемой партии и, следовательно, увеличение запаса, позволяет сократить количество заказов, способствуя, тем самым, снижению издержек, связанных с размещением и доставкой заказа и затрат на переналадку производства.

Страховые (*буферные*, *гарантийные, резервные)* запасы предназначены для компенсации случайных колебаний спроса и предложения. Страховой запас позволяет сохранить непрерывность производственного или торгового процесса в ситуациях неточного прогноза спроса, нарушения сроков и объемов поставок или качества полученных материальных ресурсов, предусмотренных договором, сбоев в производственно-технологических циклах, например, вызванных поломкой оборудования.

Иногда к буферным запасам относят так называемые *спекулятивные* запасы, создаваемые в случае, если предвидится повышение цены или крупная нехватка каких-то товаров, например, в связи с введением протекционистских квот или тарифов.

Запасы, которые создаются для обслуживания точно известных будущих потребностей, называются также предупредительными. Примером таких запасов служат *сезонные* запасы, поддерживаемые при сезонном характере (явно выраженных сезонных колебаниях) производства, потребления или транспортировки для обеспечения нормальной работы организаций и бесперебойность производственного потребления на время сезонных перерывов.

Запасы продвижения готовой продукции образуются в дистрибутивных каналах для быстрой реакции на проводимую фирмой маркетинговую политику продвижения товара на рынок.

Транзитные (технологические, переходные) запасы - запасы продукции производственно-технического назначения, на момент учета перемещающиеся из одной части логистической системы в другую, например, от поставщиков потребителям, и предназначенные для обеспечения запасов в каналах поставок и распределения. Запасы в системе распределения позволяют осуществлять процесс реализации вне зависимости от ситуации в производстве.

Подготовительные запасы предназначены для обеспечения бесперебойной работы предприятия во время подготовки материальных ресурсов к производственному или личному потреблению (оформления, сортировки, комплектации и т.п.).

Устаревшие (неликвидные) запасы — длительно неиспользуемые производственные или товарные запасы. Образуются, например, вследствие ухудшения качества и морального износа товаров во время хранения или в результате прекращения выпуска продукции, для изготовления которой они предназначались.

Классификация запасов по функциям необходима ввиду разного подхода к управлению каждым классом запасов. При этом каждое конкретное изделие, хранящееся в запасе, может одновременно выполнять несколько функций.

Каждый из видов запаса может быть измерен в натуральном выражении, в стоимостном выражении, либо в днях обеспеченности.

Основными *задачами управления запасами* являются, во-первых, определение необходимого уровня запаса в каждом звене логистической системы и на каждой стадии логистического процесса, во-вторых – создание системы контроля над фактическим размером запаса и своевременным его пополнением.

Решение этих задач существенно зависит от стратегических приоритетов управления логистикой, сложившихся в логистической системе и в её звеньях.
Наличие достаточного количества запасов способствует повышению качества обслуживания потребителей, обеспечивает стабильность и непрерывность процессов производства, распределения и сбыта. Серьёзным стимулом к созданию запасов выступают *издержки дефицита* — расходы, связанные с отсутствием необходимой продукции. Включают в себя упущенную прибыль, оплату простоя рабочих и оборудования, штрафы за несвоевременную поставку, дополнительные затраты на выполнение отложенного заказа и т.п.
Таким образом, стремление предприятия к экономической безопасности, ослаблению зависимости от внешней среды, ориентация на повышение производительности или максимальное удовлетворение спроса выражается в тенденции к *увеличению запасов*. С другой стороны, при создании запасов из оборота исключаются и замораживаются значительные финансовые средства, которые могли бы быть использованы, например, на инвестиции в новые технологии. Кроме того, запасы, способствуя уменьшению взаимозависимости звеньев логистической системы, могут привести к их изоляции друг от друга, что противоречит принципам системного подхода к управлению логистикой.
Поэтому если предприятие заинтересовано, прежде всего, в повышении эффективности производства (уменьшению общих издержек, ускорению оборачиваемости активов), улучшении потребительских свойств продукции, стратегия управления запасами будет направлена на *сокращение запасов* до минимально возможного уровня. В этом случае для снижения удельных издержек производства и заказа, минимизации простоя оборудования, выполнения других функций запаса без увеличения их уровня, применяются логистические технологии, позволяющие, в частности, сокращать сроки оформления заказа и доставки продукции. В определенном смысле компромиссом между тенденциями к максимизации и минимизации запасов является *оптимизация запасов*, представляющая собой задачу создания и поддержания количества запасов, достаточного для обеспечения заданного уровня обслуживания потребителей при минимально возможных затратах.

При построении стратегии управления запасами принимаются во внимание следующие основные типы затрат.

Затраты на приобретение определяются стоимостью единицы приобретаемой продукции (хранимого запаса). Стоимость может быть постоянной или зависеть от размера заказа, что обычно выражается в виде оптовых скидок.

Издержки выполнения заказа (издержки заказа) – не зависящие от объема партии затраты, связанные с размещением заказа у поставщиков. Включают управленческие, канцелярские и административные расходы (по оформлению и отправке заказа, подписанию договоров, приемке и размещению заказа, командировочные, оплата почтовых расходов и телефонных переговоров и т.п.). На промышленных предприятиях к этому типу издержек относят затраты на переналадку оборудования и подготовительные операции.

Обычно для определения издержек заказа общие годовые расходы отдела закупок делятся на число подаваемых за год заказов. Удельные издержки заказа убывают с увеличением заказываемой партии и, как следствие, сокращением количества заказов.

Транспортные затраты – расходы на транспортировку и затраты, связанные с запасами на время в пути. Могут учитываться как часть издержек выполнения заказа либо в стоимости единицы заказанной продукции. Как правило, удельные транспортные расходы уменьшаются при увеличении партии груза.

Издержки хранения – расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе и альтернативные издержки, определяемые нормой прибыли, которую можно было бы получить при ином использовании вложенных в запасы средств. Включают расходы на содержание помещений и оборудования, оплату коммунальных услуг, заработную плату работников, затраты, связанные с проведением инвентаризаций, расходы, связанные с комплектованием, потери вследствие порчи, хищений и естественной убыли товаров, процент на инвестированный капитал, замороженные финансовые средства, страховые выплаты, налоги.

Издержки хранения выражаются или в абсолютных единицах или в процентах от закупочной цены и во втором случае могут быть рассчитаны как отношение суммы всех затрат на хранение к средней стоимости запасов.

Математические задачи управления запасами часто могут быть сформулированы как задачи оптимизации, в которых требуется определить параметры стратегии управления запасами (нормы запасов, объемы поставок, интервалы времени между поставками и т.п.), связанной с минимальными издержками или обеспечивающей максимальную прибыль.

Вид этих задач определяется, в частности, типом системы снабжения, характеристикой спроса, свойствами восполнения запасов, функцией затрат, наличием ограничений.

Под *системой снабжения* понимается совокупность пунктов – поставщиков и складов, между которыми осуществляются перевозки товара. Возможны три варианта построения систем снабжения: децентрализованная, линейная и эшелонированная. В первом случае все склады непосредственно обслуживают потребителей, и недостача на одном или нескольких складах может быть покрыта за счет избытка запасов на других складах. Во втором рассматривается производственная цепочка (например, конвейер) и рассчитывается распределение запасов по степеням готовности продукта. В третьем случае каждая недостача покрывается за счет конечных запасов склада высшей ступени. В простейшем случае система снабжения сводится к одному складу, обслуживающему потребителей и пополняющему запасы из внешнего источника.

По числу хранимых номенклатур системы снабжения делятся на однородные и многономенклатурные. Свойства хранимых товаров либо предполагаются неизменными, либо учитывается естественная убыль, порча или возрастание ценности запасов со временем.

Спрос на товары может быть детерминированным (точно известным заранее) либо вероятностным. Детерминированный спрос подразделяется на статический, то есть имеющий постоянную интенсивность, и динамический, изменяющийся во времени. Вероятностный спрос может быть непрерывно распределенным или дискретным. Если его функция распределения неизменна во времени, спрос называется стационарным, в противном случае – нестационарным. Нестационарный спрос в каждый период может быть зависимым или независимым от предыстории процесса.

В случае построения многономенклатурных моделей необходимо учитывать, что спрос на разные номенклатуры может быть независимым, комплектным и коррелированным (например, товары являются взаимозаменяемыми).

Процесс *пополнения запаса* может осуществляться мгновенно или равномерно во времени. После размещения заказа он может быть поставлен немедленно или потребуется некоторое время на его выполнение. Интервал времени между моментом размещения заказа и его поставкой называется сроком выполнения заказа, он может быть детерминированным или случайным. Объём поставок может определяться заранее, либо представлять собой случайную величину. При наличии нескольких номенклатур поставки могут быть либо совмещаемыми, либо раздельными.

Функция затрат служит показателем эффективности принятого решения, учитывает издержки, зависящие от выбора стратегии и, возможно, доход (с отрицательным знаком) от реализации остатков запаса. В статических моделях рассматривается минимизация затрат за один период или в единицу времени, в динамических - за несколько периодов.

В задачах управления запасами могут учитываться различные *ограничения*, например, на максимальные объем или стоимость запасов, на среднее число поставок, ожидаемый дефицит.

В настоящем пособии рассматриваются основные детерминированные и вероятностные модели управления запасами.

ГЛАВА 1. СТРУКТУРИЗАЦИЯ ЗАПАСОВ

1.1. ABC - анализ

Запасы производственных и торговых предприятий, как правило, включают множество позиций ассортимента, по-разному влияющих на результат деятельности предприятия. Экономически нецелесообразно обеспечивать равный контроль и применять одинаковые методы управления и к ресурсам первостепенной важности, и к ресурсам, играющим незначительную роль в производстве. Обычно полезно выделить наиболее значимую по вкладу в общий результат и, зачастую, незначительную по количеству часть запасов, требующую особого внимания.

Широко известное правило Парето гласит: «Внутри определенной группы или множества отдельные малые части обнаруживают намного большую значимость, чем это соответствует их относительному удельному весу в этой группе» [6]. Правило Парето также называют правилом 20/80 или "правилом большого пальца", согласно ему пятая часть (20%) от всего количества объектов, с которыми обычно приходится иметь дело, дает примерно 80% результатов этого дела, вклад остальных 80% объектов составляет только 20% общего результата. Поднятый вверх большой палец правой руки символизирует 20% объектов, при этом сжатые в кулак 4 пальца обозначают значимость пальца, поднятого вверх — 80%.

Модификацией правила Парето, разделяющего множество управляемых объектов на две группы, является метод ABC, предусматривающий выделение трёх частей: *A*, *B*, *C*. Применительно к запасам на сладе, группу А составляют немногочисленные позиции, требующие особого внимания при определении величины заказа, контроля текущего запаса, затрат на доставку и хранение. Обычно на позиции этой группы приходится преобладающая часть вложений в запасы. К группе В относятся позиции номенклатуры, занимающие среднее положение в формировании запасов, запасы группы С составляют значительную часть в номенклатуре, но на них приходятся наименьшая часть вложений в запасы.

Рассмотрим ***общий алгоритм проведения анализа ABC***.

Первым, ключевым этапом является *определение цели анализа*. В процессе управления ассортиментом склада предприятия оптовой торговли можно попытаться, например, добиться сокращения величины запасов, или сокращения количества перемещений на складе, или сокращение хищений материальных ценностей. В зависимости от цели разделение множества объектов на подмножества будет разным. В первом случае необходимо выделить ассортимент, на долю которого приходится основная часть продаж. Для сокращения лишних движений по складу, и, соответственно, экономии сил и времени, ассортимент разделяется по признаку встречаемости позиции в отгрузочных накладных, и наиболее часто отгружаемый ассортимент следует размещать в так называемых горячих зонах, т. е. в зонах, наиболее удобно расположенных относительно мест отпуска товара. Чтобы сократить потерей в результате хищений следует обеспечить контроль дорогих позиций, причем тех из них, которые легко вынести со склада и реализовать на стороне. Эти позиции необходимо размещать в специальных камерах, укладывать в верхние ярусы стеллажей, что затрудняет хищение, чаще проводить инвентаризацию и т.п.

Вторым этапом АВС–анализа является *идентификация объектов управления*. Одну и ту же задачу можно решать при помощи воздействия на различные объекты управления, конечно, наибольший результат даст комплексное воздействие. Например, снизить запасы на складе можно в результате анализа ассортиментных позиций либо пересмотрев параметры заказа валообразующей продукции, либо активизируя продажи по позициям со сверхнормативным остатком. Для этой же цели в качестве объектов анализа можно выбрать поставщиков или покупателей и далее оптимизировать условия работы с ними.

На третьем этапе АВС – анализа необходимо выделить признак, на основе которого будет происходить дифференциация выбранных для анализа объектов, то есть *критерий классификации*. Ассортиментные позиции можно структурировать по объему продаж (в ценовом или количественном выражении), доходу, величине остатка на складе, скорости оборота запаса и т.п. Если объектом управления выбраны поставщики, то в качестве признака может выступать доля запасов, полученных от данного поставщика или объем или доходность оборотных средств, вложенных в работу с ним. Аналогично, покупатели классифицируются по объему продаж, полученному от них доходу, дебиторской задолженности.

В современных условиях часто требуется учитывать несколько критериев классификации. В этом случае возможны три основных подхода. Во-первых, при широкой номенклатуре ассортиментных позиций применяется последовательное использование критериев – сначала проводится классификация всей совокупности по наиболее существенному критерию, затем – классификация группы *А* по второму критерию и так далее. Во-вторых, можно проводить параллельную классификацию, то есть классификацию по каждому критерию отдельно, и определять затем номенклатурные группы путём парных сравнений. Наконец, возможно формирование синтетического критерия классификации, равного взвешенной сумме рассматриваемых критериев.

На четвёртом шаге алгоритма каждый из объектов оценивается по намеченному признаку и осуществляется группировка объектов управления в порядке убывания или возрастания выделенного признака, так чтобы наиболее значимые позиции находились в верхней части упорядоченного списка.

Предположим, без ограничения общности, анализируются n ассортиментных позиций, c_i – значение классификационного признака для i-й позиции в упорядоченном по убыванию списке, то есть

$$c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge c_n .$$

Обозначим $Q = \sum_{i=1}^{n} c_i$, тогда удельный вес значения критерия классификации в процентах $q_i = \frac{c_i}{Q} \cdot 100\%$. Первые j позиций списка составляют $x_j = \frac{j}{n} \cdot 100\%$ количества запасов, выраженного в номенклатурных позициях, а их вклад в общий результат рассчитывается нарастающим итогом значения признака, то есть

$$Q_j = \sum_{i=1}^{j} q_i .$$

Графически результат упорядочения и ранжирования объектов можно представить в виде кривой ABC в координатной плоскости, соединив плавной линией точки с координатами $\left(x_j, Q_j\right)$ (рис.1.1).

Пятым этапом алгоритма является разделение объектов анализа на группы A, B и C. Для этого определяются точки $\left(x_A, Q_A\right)$ и $\left(x_{A+B}, Q_{A+B}\right)$, соответствующие границам групп. К группе A относят позиции j, для которых $Q_j \le Q_A$, то есть $j \le \frac{n}{100} x_A$, к группе B – товары j, для которых $Q_A < Q_j \le Q_{A+B}$ ($\frac{n}{100} x_A < j \le \frac{n}{100} x_{A+B}$), остальные объекты составляют группу C.

Иногда ABC – классификация может включать более трех групп. Например, следует разбить на подмножества группу C, если отнесенные к ней позиции оказываются неоднородными по удельному значению признака – для одних позиций q_j может быть близко к 1%, для других – исчисляться сотыми долями процента. Также в отдельную группу могут быть выделены позиции товары, на которые нет спроса очень длительный период (например, год и более). Позиции номенклатуры с показателями, не подвергшимися изменениям за период с момента предыдущего анализа (например, неликвиды), как правило, исключаются из общей совокупности до проведения анализа, при этом изменяется только количество членов выборки.

На последнем шаге алгоритма проведения ABC–анализа полученные результаты интерпретируются, в соответствии поставленной на первом этапе задачей вырабатываются рекомендации по управлению выделенными номенклатурными группами.

Запасы группы A требуют частого проведения инвентаризации состояния запасов, правильность учета запасов этой группы должна подтверждаться чаще. Необходимо ежедневное обновление данных о запасах. Планирование и прогнозирование, касающееся этих запасов, должно характеризоваться большей степенью точности, нежели относящееся к запасам группы *B* и *C*. Требуется выявление реальных потребностей в номенклатурных позициях, тщательное отслеживание и расчет параметров поставки и размера страхового запаса.

Для номенклатурных позиций класса *B* указанные меры применяются реже, с большими приемлемыми допусками. Издержки хранения запасов группы *C* обычно сравнительно невелики, поэтому для этой категории запасов характерны большие размеры заказов и большой страховой запас. Как правило, постоянный учет не ведется, а осуществляется периодическая проверка, параметры заказа определяются исходя из конкретных условий, а не на основе количественного метода.

Методы выделения классификационных групп

Выделяют три основных подхода к определению номенклатурных групп – эмпирический, дифференциальный и аналитический методы.

Эмпирический метод предполагает границы групп известными заранее, например они могут быть получены усреднением результатов ранее проведенных исследований или экспертным путём. Классический АВС–метод основан на правиле Парето, то есть в группу *A* включаются позиции, имеющие до 80% нарастающего итога и составляющие 20% общего количества, группы *A* и *B* совместно должны обеспечивать 95% общего результата и 50% количества. Соответственно, половина запасов приходится на группу *C*. По другому правилу группа *A* должна обеспечивать 10% общего количества запасов и 65% результата, группа В – 25% общего количества и 25% результата, группа С, соответственно, 65% и 10%. В литературе встречаются и другие значения границ номенклатурных групп [6].

Поскольку не всегда удается обеспечить выполнение заданного соотношения между количественной долей и значением кумулятивного критерия, разбиение на группы осуществляется либо только на основании значений Q_j, либо на основании x_j, либо используется какой-либо компромисс этих вариантов. Например, *метод суммы* определяет границы номенклатурных групп на основании суммы количественной доли и наращенного итога. В соответствии с правилом Парето к группе *A* относят позиции, для которых эта сумма меньше или равна 100% (то есть 80%+20%), граница групп *A* и *B* принимается равной 145% (95%+50%).

Пример 1.1. [6] Рассмотрим данные по 20 позициям продукции на складе, в качестве критерия выбрана стоимость запасов, равная произведению количества единиц продукции на стоимость единицы.

На основе данных табл. 1.1. получаем, что в соответствии с правилом Парето группу *A* составят первые четыре позиции упорядоченного списка (78% стоимости и 20% количества), группу *B* – 6 позиций, группу *C* – 10 позиций (5,5% стоимости).

В основе ***дифференциального метода*** лежит среднее значение признака по всем объектам, то есть $\overline{c} = \frac{Q}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$. Предполагается, что заданы значения коэффициентов k_1 и k_2, как правило, $k_1 \in [2;6]$, $k_1 \in [1/3;1/2]$. К группе *A* относят объекты *i*, для которых $c_i \geq k_1\overline{c}$, в группу *B* попадают номенклатурные позиции, для которых $k_2\overline{c} \leq c_i < k_1\overline{c}$, остальные объекты ($c_i < k_2\overline{c}$) составляют группу С. Этот метод не требует предварительного упорядочения объектов и расчета удельных показателей, однако неопределенность выбора коэффициентов может привести к ошибочным результатам, например, невозможности выделения группы *A*.

Таблица 1.1.

Проведение ABC - анализа

Исходные данные				Результаты обработки					
№	Кол-во, ед.	Цена руб./ед.	c_i, руб.	№	x_j,%	c_j, руб.	q_j,%	Q_j, %	$x_j + Q_j$,%
1	3	20	60	2	5	600	30	30	35
2	12	50	600	9	10	400	20	50	60
3	20	2	40	12	15	360	18	68	83
4	1	30	30	6	20	200	10	78	98
5	2	7	14	16	25	80	4	82	107
6	40	5	200	17	30	80	4	86	116
7	4	4	16	1	35	60	3	89	124
8	2	3	6	3	40	40	2	91	131
9	4	100	400	11	45	40	2	93	138
10	2	1	2	4	50	30	1,5	94,5	144,5
11	10	4	40	15	55	20	1	95,5	150,5
12	18	20	360	14	60	18	0,9	96,4	156,4
13	2	2	4	7	65	16	0,8	97,2	162,2
14	3	6	18	5	70	14	0,7	97,9	167,9
15	2	10	20	20	75	12	0,6	98,5	173,5
16	2	40	80	18	80	10	0,5	99	179
17	1	80	80	19	85	8	0,4	99,4	184,4
18	5	2	10	8	90	6	0,3	99,7	189,7
19	4	2	8	13	95	4	0,2	99,9	194,9
20	3	4	12	10	100	2	0,1	100	200
			2000			2000	100		

Пример 1.2. Рассмотрим данные из табл. 1.1. Среднее значение показателя $\overline{c} = \frac{2000}{20} = 100$. Если $k_1 = 6$ и $k_2 = 0{,}5$, то к группе *A* следует отнести номенклатурные позиции, имеющие стоимость, большую или равную 600, к группе *B* – позиции, для которых $50 \leq c_j < 600$. Таким образом, в группу *A* попадет только одна позиция, в группу *B* – 6 позиций (30% номенклатуры).

Методы, границы групп в которых определяются в зависимости от характера интегральной кривой, называются ***аналитическими***.

Метод касательных заключается в разделении объектов анализа на группы при помощи касательных к кривой ABC–анализа. Границу группы *A* определяет точка, в которой касательная к кривой параллельна секущей, соединяющей крайние точки графика ($(0{,}0)$ и $(100{,}100)$). Предполагая непрерывную зависимость $q=q(x)$, имеем:

$$Q(x)=\int_{0}^{xn/100} q(\xi)d\xi\,,\; Q'(x)=\frac{n}{100}q\left(\frac{xn}{100}\right).$$

В точке (x_A,Q_A) производная функции $Q(x)$ равна 1. Таким образом, к первой группе относятся позиции ассортимента, удельный вес которых больше среднего значения, то есть

$$q_i \geq \overline{q}=\frac{100}{n}.$$

Чтобы найти границу групп *A* и *B*, следует соединить прямой найденную точку (x_A,Q_A) и конец кривой $(100{,}100)$ и определить точку, касательная в которой параллельна этой секущей. К группе *B*, тем самым, относятся объекты, для которых

$$\overline{q} > q_i \geq \frac{100-Q_A}{n(1-x_A/100)}.$$

При необходимости можно продолжить деление касательными и получить большее количество групп.

Пример 1.3. На основании данных табл. 1.1, $\overline{q}=5$, то есть $x_A=20$, $Q_A=78$, и в группу *A* войдут 4 позиции номенклатуры. Граница групп *A*+*B* определяется значением показателя $\frac{100-78}{20(1-0{,}2)}=1{,}375$, таким образом, $Q_{A+B}=94{,}5$ и группу *B* составят 6 позиций (рис.1.1).

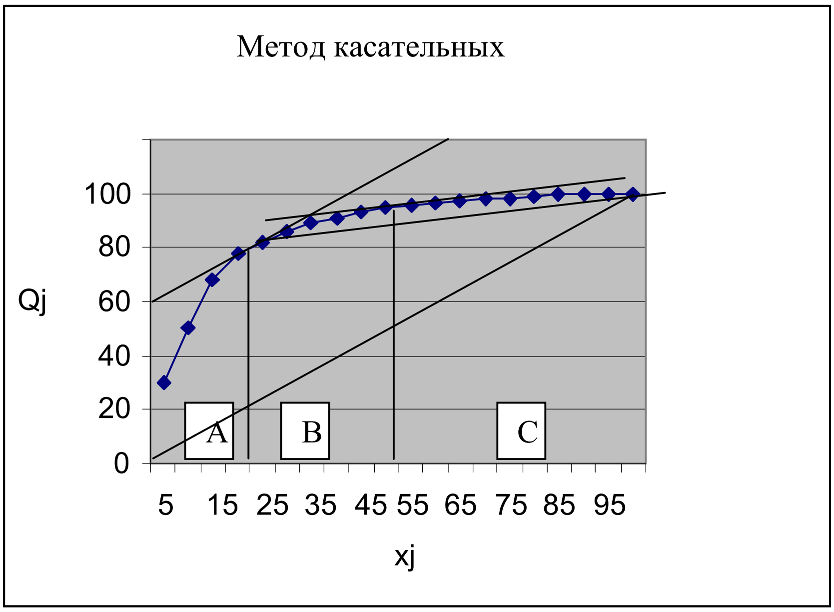

Рис.1.1. Метод касательных

Метод многоугольника. В кривую ABC–анализа вписывается ломаная линия из трех звеньев так, чтобы площадь между кривой и ломаной была минимальной (рис. 1.2). Координаты вершин искомой ломаной определяют границы номенклатурных групп.

Если объекты упорядочены в порядке убывания признака, требуется максимизировать площадь вписанного многоугольника, то есть найти индексы j_1 и j_2, $j_1 < j_2$ такие, что принимает наибольшее значение выражение

$$S(j_1, j_2) = j_2 Q_{j_1} - j_1 Q_{j_2} - 100 j_2 + n Q_{j_2}.$$

Таким образом, при фиксированном j_1 индекс j_2 определяется из условий

$$S(j_1, j_2) \geq S(j_1, j_2 + 1),\ S(j_1, j_2) \geq S(j_1, j_2 - 1),$$

то есть

$$q_{j_2+1} \leq \frac{100 - Q_{j_1}}{n - j_1} \leq q_{j_2}.$$

Аналогично, j_1 при фиксированном j_2 таков, что

$$q_{j_1+1} \leq \frac{Q_{j_2}}{j_2} \leq q_{j_1}.$$

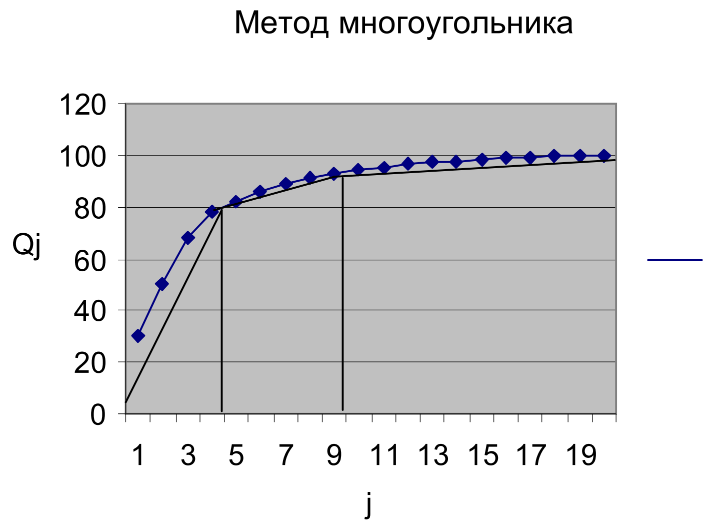

Рис. 1.2. Метод многоугольника

Пример 1.4. Опять используем данные табл. 1.1. Фиксируя поочередно j_1 и j_2, получаем следующие результаты (табл. 1.2). Например, при $j_1 = 11$, $q_{j_2+1} \leq \frac{100 - 95{,}5}{20 - 11} = 0{,}5 \leq q_{j_2}$.

Сравнивая результаты заключаем, что условиям удовлетворяют пары (3,9) и (4,10), следовательно, группа *A* включает первые 3 или 4 позиции упорядоченного списка, группа *B* – следующие 6 позиций.

Таблица 1.2

Расчёты для примера 1.4.

j_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	3,68	2,78	1,89	1,37	1,2	1	0,85	0,75	0,64	0,55
j_2	6	7	9	10	10	10, 11	12	13	14	15
j_1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
	0,5	0,45	0,4	0,43	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	
j_2	15, 16	16	16, 17	16	17, 18	18	18, 19	19	20	
j_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	25	22,67	19,5	16,4	14,33	12,71	11,37	10,33	9,45	8,68
j_1	1	1	2	3	3	3	3	3	4	4
j_2	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	8,03	7,48	6,96	6,57	6,19	5,85	5,54	5,26	5	
j_1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

Выбор аналитической зависимости. Пусть позиции номенклатуры и удельные значения показателя нормированы в интервале от 0 до 1. При большом объеме выборки для аппроксимации интегральной кривой может быть выбрана функция $y = f(x)$, параметры которой рассчитываются, например, с использованием метода наименьших квадратов, причем $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Аналитические методы выделения номенклатурных групп сводятся тогда к решению уравнений относительно $x_a = \frac{x_A}{100}$, $x_{a+b} = \frac{x_{A+B}}{100}$. По-существу, полученные ранее соотношения являются дискретными аналогами этих уравнений.

Например, применяя *метод касательных*, следует сначала определить точку x_a такую, что $f'(x_a) = 1$ (такая точка существует по теореме Лагранжа). Точка x_{a+b} находится затем из условия

$$f'(x_{a+b}) = \frac{1 - f(x_a)}{1 - x_a}.$$

Целевая функция в *методе многоугольника* примет вид

$$F(x_1, x_2) = x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) - x_2 + f(x_2).$$

Необходимые условия точки максимума функции F –

$$f'(x_a) = \frac{f(x_{a+b})}{x_{a+b}}, \; f'(x_{a+b}) = \frac{1 - f(x_a)}{1 - x_a},$$

то есть при фиксированном x_a точка x_{a+b} определяется так же, как и в методе касательных.

Пример 1.5. Рассмотрим зависимость вида $f(x) = \sqrt{a_1 x + a_2 x^2}$. Тогда

$$f'(x) = \frac{a_1 + 2a_2 x}{2\sqrt{a_1 x + a_2 x^2}}, \; f''(x) = -\frac{a_1^2}{4\left(a_1 x + a_2 x^2\right)^{3/2}}.$$

Метод касательных приводит к уравнению

$$4a_2(a_2-1)x^2+4a_1(a_2-1)x+a_1^2=0.$$

Обозначая $c=\dfrac{1-f(x_a)}{1-x_a}$, получаем, что x_{a+b} – решение уравнения

$$4a_2\left(a_2-c^2\right)x^2+4a_1\left(a_2-c^2\right)x+a_1^2=0.$$

Параметры, рассчитанные по методу наименьших квадратов по данным таблицы 1.1, равны $a_1=2{,}77$, $a_2=-1{,}86$. Полученная функция $y=f(x)$ достигает максимума на интервале $(0;1)$, что не соответствует характеру интегральной зависимости. Поэтому примем $a_1=2$, с учетом начальных условий $a_2=1-a_1=-1$, тогда $y=\sqrt{2x-x^2}$, уравнение примет вид

$$2x^2-4x+1=0,$$

откуда $x_a=0{,}293$, $f(x_a)=0{,}707$, $c=0{,}414$ и x_{a+b} определяется из уравнения

$$4\left(1+c^2\right)x^2-8\left(1+c^2\right)x+4=0.$$

Таким образом, $x_{a+b}=0{,}617$, следовательно, к группам *A* и *B* относятся по 6 позиций номенклатуры.

Используя эту же зависимость, получаем в методе прямоугольников, что x_a и x_{a+b} – решения системы

$$\frac{1-x_a}{\sqrt{2x_a-x_a^2}}=\frac{\sqrt{2x_{a+b}-x_{a+b}^2}}{x_{a+b}},\quad \frac{1-x_{a+b}}{\sqrt{2x_{a+b}-x_{a+b}^2}}=\frac{1-\sqrt{2x_a-x_a^2}}{1-x_a},$$

откуда получаем, что $x_a=1-\sqrt{3}/2\approx 0{,}134$, $x_{a+b}=0{,}5$. То есть, к группе А следует отнести 3 позиции, к группе *B* – 7 позиций.

1.2. XYZ-анализ

Анализ XYZ является дополнением к классификации методом ABC и предусматривает деление запасов на три группы в зависимости от степени равномерности спроса и точности прогнозирования.

Для каждой позиции номенклатуры анализируются показатели спроса x_t, представленные, как правило, в виде динамического ряда.

В группу *X* включают товары, спрос на которые равномерен, либо подвержен незначительным колебаниям. Объем реализации по товарам, включенным в данную группу, хорошо предсказуем.

К группе *Y* относят позиции ассортимента, которые потребляются в колеблющихся объемах. В частности, товары с сезонным характером спроса. Возможности прогнозирования спроса по товарам группы *Y* средние.

Товары группы *Z* характеризуются эпизодически возникающим спросом, поэтому получить точные и достоверные прогнозные оценки сложно.

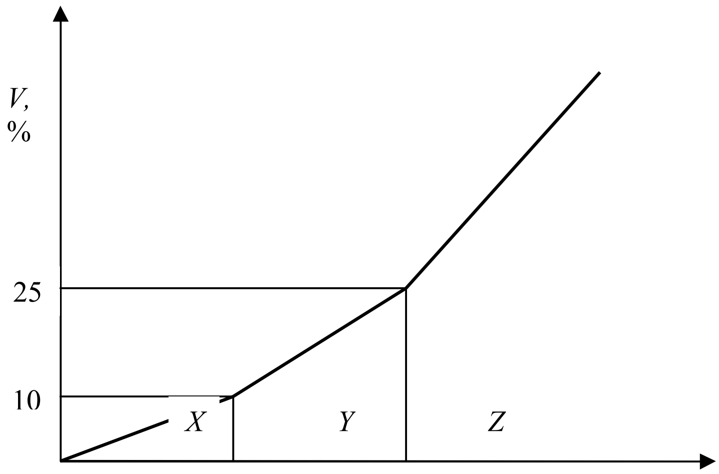

Рис. 1.3. XYZ – анализ

Как правило, признаком, на основе которого конкретную позицию ассортимента относят к группе *X*, *Y* или *Z*, является коэффициент вариации спроса по этой позиции

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} 100\%,$$

где $\bar{x}$ – среднее значение ряда, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_t$, n – длина ряда, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_t - \bar{x})^2}{n}}$ – среднеквадратическое отклонение.

Процедура XYZ – разбиения заключается в сравнении коэффициента вариации каждой позиции со значениями, определяющими границы групп. Классический принцип классификации подразумевает, что к группе *X* относятся объекты, для которых $V < 10\%$. Такой высокой стабильностью спроса могут обладать, например, материальные ресурсы, обеспечивающие производственный процесс. В группу *Y* выделяют позиции, коэффициент вариации которых лежит в пределах от 10% до 25%, соответственно товары, для которых $V > 25\%$, относятся к группе *Z*.

Для учета особенностей конкретного бизнеса классические границы классификации могут быть изменены, например, могут быть приняты границы группы *Y* от 15 – 20% до 40 – 45%, возможно использование экспертных оценок.

Кроме того, в основе выделения групп может лежать среднее значение коэффициента вариации V_{cp}, к группе *X* тогда относят номенклатуры с $V < V_{cp}$.

Таким образом, общий алгоритм проведения анализа *XYZ* следующий: Определить коэффициенты вариации по отдельным позициям ассортимента.

Упорядочить объекты управления в порядке возрастания коэффициентов вариации.
Разделить совокупность объектов управления на группы.

Как и при проведении ABC анализа, может быть построена кривая XYZ (рис. 1.3), по оси абсцисс откладывают позиции ассортимента в порядке возрастания коэффициента вариации спроса.

Применение XYZ анализа имеет ряд существенных ограничений. Во-первых, необходим достаточный объем исходных данных (число исследуемых периодов не меньше трех). Во-вторых, XYZ-анализ неинформативен в случае динамично меняющейся ситуации, например, при выводе на рынок нового товара. На результат расчетов может серьезно повлиять сезонность, поскольку товар, приобретенный заранее на случай повышения сезонного спроса, попадет в категорию *Z* из-за скачков продаж.

Для более точного отражения динамики протекающих процессов может быть использован «динамический» коэффициент вариации

$$V_{t+l} = \frac{\sigma_{t+l}}{x_{t+l}} 100\%,$$

где x_{t+l} – прогнозное значение динамического ряда, рассчитанное с учетом тренда и сезонной составляющей, σ_{t+l} – среднеквадратическое отклонение динамического ряда. Этот подход позволяет в большинстве случаев уменьшить доверительный интервал и повысить точность прогноза.

Поскольку запасы группы *X* характеризуются высокой стабильностью спроса, возможна реализация стратегия их минимизации на основе налаживания взаимодействия звеньев логистической цепи и усиления, тем самым, согласованности характеристик поставки и потребления.

Спрос на запасы группы *Y*, как правило, имеет явно выраженную тенденцию или сезонные колебания. Рекомендуется оптимизировать данные запасы с целью обеспечить заданный уровень обслуживания потребителей при минимуме совокупных затрат.

Прогноз потребности номенклатурных позиций группы *Z* невозможен, следовательно, оптимизационный подход к управлению запасами непригоден и необходимо определить, целесообразно ли их сокращать или, напротив, максимизировать.

Сочетание ABC и XYZ анализа приводит к выделению 9 групп запасов (некоторые из которых могут быть пустыми), для каждой из которой разрабатываются свои рекомендации по управлению. Например, для запасов группы *AX* по возможности используется технология поставок «точно в срок», для группы *AZ* следует уделить внимание созданию страховых запасов [5].

ГЛАВА 2. СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

2.1. Классическая модель экономического размера заказа

Наиболее распространенной моделью управления запасами является модель оптимального или экономического размера заказа (Economic Order Quantity, EOQ).

Экономическим размером заказа называется величина партии товаров, которая позволяет минимизировать общие переменные издержки, связанные с заказом и хранением запасов.

В модели EOQ рассматривается предприятие, например, склад или розничный магазин, которое имеет постоянный спрос на некоторый товар и заказывает этот товар от другого предприятия в распределительной сети, имеющего, по предположению, неограниченное количество товара. В моделях параграфов 2.1 – 2.3 используются также следующие допущения:

Рассматриваются только текущие (регулярные) запасы.

Товар может храниться неограниченное время и не устаревает. Ввиду этого предположения удобно считать, что система будет продолжать работать и в будущем, то есть горизонт планирования бесконечен.

Затраты на выполнение заказа, цена поставляемой продукции и затраты на хранение единицы продукции в течение рассматриваемого периода постоянны.

Время выполнения заказа, то есть время между размещением заказа и его поступлением на склад, постоянно и не зависит от интенсивности спроса и размера заказа.

Емкость склада для хранения ресурсов не ограничена.

В функции суммарных затрат могут учитываться затраты на приобретение товара (C_C), издержки выполнения заказа (C_K), затраты на хранение (C_H), потери от дефицита (C_D). Таким образом,

$$C_\Sigma = C_C + C_K + C_H + C_D. \tag{2.1}$$

Если какие-то из указанных видов затрат незначительны или не зависят от стратегии управления запасами, то включение их в целевую функцию задачи необязательно.

Поскольку спрос и время поставки детерминированы и постоянны, то ясно, что если система функционирует оптимально, то при подаче заказа каждый раз заказывается одно и то же количество товара, а уровень наличного запаса в момент поступления пополнения всегда один и тот же.

Уровень запасов, находящихся на складе, при котором нужно сделать очередной заказ, называется *точкой возобновления (восстановления) заказа*.

Период τ между последовательными заказами (поставками) также постоянный. Говорят, что система совершает один *цикл работы* между любыми двумя моментами, разделенными интервалом τ. В течение каждого цикла система ведет себя в точности так же, как и в течение предыдущего цикла.

Все стоимости, входящие в (2.1), должны быть выражены как функции искомого объема заказа или интервала времени между заказами. При этом удобно считать, что размер спроса является непрерывной функцией времени.

Требуется определить, когда должен быть подан заказ на пополнение и каков должен быть его размер так, чтобы средние общие издержки (2.1) в единицу времени были минимальны.

Введем следующие обозначения.

d – интенсивность спроса (потребность в продукции в единицу времени);

c – цена единицы продукции;

K – затраты на выполнение одного заказа;

h — издержки хранения, начисляются на каждую единицу складируемого товара в единицу времени. Если задана доля α от цены c, приходящейся на затраты по хранению, то $h = \alpha c$;

Q – искомая величина заказа.

Рассмотрим сначала наиболее простую модель экономического размера заказа, предложенную Харрисом в 1915. Дополнительно предполагается следующее:

начальный запас равен нулю;

закупочная цена не зависит от размера заказа;

выполнение заказов происходит немедленно (время доставки равно нулю) и весь заказ поступает в виде одной партии;

не допускается дефицит.

Рассмотрим уровень запаса как функцию от времени $I = I(t)$. Легко видеть, что стратегия оптимального размера заказа должна удовлетворять *свойству нулевого запаса при заказе*, то есть заказ делается только тогда, когда уровень запаса достигает нуля. В самом деле, предположим, что новый заказ поступает на склад, когда уровень запасов не равен нулю. Тогда возможно снизить издержки хранения, не увеличивая остальных издержек, разместив заказ позже, когда запас обнулиться.

Таким образом, уровень запасов убывает с постоянной скоростью d, пока не достигает нулевого значения. В этот момент времени размещается и мгновенно поступает заказ, размер которого равен Q и уровень запаса восстанавливается до максимального значения. Динамика изменения количества продукта на складе показана на рисунке 2.1. Это так называемая пилообразная модель запаса.

Период между последовательными заказами равен $\tau = \dfrac{Q}{d}$ единиц времени. Средние затраты на приобретение товара $cQ/\tau = cd$ не зависят от размера партии, поэтому не учитываются в целевой функции.

Затраты на хранение запаса в течение цикла составляют

$$h\int_0^{\tau} I(t)dt = \frac{h}{2}Q\tau .$$

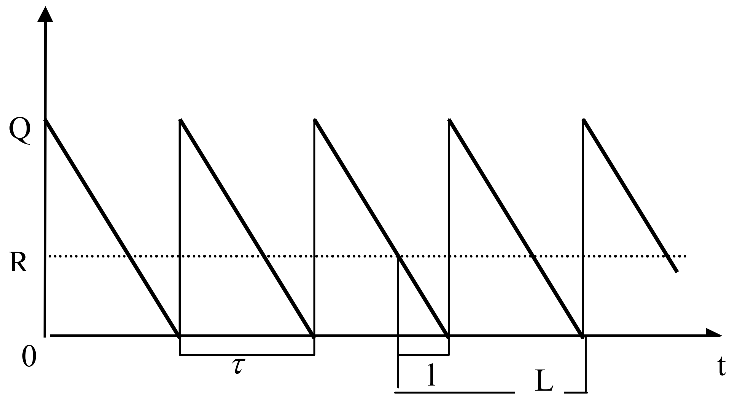

Рис.2.1. Основная модель оптимального размера заказа

Таким образом, общие издержки за цикл длиной τ равны

$$C_{\Sigma} = K + \frac{h\tau Q}{2}, \tag{2.2}$$

и, так как $Q = \tau d$, средние общие издержки в единицу времени, равные C_{Σ} / τ, можно представить как функцию от Q в следующем виде:

$$C(Q) = \frac{Kd}{Q} + \frac{hQ}{2}. \tag{2.3}$$

Чем меньше размер заказа, тем меньше стоимость хранения и средний уровень запаса, но чаще нужно размещать новые заказы и требуются более высокие удельные капитальные вложения. Кривые издержек заказа, издержек хранения и совокупных издержек в зависимости от размера заказа указаны на рисунке 2.2.

Оптимальное значение объема заказа Q^* определяется путем минимизации функции $C(Q)$ на интервале $(0;\infty)$. Поскольку спрос считается непрерывной переменной, Q также можно рассматривать как непрерывную переменную.

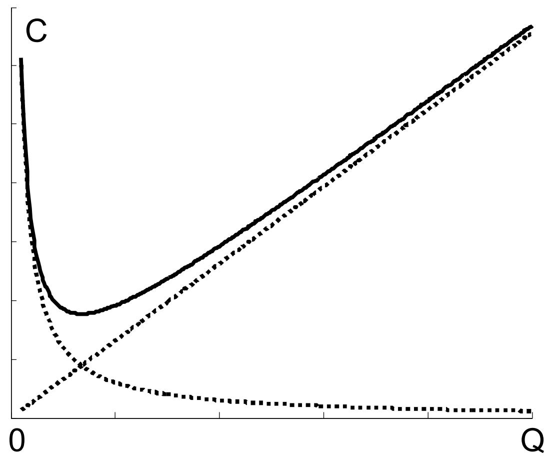

Рис. 2.2. Средние суммарные затраты

Функция $C(Q)$ строго выпукла при $Q > 0$, так как $\frac{d^2C}{dQ^2} = \frac{2Kd}{Q^3} > 0$, поэтому необходимым и достаточным условием для точки минимума является равенство

$$\frac{dC(Q)}{dQ} = -\frac{Kd}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0.$$

Следовательно, оптимальный размер заказа определяется однозначно и равен

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h}}. \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) в литературе называется формулой размера партии, экономической величиной заказа (EOQ), формулой Уилсона (Вильсона), формулой Харриса, формулой Кампа.

Оптимальное время между заказами (протяженность цикла)

$$\tau^* = \frac{Q^*}{d} = \sqrt{\frac{2K}{dh}}. \tag{2.5}$$

Таким образом, оптимальная стратегия управления запасами для рассмотренной модели формулируется следующим образом:

Заказывать Q^* единиц продукции через каждые τ^* единиц времени.

Средние общие издержки на поставку и содержание запаса при оптимальной стратегии поставок равны

$$dK\sqrt{h/(2dK)} + h\sqrt{dK/(2h)} = \sqrt{2Kdh} \tag{2.6}$$

Следует отметить, что в точке $Q = Q^*$ издержки заказа в единицу времени равны стоимости хранения в единицу времени. При других зависимостях издержек заказа и хранения от величины заказа указанное совпадение может не наблюдаться. Наличный запас в среднем равен $Q^*/2 = \sqrt{Kd/2h}$. Средний и максимальный уровни запаса в системе, а также средние общие издержки на поставку и содержание запаса пропорциональны корню квадратному от интенсивности поступления требований.

Аналогично можно рассмотреть задачу определения оптимального интервала времени между заказами. При сделанных предположениях очевидно, что количество товара, заказываемого каждый раз, будет равно $Q = d\tau$. Поэтому совокупные издержки за цикл составят

$$C(\tau) = \frac{K}{\tau} + \frac{hd}{2}\tau,$$

а оптимальное значение τ –

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{hd}},$$

что в точности совпадает с (2.5). Если τ^* умножить на d, то получим, что объём заказа рассчитывается по формуле Уилсона. Таким образом, при неслучайном спросе задача определения размера заказа, поступающего при нулевом запасе и задача поиска интервала времени между заказами эквивалентны.

Рассмотренная модель может применяться и в ситуации, когда начальный уровень запаса равен $I_0 > 0$. В этом случае первый заказ следует разместить в момент времени I_0 / d.

В реальных ситуациях пополнение запаса не может произойти мгновенно в момент размещения заказа. Как правило, существует положительный срок выполнения заказа L, как показано на рисунке 2.1. При этом необходимо определить точку возобновления (восстановления) заказа r.

Чтобы избежать дефицита, следует заказывать пополнение тогда, когда имеющийся запас ещё достаточен для удовлетворения спроса в период выполнения заказа на пополнение, и определять точку заказа таким образом, чтобы к моменту поступления заказа размер запаса на складе был равен нулю.

Пусть τ — длина цикла, тогда если $L < \tau$, то очевидно, что объем спроса за время поставки (и, соответственно, точка заказа) составляет $r = Ld$ и представляет из себя объём технологических запасов.

В противном случае, *эффективным сроком* l выполнения заказа называется остаток от деления L на τ, то есть, если n — наибольшее целое число, не превышающее L / τ,

$$l = L - n\tau .$$

После n циклов (длиной τ каждый) ситуация управления запасами становится такой же, как если бы интервал между размещением одного заказа и получением другого был равен l. Следовательно, точка возобновления заказа имеет место при уровне запаса $r = ld$ единиц продукции, причем $r = d(L - n\tau) = dL - nQ$. Очевидно, что в случае, когда $L < \tau$, $l = L$.

На рисунке 2.1 горизонтальной линией указано количество продукта, равное точке восстановления.

Стратегия управления запасами может быть переформулирована следующим образом:

Заказывать Q^* единиц продукции, как только уровень запаса опускается до r единиц.

2.2. Модели с постепенным пополнением запаса

В предыдущей модели предполагалось, что весь заказ поступает на склад сразу. Однако иногда возможность одновременного приходования на складе поступившей партии товара отсутствует. Это относится к ситуациям, когда объем поставок очень велик (например, при доставке крупных партий товара по железной дороге) или процедура приемки длится достаточно долго (например, при проведении тщательной проверки по качеству).

Пусть разгрузка и пополнение запаса объемом Q происходят постепенно, с постоянной интенсивностью (темпом) $p = Q/t$, где t – период разгрузки. Как правило, темп поставки превышает темп потребления, излишки продукта накапливаются на складе. Когда поставка прекращается, количество продукта на складе достигает максимального значения, и продукт расходуется со склада с постоянным темпом. Таким образом, цикл делится на две части – в первую (длиной τ_1) происходит одновременное пополнение и расход запаса, во вторую (τ_2) – только расход. Как и ранее, предполагаем, что закупочная цена не зависит от размера заказа, не допускается дефицит.

Динамика изменения количества продукта показана на рисунке 2.3.

Максимальная величина запаса $S = (p-d)\tau_1 = d\tau_2$, протяженность цикла $\tau = \tau_1 + \tau_2 = \dfrac{Sp}{d(p-d)}$, размер заказа равен $Q = d\tau = S\dfrac{p}{p-d}$. Тогда совокупные издержки за цикл равны $K + \dfrac{h}{2}S\tau$, в единицу времени –

$$C(Q) = \frac{Kd}{Q} + \frac{h}{2}\frac{p-d}{d}Q. \tag{2.7}$$

Оптимальный размер заказа (минимизирующий (2.7)) определяется, следовательно, по формуле

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{p}{p-d}} = \alpha\sqrt{\frac{2Kd}{h}}, \tag{2.8}$$

где $\alpha = \sqrt{\dfrac{p}{p-d}}$ – «поправочный» коэффициент для модели, размер заказа превышает рассчитанный по формуле Уилсона.

Максимальная величина запаса

$$S^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{p-d}{p}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2Kd}{h}},$$

минимальные издержки в единицу времени – $\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{2Kdh}$.

Рассчитаем точку заказа. Пусть l – эффективный срок выполнения заказа. За время l потребность в товарах составит ld и, если $l < \tau_2$ (на рис. 2.3 – l_1), $r = ld$. В случае $l > \tau_2$ (l_2 на рис. 2.3) $r = (p-d)(\tau - l)$, что обусловлено тем, что во время поставки будет произведено $p(l-\tau_2)$ единиц товара.

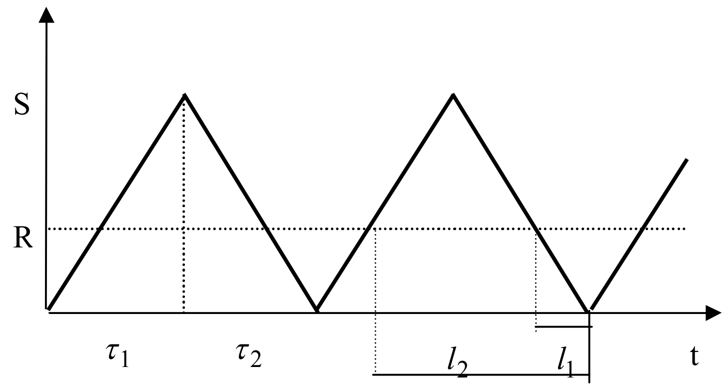

Рис.2.3. Постепенное пополнение запаса

Рассмотренная модель носит также название модели производственного размера заказа (POQ), что связано со следующей её интерпретацией. Фирма производит продукт самостоятельно с постоянным темпом p, хранит его на складе и расходует с постоянным темпом d. Производство останавливается, когда запас на складе достигает максимального уровня, и возобновляется при нулевом запасе. В формуле (2.8) K считаются фиксированными издержками на запуск производства, Q^* – размер производственного заказа, минимизирующий общие издержки единицу времени, равные сумме издержек хранения и издержек на возобновление производства.

Рассмотрим теперь учет в модели производственного размера заказа затрат, связанных с хранением продукции, прибывающей на склад в контейнерах, кузовах автомобилей или железнодорожных вагонах во время разгрузки транспортных средств. Пусть h^* – удельные издержки хранения единицы товара во время разгрузки в единицу времени. Так как количество товаров во временном хранении убывает за период τ_1 с величины Q до нуля с постоянной скоростью p, дополнительные затраты на хранение за период $\tau_1 + \tau_2 = \dfrac{Q}{d}$ равны $\dfrac{h^*}{2}\dfrac{Q^2}{p}$, то есть суммарные затраты за цикл составят $K + \dfrac{h}{2}\dfrac{(p-d)}{pd}Q^2 + \dfrac{h^*}{2}\dfrac{Q^2}{d}$, в единицу времени –

$$\frac{Kd}{Q} + \frac{h}{2}\frac{(p-d)}{p}Q + \frac{h^* d}{2}\frac{Q}{p} = \frac{Kd}{Q} + \frac{h(p-d) + h^* d}{2p}Q.$$

Оптимальный размер заказа тогда равен

$$\sqrt{\frac{2Kdp}{h(p-d) + h^* d}} = \sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{p}{p - d\left(1 - h^*/h\right)}} = \beta\sqrt{\frac{2Kd}{h}},$$

где $\beta = \sqrt{\dfrac{p}{p-d\left(1-h^*/h\right)}}$ – «поправочный» коэффициент для откорректированной модели EPQ, минимальные издержки – $\sqrt{\dfrac{2KDH}{\beta}}$, максимальная партия, поступившая на склад – $Q\beta/\alpha^2$.

Легко видеть, что при $p=d$ (запасов на складе не образуется) модель сводится к классической модели EOQ, где хранение осуществляется на транспортных средствах с удельными издержками h^*. Транспортные средства (контейнеры, автомобили и т.п.) должны простаивать в течение периода t. Исходная модель экономического размера заказа получается при $d/p \to 0$ (мгновенном пополнении запаса). При $h^* = 0$ получаем модель производственного размера заказа.

2.3. Модели с учетом потерь от дефицита

Дефицит при управлении запасами не допускается, если связанные с ним издержки велики и превышают затраты на хранение запаса увеличенной партии поставки. Если же затраты, вызванные нехваткой товаров, сопоставимы с затратами на содержание запасов, то экономически выгодно не удовлетворять заявки некоторых клиентов. В этой ситуации необходимо определить размер заказа, минимизирующий суммарные издержки хранения, заказа и дефицита.

В модели оптимального размера заказа с потерянным спросом дефицит рассматривается как невозможность удовлетворить заявки на отгрузку товаров: клиентам отказывают, последующее восполнение запаса ведется в прежних размерах.

В модели с отложенным спросом дефицит, проявившийся за время поставки, учитывается в размере партии, что позволяет покрыть как текущий спрос, так и ранее заявленный, но неудовлетворенный.

Выбор одной из этих двух моделей зависит от затрат, которые организация несет в той или другой ситуации.

Модели с отложенным спросом

Динамика изменения количества продукта на складе показана на рис. 2.4. Заказ поступает тогда, когда дефицит продукта на складе достигает оптимального размера.

Пусть τ_1 – время цикла, в течение которого запас на складе в наличии, τ_2 – время, которое запас отсутствует. Тогда максимальный запас на складе $S = d\tau_1$, максимальный дефицит $Q - S = d\tau_2$, протяженность цикла $\tau = \tau_1 + \tau_2 = Q/d$.

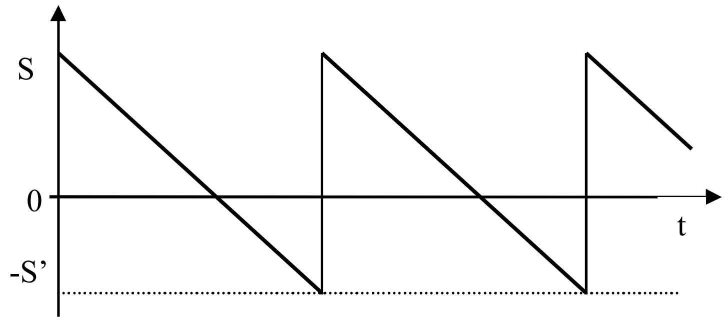

Рис. 2.4. Отложенный спрос

Обозначим через b убытки, вызванные дефицитом одной единицы продукта в единицу времени. Издержки заказа, хранения и дефицита за цикл

$$K+\frac{h}{2}S\tau_1+\frac{b}{2}(Q-S)\tau_2,$$

совокупные издержки в единицу времени –

$$C(Q,S)=\frac{Kd}{Q}+\frac{h}{2}\frac{S^2}{Q}+\frac{b}{2}\frac{(Q-S)^2}{Q}. \qquad (2.9)$$

Для определения оптимального размера заказа минимизируем (2.9) по Q, S при условии $Q-S\geq 0$. Найдем стационарную точку функции затрат.

$$\frac{\partial}{\partial S}C=\frac{hS}{Q}-\frac{b(Q-S)}{Q}=0,\ \frac{\partial}{\partial Q}C=-\frac{Kd}{Q^2}-\frac{hS^2}{2Q^2}+b\frac{2Q(Q-S)-(Q-S)^2}{2Q^2}=0.$$

Отсюда $S=\frac{b}{b+h}Q$, $2Kd=\frac{bh}{b+h}Q^2$, то есть

$$Q=\sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{b+h}{b}},\ S=\sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{b}{h+b}}. \qquad (2.10)$$

Суммарные затраты в этой точке

$$C=\frac{Kd}{Q}+\frac{hb}{2(b+h)}Q=\sqrt{\frac{2Kdhb}{b+h}}.$$

Так как «поправка на дефицит» $\sqrt{\frac{b}{h+b}}<1$, при отсутствии дефицита ($S=Q$) затраты больше и (2.10) определяют оптимальный размер заказа и оптимальный максимальный уровень запаса. Оптимальный максимальный дефицит

$$Q-S=\sqrt{\frac{2Kd}{b}\frac{h}{(h+b)}}.$$

В моделях с дефицитом заказ должен поступить на склад в момент, когда уровень дефицита (отрицательный запас) максимален. Точка заказа может принимать отрицательные значения. Если $l<\tau_2$, заказ размещается при достижении дефицитом уровня $d(\tau_2 - l)$. В противном случае уровень запаса в момент заказа равен $d(l - \tau_2)$. Таким образом, $r = d\left(l - \frac{h}{b+h}\tau\right)$.

Предположим теперь, что допускается и постепенное пополнение запаса, и наличие дефицита.

Пусть невыполненные заявки на потребляемый продукт накапливаются и немедленно удовлетворяются по мере новых поступлений продукта. Длительность цикла изменения запасов τ разделяется на 4 этапа, $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$. На первом этапе заказанный продукт производится, произведенный продукт потребляется, то есть происходит накопление запаса, τ_2 – период расхода запаса, в третьем периоде накапливаются невыполненные заявки, τ_4 – период выполнения задолженных заявок.

Обозначим через S' максимальный уровень дефицита, как и ранее, S – максимальный уровень запаса на складе. Очевидно,

$$S = (p-d)\tau_1 = d\tau_2,\ S' = (p-d)\tau_4 = d\tau_3.$$

Объем заказываемой партии равен спросу за период, то есть

$$Q = p(\tau_4 + \tau_1) = \frac{p}{p-d}(S' + S) = d\tau,$$

отсюда продолжительность цикла

$$\tau = \frac{p}{d(p-d)}(S + S').$$

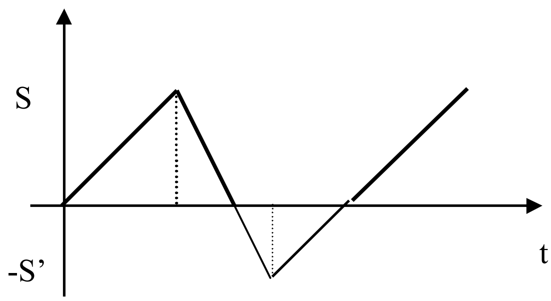

Рис.2.5. Учет дефицита при постепенном пополнении

Издержки хранения за цикл составят $\frac{h}{2}S(\tau_1 + \tau_2) = \frac{hp}{2d(p-d)}S^2$,

издержки дефицита $\frac{b}{2}S'(\tau_3 + \tau_4) = \frac{bp}{2d(p-d)}S'^2$. Таким образом, совокупные издержки за цикл

$$K + \frac{hp}{2d(p-d)}S^2 + \frac{bp}{2d(p-d)}S'^2,$$

затраты в единицу времени

$$C(S,S')=\frac{Kd(p-d)}{p(S'+S)}+\frac{h}{2}\frac{S^2}{S'+S}+\frac{b}{2}\frac{S'^2}{S'+S}. \qquad (2.11)$$

Необходимые условия точки минимума (2.11) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial S'}C(S,S')=-\frac{Kd(p-d)}{p(S+S'')^2}-\frac{h}{2}\frac{S^2}{(S+S')^2}+\frac{b}{2}\frac{S'^2+2SS'}{(S+S')^2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial S}C(S,S')=-\frac{Kd(p-d)}{p(S+S')^2}+\frac{h}{2}\frac{S^2+2SS'}{(S+S')^2}-\frac{b}{2}\frac{S'^2}{(S+S')^2}=0.$$

Совместное решение этих уравнений дает для оптимальных S и S' условия

$$S=\sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{p-d}{p}\frac{b}{b+h}},\ S'=\frac{h}{b}S=\sqrt{\frac{2Kd}{b}\frac{p-d}{p}\frac{h}{b+h}}. \qquad (2.12)$$

Из соотношений (2.12) вытекают также формулы

$$\tau_1=\frac{Q}{p}\cdot\frac{b}{h+b};\quad \tau_2=\frac{Q}{d}\cdot\frac{b(p-d)}{(h+b)p};\quad \tau_3=\frac{Q}{d}\cdot\frac{(p-d)h}{p(n+b)};\ \tau_4=\frac{Q}{p}\cdot\frac{h}{h+b}.$$

Издержки в единицу времени как функция размера заказа (при условиях (2.12))

$$C(Q)=\frac{Kd}{Q}+\frac{h}{2}\frac{(p-d)b^2}{p(b+h)^2}Q+\frac{b}{2}\frac{(p-d)h^2}{p(h+b)^2}Q=\frac{Kd}{Q}+\frac{Q}{2}\frac{hb(p-d)}{p(b+h)}.$$

Таким образом, оптимальный размер заказа

$$Q=\frac{p}{p-d}\frac{h+b}{b}S=\sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{p}{p-d}\frac{b+h}{b}}=\sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{1+h/b}{1-d/p}}, \qquad (2.13)$$

оптимальная протяженность цикла $\tau=\sqrt{\frac{2K}{dh}\frac{1+h/b}{1-d/p}}$.

Минимальные издержки составят

$$\sqrt{\frac{2Kdh(1-d/p)}{1+h/b}}.$$

Пусть l – эффективный срок выполнения заказа. Если $l<\tau_2+\tau_3$, точка заказа рассчитывается по формуле $r=d(l-\tau_3)$. Пусть $\tau_2+\tau_3\le l$. Тогда

$$r=S-(p-d)(l-\tau_2-\tau_3)=(p-d)(\tau_1+\tau_2+\tau_3-l).$$

Формулы модели производственного размера заказа и модели учета дефицита при мгновенном пополнении можно получить как частные случаи последней модели при $h/b\approx 0$ и $d/p\approx 0$ соответственно.

Модели с потерянным спросом

Предположим, запас пополняется мгновенно. Тогда максимальный объем запаса на складе совпадает с объемом запаса. Если S' – максимальный дефицит, совокупные издержки в единицу времени составят

$$C(Q,S')=\frac{Kd}{Q+S'}+\frac{h}{2}\frac{Q^2}{Q+S'}+\frac{b}{2}\frac{(S')^2}{Q+S'}, \qquad (2.14)$$

соответственно оптимальный размер заказа

$$Q = \sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{b}{h+b}}, \qquad (2.15)$$

оптимальный максимальный дефицит $S' = \sqrt{\frac{2Kd}{b}\frac{h}{(h+b)}}$.

При постепенном пополнении длительность цикла изменения запасов τ разделяется на 3 этапа: $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$. В период τ_1 запас накапливается, во втором периоде накопленный запас расходуется, τ_3 – период дефицита, заказанный продукт не производится, запас отсутствует. Штраф за дефицит в модели с потерей невыполненных заявок выше, чем в модели с отложенным спросом.

Очевидно, $S = (p-d)\tau_1 = d\tau_2$, $S' = d\tau_3$.

Объем заказываемой партии равен $Q = p\tau_1 = \frac{p}{p-d}S$, продолжительность цикла

$$\tau = \frac{(p-d)S' + pS}{d(p-d)} = \frac{S'+Q}{d}.$$

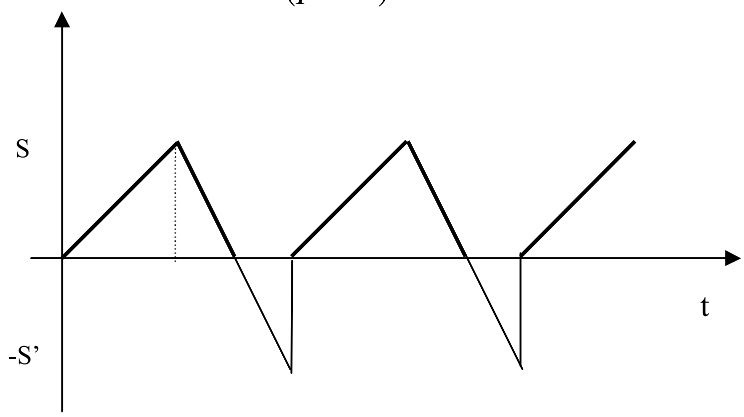

Рис.2.6. Модель с потерей спроса при постепенном пополнении

Издержки хранения $\frac{h}{2}S(\tau_1 + \tau_2) = \frac{hp}{2d(p-d)}S^2$, издержки дефицита $\frac{b}{2}S'\tau_3 = \frac{b}{2d}S'^2$. Таким образом, совокупные издержки за цикл

$$K + \frac{hp}{2d(p-d)}S^2 + \frac{b}{2d}S'^2 = K + \frac{h(p-d)}{2dp}Q^2 + \frac{b}{2d}S'^2,$$

затраты в единицу времени

$$C(Q,S') = \frac{Kd}{S'+Q} + \frac{h(p-d)}{2p}\frac{Q^2}{S'+Q} + \frac{b}{2}\frac{S'^2}{S'+Q}. \qquad (2.16)$$

Условия оптимальности:

$$\frac{\partial}{\partial S'}C(Q,S')=-\frac{Kd}{(S'+Q)^2}-\frac{h}{2p}\frac{(p-d)Q^2}{(S'+Q)^2}+\frac{b}{2}\frac{2S'Q+S'^2}{(S'+Q)^2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial Q}C(Q,S')=-\frac{Kd}{(S'+Q)^2}+\frac{h(p-d)}{2p}\frac{2QS'+Q^2}{(S'+Q)^2}-\frac{b}{2}\frac{S'^2}{(S'+Q)^2}=0.$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$S'=\frac{h}{b}\frac{(p-d)}{p}Q,\ Q=\sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{1}{1-d/p+(1-d/p)^2 h/b}}. \qquad (2.17)$$

Оптимальный максимальный уровень запаса $S=\sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{1-d/p}{1+(1-d/p)h/b}}$,

оптимальный максимальный дефицит $S'=\frac{h}{b}\sqrt{\frac{2Kd}{h}\frac{1-d/p}{1+(1-d/p)h/b}}$,

оптимальная протяженность цикла $\tau=\frac{Q+S'}{d}=\sqrt{\frac{2K}{h}\frac{1+(1-d/p)h/b}{(1-d/p)d^2}}$,

минимальные издержки $C=\sqrt{\frac{2Kdh(1-d/p)}{(1+h/b(1-d/p))}}$.

2.4. Погрешности в определении размера заказа

Расчет параметров стратегий управления запасами по формулам параграфов 2.1 – 2.3 обеспечивает минимум затрат, если интенсивности спроса и восстановления и стоимостные параметрах известны с достаточной точностью. В противном случае погрешности в их определении приводят к выбору параметров стратегии, отличных от оптимальных, и как следствие – к некоторому увеличению затрат.

С другой стороны, иногда приходится идти на заведомое отклонение параметров стратегии от теоретически оптимальных, для того, чтобы стратегия была осуществима на практике. Величиной поставляемой партии, отличной от расчетной величины, приходится пользоваться, например, при ограниченной емкости склада, заданной периодичности, для обеспечения полной загрузки транспортных средств.

Необходимо поэтому оценивать возрастание средних издержек при использовании размера заказа, отличного от оптимального, по сравнению со средними издержками в оптимальном плане.

Отличительной особенностью моделей экономического размера заказа является их малая чувствительность к ошибкам в исходной информации или неточности прогнозирования спроса на ресурсы.

Сравним средние издержки, вычисляемые по формуле (2.4) и соответствующие величине поставки Q и минимальные издержки $C(Q^*)$, соответствующие объёму заказа, рассчитанному по формуле Уилсона:

$$\frac{C(Q)}{C(Q^*)}=\frac{1}{\sqrt{2Kdh}}\left(\frac{Kd}{Q}+\frac{h}{2}Q\right)=\frac{1}{Q}\sqrt{\frac{Kd}{2h}}+\frac{Q}{2}\sqrt{\frac{h}{2Kd}}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q^*}{Q}+\frac{Q}{Q^*}\right).$$

Аналогичный результат справедлив и в более общем случае, если функция средних издержек имеет вид

$$C(Q)=\frac{\alpha}{Q}+\beta Q,$$

где первое слагаемое соответствует издержкам заказа, второе – издержкам хранения и дефицита, коэффициенты α и β определяются параметрами системы. Оптимальный размер заказа рассчитывается тогда по формуле $Q^*=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, а минимальные средние затраты $C(Q^*)=2\sqrt{\alpha\beta}$. Поэтому

$$\frac{C(Q)}{C(Q^*)}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\left(\frac{\alpha}{Q}+\beta Q\right)=\frac{1}{2Q}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{Q}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q^*}{Q}+\frac{Q}{Q^*}\right).$$

Следовательно, относительное увеличение затрат при неточном выборе Q составит

$$\delta C=\frac{C(Q)-C(Q^*)}{C(Q^*)}=\frac{C(Q)}{C(Q^*)}-1=\frac{Q^{*2}+Q^2}{2QQ^*}-1=\frac{(Q-Q^*)^2}{2QQ^*}. \tag{2.18}$$

Выражение $C(Q)/C(Q^*)$ не зависит от параметров системы. График функции $C(Q)/C(Q^*)$ в окрестности оптимального значения Q^* имеет довольно плоскую форму. Если действительное значение Q отличается от оптимального, скажем, в любом направлении на 200%, то $\dfrac{C(Q)}{C(Q^*)}=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$, то есть издержки увеличиваются при этом только на 25%.

Оценим с помощью формулы (2.18) возрастание средних издержек для случая малых отклонений от оптимальной величины поставки. Пусть $Q=Q^*(1+\delta)$, где δ мало по абсолютной величине. Тогда

$$\frac{C(Q)-C(Q^*)}{C(Q^*)}=\frac{\delta^2}{2(1+\delta)}\le\frac{\delta^2}{2(1-|\delta|)}.$$

Функция $\dfrac{1}{(1-|\delta|)}$ монотонно возрастает по $|\delta|$, например, если $|\delta| \le \dfrac{1}{2}$ (погрешность Q не превосходит 50%), то $\dfrac{C(Q)-C(Q^*)}{C(Q^*)} \le \delta^2$. Для малых δ можно принять $\dfrac{1}{1-|\delta|} \approx 1+|\delta|$, так что

$$\frac{C(Q)-C(Q^*)}{C(Q^*)} \approx \frac{\delta^2}{2}(1+|\delta|).$$

Так как в этом случае величина δ^2 существенно меньше, чем $|\delta|$, возрастание средних издержек мало по сравнению с отклонением от оптимальной величины поставки, если само это отклонение невелико.

Исследуем случай неточного задания параметров модели. Ограничимся изучением основной модели оптимального размера заказа. Пусть вместо истинных значений K, d, h, b известны лишь их приближения. Прологарифмировав (2.6), получаем

$$\ln Q = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln K + \ln d - \ln h).$$

Поскольку $\delta Q \approx \dfrac{dQ}{Q} = d(\ln Q)$, заменяя дифференциалы конечными приращениями, имеем

$$\delta Q \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta d}{d} - \frac{\Delta h}{h}\right) \le \frac{1}{2}(\delta K + \delta d + \delta h).$$

Для оценки возрастания средних издержек можно воспользоваться далее формулой (2.18).

Стратегии степени двойки

Вернемся к основной модели экономического размера заказа. Для простоты анализа пусть $g = hd/2$ и, следовательно, средние общие издержки как функция интервала времени между заказами рассчитываются по формуле

$$C(\tau) = \frac{K}{\tau} + g\tau .$$

Оптимальный интервал времени между заказами $\tau^* = \sqrt{K/g}$ и общие издержки в единицу времени $-C(\tau^*) = 2\sqrt{Kg}$.

Рассмотрим стратегию, в которой интервал времени между заказами имеет вид

$$\tau = \tau_B 2^k,\ k = 0,1,2,..., \tag{2.19}$$

где τ_B – фиксированный базовый период (день, неделя, месяц и т.п.), то есть минимально возможный интервал времени между заказами.

Пусть τ – оптимальный интервал времени между заказами вида (2.19). Так как функция издержек выпукла, оптимальная степень k в (2.19) – наименьшее целое число k, удовлетворяющее условию

$$C\left(\tau_B 2^k\right) \le C\left(\tau_B 2^{k+1}\right),$$

или

$$\frac{K}{\tau_B 2^k} + g\tau_B 2^k \le \frac{K}{\tau_B 2^{k+1}} + g\tau_B 2^{k+1}.$$

Следовательно, k – наименьшее целое число такое, что

$$\sqrt{\frac{K}{2g}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau^* \le \tau_B 2^k = \tau.$$

Таким образом, оптимальная степень двойки находится однозначно. Заметим, что по определению оптимального k, также должно быть верным

$$\tau = \tau_B 2^k \le \sqrt{\frac{2K}{g}} = \sqrt{2}\tau^*,$$

и, следовательно, оптимальный период τ принадлежит интервалу $\left[1/\sqrt{2}\tau^*, \sqrt{2}\tau^*\right]$. Легко проверить, что

$$C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tau^*\right) = C\left(\sqrt{2}\tau^*\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)C\left(\tau^*\right),$$

и, так как функция C выпукла, имеем

$$\frac{C(\tau)}{C\left(\tau^*\right)} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \approx 1{,}06.$$

Следовательно, средние издержки при лучшей стратегии степени двойки гарантированно не более чем на 6% превышают издержки оптимальной стратегии.

2.5. Модели с конечным горизонтом планирования

В практических задачах спрос на товар можно считать известным и постоянным только в течение некоторого конечного периода времени. Рассмотрим модель с отложенным спросом и постепенным пополнением и найдем стратегию заказов на интервале $[0;T]$, минимизирующую совокупные издержки за этот период.

Пусть за время T предполагается разместить $m \ge 1$ заказов. Предполагаем опять, что первый заказ поступает в нулевой момент времени. Длительность цикла изменения запасов τ разделяется на 4 этапа – поступления с одновременным расходованием, расходования, дефицита, пополнения дефицита. Обозначим через τ_{1i}, τ_{2i}, τ_{3i}, τ_{4i} протяженность соответствующих этапов i-го цикла.

Если в конце периода планирования имеется ненулевой запас *s*, то, уменьшив объем последнего заказа на *s*, можно уменьшить суммарные издержки хранения, не увеличивая при этом издержек заказа и дефицита (рис. 2.7а,б). В случае, когда конец периода планирования приходится на этап выполнения отложенных заявок, возможно снизить издержки дефицита, разместив последний заказ раньше на время s/d, где s – уровень дефицита на момент T (рис. 2.7в). Издержки заказа и хранения не увеличиваются. Таким образом, в конце периода планирования запас либо равен нулю, либо накапливается дефицит, следовательно, $\tau_{4m} = 0$,

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\tau_{1i} + \tau_{2i} + \tau_{3i}\right) + \sum_{i=1}^{m-1}\tau_{4i} = T .$$

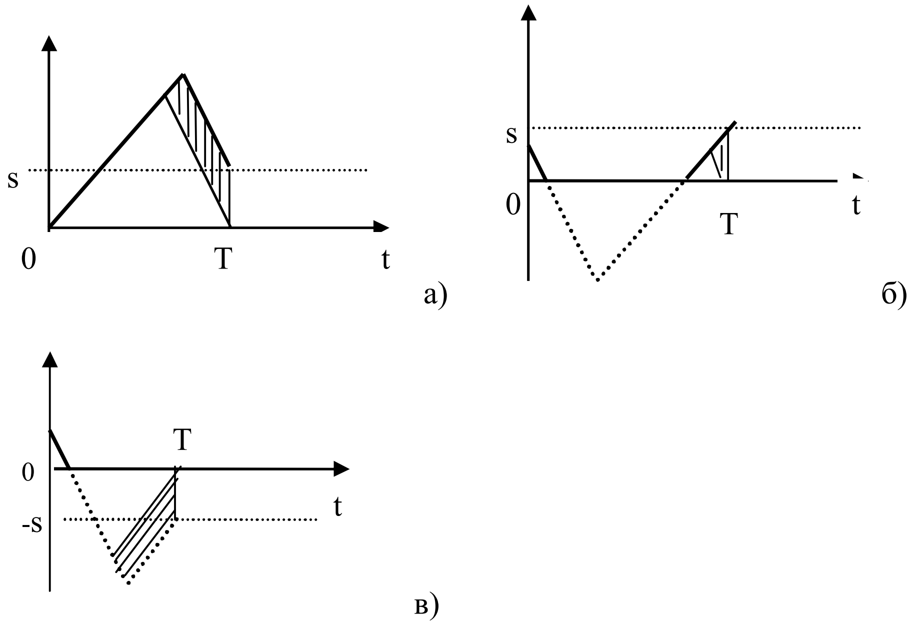

Рис.2.7. Уровень запаса в конце периода планирования

Пользуясь результатами параграфа 2.3, получаем, что

$$\tau_2 = \frac{p-d}{d}\tau_1,\ \tau_4 = \frac{d}{p-d}\tau_3,\ S = (p-d)\tau_1,\ S' = d\tau_3,\ Q = p\frac{h+b}{b}\tau_1 .$$

Совокупные издержки за период планирования составят

$$Km + \frac{hp}{2d}(p-d)\sum_{i=1}^{m}\tau_{1i}^2 + \frac{bpd}{2(p-d)}\sum_{i=1}^{m-1}\tau_{3i}^2 + \frac{bd}{2}\tau_{3m}^2 .$$

Найдем минимум функции

$$\frac{hp}{2d}(p-d)\sum_{i=1}^{m}\tau_{1i}^2 + \frac{bpd}{2(p-d)}\sum_{i=1}^{m-1}\tau_{3i}^2 + \frac{bd}{2}\tau_{3m}^2$$

при ограничениях

$$\frac{p}{d}\sum_{i=1}^{m}\tau_{1i}+\tau_{3m}+\frac{p}{p-d}\sum_{i=1}^{m-1}\tau_{3i}=T\,,\ \tau_{1i}\ge 0\,,\tau_{3i}\ge 0\,,\ i=1,...,m\,.$$

Решая эту задачу, получаем

$$\tau_{1i}=\tau_1=\frac{bd}{p(b+h)m-hd}T\,,\ \tau_{3i}=\tau_3=\frac{h(p-d)}{p(b+h)m-hd}T\,.$$

Совокупные издержки за период планирования при размещении m заказов –

$$Km+\frac{hp(p-d)b^2dm}{2(p(b+h)m-hd)^2}T^2+\frac{bpdh^2(p-d)(m-1)}{2(p(b+h)m-hd)^2}T^2+\frac{bdh^2(p-d)^2}{2(p(b+h)m-hd)^2}T^2=$$

$$=Km+\frac{h(p-d)bd}{2(p(b+h)m-hd)}T^2. \qquad (2.20)$$

Таким образом, оптимальная стратегия размещает m заказов одинакового размера через равные промежутки времени таким образом, чтобы в конце периода планирования достигался максимальный дефицит

$$S'=\tau_3 d=\frac{h(p-d)d}{p(b+h)m-hd}T\,.$$

Оптимальное количество заказов найдем, минимизируя функцию (2.20). Наименьшего значения (2.20) достигает, если

$$p(b+h)m-hd=T\sqrt{\frac{hb(b+h)pd(p-d)}{2K}}\,,$$

или

$$m=\frac{hd}{p(b+h)}+T\sqrt{\frac{hbd(p-d)}{2Kp(b+h)}}. \qquad (2.21)$$

Поскольку функция (2.20) выпукла по m, оптимальное количество заказов $m^*=[m]$ или $m^*=[m]+1$. Оптимальная продолжительность цикла

$$\tau=\frac{p}{d(p-d)}(d\tau_3+(p-d)\tau_1)=\frac{p(b+h)}{(p(b+h)m^*-hd)}T\,,$$

размер заказа составляет

$$Q=d\tau=\frac{dp(b+h)}{(p(b+h)m^*-hd)}T\,. \qquad (2.22)$$

Если m – целое, то $Q=\sqrt{\frac{2Kdp(b+h)}{hb(p-d)}}$, что совпадает с (2.13).

Модель с постепенным поступлением заказа, в которой дефицит не допускается, может рассматриваться как предельный при $b\to\infty$ случай изученной модели. В момент времени T запас должен быть равен нулю, то есть за время T проходит m полных циклов,

$$\tau_{i2}=\frac{p-d}{d}\tau_{1i}\,,\ \tau_{3i}=\tau_{4i}=0\,,\ T=\sum\nolimits_{i=1}^{m}(\tau_{1i}+\tau_{2i})\,,$$

суммарные издержки заказа и хранения составят

$$C(m,\tau) = Km + \frac{h(p-d)p}{2d}\sum_{i=1}^{m}\tau_{1i}^2 .$$

Как и выше получаем, что оптимальная стратегия должна размещать через равные промежутки времени $\tau = \frac{T}{m}$ заказы равного размера $Q = d\tau = \frac{Td}{m}$.

Оптимальное количество заказов – либо $[m]$, либо $[m]+1$, где

$$m = T\sqrt{\frac{h(p-d)d}{2Kp}} = T\sqrt{\frac{hd}{2K}\left(1-\frac{d}{p}\right)} .$$

Аналогично могут быть рассмотрены остальные задачи определения оптимального размера заказа на конечном интервале времени. При этом модели с мгновенным пополнением заказа можно считать предельным при $p \to \infty$ случаем моделей с постепенным пополнением.

Пример 2.1. Пусть годовой спрос на некоторый товар составляет 2000 единиц и равномерно распределяется в течение года. Закупка товара у производителя обходится в 50 у.е. за единицу, стоимость подачи заказа – 50 у.е. Издержки хранения составляют 15% среднегодовой стоимости запасов. Спланировать расписание заказов на год в предположении, что расходы, связанные с отсутствием товара на складе, составляют 5 у.е. в год за единицу товара.

Пусть в году T рабочих дней, $d = 2000/T$, $h = 0{,}15 * 50/T = 7{,}5/T$, $b = 5/T$. В предположении, что заказ поступает в полном объеме, получаем из (22), $m = T\sqrt{\frac{hbd}{2K(b+h)}} = T\sqrt{\frac{7{,}5 \cdot 5 \cdot 200}{2 \cdot 50 \cdot 12{,}5T^2}} \approx 7{,}75$.

При 8 заказах за год суммарные издержки составят $Km + \frac{hbd}{2(b+h)m}T^2 = 775$ у.е., размер заказа $Q = 2000/8 = 250$ единиц, интервал времени между заказами $\tau = T/8$. Например, при $T = 300$, $\tau = 32{,}5$.

Размер заказа, посчитанный по формуле (2.12), составит $Q' = 258{,}2$ единицы, длительность интервалов расходования запаса и накопления дефицита равна

$$\tau_1 = \frac{b}{b+h}\frac{Q'}{d} = 0{,}05164T ,\ \tau_2 = \frac{h}{b+h}\frac{Q'}{d} = 0{,}07746T .$$

Поскольку 7 полных циклов займут время, равное $7(\tau_1 + \tau_2) = 7Q'/d = 0{,}1291 \cdot 7T = 0{,}9037T$, конец периода планирования приходится на этап накопления дефицита и годовые издержки составят

$$7(\tau_1+\tau_2)\sqrt{\frac{2Kdhb}{b+h}} + K + \frac{h}{2}d\tau_1^2 + \frac{b}{2}d\left(T - 7(\tau_1+\tau_2) - \tau_1\right)^2 = 780 . \square$$

Как показывает пример, предположение о бесконечном горизонте планирования приводит к незначительному увеличению суммарных затрат.

Обозначим через Q^* оптимальный размер заказа на бесконечном периоде (рассчитанный, в зависимости от предположений модели, по одной из формул параграфов 2.1 – 2.3). Если m – целое, то $m^* = m$ и $Q = Q^*$. В противном случае это не так. Обозначим через m' целую часть m, $T' = m'\dfrac{Q^*}{d}$, $T'' = (m'+1)\dfrac{Q^*}{d}$. Имеем $m' \le m \le m'+1$, $\dfrac{T}{m'+1} \le \dfrac{T}{m} = \dfrac{Q^*}{d} \le \dfrac{T}{m'}$, то есть $T' \le T < T''$.

Поскольку на периодах T' и T'' оптимальным размером заказа является Q^*, для суммарных затрат за период планирования имеем

$$2Km' = C_{T'}(Q^*) \le C_{T'}(Q) \le C_T(Q) \le C_T(Q^*) < C_{T''}(Q^*) = 2K(m'+1),$$

Таким образом,

$$1 \le \frac{C_T(Q)}{C_t(Q^*)} \le \frac{C_{T''}(Q^*)}{C_{T'}(Q^*)} = \frac{m'+1}{m'} = 1 + \frac{1}{m'} \le 1 + \frac{1}{m-1} \to 1,$$

когда m (и, соответственно, T) неограниченно увеличивается.

Этим оправдывается применение на практике формул (2.4), (2.8), (2.10), (2.13), (2.15), (2.17) для расчета размера заказа при достаточно больших T.

Более того, формулы (2.3), (2.7), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) для общих издержек в единицу времени и, далее, формулы объема заказа на бесконечном промежутке, можно получить, записав выражение для средних издержек за период времени T и переходя к пределу при $T \to \infty$ [13].

2.5. Скидки на размер заказа

Предыдущие модели рассматривались в предположении, что все экономические параметры (стоимость единицы товара, удельные издержки хранения и дефицита, стоимость заказа) постоянны и не зависят от объема партии. Однако на практике это предположение справедливо лишь в некоторых диапазонах объемов заказов. Например, при увеличении объема партии могут понадобиться дополнительные затраты на организацию производства, новые складские емкости.

Рассмотрим ситуацию, в которой стоимость товаров зависит от размеров закупаемой партии. Как правило, чем больше объем закупки, тем меньше цена за единицу ресурсов – для того чтобы увеличить объемы продаж, многие поставщики предлагают покупателям торговые скидки. С другой стороны, снижение закупочной цены компенсирует увеличение затрат на хранение более крупной партии. Поэтому для расчета оптимального размера заказа в целевую функцию следует включить затраты на приобретение товара.

Пусть справедливы все предположения основной модели EOQ, кроме условия независимости издержек хранения и стоимости единицы продукции от объема партии: темп спроса на товар известен и постоянен, заказ выдается при снижении запаса до нуля полностью, дефицит не допускается.

Скидки рассматриваются обычно в двух вариантах. В первом скидка назначается на каждую единицу закупаемого товара в зависимости от общего объема партии Q (так называемые оптовые, или «интегральные» скидки). Во втором случае дается «дифференциальная» скидка на каждую дополнительную единицу, приобретаемую сверх очередного порога.

Оптовые скидки

Пусть заданы числа $q_1 < q_2 < ... < q_n$. Полагаем, $q_1 = 0$, $q_{n+1} = \infty$. В ситуации с оптовой скидкой обычно считается, что при объеме заказа $Q \in [q_i, q_{i+1})$ цена единицы продукции равна c_i. При этом затраты на хранение единицы запаса также могут зависеть от объема партии, и без ограничения общности, пусть стоимость хранения единицы товара в единицу времени h_i, если $Q \in [q_i, q_{i+1})$, последовательность $\{c_i\}$ невозрастающая. График издержек на приобретение партии имеет тогда вид, как на рис. 2.8.

Совокупные затраты в единицу времени равны

$$C(Q) = C_i(Q) = c_i d + \frac{Kd}{Q} + \frac{h_i}{2} Q, \text{ если } q_i \le Q < q_{i+1}. \qquad (2.23)$$

Эскиз графика функции $C(Q)$ представлен на рис. 2.9, части кривых, показанные пунктиром, физически не реализуются.

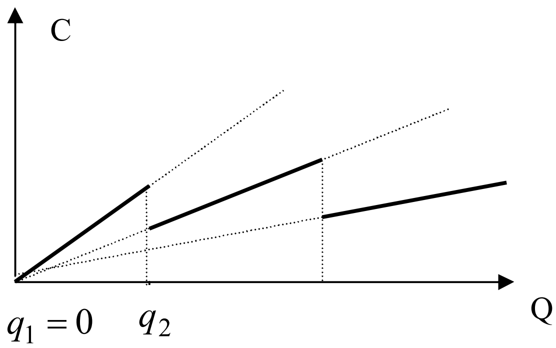

Рис. 2.8. Затраты на приобретение при оптовых скидках

Для нахождения глобального минимума этой функции необходимо определить ее локальные минимумы. Обозначим через Q_i^*, $i = 1,...,n$, точку минимума функции $C_i(Q)$ при ограничении $q_i \le Q < q_{i+1}$, решение исходной задачи определяется тогда из условия

$$Q^* = \arg\max \{C_i(Q_i^*)\}.$$

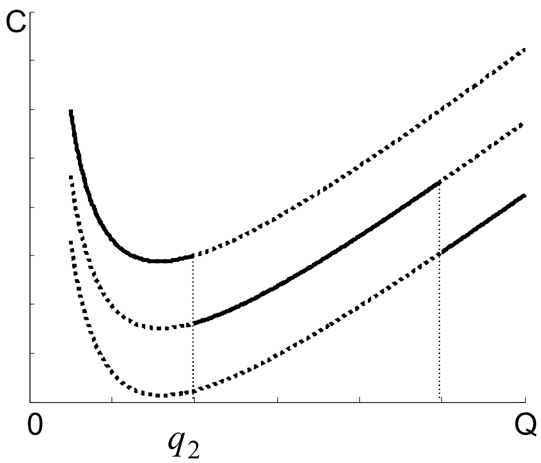

Рис. 2.9. Совокупные затраты при оптовых скидках

Обозначим $Q_i = \sqrt{\dfrac{2dK}{h_i}}$. Тогда, если $Q_i \in [q_i, q_{i+1})$, то $Q_i^* = Q_i$, если $Q_i < q_i$, $Q_i^* = q_i$.

Предположим, последовательность $\{h_i\}$ невозрастающая. Например, $h_i = h$ для всех i или h_i составляет фиксированную долю цены c_i. Тогда последовательность размеров заказов $\{Q_i\}$, рассчитанных по формуле Уилсона, не убывает.

Пусть для некоторого i $Q_i \in [q_i, q_{i+1})$, $k < i$. Тогда, так как $h_k \ge h_i$, $c_k \ge c_i$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое, для всех $Q \in [q_k, q_{k+1})$.

$$C_k(Q) > C_i(Q) > C_i(Q_i^*),$$

следовательно, $Q_i^* = Q_i$ минимизирует издержки на интервале $[0, q_{i+1})$.

Пусть $Q_i \ge q_{i+1}$ ($i < n$). Тогда на интервале $[q_i, q_{i+1})$ минимум не достигается, однако существует интервал $[q_k, q_{k+1})$, $k > i$ такой, что $Q_k \in [q_k, q_{k+1})$. Действительно, либо $Q_{i+1} \in [q_{i+1}, q_{i+2})$, либо $Q_{i+1} \ge q_{i+2}$. Во втором случае рассмотрим аналогично интервал i+2 и так далее. Процесс конечный, поскольку $Q_n < q_{n+1} = \infty$.

Отсюда получаем следующий алгоритм оптимизации:

0. Вычислить Q_n. Если $Q_n \ge q_n$, Q_n оптимально. В противном случае $i = n-1$.

1. Рассчитать Q_i. Если $Q_i \ge q_i$, $Q^* = \arg\min\{C(Q_i), C(q_{i+1}), ..., C(q_n)\}$. В противном случае положить $i = i-1$ и повторить шаг 1.

Процедура требует не более чем n шагов.

Пример 2.2. [7] Пусть годовая потребность составляет 10^6 единиц, затраты на поставку $K = 25$, данные о скидках и издержках хранения сведены в таблицу. Определить оптимальный размер партии.

При цене, равной 1,5 ден.ед., $Q_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 10^6}{0,3}} = 12909{,}94 < 20000$, $Q_3^* = 20000$, годовые затраты

$$C\left(Q_3^*\right) = 1{,}5 \cdot 10^6 + \frac{25 \cdot 10^6}{20000} + \frac{0{,}3}{2} \cdot 2000 = 1504250.$$

Таблица 2.1

Данные для примера 2.2

№	Размер заказа	Цена единицы	Годовые затраты на содержание единицы запаса
1	1 – 9999	2,5	0,6
2	10000 – 19999	2	0,4
3	20000 - …	1,5	0,3

При $c_2 = 2$ $Q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 10^6}{0,4}} = 11180{,}34$, то есть $Q_2^* = Q_2$,

$$C\left(Q_2^*\right) = \sqrt{2 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0{,}4} + 2 \cdot 10^6 = 2004472.$$

Таким образом, оптимальный размер заказа – 20000 единиц.▫

Дифференциальные скидки

Другой тип скидки, которая называется дифференциальной, состоит в том, что первые q_1 единиц заказа имеют стоимость c_1, следующие $q_2 - q_1$ изделий - стоимость c_2 и т. д. Графически общие издержки на приобретение партии объемом Q показаны на рис. 2.11.

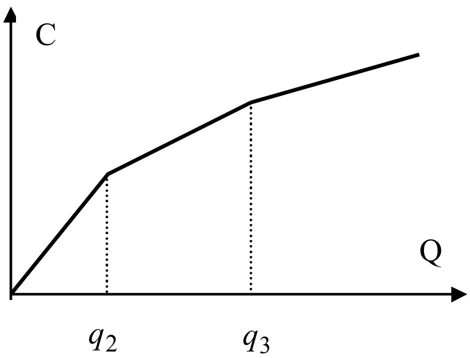

Рис. 2.11. Затраты на приобретение при дифференциальной скидке

Общие издержки $C_c(Q)$ на закупку партии при $q_i \le Q < q_{i+1}$ могут быть представлены как

$$C_c(Q) = c_i(Q - q_i) + C_c(q_i),$$

где

$$C_c(q_i) = c_{i-1}q_i + \sum_{k=2}^{i-1} q_k(c_{k-1} - c_k), \ i = 2,\dots,n.$$

Средняя цена единицы товара, тем самым, составит

$$c(Q)=\frac{C_c(Q)}{Q}=\frac{C_c(q_i)-c_i q_i}{Q}+c_i. \qquad (2.24)$$

Таким образом, если дефицит не допускается, издержки за цикл длиной $\tau = Q/d$ равны

$$K+C_c(Q)+\frac{h}{2}Q\tau,$$

средние издержки при $q_i \le Q < q_{i+1}$ составляют

$$C_i(Q)=c_i d+\frac{(C_c(q_i)-c_i q_i)d}{Q}+\frac{Kd}{Q}+\frac{h}{2}Q. \qquad (2.25)$$

Результирующая функция затрат непрерывна, так как непрерывна функция $C_c(Q)$, график функции затрат является нижней огибающей семейства кривых, заданных соотношениями (2.25), а глобальный минимум совпадает с наименьшим из минимумов образующих кривых.

Положим

$$K_i = K+C_c(q_i)-c_i q_i = K+\sum_{k=2}^{i} q_k(c_{k-1}-c_i),$$

тогда $C_i(Q)=c_i d+\dfrac{K_i d}{Q}+\dfrac{h}{2}Q$,

$$C'(q_i+0)=\frac{h}{2}-\frac{K_i d}{q_i^2},\; C'(q_i-0)=\frac{h}{2}-\frac{K_{i-1} d}{q_i^2}.$$

Так как $K_i > K_{i-1}$, $C'(q_i+0)<C'(q_i-0)$, поэтому функция $C(Q)$ не имеет локального минимума в точке q_i, и, следовательно, минимум средних издержек не может находиться в одной из точек излома кривой. Таким образом, кандидатами на оптимальный размер заказа выступают $Q_i=\sqrt{2K_i d/h}$, минимизирующие функции $C_i(Q)$ и удовлетворяющие условиям $q_i \le Q_i < q_{i+1}$.

Пример 2.3. [13] Фирма, поставляющая корм для собак, может закупить его по цене 0,06 доллара за 1 кг за первые 1000 кг и 0,058 доллара за каждый дополнительный килограмм. Годовая потребность в корме составляет 50000 кг. Стоимость подачи заказа равна 1 доллару. Удельные годовые издержки хранения – 0,015 долларов.

Вычислим оптимальный размер закупки. По формуле Уилсона для цены $c_1 = 0{,}06$ оптимальный размер заказа составит $Q_1 \approx 2582$, то есть следует воспользоваться скидкой. $K_2 = 1+1000\cdot(0{,}06-0{,}058)=3$, $Q_2=\sqrt{2\cdot 3\cdot 50000/0{,}015}\approx 4472$. Годовые издержки, соответствующие этому размеру заказа, равны 2967,072 доллара. ▫

ГЛАВА 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

3.1. Модель с учётом затрат на выполнение заказа

Анализ моделей управления запасами касался до сих пор ситуаций, когда спрос известен заранее и постоянен в течение всего периода планирования. Ослабим теперь это предположение и рассмотрим модели, где спрос детерминирован, но изменяется со временем. Это возможно, например, если заранее сделаны заказы, или подписаны контракты, определяющие поставки на несколько следующих месяцев, или спрос рассчитан в соответствии с известной производственной программой.

В этом случае горизонт планирования определяется как период, в котором спрос известен. Рассматривается только конечный горизонт планирования, однако это не является серьезным ограничением, так как спрос в отдаленном будущем обычно не оказывает существенного влияния на решения, принимаемые в настоящем. Кроме того, во многих случаях запасы подвержены износу, и поэтому не имеет смысла предполагать, что продукция будет храниться в запасе бесконечно и выбирать отрезок планирования чрезмерно большим.

Как и ранее, можно считать, что имеется некоторая система снабжения (склад, оптовая база и т.п.), деятельность которой сводится к обеспечению спроса конечных потребителей на некоторый продукт, для чего она осуществляет заказы производителю данного продукта.

Рассмотрим модели, в которых требуется спланировать последовательность заказов на T смежных интервалов времени. Спрос задается как последовательность величин суммарного потребления в этих периодах.

Предполагается, что не допускаются задолженности и отказы (отсутствует дефицит). Заказ выполняется полностью и временем между заказом и его поступлением можно пренебречь.

Спрос в течение этапа t ($t = 1,\dots,T$) известен и обозначается $d_t > 0$.

При размещении заказа в y единиц в период t начисляются фиксированные издержки заказа K_t и переменные (стоимость заказа или производства) $c_t(y)$. Пусть $\delta(y) = 1$, если $y > 0$ и $\delta(0) = 0$. Тогда издержки заказа в периоде t равны $K_t\delta(y) + c_t(y)$.

Начальный запас и запас в конце периода T предполагается известным.

Издержки хранения единицы товара на этапе t – $h_t > 0$.

Заказ и спрос определяются в начале этапа. Запасы инспектируются в конце этапа. Поэтому затраты на хранение на этапе t предполагаются пропорциональными объему запаса, переходящего из этапа t в этап t+1.

Пусть y_t – количество, заказываемое в период *t,* и I_t - уровень запасов в конце периода *t*. С использованием этих переменных задача определения объемов заказов, таких, чтобы издержки заказа и хранения были минимальны, может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{t=1}^{T}\left(K_t\delta(y_t)+c_t(y_t)+h_tI_t\right)\to\min \tag{3.1}$$

$$I_t = I_{t-1} + y_t - d_t,\ t=1,...,T, \tag{3.2}$$

$$I_t,\ y_t \ge 0,\ t=1,...,T. \tag{3.3}$$

Ограничения (3.2) называют ограничениями *баланса запаса*. Поскольку $I_t = \sum_{i=1}^{t}(y_i - d_i)$, переменные I_t могут быть исключены из формулировки и планом задачи можно считать вектор $(y_1,..., y_T)$.

Функции $c_t(y)$ следует учитывать, если затраты меняются со временем или существуют разрывы цен.

В общем случае (3.1) – (3.3) представляет собой задачу нелинейного программирования. Если учитываются фиксированные издержки заказа K_t, целевая функция задачи разрывная. Кроме того, если переменные I_t, y_t могут принимать только целые значения, то получим задачу целочисленного программирования.

Так как целевая функция полученной задачи аддитивна, для её решения может быть успешно применен аппарат динамического программирования [4], в основе которого лежит утверждение, получившее название *принципа оптимальности Беллмана*:

Для аддитивной целевой функции решения на все оставшиеся интервалы должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения, независимо от ранее принятых решений и начального состояния.

Пусть каждый интервал времени *t* соответствует одному шагу. Рассмотрим процедуру прямой прогонки, последовательно минимизируя затраты за 1, 2,…T интервалы.

На шаге *t* состояние системы определяется как объем запаса на конец этапа, задаваемый соотношением (3.2), причем

$$0 \le I_t \le d_{t+1} + ... + d_T.$$

Это неравенство означает, что в предельном случае (при отсутствии в дальнейшем заказов) запас I_t может удовлетворить спрос на всех последующих этапах.

В качестве начального условия используем требование о сохранении после завершения управления заданного количества товара I_T.

Пусть $C_t(I_t, y_t)$ – общие затраты на этапах 1, 2, …, *t* при заданной величине I_t на конец этапа *t* и величине заказа y_t, $C_t^*(I_i)$ – минимальные общие затраты на этапах 1,2,...,*t* при заданной величине запаса I_t в конце периода t. На каждом этапе заказы размещаются в предположении, что предыдущие заказы размещены оптимально. Тогда

$$C_t(I_t, y_t) = C_{t-1}^*(I_t - y_t + d_t) + K_t\delta(y_t) + c_t(y_t) + h_t I_t,$$

прямое рекуррентное уравнение записывается в виде

$$C_t^*(I_t) = \min C_t(I_t, y_t),\ 0 \le y_t \le I_t + d_t,\ t = 1,...,T,\ C_0^* \equiv 0. \qquad (3.4)$$

Так как $I_1 = I_0 + y_1 - d_1$, то $y_1 = I_1 + I_0 + d_1$ и

$$C_1^*(I_1) = K_1\delta(I_1 - I_0 + d_1) + c_1(I_1 - I_0 + d_1) + h_1 I_1.$$

Система реккурентных соотношений (3.4) позволяет найти последовательность функций состояния C_t^* и условных оптимальных управлений $\hat{y}_t(I)$. На шаге T с помощью начального условия можно определить $y_T^* = \hat{y}_T(I_T)$. Остальные значения оптимальных управлений определяются последовательно с использованием формулы (3.2).

Предположение о нулевом времени доставки может быть ослаблено, если предположить, что время поставки L определено и известно заранее. В этом случае, если заказ требуется в период t, то заказ делается в период $t - L$.

Пример 3.1. Решим задачу при следующих данных.

Таблица 3.1

Данные для примера 3.1

t	d_t	K_t	h_t
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

Исходный запас $I_0 = 1$, в конце периода планирования $I_3 = 0$. Пусть затраты на приобретение продукции составляют 10 за каждую единицу для первых трех единиц и 20 для каждой дополнительной единицы, т.е.

$$c_t(y) = \begin{cases} 10y, & 0 \le y \le 3; \\ 30 + 20(y-3), & y > 3. \end{cases}$$

Предполагаем, что заказывается целое число единиц товара. Приведем результаты пошаговых вычислений для прямого алгоритма.

Шаг 1. Так как $y_1 = I_1 + d_1 > 0$,

$$C_1^*(I_1) = K_1 + h_1 I_1 + c_1(I_1 + d_1) = \begin{cases} 23 + 11I_1, & I_1 \le 1; \\ 13 + 21I_1, & I_1 > 1. \end{cases}$$

Поскольку I_1 может принимать только целые значения, $I_1 \le d_2 + d_3 = 6$.

Таблица 3.2

Первый шаг алгоритма

I_1	0	1	2	3	4	5	6
$C_1^*(I_1)$	23	34	55	76	97	118	139
y_1	2	3	4	5	6	7	8

Шаг 2. $C_2^*(I_2) = \min\left(C_1^*(I_2 - y_2 + 2) + 7\delta(y_t) + c_2(y_2)\right) + 3I_2$,

$I_2 \le d_3 = 4$, $0 \le y_2 \le I_2 + d_2 = I_2 + 2$.

Для различных значений I_2 и y_2 вычисляем значения минимизируемой функции. Например, $C_2(3,1) = C_1^*(3 - 1 + 2) + 7 + c_2(1) + 3 \cdot 3 = 97 + 7 + 10 + 9 = 123$.

Результаты запишем в таблицу и найдем минимальный элемент в каждой строке.

Таблица 3.3

Второй шаг алгоритма

$I_2 \setminus y_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	55	51	<u>50</u>				
1	79	75	64	<u>63</u>			
2	103	99	88	<u>77</u>	86		
3	127	123	112	101	<u>100</u>	109	
4	151	147	136	125	124	<u>123</u>	132

Шаг 3. $I_3 = 0$, $0 \le y_3 \le I_3 + d_3 = 4$,

$$C_3^*(0) = \min\left(C_2^*(4 - y_3) + 6\delta(y_3) + c_2(y_3)\right).$$

Вычислим затраты для различных y_3. Например,

$$C_3(0,2) = C_2^*(4 - 2) + 6 + c_2(2) = 77 + 6 + 20 = 103.$$

Таблица 3.4

Третий шаг алгоритма

y_3	0	1	2	3	4
$C_3(0, y_3)$	123	116	103	99	106

Отсюда получаем, что общие минимальные затраты – 99, $y_3 = 3$, $I_2 = I_3 + d_3 - y_3 = 1$, $y_2 = 3$, $I_1 = I_2 + d_2 - y_2 = 0$, $y_1 = 2$.▫

Рассмотрим процедуру обратной прогонки для решения поставленной задачи. В качестве функции состояния управляемой системы возьмем минимальный объем затрат, возникающих за периоды $t,...,T$ при условии, что к началу периода *t* (до размещения заказа) имеется запас I_{t-1}.

Пусть $C_t(I_{t-1}, y_t)$ – общие затраты на этапах $t,...,T$ при заданной величине I_{t-1} на начало этапа *t* и величине заказа y_t, $C_t^*(I_{t-1})$ – минимальные общие затраты на этапах $t,...,T$ при заданной величине I_{t-1}. На каждом этапе заказы размещаются в предположении, что заказы на последующих этапах размещены оптимально. Положим $C_{T+1}^* \equiv 0$. Тогда

$$C_t(I_{t-1}, y_t) = C_{t+1}^*(I_{t-1} + y_t - d_t) + K_t\delta(y_t) + c_t(y_t) + h_t(I_{t-1} + y_t - d_t),$$

основное рекуррентное уравнение записывается в виде

$$C_t^*(I_{t-1}) = \min C_t(I_{t-1}, y_t),\ y_t \ge d_t - I_{t-1},\ t = T,...,1.$$

3.2. Модель с вогнутой функцией затрат

Рассмотренную выше модель динамического программирования можно использовать при любых функциях затрат. Особый интерес, однако, представляет частный случай задачи, при котором предполагается, что затраты на приобретение являются вогнутыми функциями, то есть предельные издержки заказа не возрастают. Такая ситуация возникает, например, когда средняя стоимость единицы заказа $c(y)/y$ является постоянной.

Модель, в которой стоимость единицы заказа не зависит от размера партии, была впервые проанализирована Вагнером и Уайтином в 1958г. и названа моделью Вагнера – Уайтина. В этом случае общие переменные издержки заказа фиксированы и не зависят от расписания заказов, следовательно, можно не включать их в целевую функцию.

Алгоритм динамического программирования

Имеет место следующее утверждение [15].

Теорема 3.1. *Любая оптимальная стратегия – это стратегия заказа при нулевом запасе, то есть стратегия, в который*

$$y_t I_{t-1} = 0 \text{ для } t = 1,...,T.$$

Простым следствием теоремы 3.1 является то, что при оптимальной стратегии *заказ имеет размер, необходимый для удовлетворения спроса на целом числе последующих этапов.*

Данное свойство значительно упрощает процесс решения задачи методом динамического программирования. Остаток I_t в конце периода *t*, $t = 1,...,T-1$, может принимать значения 0, d_{t+1}, $d_{t+1} + d_{t+2}$, …, $d_{t+1} + d_{t+2} + ... + d_T$. Соответственно, размер заказа y_t равен либо 0, либо $I_t + d_t$. Поэтому

$$C_t^*(I_t) = \min\left\{C_{t-1}^*(I_t + d_t); C_{t-1}^*(0) + K_t + c_t(I_t + d_t)\right\} + h_t I_t. \qquad (3.5)$$

Запас на конец последнего периода должен равняться нулю.

Если начальный уровень запаса положителен, то пока он не исчерпается, заказы не размещаются. Пусть $I_0 = \sum_{t=1}^{k-1} d_t + d$, $d < d_k$. Тогда можно положить $d_k = d_k - d$ и либо решать задачу с *k*-го этапа, либо этапы $1,...,k-1$ включить в задачу с нулевым спросом.

Пример 3.2. Рассмотрим четырехэтапную модель для следующих исходных данных:

Таблица 3.5

Данные для примера 3.2

t	1	2	3	4
d_t	76	26	90	67
K_t	98	114	185	70

Затраты на хранение единицы продукции в течение одного этапа постоянны и равны 1. Затраты на закупку единицы продукции составляют 2 на всех этапах. Исходный запас равен 15 единиц.

Получим решение алгоритмом прямой прогонки. Спрос на первом этапе уменьшим на 15 единиц. Суммарные затраты на приобретение равны $c(d_1 + ... + d_T) = 488$ и не зависят от расписания заказов, поэтому далее эти затраты в целевой функции не учитываем.

Шаг 1. I_1 принимает значения 0, d_2, $d_2 + d_3$, $d_2 + d_3 + d_4$, $y_1 = I_1 + d_1 - I_0 = I_1 + 61$, $C_1^*(I_1) = K_1 + hI_1 = 98 + I_1$.

Таблица 3.6

Алгоритм прямой прогонки

I_1	y_1	C_1^*	I_2	y_2	C_2^*	I_3	y_3	C_3^*
0	61	98						
26	87	124	0	0	124			
116	177	214	90	116	302	0	0	302
183	244	281	157	183	369	67	157	376

Шаг 2. I_2 может равняться 0, d_3, $d_3 + d_4$,

$C_2^*(I_2) = \min\{C_1^*(I_2 + d_2); C_1^*(0) + K_2\} + hI_2 = \min\{C_1^*(I_2 + 26); 212\} + I_2$.

Шаг 3. I_3 либо 0, либо d_4,

$C_3^*(I_3) = \min\{C_2^*(I_3 + d_3); C_2^*(0) + K_3\} + hI_3 = \min\{C_2^*(I_3 + 90); 309\} + I_3$.

Шаг 4. $I_4 = 0$,

$$C_4^*(0) = \min\{C_3^*(d_4); C_3^*(0) + K_4\} = \min\{376; 302 + 70\} = 372, \; y_4 = 67.$$

Далее получаем, $I_3 = d_4 - y_4 = 0$, $y_3 = 0$, $I_2 = I_3 + d_3 - y_3 = 90$, $y_2 = 116$, $I_1 = I_2 + d_2 - y_2 = 0$, $y_1 = 61$.▫

Сетевой алгоритм

Задача допускает также следующую интерпретацию. Построим ациклическую сеть с узлами $V = \{1,2,...,T+1\}$ и дугами (i, j), $1 \le i < j \le T+1$. Длина l_{ij} дуги (i, j) – это стоимость заказанного в период i для удовлетворения спроса на этапах i, $i+1,\ldots$, $j-1$, то есть

$$l_{ij} = K_i + c_i\left(\sum_{k=i}^{j-1} d_k\right) + \sum_{k=i}^{j-2} h_k \sum_{s=k+1}^{j-1} d_s = K_i + c_i\left(d_{i,j-1}\right) + \sum_{k=i}^{j-2} h_k d_{k+1,j-1}, \quad (3.6)$$

где $d_{ks} = \sum_{t=k}^{s} d_t$ – спрос от периода k до периода s. Если удельные издержки хранения постоянны, последнее слагаемое равно $h\sum_{k=i+1}^{j-1} d_{k,j-1} = h\sum_{k=i+1}^{j-1}(j+1-k)d_k$.

Длина кратчайшего пути от узла 1 до узла $T+1$ в этой сети - минимальная стоимость удовлетворения спроса периодов 1 – T, узлы этого пути соответствуют периодам, в которые делаются заказы.

Пример 3.3. Рассмотрим задачу из примера 3.2. Как и ранее, полагаем, $d_1 = 61$, переменные затраты на закупку не учитываются, то есть $l_{ij} = K_i + h\sum_{k=i+1}^{j-1} d_{k,j-1}$.

Составим матрицу длин дуг. Можно воспользоваться тем, что $l_{i,i+1} = K_i$, $l_{i,j+1} = l_{ij} + h(j-i)d_j$. Например, $l_{13} = l_{12} + d_2$, $l_{14} = l_{13} + 2d_3$ и так далее.

Для поиска кратчайшего пути используем следующий алгоритм. Узлам сети 1,2,… последовательно присваиваем метки, $r_1 = 0$, $r_j = \min\{r_i + l_{ij}\}$. Метка узла $T+1$ – длина кратчайшего пути. Дуга (i, j) лежит на кратчайшем пути, если $r_j - r_i = l_{ij}$.

Таблица 3.7

Сетевой алгоритм

	2	3	4	5	r_i
1	<u>98</u>	<u>124</u>	304	505	0
2		114	<u>204</u>	338	98
3			185	252	212
4				<u>70</u>	302

Получаем $r_2 = l_{12}$, $r_3 = \min\{l_{13}, r_2 + l_{23}\}$, $r_4 = \min\{l_{14}, r_2 + l_{24}, r_3 + l_{34}\}$, $r_5 = \min\{l_{15}, r_2 + l_{25}, r_3 + l_{35}, r_4 + l_{45}\} = 372$. В таблице подчеркнуты длины дуг, доставляющих минимум при определении меток. Таким образом, находим, что заказы размещаются в моменты 4, 2 и 1, размеры заказов $y_1 = d_1 = 61$, $y_2 = d_{23} = 116$, $y_4 = d_4 = 67$.▫

Теорема 3.2*. Пусть t – последний период, в который сделан заказы в оптимальной стратегии заказа для T-периодной задачи. Тогда для любой задачи длины $T' > T$ последний заказ может быть размещен только на этапе $j \geq T'$. Кроме того, если t = T, в оптимальном решении T' - периодной задачи $y_t > 0$.*

Таким образом, если заказ размещен в период *t,* оптимальная стратегия для периодов $1,2,...,t-1$ не зависит от спроса в периоды после *t* и, следовательно, можно использовать модель Вагнера – Уайтина, даже если спрос в будущем неизвестен.

Эвристический алгоритм Сильвера – Мила

Оптимальная стратегия достаточно чувствительна к изменению спроса. Поэтому, несмотря на эффективность рассмотренных методов решения задачи управления запасами, большое значение на практике имеют простые приближенные алгоритмы, основанные на интуитивных соображениях.

Рассмотрим эвристический алгоритм, применимый к решению задач управления запасами, в которых затраты на закупку единицы продукции постоянны и одинаковы для всех этапов.

Как и ранее, пусть l_{ij} – издержки размещения заказа и хранения на этапах $i,...,j-1$, при условии, что заказ размещается на этапе i, то есть

$$l_{ij} = K_i + \sum_{k=i}^{j-2} h_k d_{k+1,j-1} .$$

Для текущего этапа i определяется период t^*, минимизирующий средние затраты за период, то есть $\bar{l}_{it} = \dfrac{l_{it}}{t-i}$.

Функцию l_{ij} можно определять с помощью рекуррентных соотношений.

$$l_{i,i} = K_i ,\ l_{it} = l_{i,t-1} + d_t \sum_{k=i}^{t-2} h_k .$$

Вычисления проводятся, пока $\bar{l}_{it} < \bar{l}_{i,t-1}$.

Таким образом, алгоритм эвристического метода состоит из следующих шагов.

0. $i = 1$.

1. Определяется локальный минимум t^* функции $\bar{l}_{ij}$ из неравенств

$$\bar{l}_{i,t^*-1} \geq \bar{l}_{i,t^*},\ \bar{l}_{i,t^*+1} \geq \bar{l}_{i,t^*}.$$

На этапе i размещается заказ объемом d_{i,t^*-1} для этапов $i,...,t^*-1$.

2. $i = t^*$. Если $i > T$, вычисления заканчиваются, рассмотрен весь плановый период. Иначе перейти к шагу 1.

Пример 3.4. Рассмотрим применение алгоритма к задаче из примера 3.2.

Итерация 1. $i = 1$.

Таблица 3.8

Первая итерация алгоритма

t	d_t	l_{1t}	$\bar{l}_{1t}$
2	61	98	98/1=98
3	26	98+26=124	124/2=62
4	90	124+2*90=304	304/3=101,33
5	67	304+3*67=505	505/4=126,25

Локальный минимум достигается при $t^* = 3$, на первом этапе размещается заказ объемом 61+26=87 единиц для этапов 1 и 2.

Итерация 2. $i = 3$.

Таблица 3.9

Вторая итерация алгоритма

t	d_t	l_{3t}	$\bar{l}_{3t}$
4	90	185	185/1=185
5	67	185+67=252	252/2=126

$t^* = 5$, на третьем этапе заказывается 90+67=157 единиц продукции. Так как 5>4, вычисления закончены. Стоимость хранения и размещения заказа составит

124+252=376 единиц, что на 4 единицы (1,1%) больше, чем при оптимальном решении. ▫

3.3. Модели без учёта затрат на оформление заказа

Предположим, в динамической модели управления запасами, рассмотренной выше, не учитываются фиксированные издержки заказа, а стоимость закупки единицы товара в периоде t постоянна и составляет c_t. Тогда (3.1)–(3.3) – задача линейного программирования, которую можно интерпретировать как задачу о потоке минимальной стоимости в сети с T вершинами, соответствующими моментам времени и вершиной – стоком:

$$\sum_{t=1}^{T}\left(c_t y_t + h_t I_t\right) \to \min$$

$$I_t = I_{t-1} + y_t - d_t,\ t = 1,...,T,$$

$$I_t,\ y_t \ge 0,\ t = 1,...,T.$$

Как и ранее, можем положить, что $I_0 = I_T = 0$. На рис. 3.1 изображена сеть для $T = 4$.

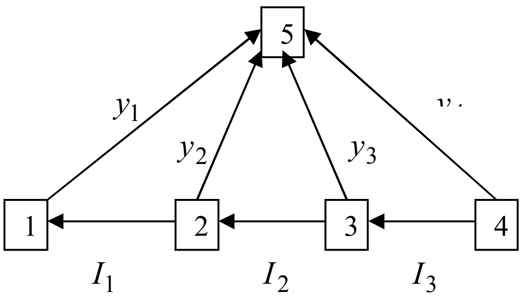

Рис. 3.1. Модель без затрат на оформление заказа.

Рассмотрим некоторые обобщения этой модели.

Задача о складе

Пусть, в отличие от исходной модели, склад имеет ограниченную вместимость v. В каждый из T последовательных периодов времени товар закупается по ценам c_t за единицу, хранится на складе с удельными издержками h_t и продается по ценам s_t. Объемы потребления не фиксированы, то есть единственное ограничение на покупку и продажу в каждом периоде выражается во вместимости склада. Требуется максимизировать прибыль.

Для периода t через y_t обозначено количество купленного товара, через z_t – количество проданного товара, x_t – количество товара, помещенное на склад после покупки, I_t – количество товара, оставленное после продажи, $I_0 = I_T = 0$. Считаем, что все переменные выражены в тех же единицах, что и v.

Тогда задача максимизации прибыли эквивалентна следующей задаче минимизации издержек.

$$\sum_{t=1}^{T}\left(c_t y_t + h_t x_t - s_t z_t\right) \to \min \tag{3.7}$$

$$I_{t-1} + y_t - x_t = 0,\ t = 1,2,...,T, \tag{3.8}$$

$$x_t - z_t - I_t = 0,\ t = 1,2,...,T, \tag{3.9}$$

$$x_t \le v, \tag{3.10}$$

$$I_t,\ x_t,\ z_t,\ y_t \ge 0,\ t = 1,2,...,T. \tag{3.11}$$

Соответствующая задаче сеть для $T = 3$ изображена на рис. 3.2а. Вводя дополнительные неотрицательные переменные u_t, заменим ограничения (3.10) на

$$x_t + u_t = v. \tag{3.12}$$

Далее, к каждому уравнению вида (3.12) прибавим соответствующее уравнение (3.8) и уравнение (3.9) для $t-1$ и вычтем уравнение (3.12) для $t-1$, то есть заменим (3.12) на ограничения

$$u_t + y_t - u_{t-1} - z_{t-1} = 0. \tag{3.13}$$

Сеть, представляющая полученную задачу (3.7) – (3.9), (3.11), (3.13) изображена на рисунке 3.2б.

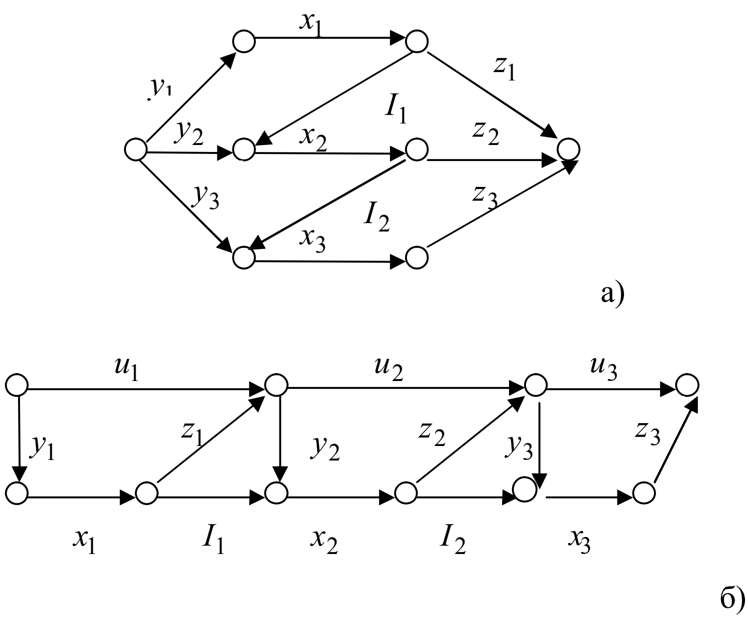

Рис. 3.2. Задача о складе

Так как в полученной сети отсутствуют ограничения на пропускные способности дуг, чтобы найти поток наименьшей стоимости, достаточно определить кратчайший путь из источника в сток, и передать по нему все v единиц потока.

Задача календарного планирования производства

Рассмотрим задачу определения календарного плана производства на T последовательных периодов времени, имеющего минимальные суммарные затраты. Возможные объемы производства в каждый из периодов ограничены, однако они могут включать несколько уровней (например, определяться обычным режимом работы и сверхурочными работами). Затраты на оформление заказа (начало производства) отсутствуют. Если на протяжении текущего периода производятся изделия для последующих периодов, возникают затраты на хранение. Стоимость хранения единицы продукции в каждый период является постоянной величиной. В общем случае допускается дефицит при условии, что весь задолженный спрос должен быть удовлетворен к концу периода планирования. Стоимость производства единицы продукции в любой период либо является постоянной, либо имеет возрастающие предельные затраты (то есть соответствующая функция затрат является выпуклой).

Производственные затраты на единицу продукции могут возрастать с увеличением уровня производства, например, если стоимость производства единицы продукции, производимой в сверхурочное время, выше, чем при обычном режиме работы.

Пусть на протяжении периода возможно k уровней производства. Например, если используются регулярный и сверхурочный режимы работы, то $k = 2$. Для этапа t, $t = 1,...,T$, через c_{ti}, $i = 1,...,k$, обозначаются производственные затраты на единицу продукции при i-м уровне производства, $c_{t1} < c_{t2} < ... < c_{tk}$, h_t – затраты на хранение единицы продукции, переходящей из этапа t в этап $t+1$, b_t – потери от дефицита на единицу продукции, требуемой на этапе t, но поставляемой на этапе $t+1$, a_{ti}, $i = 1,...,k$, – производственная мощность (в единицах продукции) при i-м уровне производства, d_t – спрос.

Требуется определить объемы производства на каждом этапе, так чтобы спрос был удовлетворен к концу периода и суммарные издержки производства, хранения и дефицита были минимальны. Рассматриваемую задачу можно сформулировать в виде транспортной задачи с kT пунктами производства и T потребителями, объемы поставок определяются производственными возможностями этапов, объемы спроса задают объемы потребления в «пунктах назначения». Стоимость «перевозки» от пункта производства ti до пункта назначения s, где $s \geq t$, равна сумме затрат на производство и хранение единицы продукции, то есть

$$c_{ti} + h_1 + ... + h_{s-1},$$

удельные расходы, соответствующие ячейке таблицы (ti, s), где $s < t$, составляют

$$c_{ti} + b_s + ... + b_{t-1}.$$

Пример 3.5. Рассмотрим трехэтапную модель, в которой используется обычное и сверхурочное производство, причем этапе 2 сверхурочные работы не проводятся. Удельные производственные затраты составляют 5 при обычном режиме работы и 10 при сверхурочной работе. Затраты на хранение и потери от дефицита равны 1 и 2 соответственно. Для трех этапов требуется 20, 35 и 15 единиц продукции соответственно. Производственные мощности для трех этапов следующие:

Таблица 3.10

Производственные мощности

Период	Мощность	
	обычная	сверхурочная
1	15	10
2	15	0
3	20	15

Составляем транспортную таблицу (табл. 3.11). Начальный план, найденный методом Фогеля, оказывается оптимальным. Суммарные затраты составят 485 денежных единиц.▫

Если в модели не допускается дефицит, то есть спрос на продукцию на протяжении текущего периода не может быть удовлетворен за счет ее производства в последующие периоды, задачу можно решить без использования метода потенциалов.

Таблица 3.11

Модель с учётом дефицита

	20	35	15	5
15	5 15	6	7	0
10	10 5	11 5	12	0
15	7	5 15	6	0
20	9	7 5	5 15	0
15	14	12 10	10	0 5

Для этого сначала удовлетворятся спрос на этапе 1 путем последовательного назначения максимально возможных поставок по наиболее дешевым элементам первого столбца. Затем, после корректировки значений предложения, наиболее дешевыми поставками удовлетворяется спрос периода 2 и так далее.

В этом случае задача имеет решение, только если суммарные возможности производства за периоды $1,\dots,i$ были не меньше, чем суммарный спрос на продукцию за это же время.

ГЛАВА 4. МНОГОПРОДУКТОВЫЕ МОДЕЛИ

Управление запасами на промышленных и торговых предприятиях обычно предусматривает определение объемов и моментов поставки для широкой номенклатуры товаров. При этом уровень запасов, хранящихся на складе, часто ограничен вместимостью (площадью или объемом) склада или размером капитала, который предполагается вложить в запасы. На промышленных предприятиях возникают ограничения, связанные с планом выпуска продукции, может быть ограничено количество заказов за определенный период и так далее. Более того, нередки ситуации, когда стратегия управления запасами должна удовлетворять нескольким ограничениям одновременно.

Даже если указанные ограничения отсутствуют, иногда бывает целесообразно объединять поставки различных товаров от одного поставщика. Например, если учитываются издержки заказа, не зависящие от количества заказываемых номенклатур, или предоставляются скидки на объем заказа, возможно имеется ограничение на минимальную стоимость заказа или требуется обеспечить полную загрузку транспортных средств.

Таким образом, определять параметры поставок каждого товара отдельно и независимо от остальных, например, используя модели оптимального размера заказа, возможно далеко не всегда. Во всех указанных случаях заказы различных товаров связаны между собой и требуется их координация, важно знать не только как часто и в каком количестве заказывается каждый товар, но и точные моменты времени, в которые осуществляется поставка заказов.

Точное решение задач планирования поставок получить в общем случае сложно и применять оптимальную стратегию на практике не всегда удобно. Поэтому ограничимся изучением стратегий, при которых запас каждого товара пополняется на одну и ту же величину и каждый заказ поступает в тот момент, когда уровень запаса обращается в ноль. Тогда интервалы между заказами каждого товара также будут одинаковыми.

Среди стратегий, обладающих указанными свойствами, можно выделить три основные группы подходов.

Во-первых, *независимые поставки* (Independent solutions), при которых запас каждого товара пополняется без всякой координации с поставками других товаров, то есть не исключены ситуации, когда на складе находится одновременно максимальное количество каждого товара.

При использовании *периодических стратегий* (Rotation Cycle) запасы всех товаров имеют одну и ту же периодичность пополнения.

Третий подход предусматривает разбиение множества товаров на непересекающиеся подмножества, или кластеры, все товары в одном кластере имеют одинаковый интервал между заказами. Одна из самых ранних стратегий такого типа была предложена в 1966 г. российским учёным Ю.И. Рыжиковым.

Рассмотрим многопродуктовые модели управления запасами при наличии ограничений и без них.

4.1. Многономенклатурные поставки

Пусть имеется n товаров, для товара $i = 1,2,...,n$, пусть d_i - спрос в единицу времени, K_i – издержки заказа, h_i – издержки хранения в единицу времени, Q_i – объем заказа, τ_i – период. Предполагаем, что выполнены все предположения основной модели оптимального размера заказа, то есть, в частности, горизонт планирования бесконечен, дефицит не допускается.

Поскольку при сделанных предположениях $Q_i = d_i \tau_i$, стратегия поставок определяется набором $\vec{\tau} = (\tau_1,...,\tau_n)$ и моментами заказов для каждого товара.

Пусть K_0 – издержки, начисляемые при любом заказе и не зависящие от количества заказываемых номенклатур. Тогда при независимых поставках затраты, связанные с заказом i-го товара, равны $K_0 + K_i$, и совокупные издержки в единицу времени составляют

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{(K_0 + K_i)}{\tau_i} + \frac{h_i d_i}{2} \tau_i \ .$$

При отсутствии ограничений на объем поставок задача минимизации издержек решается для каждой номенклатуры отдельно, оптимальная периодичность заказов i-го товара $\tau_i = \sqrt{2(K_i + K_0)/d_i h_i}$, минимальные затраты

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2(K_0 + K_i) d_i h_i} \ . \quad (4.1)$$

Если используются равные интервалы τ между поставками, совокупные средние издержки равны

$$\frac{1}{\tau} K + \tau \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i d_i}{2},$$

где K – суммарная стоимость заказа. Очевидно, в этом случае выгоднее доставлять товары одной партией, тогда $K = K_0 + \sum_{i=1}^{n} K_i$, оптимальное значение периода многономенклатурной поставки $\tau = \sqrt{2 \sum_{i=0}^{n} K_i / \sum_{i=1}^{n} d_i h_i}$, минимальные затраты –

$$C_c = \sqrt{2 \sum_{i=0}^{n} K_i \sum_{i=1}^{n} d_i h_i} \ . \quad (4.2)$$

Очевидно, что при отсутствии затрат K_0 независимые поставки приводят к лучшему результату, в противном случае при многопродуктовых поставках возможно уменьшение затрат.

Пример 4.1. Пусть имеются данные о четырёх номенклатурах (табл. 2.1), где D_i – годовой спрос, H_i – стоимость хранения единицы продукции в течение года, $K_0 = 18$. Получаем, $d_i = D_i / 365$, $h_i = H_i / 365$.

Таблица 4.1

Данные к примеру 4.1

i	1	2	3	4
K_i	6	4	4	6
H_i	1,5	1	0,5	0,5
D_i	3000	2000	1000	500

Рассчитаем параметры независимых поставок по формулам (4.1), (4.2): $\tau_1 = 37{,}7$, $\tau_2 = 54{,}1$, $\tau_3 = 108{,}3$, $\tau_4 = 160$, суммарные годовые издержки $365 \cdot C_n = 1019{,}275$. Про многономенклатурной поставке оптимальный период составит 37,4 дня, суммарные годовые издержки – 742,29. ▫

Учёт ограничений вида

$$\tau \le \tau_V,$$

связанных, например, с вместимостью транспорта, объёмом средств, выделенных на приобретение товара и так далее, осуществляется, в случае многономенклатурной поставки следующим образом. Если значение периода, рассчитанное по формуле (4.3), не удовлетворяет ограничению, то $\tau = \tau_V$, соответственно, затраты оставят $K / \tau_V + \tau_V \sum_{i=1}^{n} h_i d_i / 2$.

Многономенклатурные поставки по системе кратных периодов

Рассмотрим стратегию организации многономенклатурных поставок, предложенную Ю.И. Рыжиковым. Предполагается, что периоды между поставками имеют вид $k\tau$, $k = 1,2,...$, где τ – некоторый базисный период, причем по крайней мере одна номенклатура заказывается в каждом базисном периоде.

Ставится задача о расчете оптимальной системы кратных периодов. Пусть J_k – множество номенклатур с периодичностью поставок $k\tau$, $k = 1,2,...$; $n_k = |J_k|$ - количество элементов этого множества. Стоимость заказа K_0, не зависящая от числа номенклатур, равномерно распределяется по товарам первого множества, то есть расходы на снабжение i-м товаром в единицу времени при $k_i = 1$ составляют

$$C_i = \frac{1}{2} d_i h_i \tau + \frac{K_i}{\tau} + \frac{K_0}{n_1 \tau},$$

а для $k_i \ge 2$

$$C_i = \frac{1}{2} d_i h_i k_i \tau + \frac{K_i}{k_i \tau}.$$

Необходимо таким образом выбрать базисный период τ и так провести разбивку всех номенклатур на множества, чтобы сумма

$$C(\tau) = \sum_{i=1}^{n} C_i(\tau) = \frac{1}{2}\tau \sum_{i=1}^{n} d_i h_i k_i(\tau) + \frac{1}{\tau}\left(K_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{k_i(\tau)} \right)$$

была минимальной.

При фиксированном τ функция $C(\tau)$ строго выпукла по k_i, следовательно, её минимум достигается в стационарной точке

$$\tilde{k}_i = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{2K_i}{d_i h_i}},\ i = 1,...,n.$$

Значение $k_i = k_i(\tau)$ удовлетворяет условиям $C_i(k_i) \le C_i(k_i - 1)$ и $C_i(k_i) \le C_i(k_i + 1)$, то есть

$$k_i(k_i - 1) \le \frac{2K_i}{\tau^2 d_i h_i},\ \ k_i(k_i + 1) \ge \frac{2K_i}{\tau^2 d_i h_i},\ i = 1,...,n.$$

Получаем, таким образом,

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{8K_i}{\tau^2 d_i h_i}} - 1 \right) \le k_i \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{8K_i}{\tau^2 d_i h_i}} + 1 \right).$$

Если $\sqrt{1 + \frac{8K_i}{\tau^2 d_i h_i}} = 2m + 1$ – нечётное целое число, выберем $k_i(\tau) = m$. Тогда для любого τ значение $k_i = k_i(\tau)$ определяется однозначно и функция $k_i(\tau)$ постоянна на промежутках $\left[T_i^l; T_i^r\right]$, где

$$T_i^r = \sqrt{\frac{2K_i}{d_i h_i k_i(k_i - 1)}},\ T_i^l = \sqrt{\frac{2K_i}{d_i h_i k_i(k_i + 1)}}. \tag{4.3}$$

Пусть товары упорядочены в порядке возрастания отношений $K_i/(d_i h_i)$, тогда значения k_i не убывают по i и группировка номенклатур осуществляется следующим образом:

$k_1 = 1$;

если $k_{i-1} = k$, то $k_i \ge k$ и увеличение k_i целесообразно при $C_i(k) \ge C_i(k + 1)$, то есть $\frac{K_i}{d_i h_i} \ge \frac{k(k+1)}{2}\tau^2 = R_k(\tau)$. Следовательно, k_i – наименьшее натуральное число, для которого $R_{ki}(\tau) \ge K_i/(d_i h_i)$.

При увеличении τ номенклатуры множества J_k переходят во множество J_{k-1}, при уменьшении τ – во множество J_{k+1}. Поскольку $C_i\left(k_i, T_i^r\right) = C_i\left(k_i - 1, T_i^r\right)$, $C_i\left(k_i, T_i^l\right) = C_i\left(k_i + 1, T_i^l\right)$, функция $C(\tau)$ непрерывна.

При достаточно больших τ $\widetilde{k}_i < 1$, $i = 1,...,n$ и все номенклатуры окажутся в множестве J_1. С другой стороны, при очень малых τ каждое множество J_k при неравных $\dfrac{K_i}{d_i h_i}$ сведется к одному элементу.

В интервалах постоянства группировок, то есть при фиксированных $\{k_i\}$, функция $C(\tau)$ является строго выпуклой, минимум достигается в стационарной точке

$$\tau^* = \sqrt{2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{k_i} + K_0\right)\Big/\sum_{i=1}^{n} d_i h_i k_i}\ , \tag{4.4}$$

минимальные затраты в единицу времени составляют

$$C^* = \sqrt{2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{k_i} + K_0\right)\sum_{i=1}^{n} d_i h_i k_i}\ . \tag{4.5}$$

Очевидно, что минимум функции $C(\tau)$ равен наименьшему из минимумов, достигаемых при постоянной группировке номенклатур.

Если $\tau^* \in \left[T_i^l, T_i^r\right]$ для всех *i*, то текущая группировка оптимальна. В противном случае суммарные расходы можно уменьшить при переходе *i* из множества J_{ki} во множество J_{ki-1}, если $T_i^r < \tau^*$ и при переходе *i* из множества J_{ki} во множество J_{ki+1}, если $T_i^l > \tau^*$.

Алгоритм планирования многономенклатурных поставок состоит из следующих этапов.

1. Номенклатуры перенумеровываются по возрастанию отношений $K_i/(d_i h_i)$.

2. Выбирается начальное приближение τ_0 для базисного периода. Так как итоговый период должен быть достаточно близок к оптимальной периодичности наиболее часто заказываемой номенклатуры, в качестве τ_0 можно выбрать самый выгодный период заказа для первой номенклатуры при независимой оптимизации, то есть $\tau_0 = \sqrt{2(K_0 + K_1)/(d_1 h_1)}$. Рассчитывается набор коэффициентов $\{k_i(\tau_0)\}$.

3. Вычисляются τ^* и C^*. Рассчитываются границы $\{T_i^l\}$ и $\{T_i^r\}$ интервалов постоянства группировок.

4. Если существуют номенклатуры i такие, что $T_i^r < \tau^*$, для них k_i заменяются на $k_i - 1$, пересчитываются значения $\{T_i^r\}$, τ^* и C^*. Если τ^* изменено, повторить пункт 4.

5. Если существуют номенклатуры *i*, для которых $T_j^l > T^*$, то для них k_i заменяются на $k_j + 1$, рассчитываются новые значения $\{T_j^l\}$, пересчитываются τ^* и C^*. Если τ^* изменено, повторить пункт 5.

6. Восстанавливается первоначальная нумерация, выводятся τ^*, C^* и набор $\{k_i\}$.

Процесс увеличения τ заканчивается за конечное число шагов, так как $T_i^r \to \infty$, а $\tau^* \to \sqrt{2\left(\sum_{i=0}^{n} K_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} d_i h_i}$. При уменьшении τ границы T_i^l уменьшаются быстрее, чем τ^*, и условие $T_i^l \le \tau^*$ в конце концов будет выполнено для всех *i*.

Пример 4.2. Рассмотрим применение стратегии кратных периодов к данным из примера 4.1. Легко проверить, что номенклатуры упорядочены в порядке возрастания отношений $K_i/(d_i h_i)$, равных, соответственно, 177,63, 266,45, 1065,8, 3197,4, поэтому $\tau_0 = 37{,}7$.

Далее, $k_1 = 1$, $R_1(\tau_0) = 1421{,}29$, $R_2(\tau_0) = 4263{,}87$, поэтому $k_2 = k_3 = 1$, $k_4 = 2$. Согласно формулам (4.4), (4.5), $\tau^* = 35{,}3$, $C^* = 1{,}983$. Рассчитаем интервалы постоянства группировок по формулам (4.3): $T_1^l = 13{,}33$, $T_2^l = 16{,}32$, $T_3^l = 32{,}65$, $T_4^l = 32{,}65$, $T_1^r = T_2^r = T_3^r = \infty$, $T_4^r = 56{,}55$.

Таким образом убеждаемся, что наилучшая стратегия кратных периодов – заказывать совместно первые три вида товаров с периодом 35,3 дней, четвёртый товар – с периодом 70,6 дней. При этом годовые издержки составят $365 \cdot C^* = 723{,}8$.

4.2. Задачи планирования поставок с ограничениями

Пусть снова имеется *n* видов товаров, спрос на которые известен и постоянен. Рассмотрим задачу определения оптимальных, то есть минимизирующих совокупные издержки, размеров заказа и интервалов времени между заказами каждого товара при наличии ограничения на вместимость склада. Эту задачу называют *задачей оптимального планирования поставок* (Economic Warehouse Lot Scheduling Problem, EWLSP).

Для стратегии заказа *P* через $V(P)$ обозначим максимальный объем запаса, который может находиться на складе при использовании этой стратегии, и пусть $C(P)$ – долговременные средние издержки пополнения и хранения запаса.

Тактической задачей планирования поставок называется задача поиска стратегии *P*, минимизирующей издержки $C(P)$ при условии, что объем запаса не превышает вместимости склада, то есть $V(P) \le v$, где *v* обозначает доступный объем склада.

В *стратегической версии задачи планирования поставок* вместимость склада *v* – не ограничение, а одна из переменных. Издержки, связанные с запасом, состоят из двух частей, одна пропорциональна среднему запасу и представляет собой долговременные средние издержки хранения и заказа, в то время как вторая часть пропорциональна максимальному запасу и определяется, например, стоимостью аренды складских площадей. Нужно, следовательно, найти стратегию P, минимизирующую $Z(P) = C(P) + V(P)$. Таким образом, при решении стратегической задачи определяются не только параметры поставки, но и оптимальный размер склада.

Пусть $\gamma_i > 0$ – норма использования объема товара i, то есть объем, занимаемый единицей товара. Тогда объем $v_i(\xi)$ запаса товара i в заданный момент времени ξ равен уровню его запаса $I_i(\xi)$, умноженному на γ_i. Пусть $v(\xi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(\xi)$ – объем запасов на складе в момент ξ.

Для заданной стратегии P пусть $\vec{\tau} = (\tau_1,...,\tau_n)$ – вектор интервалов между заказами. Для любого такого вектора $\vec{\tau}$ пусть $V(\vec{\tau})$ обозначает максимальный объем запаса, который может содержаться на складе. Так как максимальный уровень запаса i-го товара равен объему поставки,

$$V(\vec{\tau}) \le \sum_{i=1}^{n} \gamma_i d_i \tau_i \, . \tag{4.6}$$

Стратегическая задача

Независимые поставки

Рассмотрим стратегию независимых поставок при отсутствии координации моментов заказов, то есть, в частности, не исключена ситуация, когда все заказы поступают на склад одновременно. Вектор интервалов между заказами является тогда решением задачи

$$Z^H = \min_{\tau} \left\{ \sum_i \left(\frac{K_i}{\tau_i} + \frac{1}{2} h_i d_i \tau_i \right) + \sum_i \gamma_i d_i \tau_i \right\}.$$

Поскольку этот алгоритм является приближенным, $Z^H \ge Z^*$, где Z^* – значение оптимального решения стратегической задачи. Можно показать [15], что

$$Z^H / Z^* \le \sqrt{2} \, . \tag{4.7}$$

Вектор $\vec{\tau}$ может быть найден решением n задач для каждого товара отдельно и

$$Z^H = 2\sum_i \sqrt{K_i d_i (h_i / 2 + \gamma_i)} \, . \tag{4.8}$$

Периодическая стратегия

Рассмотрим теперь периодическую допустимую стратегию P с интервалами τ между заказами. Пусть $t_1,\ldots,\ t_n$ – последовательные моменты заказов товаров различных номенклатур, $t_{i+1} = t_i + \Delta_i$, $i = 2,...,n-1$, то есть

$t_i = t_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \Delta_k$, $\sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k \le \tau$. На отрезке $[t_1; t_1 + \tau]$ функции $I_i(t)$ уровня запаса i-го товара задаются соотношениями

$$I_i(t) = \begin{cases} -d_i t + d_i t_i, & t_1 < t < t_i, \\ -d_i t + d_i(t_i + T) & t_i \le t < t_1 + T \end{cases}.$$

Функция $v(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i I_i(t)$, характеризующая объем запасов, имеет локальные максимумы в точках t_i, и

$$v_i = v(t_i) = -\sum_{k=1}^{i-1} \Delta_k \sum_{j=1}^{k} \gamma_j d_j + \sum_{k=i}^{n-1} \Delta_k \sum_{j=k+1}^{n} \gamma_j d_j + \tau \sum_{j=1}^{i} \gamma_j d_j . \tag{4.9}$$

Функция $v(t)$ достигает глобального максимума в точке t_i, если $v_i \ge v_j$ для $j = 1,...,n$, то есть

$$\sum_{k=j}^{i-1} \Delta_k \le \tau \sum_{k=j+1}^{i} \gamma_k d_k / \sum_{k=1}^{n} \gamma_k d_k , \; j = 1,...,i-1, \tag{4.10}$$

$$\sum_{k=i}^{j-1} \Delta_k \ge \tau \sum_{k=i+1}^{j} \gamma_k d_k / \sum_{k=1}^{n} \gamma_k d_k , \; j = i+1,...,n . \tag{4.11}$$

Минимизируя теперь функцию (4.9) при условиях (4.10) и (4.11), получаем $\Delta_k = \tau \gamma_{k+1} d_{k+1} / \sum_{k=1}^{n} \gamma_k d_k$, то есть i-й товар заказывается в моменты

$$\tau \left(s + \sum_{k=2}^{i} \gamma_k d_k / \sum_{k=1}^{n} \gamma_k d_k \right), \; s = 0,1,2,... . \tag{4.12}$$

Обозначим $D_j = \sum_{k=1}^{j} \gamma_k d_k$, $D_n = D$. Максимальный объем запаса составит

$$V(P) = -\frac{\tau}{D} \sum_{k=2}^{n} \gamma_k d_k D_{k-1} + \tau D = \tau \left(D - \frac{1}{D} \sum_{k=2}^{n} \gamma_k d_k D_{k-1} \right), \tag{4.13}$$

издержки этой стратегии равны

$$\frac{1}{\tau} \sum_i K_i + \tau \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (h_i + 2\gamma_i) d_i - \frac{1}{D} \sum_{i=2}^{n} \gamma_i d_i D_{i-1} \right). \tag{4.14}$$

Минимизируя по τ, получим минимальные издержки периодической стратегии

$$Z(P) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} K_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} (h_i + 2\gamma_i) d_i - \frac{2}{D} \sum_{i=2}^{n} \gamma_i d_i D_{i-1} \right)} . \tag{4.15}$$

Пример 4.3. Пусть имеется n товаров, $K_i = K$, $d_i = 1$, $h_i = 0$ и $\gamma_i = \gamma = 1/n$ для всех i. Тогда $Z^H = 2n\sqrt{K\gamma}$. Применяя периодическую стратегию, получаем, что i-й товар заказывается в моменты $\tau\left[\frac{(i-1)}{n}+s\right]$, $s=0,1,2,\ldots$, максимальный объем запаса $\tau\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\gamma^2 k\right)=\tau\gamma\frac{n+1}{2}$, минимальные издержки равны $Z(P)=\sqrt{Kn\left(\sum_{i=1}^{n}2\gamma-2\sum_{i=2}^{n}\gamma^2(i-1)\right)}=\sqrt{2n(n+1)K\gamma}$.

Следовательно,

$$\frac{Z^H}{Z(P)}=\frac{2n\sqrt{K\gamma}}{\sqrt{2n(n+1)K\gamma}}.$$

Предел этого выражения при n, стремящемся к бесконечности, равен $\sqrt{2}$, то есть гарантированная оценка (4.7) асимптотически точна.

Пример 4.4. Пусть имеется два вида продукции, исходные данные приведены в табл. 4.2.

При независимых поставках $\tau_1=2{,}1$, $\tau_2=1{,}1$, $Z^H=18{,}76$. Объёмы поставок составляют $Q_1=4{,}2$, $Q_2=4{,}4$, максимальный объём запаса на складе равен 8,6.

Таблица 4.2

Данные для примера 4.4.

	K_i	d_i	h_i	γ_i
1	10	2	0,3	1
2	5	4	0,1	1

Рассмотрим периодическую стратегию. $D_1=2$, $D_2=6$. В соответствии с (4.12) первый товар заказывается в моменты времени τs, второй – в моменты $\tau(s+\gamma_2 d_2/D_2)=\tau(s+2/3)$, $s=0,1,\ldots$, максимальный объём на складе равен

$$V(P)=\tau\left(D_2-\frac{1}{D_2}\gamma_2 d_2\gamma_1 d_1\right)=\tau(6-8/6)=14/3\tau,$$

издержки при фиксированном периоде τ –

$$(K_1+K_2)/\tau+\tau(h_1d_1+h_2d_2)/2+V(P)=15/\tau+\tau\cdot 31/6.$$

Оптимальный период, таким образом, $\tau=1{,}7$, минимальные издержки периодической стратегии составляют 17,61 ден.ед. Промежуток времени между поставками первого и второго товаров равен 1,1, максимальный объём запаса 7,9. ▫

Тактическая задача

Независимые поставки

Приближенный алгоритм для поиска наилучшей стратегии независимых поставок в тактической версии EWLSP состоит в решении следующей задачи, рассмотренной впервые в работе Хедли и Уайтина:

$$C^{HW} = \min \sum_i \left(\frac{1}{2} h_i d_i \tau_i + \frac{K_i}{\tau_i} \right) \quad (4.16)$$

$$\sum_i \gamma_i d_i \tau_i \le v, \quad (4.17)$$

$$\tau \ge 0 .$$

Ограничение (4.17) гарантирует, что вместимость склада не будет превышена, даже в случае одновременного поступления на склад заказов всех товаров. На практике иногда вместо (4.17) рассматривают ограничение $\kappa \sum_i \gamma_i d_i \tau_i \le v$, где $\kappa < 1$ – коэффициент, введенный для учета неоднородности поступлений товара.

Алгоритм Хедли – Уайтина имеет оценку гарантированной точности, равную 2 [15].

Очевидно, что если значения $\tau_i = \sqrt{\frac{2K_i}{h_i d_i}}$, полученные минимизацией целевой функции (4.16) без учета ограничений, удовлетворяют (4.17), то они определяют наилучшую стратегию решения исходной задачи. В противном случае для решения задачи можно использовать, например, метод множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(\tau_1, ..., \tau_n, \lambda) = \sum_i \left(\frac{1}{2} h_i d_i \tau_i + \frac{K_i}{\tau_i} \right) - \lambda \left(\sum_i \gamma_i d_i \tau_i - v \right),$$

Поскольку целевая функция выпукла, минимум достигается в стационарной точке функции Лагранжа, то есть

$$\tau_i = \sqrt{\frac{2K_i}{(h_i - 2\lambda\gamma_i) d_i}} .$$

Значения множителя Лагранжа определяются из условия

$$\sum_i \gamma_i d_i \tau_i = v ,$$

вообще говоря, с использованием численных методов.

Пример 4.5. Рассмотрим задачу управления поставками двух видов продукции, данные по которым приведены в табл. 4.2. Пусть общая площадь складского помещения составляет v=25. Без учёта ограничений $\tau_1 = 5{,}8$, $\tau_2 = 5$, объёмы поставок, соответственно, равны 11,6 и 20. Таким образом, ограничение (4.17) выполнено при $\kappa \le 0{,}79$.

Положим $\kappa = 1$. Тогда $\tau_1 = \sqrt{\frac{5}{0{,}15 + \lambda}}$, $\tau_2 = \sqrt{\frac{5}{4(0{,}05 + \lambda)}}$, и $2\tau_1 + 4\tau_2 = 25$.

Таким образом, $\sqrt{\frac{20}{0,15+\lambda}}+\sqrt{\frac{20}{0,05+\lambda}}=25$. При приближенном значении $\lambda=0,05$ $\tau_1=5$, $\tau_2=3,5$ и суммарные затраты составляют 5,63. ▫

Если для всех i

$$h_i / \gamma_i = \beta, \tag{4.18}$$

можно решить задачу аналитически. В этом случае имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i d_i\sqrt{\frac{2K_i}{\gamma_i d_i(\beta-2\lambda)}}=v,\ \tau_i=\frac{v}{\sum_j\sqrt{K_j d_j\gamma_j}}\sqrt{K_i\gamma_i d_i},$$

$$C^{HW}=\frac{1}{2}\beta v+\frac{1}{v}\left(\sum_i\sqrt{K_i\gamma_i d_i}\right)^2. \tag{4.19}$$

Условие (4.18) выполнено, например, если рассматривается задача с ограничениями на капитал G, выделенный на приобретение продукции. Пусть c_i – стоимость единицы i-го товара, β – доля от цены, приходящейся на затраты по хранению, то есть $h_i=\beta c_i$. Ограничение (4.17) имеет вид $\sum_i c_i d_i \tau_i \le G$. Заменяя в полученной формуле (4.19) γ_i на c_i, v на G, получаем, что минимальные затраты равны

$$C^*(G)=\frac{1}{2}\beta G+\frac{1}{G}\left(\sum_i\sqrt{K_i c_i d_i}\right)^2.$$

Используя это соотношение, можно найти величину оптимального значения капитала, вложенного в запасы, то есть значение G, минимизирующее общие затраты:

$$C_\Sigma=C^*(G)+G=\left(\frac{1}{2}\beta+1\right)G+\frac{1}{G}\left(\sum_i\sqrt{K_i c_i d_i}\right)^2,$$

$$G^*=\sqrt{\frac{2}{2+\beta}}\sum\sqrt{K_i c_i d_i}.$$

Оптимальная величина общих затрат:

$$C_\Sigma^*=\sqrt{2+\beta}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2K_i c_i d_i}.$$

Периодическая стратегия

Применим для решения тактической задачи стратегию с равными интервалами между заказами. Как показано при исследовании стратегической задачи, при фиксированном τ максимальный объем запаса составит $\widetilde{D}\tau$, где $\widetilde{D}=D-\frac{1}{D}\sum_{k=2}^{n}\gamma_k d_k D_{k-1}\in(d_1\gamma_1;D)$. Таким образом, задача сводится к определению периода $\tau\ge 0$, минимизирующего

$$\frac{1}{\tau}\sum_i K_i + \frac{1}{2}\tau\sum_i h_i d_i$$

при условии $\widetilde{D}\tau \le v$.

Очевидно, решением этой задачи будет $\tau = \min\left\{\frac{v}{\widetilde{D}}, \sqrt{2\sum_i K_i \Big/ \sum_i h_i d_i}\right\}$.

Пример 4.6. Для задачи из примера 4.3 получаем $\widetilde{D} = 14/3 \approx 4{,}67$. Без учёта ограничений период составит 5,48, $v/\widetilde{D} = 74/14 \approx 5{,}357$. Таким образом, можно выбрать $\tau = 5{,}3$, размеры заказов равны $Q_1 = 10{,}6$, $Q_1 = 21{,}14$, максимальный объём запасов на складе 24,7, издержки периодической стратегии – 5,48.

Пример 4.7. Покажем, что гарантированная оценка алгоритма является точной. Пусть $K_i = K$, $h_i = 0$ и $\gamma_i = \gamma = \frac{1}{n}$ для всех *i*. Очевидно, что решение задачи (4.16) – $\tau_i = v$ для всех i, так что $C^{HW} = \frac{nK}{v}$. С другой стороны, применяя периодическую стратегию, находим, что период $\widetilde{\tau} = 2v/(n+1)\gamma$ допустим и $C(P) = K(n+1)/2v$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C^{HW}}{C(P)} = \lim_{n\to\infty}\frac{nK/v}{K(n+1)/2v} = 2\,.$$

ГЛАВА 5. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Во многих логистических системах спрос в течение периода планирования заранее не известен и должен, следовательно, считаться случайной величиной. Вероятностные модели управления запасами принято разделять на две группы – модели с непрерывным и модели с периодическим контролем уровня запаса. В главе рассматриваются приближенные вероятностные модели управления запасами при стационарном спросе и модель планирования запасов на один период.

Как и при изучении моделей главы 2, рассматривается управление запасами одного продукта на некотором предприятии. Вероятностное распределение спроса известно. Затраты на выполнение заказа, цена продукта, удельные издержки хранения постоянны в течение периода планирования. Требуется определить стратегию, минимизирующую ожидаемые издержки выполнения заказа, хранения и дефицита.

5.1. Модели с фиксированным размером заказа

В моделях с непрерывным контролем уровня запаса заказ на пополнение размещается при достижении запасом уровня r (точки возобновления). Как и в детерминированном случае, циклом называется интервал между двумя последовательными размещениями заказов или между двумя последовательными поставками. Рассмотрим систему с постоянным размером заказа Q.

Пусть d – средняя интенсивность спроса, и, как и ранее, K – стоимость размещения заказа, h – стоимость хранения единицы запаса в единицу времени. Предполагается, что издержки дефицита пропорциональны его ожидаемому уровню, b – потери от нехватки единицы запаса.

Срок выполнения заказа l – вообще говоря, случайная величина с плотностью распределения $g(l)$. Считается, что распределение спроса в течение срока выполнения заказа является стационарным (неизменным во времени). Пусть $f(x,t)$ – плотность распределения спроса за период t. Тогда плотность безусловного распределения спроса за время выполнения заказа равно $D_l(x) = \int_0^\infty f(x,l)g(l)dl$. Если время выполнения заказа 1 постоянно, считаем $D_l(x) = f(x,l)$.

Естественно считать, что $r>0$, поэтому дефицит может возникнуть только за время поставки. Обозначим через μ ожидаемый спрос за время поставки, то есть $\mu = \int_0^\infty x D_l(x) dx$. Тогда ожидаемый уровень запаса непосредственно перед пополнением равен

$$s = \int_0^\infty (r - x) D_l(x) dx = r - \mu,$$

ожидаемый наличный запас перед пополнением

$$\bar{I} = \int_0^r (r - x) D_l(x) dx,$$

ожидаемый дефицит –

$$\overline{B} = \int_r^\infty (x - r) D_l(x) dx.$$

Из привёдённых соотношений вытекает, что $\bar{I} = \overline{B} + r - \mu$.

Ожидаемая продолжительность цикла составляет $Q/d + \tau'$, где τ' – ожидаемая продолжительность отсутствия запасов. Модель рассматривается в предположении, что количество неудовлетворённых требований мало, и величиной τ' можно пренебречь.

Таким образом, ожидаемые издержки выполнения заказа в единицу времени равны приближенно Kd/Q, ожидаемые издержки дефицита в единицу времени $bd\overline{B}/Q$.

Как указано в параграфе 2.3, неудовлетворенные заявки могут учитываться и выполняться при поступлении заказа, и могут быть потеряны.

В **модели с отложенным спросом** полагают, что случай $r - \mu < 0$ игнорируется и, поскольку уровень запаса меняется за время цикла от $r - \mu + Q$ (сразу после пополнения) до $r - \mu$ с постоянной средней интенсивностью, ожидаемые издержки хранения по содержанию запасов равны примерно $h(Q/2 + r - \mu)$.

Таким образом, ожидаемые издержки в единицу времени, минимум которых определяется в данной модели, составляют

$$C(Q, r) = \frac{Kd}{Q} + h\left(\frac{Q}{2} + r - \mu\right) + \frac{bd}{Q}\int_r^\infty (x - r) D_l(x) dx. \qquad (5.1)$$

Необходимые условия точки минимума –

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = -\frac{Kd}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{bd}{Q^2} = 0, \; \frac{\partial C}{\partial r} = h - \frac{bd}{Q}\int_r^\infty D_l(x) dx = 0,$$

то есть оптимальные значения Q и r определяются из уравнений

$$Q^* = \sqrt{\frac{2d\left(K + b\overline{B}\right)}{h}}, \; P\left(D > r^*\right) \equiv \int_{r^*}^\infty D_l(x) dx = \frac{hQ^*}{bd}. \qquad (5.2)$$

Величина $s = r - \mu$ трактуется как размер страхового запаса, поддерживаемого в системе, в целевую функцию (5.1) включены расходы на его хранение.

Рассмотрим теперь приближенную **модель с потерянным спросом**. Поскольку уровень запаса может быть теперь только неотрицательным, средний уровень запасов приближенно равен $\left(\bar{I} + Q + \bar{I}\right)/2 = Q/2 + r - \mu + \overline{B}$. Издержки заказа и дефицита рассчитываются как в предыдущем случае. Следовательно,

$$C = \frac{Kd}{Q} + h\left(\frac{Q}{2} + r - \mu\right) + \left(h + \frac{bd}{Q}\right)\int_{r}^{\infty}(x - r)D_l(x)dx, \qquad (5.3)$$

оптимальные значения Q и r определяются из уравнений

$$Q^* = \sqrt{\frac{2d\left(K + b\overline{B}\right)}{h}},\ P\left(D > r^*\right) \equiv \int_{r^*}^{\infty} D_l(x)dx = \frac{hQ^*}{bd + hQ^*}. \qquad (5.4)$$

Страховой запас равен в этом случае $\bar{I} = \overline{B} + r - \mu$

Из соотношений (5.2) и (5.4) вытекает, что оптимальный размер заказа больше размера заказа, вычисляемого по формуле Уилсона (2.4).

Уровень дефицита $\overline{B}$ убывает с увеличением r. Поэтому первое соотношение в (5.2) и (5.4) определяет размер заказа как убывающую функцию r, $Q^*(0) = \sqrt{\dfrac{2d(K + b\mu)}{h}}$, $Q^*(r) \to \sqrt{2Kd/h}$ при $r \to \infty$. Второе соотношение в (5.2) определяет убывающую функцию $Q_1^*(r) = \dfrac{bd}{h}\displaystyle\int_r^{\infty} D_l(x)dx$, $Q_1^*(0) = \dfrac{bd}{h}$, $Q_1^*(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Поэтому если $Q^*(0) < Q_1^*(0)$, система (5.2) имеет решение. Так как функция издержек (5.1) выпукла, это решение единственно.

В случае потерянного спроса из (5.4) получаем $Q_1^*(r) = \dfrac{bd}{h}\displaystyle\int_r^{\infty} D_l(x)dx \Bigg/ \int_0^{r} D_l(x)dx$, $Q_1^*(r) \to \infty$ при $r \to 0$, $Q_1^*(r) \to 0$ при $r \to \infty$, то есть система (5.4) имеет единственное решение.

Сравнивая функции $Q_1^*(r)$ для систем (5.2) и (5.4), замечаем, что при любом r уровень заказа, определяемый при отложенном спросе меньше, чем при потерянном спросе, следовательно, оптимальное значение r^* будет в случае отложенного спроса меньше, а оптимальное значение Q^* больше, чем при потерянном спросе.

Решение систем (5.2) и (5.4) может быть найдено численно, например, с помощью следующей итеративной процедуры [13].

Полагаем $Q_1=\sqrt{2Kd/h}$ и находим r_1 из второго уравнения в системе, положив в нём $Q^*=Q_1$. Далее определяем Q_2 из первого уравнения системы, взяв $r^*=r_1$, r_2 из второго уравнения, взяв $Q^*=Q_2$ и так далее. Итерации продолжаются до тех пор, пока разности между двумя последовательными значениями Q и r не станут достаточно малыми.

Пример 5.1. [10] Электротехническая компания используют в производственном процессе канифоль в количестве 1000 галлонов в месяц. Размещение заказа на поставку канифоли обходится фирме в 100 долл. Стоимость хранения одного галлона канифоли на протяжении одного месяца равна 2 долл., а удельные потери от её дефицита – 10 долл. за один галлон. Спрос в период поставки можно считать случайной величиной, равномерно распределенной от 0 до 100 галлонов. Надо определить оптимальную политику управления запасами.

Рассмотрим модель с отложенным спросом.

$$D_l(x)=\frac{x}{100},\ x\in[0,100],\ \mu=\int_0^{100}\frac{xdx}{100}=50.$$

Пусть $r\le 100$.

$$\int_r^{\infty}D_l(x)dx=\int_r^{100}\frac{dx}{100}=1-\frac{r}{100},\ \int_r^{\infty}xD_l(x)dx=\int_r^{100}\frac{xdx}{100}=50-\frac{r^2}{200},$$

$$\overline{B}=50-\frac{r^2}{200}-r\left(1-\frac{r}{100}\right)=50+\frac{r^2}{200}-r.$$

Уравнения (5.2) принимают вид

$$Q^*=\sqrt{1000\left(100+10\overline{B}\right)}=100\sqrt{10+\overline{B}},\ 100-r^*=\frac{Q^*}{50}.$$

Так как

$$Q^*(0)=100\sqrt{60}=774{,}6,\ Q_1^*(0)=5000,$$

существует единственное решение задачи (5.2). Применим итерационную процедуру.

$$Q_1=100\sqrt{10}=316,\ r_1=100-\frac{316}{50}=93{,}68,\ \overline{B}=0{,}2,$$

$$Q_2=100\sqrt{10{,}2}=319,\ r_2=100-\frac{319}{50}=93{,}62.$$

Так как r_1 и r_2 различаются незначительно, полагаем $r^*=r_2\approx 94$, $Q^*=Q_2=319$. В системе поддерживается страховой запас в 44 галлона. Ожидаемая продолжительность цикла – приблизительно 10 дней. Ожидаемые издержки, связанные с данной стратегией –

$$\frac{100000}{319}+2\left(\frac{319}{2}+44\right)+\frac{10000}{39}0{,}2=726{,}25.\ \square$$

Пример 5.2.[13] На военной базе имеется запас электронных ламп специального типа. Средний годовой спрос на них равен 1600 штук. Каждая лампа стоит 50 долларов. Стоимость подачи заказа на лампы – 4000 долларов. Коэффициент издержек содержания запасов на базе $\alpha = 0{,}2$. Если потребность в лампах этого типа не может быть удовлетворена из-за дефицита запасов, то лампу можно получить из заводских запасов одного из изготовителей. Дополнительные расходы, связанные с транспортировкой, равны 200 долларов. Установлено, что распределение спроса за время поставки пополнения является нормальным с математическим ожиданием 750 ламп и средним квадратическим отклонением 50 ламп. Нужно определить оптимальные размер заказа и точку заказа.

Рассматривается модель с потерянным спросом – спрос на недостающие лампы удовлетворятся посредством дополнительных заказов.

Случайная величина $z = \dfrac{D - 750}{50}$ имеет стандартное нормальное распределение, поэтому

$$\int_r^\infty D_l(x)dx = 1 - P(D < r) = 1 - P(z < z_r) = 1 - F(z_r),$$

где $z_r = (r - 750)/50$, $F(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(\xi)d\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\xi^2/2\right)d\xi$,

$$\int_{z_r}^\infty z\varphi(z)dz = -\int_{z_r}^\infty \varphi'(z)dz = \varphi(z_r),$$

$$\int_r^\infty xD_l(x)dx = \frac{1}{50}\int_r^\infty x\varphi((x - 750)/50)dx = 50\varphi(z_r) + 750(1 - F(z_r)).$$

Ожидаемый дефицит

$$\overline{B} = 50\varphi(z_r) + (750 - r)(1 - F(z_r)).$$

Система (5.4) принимает вид

$$Q^* = 80\sqrt{10(20 + \overline{B})}, \quad F(z_{r^*}) = \frac{32000}{32000 + Q^*}.$$

Применим итерационный алгоритм:

$$Q_1 = 800\sqrt{2} \approx 1131, \; F(z_{r1}) = \frac{32000}{32000 + 1131} = 0{,}966, \; z_{r1} = 1{,}82,$$

$$r_1 \approx 1{,}82 \cdot 50 + 750 = 841.$$

$$\overline{B} = \frac{50}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1{,}82^2}{2}\right) - 91 \cdot 0{,}034 \approx 0{,}713, \; Q_2 = 80\sqrt{207{,}13} \approx 1151,$$

$$F(z_{r2}) = \frac{32000}{32000 + 1151} = 0{,}965, \; z_{r2} = 1{,}81, \; r_2 \approx 842.$$

$$\overline{B} = \frac{50}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1{,}81^2}{2}\right) - 92 \cdot 0{,}035 \approx 0{,}657,\ Q_3 = 80\sqrt{206{,}57} \approx 1150,$$

$$F(z_{r3}) \approx F(z_{r2}), \text{ поэтому } r_3 = r_2 = r^*,\ Q^* = Q_3.$$

Гарантийный запас составляет 93 единицы. Ожидаемые годовые издержки (по формуле (5.3))

$$C = \frac{4000 \cdot 1600}{1150} + 10\left(\frac{1150}{2} + 842 - 750\right) + \left(10 + \frac{200 \cdot 1600}{1150}\right) \cdot 0{,}657 \approx 12424{,}6. \ ▫$$

При дискретном спросе и случайных размерах требований уровень запаса может не принять значения r, стратегия управления запасами может быть модифицирована следующим образом. Определяются уровни s и S, $s<S$, и как только уровень запаса I становится меньше или равен s, размещается заказ $S–I$.

Страховой запас

Численные значения издержек дефицита обычно бывает трудно установить на практике. Один из подходов к управлению запасами заключается в том, что в течение всего периода планирования поддерживается страховой запас B.

Пусть размер страхового запаса определяется так, чтобы вероятность возникновения дефицита за время поставки не превышала заданного уровня α. Размер партии Q должен минимизировать при этом издержки заказа и хранения. Таким образом, при тех же предположениях, что и ранее, рассматривается задача

$$\frac{Kd}{Q} + h\left(\frac{Q}{2} + B\right) \to \min,\ P(D > B + \mu) \le \alpha,$$

где D – спрос за время поставки. Очевидно, размер заказа в данном случае вычисляется по формуле Уилсона, точка возобновления заказа полагается равной $r = \mu$.

Предположим, например, спрос D за период поставки имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μ и стандартным отклонением σ_D. Такая ситуация возникает, в частности, если ежедневный спрос имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием d и стандартным отклонением σ_d, тогда $\mu = dl$ и $\sigma_D = \sigma_d\sqrt{l}$.

Положим $z_D = (D - \mu)/\sigma_D$, $P(D > B + \mu) = P(z_D > B/\sigma_D) = 1 - F(B/\sigma_D)$ и величина страхового запаса находится из условия

$$F(B/\sigma_D) \ge 1 - \alpha.$$

Пример 5.3. В условиях примера 5.1. $r = \mu = 50$, $Q = 316$,

$$P(D > B + 50) = 1 - (B + 50)/100 \le \alpha, \text{ то } B \ge 100(1 - \alpha) - 50.$$

Например, при $\alpha = 0{,}05$ $B = 45$.

В примере 5.2 $r = \mu = 750$, $Q = 1131$, при $\alpha = 0{,}05$ $B = 50 \cdot 1{,}65 = 82{,}5$.

5.2. Модели с фиксированным интервалом между поставками

Периодический контроль уровня запасов предусматривает проверку состояния складской системы и принятие решений о размещении заказа в дискретные моменты времени, обычно через равные интервалы.

Пусть τ – интервал времени между двумя последовательными проверками, в каждую из которых фиктивный уровень запасов, то есть чистый запас плюс объём партии, пополняется до величины S. Требуется определить значения τ и S так, чтобы ожидаемые издержки управления запасами в единицу времени были минимальными.

Предполагается, что стоимость проверки не зависит от стратегии. Поскольку при каждой проверке подается заказ, будем считать что K включает не только стоимость выполнения заказа, но и затраты на проверку уровня заказов. Средние издержки заказа и проверки составляют, следовательно K/τ.

Рассмотрим систему с отложенным спросом. Пусть, как и ранее, μ – средний спрос за время поставки. К моменту поставки ожидаемый запас составляет $S-\mu$, а непосредственно перед следующей поставкой – $S-\mu-d\tau$. Средний объём запасов за период определяется приближенно как $\frac{\tau}{2}(S-\mu+S-\mu-d\tau)=\tau\left(S-\mu-d\frac{\tau}{2}\right)$, то есть ожидаемые издержки хранения в единицу времени равны $h\left(S-\mu-d\frac{\tau}{2}\right)$.

Предположим, сначала, что срок выполнения заказа l постоянный. Товары, заказанные в момент времени t, поступят на склад в момент $t+l$, а следующее пополнение запасов произойдёт в момент $t+l+\tau$. Поэтому нехватка запасов может образоваться на промежутке времени длиной $l+\tau$ в том и только в том случае, когда спрос за это время превысит уровень S. Таким образом, ожидаемый дефицит за период равен

$$\int_S^{\infty}(x-S)f(x;l+\tau)dx.$$

Пусть теперь время поставки l – случайная величина с плотностью распределения $g(l)$, принимающая значения из отрезка $[l_-,l_+]$. Положим

$$D_l(x;\tau)=\int_{l_-}^{l_+}f(x;l+\tau)g(l)dl.$$

Если l_1 и l_2 – время выполнения заказов, поданных в моменты t и $t+\tau$ соответственно, то ожидаемый дефицит за период составит

$$\int_{l_-}^{l_+}\int_{l_-}^{l_+}\int_S^{\infty}(x-S)f(x;l_2+\tau)g(l_2)g(l_1)dx\,dl_1dl_2=\int_S^{\infty}(x-S)D_l(x;\tau)dx.$$

В случае постоянного времени поставки считаем, что $D_l(x;\tau) = f(x;l+\tau)$. Таким образом, средние ожидаемые издержки дефицита равны

$$\frac{b}{\tau}\int_S^{\infty}(x-S)D_l(x;\tau)dx.$$

Общие средние ожидаемые издержки составят

$$C(\tau,S) = \frac{K}{\tau} + h\left(S - \mu - \frac{d\tau}{2}\right) + \frac{b}{\tau}\int_S^{\infty}(x-S)D_l(x;\tau)dx. \qquad (5.5)$$

Значение *S*, минимизирующее функцию $C(\tau,S)$ при фиксированном *τ*, удовлетворяет уравнению

$$\int_S^{\infty} D\ \ (x;\tau)dx = \frac{h}{b}\tau. \qquad (5.6)$$

Оптимальная продолжительность периода τ находится с помощью численного решения уравнения $\partial C/\partial\tau = 0$ совместно с (5.6). Гарантийный уровень запасов равен $S - \mu - d\tau$.

В случае потерянного спроса математическое ожидание наличных запасов в момент поставки заказа приближенно равно

$$S - \mu - d\tau + \int_S^{\infty}(x-S)D_l(x;\tau)dx.$$

Следовательно, ожидаемые издержки вычисляются по формуле

$$C = \frac{K}{\tau} + h\left(S - \mu - \frac{d\tau}{2}\right) + \left(h + \frac{b}{\tau}\right)\int_S^{\infty}(x-S)D_l(x;\tau)dx,$$

аналогом (5.6) является уравнение

$$\int_S^{\infty} D_l(x;\tau)dx = \frac{h\tau}{b+h\tau}.$$

Пример 5.4.[13] На складе инвентаризация проводится раз в полгода. Средняя интенсивность спроса на шины для тракторов, хранящихся в одной из секций склада, равна 600 штук в год. Время поставки примерно постоянно и равно 3 месяца. Величина спроса за время $l+\tau$ описывается нормальным законом распределения со средним $600(l+\tau)$ и дисперсией $900(l+\tau)$, если время измеряется в годах. Стоимость хранения одной шины в течение года – 3 доллара. Учет каждого требования, поступившего в то время, когда на складе не было запасов, обходится в 25 долларов. Нужно определить оптимальное значение *S*.

По условию, $l+\tau = 9/12 = 0{,}75$ года, то есть средний спрос за время $l+\tau$ равен 450 штук, стандартное отклонение - $\sqrt{900\cdot 0{,}75} \approx 25{,}981$. Из (5.6) вытекает

$$F\left(\frac{S-450}{25{,}981}\right)=1-\frac{3}{25}\cdot 0{,}5=0{,}94,\ \frac{S-450}{25{,}981}=1{,}56,\ S=490{,}5.$$

Пусть суммарные затраты проверки и заказа равны 25 долл. Для определения оптимального периода, вычислим издержки при различных τ и S, вычисленных согласно (5.5) (табл. 5.1). Средний спрос за время поставки равен $\mu = 600 \cdot 0{,}25 = 150$. Пусть время измеряется в месяцах. Тогда

$$F(z_S)=1-0{,}01\tau,\ S=15z_S\sqrt{1+\tau/3}+50(3+\tau),$$

$$\overline{B}=15\varphi(z_S)\sqrt{1+\tau/3}+(50(3+\tau)-S)\tau/100=15\sqrt{1+\tau/3}(\varphi(z_S)-0{,}01\tau z_S),$$

$$C(\tau)=\frac{25}{\tau}+0{,}25(S-150-25\tau)+\frac{25}{\tau}\overline{B}.$$

Таким образом, минимум издержек достигается при продолжительности периода 9,8 месяцев, S=680.

Таблица 5.1

Пример 5.4

τ	5	6	7	8	9	9,3	9,5	9,8	10
S	440	490,5	540,5	590,5	640	665	665	680	692
$\overline{B}$	35,5	32,6	29,8	27,7	25,8	25,2	25	24,5	26,4
C	223,75	187,48	163,98	149,89	140,62	138,65	137,82	136,26	141,43

Применение полученной стратегии позволяет сократить среднемесячные издержки на 51,22 доллара. ▫

В детерминированном случае обе рассмотренные стратегии управления запасами, с фиксированным размером заказа и с фиксированным интервалом между заказами, совпадают. В условиях случайного спроса выбор одной из этих моделей определяется соотношением между издержками хранения и дефицита и стоимостью непрерывного контроля над уровнем запаса.

5.3. Модели одного периода

Рассмотрим простейшую вероятностную задачу управления запасами. Рассматривается только один фиксированный период времени, в течение которого производится не более одного пополнения запаса. Предполагается, что время доставки равно нулю. Требуется определить объём заказа, минимизирующий ожидаемые издержки за период.

Пусть, как и ранее, K – издержки заказа, c – стоимость единицы заказа, и пусть h – стоимость хранения единицы запаса в течение периода, b – потери от дефицита единицы запаса в течение периода. D – спрос за период, случайная величина с функцией распределения $F(x)$.

Предположим сначала, начальный запас равен нулю. В этом случае заказ обязательно размещается, поэтому фиксированные издержки заказа можно не учитывать в целевой функции. Пусть y – запас, создаваемый в начале периода.

Если $D < y$, в течение периода хранится $y - D$ единиц, в противном случае образуется нехватка $D - y$. Ожидаемые издержки хранения и дефицита при непрерывном распределении спроса равны, следовательно

$$C(y) = cy + h\int_0^y (y-x)dF(x) + b\int_y^\infty (x-y)dF(x) \text{ при } y \geq 0.$$

Дифференцируя эту функцию по правилу Лейбница, получаем

$$C'(y) = c + h\int_0^y dF(x) - b\int_y^\infty dF(x) = c + hF(y) - b(1 - F(y)) = c - b + F(y)(b+h).$$

Так как функция $C(y)$ выпуклая, оптимальный размер заказа и, соответственно, уровень оптимальный уровень запаса S в начале периода определяется как решение уравнения

$$F(S) = P(D < S) = \frac{b-c}{b+h}. \tag{5.7}$$

Минимальные ожидаемые издержки составляют

$$C(S) = (c-b)S + SF(S)(h+b) + bM(D) - (h+b)\int_0^S x dF(x) =$$

$$= bM(D) - (h+b)\int_0^S x dF(x),$$

где $M(D)$ – ожидаемый спрос за период.

В случае дискретного спроса (пусть, без ограничения общности, D принимает значения 0, 1, 2, …с вероятностями p_0, p_1, p_2, …) размер заказа y также можно считать целым числом и

$$C(y) = cy + h\sum_{j=0}^{y-1}(y-j)p_j + b\sum_{j=y+1}^{\infty}(j-y)p_j .$$

Оптимальное значение запаса находится из условий

$$C(S) \leq C(S-1)\ ,\ C(S) \leq C(S+1).$$

Таким образом,

$$F(S) = P(D < S) \leq \frac{b-c}{b+h} \leq F(S+1). \tag{5.8}$$

Поскольку, очевидно, всегда можно считать $b > c$, S, удовлетворяющее (5.7) или (5.8), всегда существует и единственно.

Рассматриваемая модель известна под названием «задачи газетчика» [13]. Она применяется, как правило, при управлении запасами скоропортящейся или быстро выходящей из моды продукции, товаров с сезонным характером потребления или поставки, запчастей. Часто она встречается в следующей постановке. Некоторый товар приобретается или производится по цене c за единицу и продаётся по цене g. Нераспроданный к концу периода товар реализуется по цене v за единицу. Естественно предположить, что $g>c>v$.

Требуется определить количество товара в начале периода. В частности если v=0, задача носит название «задачи о рождественских ёлках». Условия оптимальности принимают вид

$$F(S)=\frac{g-c}{g-v} \text{ или } F(S)\le\frac{g-c}{g-v}\le F(S+1). \tag{5.9}$$

Пример 5.5. [10] Владелец газетного киоска покупает газеты USA Now за 30 центов за экземпляр, а продаёт за 75 центов. Оставшиеся нераспроданными к концу для газеты выставляются на продажу по цене 5 центов за штуку. Сколько экземпляров газеты должен закупить владелец каждое утро, если спрос на газеты описывается а) нормальным распределением с математическим ожиданием 300 штук и стандартным отклонением 20 штук; б) дискретным распределением, заданным таблицей

D	200	220	300	320	340
p(D)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Определим критическое соотношение

$$\frac{g-c}{g-v}=\frac{75-30}{75-5}=\frac{9}{14}\approx 0{,}643\,.$$

В случае а) получаем $P(D<S)=P((D-300)/20<(S-300)/20)\approx 0{,}643$. Поскольку величина $z=(D-300)/20$ имеет стандартное нормальное распределение, из таблиц находим $(S-300)/20\approx 0{,}37$. Следовательно, оптимальный размер заказа – 307 экземпляров. В случае б) определим функцию распределения спроса:

D	200	220	300	320	340
F(D)	0	0,1	0,3	0,7	0,9

Таким образом, S=300.

Пусть теперь имеется начальный запас y_0. Тогда ожидаемые издержки, связанные с пополнением запаса до уровня y, составляют

$$K-cy_0+C(y).$$

Минимум этой функции достигается, очевидно, в точке S.
Если заказ не размещается, ожидаемые издержки равны $-cy_0+C(y_0)$.

Таким образом, возможны следующие случаи.
Если $y_0\ge S$, заказ не размещается.
Если $y_0<S$, нужно сравнить издержки при наличии и при отсутствии заказа, то есть $K-cy_0+C(S)$ и $-cy_0+C(y_0)$.

Пусть s – решение уравнения

$$K+C(S)=C(s), \tag{5.10}$$

удовлетворяющее условию $0<s<S$. Тогда, поскольку функция $C(y)$ убывает при $y<S$, при всех $y_0<s$ $K+C(S)=C(s)<C(y_0)$, то есть выгодно пополнять запас до величины S (рис. 5.1).

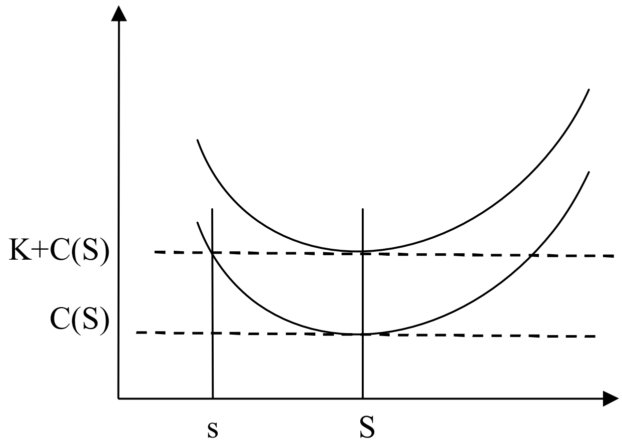

Рис. 5.1. Модель с учётом издержек заказа

Оптимальная стратегия должна иметь, таким образом, следующую структуру:

Заказать $S - y_0$, *если начальный уровень* y_0 *меньше или равен s, иначе ничего не заказывать.*

Такая стратегия называется (s,S)-стратегией.

Если уравнение (5.10) не имеет корней на интервале $(0,S)$, то можно считать $s=0$.

Пример 5.6. [10] Дневной спрос на продукцию в течение одного периода удовлетворяется мгновенно в начале периода. Спрос является случайной величиной, равномерно распределенной от 0 до 10 единиц. Стоимость хранения единицы продукции на протяжении периода равна 0,5 долл., а штраф за дефицит единицы – 4,5 долл. Стоимость единицы продукции 0,5 долл., стоимость размещения заказа – K. Определить оптимальную стратегию управления запасами.

Имеем,

$$C(y) = 0{,}5y + 0{,}025y^2 + 0{,}225(10 - y)^2 = 0{,}25y^2 - 4y + 22{,}5,$$

$$(b - c)/(b + h) = 0{,}8,\ P(D < S) = S/10, \text{ то есть } S = 8.$$

Уравнение (5.10) принимает вид

$$0{,}25s^2 - 4s + 22{,}5 = K + 0{,}25S^2 - 4S + 22{,}5,$$

то есть

$$s^2 - 16s - 4K + 64 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$s_{1,2} = 8 \pm 2\sqrt{K}.$$

Так как $s_2 = 8 + 2\sqrt{K} > 8$, $s = 8 - 2\sqrt{K}$, если $K \le 16$ и $s = 0$ в противном случае. Например, при $K = 9$ $s = 2$.▫

УПРАЖНЕНИЯ

1. Магазин имеет 8 видов продуктов. Проведите ABC – анализ.

Таблица 6.1

Данные для упражнения 1

Продукт	1	2	3	4	5	6	7	8
Цена	4	2	4	10	2	10	1	20
Спрос	250	2000	1000	7000	1500	2000	10000	100

2. Пусть при сохранении остальных предположений классической модели экономического размера заказа поставка осуществляется частями – часть λ заказа поступает через время l_1 после подачи заказа, а оставшаяся часть – через l_2 после подачи заказа. Определите оптимальный размер заказа и точку заказа.

3. В модели экономического размера партии (EBQ) выполнены все предположения модели с постепенным пополнением при отсутствии дефицита, но в период пополнения запаса расхода запаса не осуществляется. Определить оптимальный размер заказа.

4. Пусть в предположениях основной модели оптимального размера заказа поставка осуществляется комплектами по q товаров, то есть объем заказа может составлять только mq единиц, $m = 1,2,...$ Определите оптимальный размер заказа, удовлетворяющий этому условию. Покажите, что при $m \geq 2$ соответствующие издержки не более чем на 6% превышают минимальные. [15]

5. Предположим, что в модели оптимального размера заказа интервал времени между поставками должен иметь вид $3^k \tau_0$, где τ_0 – некоторый базовый период, $k = 1,2,...$ Оцените эффективность лучшей такой стратегии. [15]

6. Пусть в основной модели оптимального размера заказа товар доставляется грузовиками вместимостью q. Стоимость доставки заказа составляет $K_0 + Km$, где m – количество используемых грузовиков. Определить размер заказа, минимизирующий издержки доставки и хранения запаса. [15]

7. Рассмотрите модели оптимального размера заказа, в которых учитываются затраты на хранение, зависящие от площади или объема склада, которая требуется для всей поступившей партии $C_{H1} = hkS$. Получите формулы для размера заказа и расчета минимальных затрат.

8. Фирма осуществляет программу расширения оборотного капитала, которая потребует ежегодных займов на 300000 долларов. Банк представляет кредит фирме при услови 4% годовых с первых 100000 и 5% годовых с дополнительной суммы. Расходы на оформление каждого займа составляют 500 долларов. Займы не будут возвращены до полного завершения программы. Чему равен оптимальный размер каждого займа? [13]

9. Рассмотрите алгоритм определения оптимального размера заказа при наличии одной оптовой скидки в предположении, что затраты на хранение не зависят от цены закупки.

10. Автомобильная мастерская специализируется на быстрой замене масла в автомобилях. Мастерская покупает автомобильное масло по 3 долл. за галлон. Цена может быть снижена до 2,5 долл. за галлон при условии, что покупается более 1000 галлонов. За день в мастерской обслуживается около 150 автомобилей, и на каждый из них для замены требуется 1,25 галлона масла. Стоимость хранения одного галлона 0,02 долл. в день. Стоимость размещения заказа равна 20 долл. Срок выполнения заказа – 2 дня. Требуется определить оптимальную стратегию управления запасами. [10]

11. Пусть в модели оптимального размера заказа с дифференциальной скидкой стоимость хранения единицы продукции равна доле α от его стоимости. Как в этом случае изменится алгоритм поиска оптимального размера заказа?

12. Решите задачу из примера 3.1 с помощью алгоритма обратной прогонки.

13. На протяжении 12 месяцев небольшое издательство переиздает роман в целях удовлетворения спроса на него: 100, 120, 50, 70, 90, 105, 115, 95, 80, 85, 100, 110 экземпляров. Стоимость размещения заказа на переиздание равна 200 долл. Стоимость хранения книги на протяжении одного месяца – 1,2 долл. Определить план переиздания книги. [10]

14. Компания производит специальные вытяжки, которые используются в домашних каминах в период с декабря по март. Учитывая популярность продукции, компания может использовать сверхурочные работы для удовлетворения спроса на свою продукцию. Производственные затраты на всех этапах одинаковы. Стоимость производства единицы продукции равна 6 долл. в условиях обычного режима работы и 9 долл. при сверхурочных работах. Стоимость хранения единицы продукции на протяжении месяца равна 0,1 долл.

Таблица 6.2

Данные для упражнения 14

Месяц	Возможности производства		Спрос
	Обычный режим	Сверхурочный режим	
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

Определите производственный план.

15. Определите стратегию управления запасами, исходные данные приведены в таблице 6.3. Общая площадь склада – 25 кв. футов. Решите стратегическую задачу.

Таблица 6.3

Данные для упражнения 15

Товар	Ki	спрос (ед. в день)	hi	γi (кв. футы)
1	10	2	0,3	1
2	5	4	0,1	1
3	15	4	0,2	1

16. Докажите, что целевые функции (5.1) и (5.3) в моделях с фиксированным размером заказа выпуклы.

17. Рассмотрите модели с фиксированным размером заказа (п. 5.1) в предположении, что спрос – дискретная случайная величина. Получите аналог систем (5.2) и (5.4).

18. Склад скобяных товаров обслуживает большое число магазинов города. Изделия поступают в магазины в картонных коробках, причём почти всегда на заказ отгружается одна коробка. Спрос на изделия во время поставки пополнения приближено описывается нормальным распределением с математическим ожиданием 125 и средним квадратическим отклонением 25 коробок. Средняя годовая интенсивность спроса составляет 500 коробок в год. Расходы по оформлению и поставке заказа составляют 3,5 доллара плюс 0,15 доллара, умноженные на размер заказа. Годовая стоимость хранения коробки равна 2,16 доллара. Склад ведёт работу по системе с отложенным спросом, расходы, связанные с отсутствие товара на складе, составляют 25 долларов. Определите оптимальный размер заказа и точку возобновления запаса. [13]

19. Пусть в детерминированной модели оптимального размера заказа время выполнения заказа – случайная величина. Каким должен быть страховой запас, чтобы вероятность возникновения дефицита не превышала α?

20. Оцените издержки, соответствующие издержкам стратегий управления запасами из примера 5.3.

21. Состояние хранящегося на складе товара проверяется раз в погода, проверка обходится в 15 долларов. Стоимость единицы товара равна 25 долларов, стоимость подачи заказа 2 доллара. Требования, поступившие в то время, когда на складе нет товара, регистрируются и стоимость каждого учтённого требования 100 долларов. Коэффициент издержек хранения 0,2. Величина спроса за любое время t распределена по нормальному закону со средним 240t и дисперсий 500t (t – в годах). Время поставки постоянно и равно 2,5 месяца. Найти оптимальное значение S для указанного периода, а также оптимальные период проверки и максимальный уровень запаса. [13]

22. Продавцу рождественских ёлок нужно определить, сколько ёлок заготовить к празднику. Каждая ёлка стоит торговцу 4 доллара, а сам он продаёт её за 7,5 доллара. Нераспроданные вовремя ёлки сбыта не находят. Решите задачу, если а) спрос распределён нормально со средним 200 и дисперсией 300, б) спрос распределен равномерно с теми же дисперсией и средним. [13]

23. Магазин предлагает посетителям кофе и орехи с шести часов утра каждый день, закупая орехи по 7 центов за порцию, а продавая по 25 центов за порцию до 8 часов утра. После этого времени орехи продаются по 5 центов за порцию. Число покупателей – случайная величина, равномерно распределенная на интервале [30,50]. Каждый посетитель обычно заказывает три порции орехов. Сколько примерно порций орехов следует закупать магазину? Доставка орехов стоит 10 долларов. [10]

ЛИТЕРАТУРА

1. Бауэрсокс Д., Клосс Д. Логистика. Интегрированная цепь поставок. – М: Олимп-Бизнес, 2008. – 640 с.
2. Бродецкий Г.Л. Управление запасами. – М.: Эксмо, 2007. – 400 с.
3. Букан Д., Кенигсберг Э. Научное управление запасами. – М.: Наука, 1967. – 423 с.
4. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Питер, 2002. – 208 с.
5. Логистика: Учебник / Дыбская В.В., Зайцев Е.И., Сергеев В.И., Стерлигова А.Н. – М.: Эксмо, 2008. – 944 с.
6. Модели и методы теории логистики: Учебное пособие / Под ред. В.С. Лукинского. – СПб.: Питер, 2007. – 448 с.
7. Неруш Ю.М. Логистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 495 с.
8. Родников А.Н. Логистика: Терминологический словарь. М.: Экономика, 1995. – 251 с.
9. Рыжиков Ю. Теория очередей и управление запасами: Учебное пособие. – М.: Дело, 2001. – 341 с.
10. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – М.: Вильямс, 2007. – 912 с.
11. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 с.
12. Шрайбфедер Д. Эффективное управление запасами. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2008. – 304 с.
13. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. – М.: Наука, 1969. – 513 с.
14. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.
15. Bramel J., Simchi-Levi D. The logic of logistics: theory, algorithms, and applications for logistics management. – New York: Springer-Verlag, 1997. – 282 p.

Алла Александровна **Тюхтина**

Модели управления запасами

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.