МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

А.А. Тюхтина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОГИСТИКИ

Транспортная задача

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся
по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес – информатика» (профиль подготовки
"Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса")

Нижний Новгород
2016

УДК 519.852
ББК 22.18
Т 98

Т 98 Тюхтина А.А. Математические модели логистики. Транспортная задача: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 66 с.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент **А.В. Калинин**

В учебно-методическом пособии рассматриваются методы решения классической и сетевой транспортных задач линейного программирования.

Содержание пособия соответствует программе дисциплины «Логистика», преподаваемой студентам Нижегородского госуниверситета, обучающимся по направлению «Бизнес – информатика» (профиль подготовки "Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса").

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
Института экономики и предпринимательства ННГУ,
к.э.н., доцент **Е.Н. Летягина**

УДК 519.852
ББК 22.18

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины Б3.В.ОД.7 «Логистика», преподаваемой студентам бакалавриата по направлению «Бизнес – информатика» (профиль подготовки "Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса") является знакомство с теоретическими вопросами логистики и принципами математического моделирования логистических процессов.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование у выпускника следующих компетенций:

– способность находить организационно-управленческие решения и готов нести за них ответственность (ОК-8);

– способность использовать современные стандарты и методики, разрабатывать регламенты деятельности предприятия (ПК-8);

– способность использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-20).

Специфика логистики как подхода, объединяющего различные области деятельности с целью достижения желаемого результата с минимальными затратами времени и ресурсов, обуславливает многообразие моделей и методов её исследования. При этом многие базовые модели логистического управления являются задачами оптимизации, обладающими определенной специфической структурой, что позволяет применять для их решения не только стандартные подходы, например, симплекс-метод для задач линейного программирования, но и их эффективные модификации.

В настоящем учебно-методическом пособии рассматриваются транспортные задачи линейного программирования, возникающие, в частности, при математическом моделировании процессов распределения в транспортных сетях. Исследуются различные постановки задач, изучаются два наиболее известных метода их решения – метод потенциалов, представляющий собой, по сути, модифицированный симплекс-метод, и прямо-двойственный алгоритм (венгерский метод).

1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

1.1. Постановка задач

Пусть дана сеть (V, D), где $V=\{1,\ldots,n\}$ – множество узлов, D – множество дуг, пропускная способность дуги (i,j) равна $d_{ij} \geq 0$. Для каждой дуги (i,j) определим значение c_{ij} стоимости прохождения единицы потока по дуге. Транспортная модель может рассматриваться как задача наиболее экономичного распределения потока по дугам транспортной сети.

Если в сети выделен источник $s \in V$ и сток $t \in V$, то задачу поиска дуговых потоков, минимизирующих стоимость прохождения потока величины v по сети, формально можно представить в виде

$$\sum c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} v, & i = s, \\ 0, & i \neq s,t, \\ -v, & i = t, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}. \tag{1.3}$$

Задачу (1.1) – (1.3) обычно называют *линейной сетевой задачей*.

Обобщим задачу на случай нескольких источников и стоков. Пусть каждому узлу i сети сопоставлено некоторое число s_i, называемое интенсивностью узла, и $V = S \bigcup R \bigcup T$. Элементы множеств S, T и R называются источниками, стоками и нейтральными узлами соответственно. Для всех $i \in S$ s_i>0, в узлах $i \in T$ s_i<0, нейтральные узлы имеют нулевую интенсивность.

Потоком в такой сети называется совокупность определенных для всех дуг величин x_{ij}, удовлетворяющих (1.3) и условию

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = s_i, \ i \in V. \tag{1.4}$$

Результирующий “чистый” поток, протекающий через узел i, вычисляется как разность выходящего и входящего потоков. Соотношение (1.4) означает, что для любого узла сети результирующий поток через узел равен его интенсивности.

Задача (1.1), (1.3), (1.4) называется *сетевой транспортной задачей*.

Очевидно, задача (1.1) – (1.3) – частный случай задачи (1.1), (1.3), (1.4). С другой стороны, сеть с несколькими источниками и стоками можно свести к сети с одним обобщенным источником s и одним обобщенным стоком t, вводя дополнительные дуги с нулевой стоимостью от s к источникам и от стоков к t. Пропускные способности новых дуг (s,i), $i \in S$, полагаем равными s_j, дуг (j,t), $j \in T$ – $(-s_j)$. Условия (1.4) определяют тогда поток максимальной величины из источника в сток и задача (1.1), (1.3), (1.4) становится полностью идентичной задаче (1.1) – (1.3). Поэтому задачу (1.1) – (1.3) также называют иногда сетевой транспортной задачей.

К очевидной сфере приложения задач (1.1) – (1.3) и (1.1), (1.3), (1.4) относится организация грузоперевозок в транспортной сети. В таких моделях узлы сети трактуются как пункты, соединенные сетью дорог, состоящей из конечного числа звеньев (дуг). Под интенсивностью понимается количество продукта, производимое или потребляемое данным узлом: если $i \in S$, то пункт i называется производственным, $a_i = s_i$ интерпретируется как запасы или производство некоторого продукта; величина $b_i = -s_i$, $i \in T$, трактуется как потребность в некотором продукте, а соответствующий пункт называется пунктом потребления. Если $s_i = 0$, то i – перевалочный пункт.

Для каждого звена сети известны стоимости c_{ij} перевозки единицы продукта. Полные затраты перевозки единицы продукта из некоторого пункта производства в некоторый пункт потребления получаются в результате суммирования стоимостей вдоль соединяющего эти пункты пути.

План перевозок определяется заданием величины x_{ij} для каждого звена сети. Задача состоит в формировании оптимального плана перевозок, то есть связанной с минимальными транспортными расходами схемы транспортировки груза от поставщиков к потребителям, такой, чтобы потребности в продукте пунктов потребления были удовлетворены и не допускалось затоваривание пунктов производства.

С помощью введенных обозначений, ограничения (1.4) можно переписать в виде

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = a_i, \ i \in S, \tag{1.5}$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = 0, \ i \in R, \tag{1.6}$$

$$\sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} = b_i, \ i \in T. \tag{1.7}$$

Ограничения (1.5) означают, что из пунктов отправления вывозится объем грузов, равный запасу в этом пункте. Ограничения (1.7) гарантируют доставку необходимого количества груза в каждый из пунктов назначения.

Благодаря указанной интерпретации транспортная задача и получила свое название. Транспортная модель применяется также для описания ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением расписаний, управлением движением капиталов, назначением персонала и других. Задачу о максимальном потоке, например, можно рассматривать как частный случай задачи о потоке минимальной стоимости (1.1)–(1.3), в которой все дуговые стоимости равны нулю, а v совпадает с величиной максимального потока.

Пример 1.1 [12]. Сеть трубопроводов связывает две станции опреснения воды с двумя городами. Ежедневное предложение опреснительных станций составляет 40 и 50 миллионов литров воды, города ежедневно потребляют 30 и

60 миллион литров воды. Каждая станция трубопроводами соединена с каждым городом непосредственно, однако они могут также перекачивать воду в города через специальную насосную станцию. Кроме того, станция 1 может транспортировать воду на станцию 2, а город 1 – в город 2. Требуется с минимальными затратами перераспределить запасы воды.

Сеть изображена на рис. 1.1, первое число на каждой дуге – стоимость прохождения единицы потока, второе (в скобках) – пропускная способность.

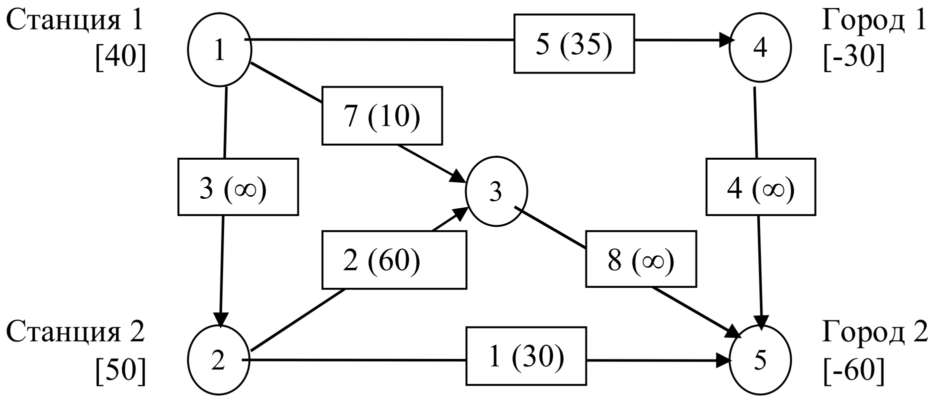

Рис. 1.1. Транспортная сеть

Традиционно транспортная задача рассматривается при следующих предположениях. Любая пара пунктов производство-потребление связана единственной дугой, перевалочные пункты отсутствуют ($R = \varnothing$), движение возможно только от производителя к потребителю, то есть $(S \bigcup T, A)$ – двудольный граф. Ограничений на пропускные способности дуг нет ($d_{ij} = \infty$). Пусть имеется m пунктов отправления (поставщиков, производства) и n пунктов назначения (потребителей). Тогда c_{ij} представляют собой затраты по транспортировке единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, а x_{ij} – количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Задача (1.1), (1.3), (1.5) – (1.7) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1, 2, ..., m, \tag{1.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1,2,3,...,n, \tag{1.10}$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1,2,3, ..., m, \; j = 1,2,3, ..., n. \tag{1.11}$$

Систему транспортных расходов c_{ij}, так же как и систему перевозок x_{ij}, можно записать в виде матриц C и X, задача (1.8) – (1.11) называется транспортной задачей в матричной постановке или просто транспортной задачей.

Пример 1.2. В трех хранилищах горючего ежедневно находится 100, 150 и 250 т бензина. Этот бензин ежедневно получают пять заправочных станций в количествах, равных соответственно 100, 40, 140, 60 и 160 т. Стоимости перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 15 & 8 & 9 & 11 & 12 \\ 4 & 10 & 7 & 5 & 8 \\ 6 & 3 & 4 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Составить план перевозок горючего, имеющий минимальную стоимость.

1.2. Эквивалентное преобразование

Рассмотрим полезное при решении задач преобразование функции стоимости c_{ij}, не влияющее на оптимальность потока.

Пусть для каждого узла i сети задано число v_i. Прибавим v_i к значению стоимости каждой заходящей в узел i дуги и вычтем из стоимости каждой исходящей дуги, то есть рассмотрим стоимости $c'_{ij} = c_{ij} + v_j - v_i$. Пусть $X = \{x_{ij}\}$ – некоторый допустимый поток. Рассмотрим его новую стоимость.

$$\sum_{i,j} c'_{ij} x_{ij} = \sum_{i,j} (c_{ij} + v_j - v_i) x_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_j v_j \sum_i x_{ij} - \sum_i v_i \sum_j x_{ij} =$$

$$= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_j v_j \left(\sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji} \right) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} - \sum_j v_j s_j .$$

Таким образом, для любого потока значение целевой функции исходной задачи отличается от значения целевой функции преобразованной задачи на постоянную величину. Поэтому применение указанного преобразования не изменяет решения задачи.

Рассмотрим теперь транспортную задачу в матричной постановке. Пусть пунктам производства поставлены в соответствие числа u_i, а пунктам потребления – числа v_j. Тогда, так как все дуги ориентированы от пунктов производства к пунктам потребления, $c'_{ij} = c_{ij} - u_i + v_j$, то есть числа u_i вычитаются из элементов строк, а числа v_j прибавляются к элементам столбцов матрицы стоимостей.

Таким образом, *если к элементам некоторой строки или столбца матрицы стоимостей транспортной задачи прибавить одно и то же число, оптимальное решение задачи не изменится*.

Операция вычитания из всех элементов строки (столбца) матрицы минимального элемента этой строки (столбца) называется *приведением* или редукцией матрицы по строке (столбцу). После приведения матрицы стоимостей по всем строкам и столбцам получается неотрицательная матрица, в каждой строке и столбце которой есть по крайней мере один нулевой элемент. Обладающую этими свойствами матрицу будем называть *приведенной* или *редуцированной.*

Из вида целевых функций транспортных задач видно также, что решение не изменится, при умножении всех стоимостей на одно и то же положительное число.

1.3. Существование решения

Ограниченность целевой функции на множестве планов транспортной задачи вытекает из ограниченности множества (1.3), (1.4). Поэтому транспортная задача разрешима, если множество ее планов не пусто.

Сложив равенства (1.4) по $i \in V$, получим условие сбалансированности сети:

$$\sum s_i = 0. \qquad (1.12)$$

Воспользовавшись обозначениями задачи (1.1), (1.3), (1.6) – (1.8), условие сбалансированности можно записать как равенство суммарного предложения (грузов, имеющихся в пунктах отправления) общей потребности в грузе в пунктах назначения, т.е.

$$\sum a_i = \sum b_j . \qquad (1.13)$$

Сбалансированная транспортная задача называется также *закрытой*. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется *открытой*.

Сбалансированность сети является необходимым, но не достаточным условием существования допустимого потока: этому может помешать ограниченность пропускных способностей дуг. Критерий существования допустимых решений транспортной задачи дает следующая теорема.

Теорема 1.1 (Гейл) [13]. *Пусть* a_i, $b_j \ge 0$. *Ограничения* (1.3), (1.5) –(1.7) *допустимы тогда и только тогда, когда для любого множества* $I \subseteq V$

$$\sum_{i\in I} s_i = \sum_{j\in T\cap \bar I} b_j - \sum_{i\in S\cap \bar I} a_i \le d\left(I,\bar I\right) \qquad (1.14)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует поток $X = \{x_{ij}\}$, удовлетворяющий условиям (1.3), (1.4). Сложим (1.4) по всем $i \in I$.

$$\sum_{i\in I} s_i = \sum_{i\in I}\sum_{j} x_{ij} - \sum_{i\in I}\sum_{j} x_{ji} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} x_{ij} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in \bar I} x_{ij} - \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} x_{ji} - \sum_{i\in I}\sum_{j\in \bar I} x_{ji} .$$

В силу (1.3),

$$\sum_{i\in I} s_i = \sum_{i\in I}\sum_{j} x_{ij} - \sum_{i\in I}\sum_{j} x_{ji} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in \bar I} x_{ij} - \sum_{i\in I}\sum_{j\in \bar I} x_{ji} \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in \bar I} x_{ij} \le d\left(I,\bar I\right).$$

Достаточность. Расширим сеть, введя обобщенный источник *s*, обобщенный сток *t*, дуги, соединяющие s с источниками и стоки с *t*,

$d_{si} = a_i = s_i$, $i \in S$, $d_{it} = -s_i = b_i$, $i \in T$. Покажем, что условие (1.14) выполнено тогда и только тогда, когда разрез $(T, \bar{T})$ минимальный. Пусть $(I', \bar{I}')$ - разрез, разделяющий s и t, $I = I' \setminus \{s\}$, $\bar{I} = \bar{I}' \setminus \{t\}$.

$$d(I', \bar{I}') - d(T, \bar{T}) = \sum_{i \in I} d_{it} + \sum_{j \in \bar{I}} d_{sj} + d(I, \bar{I}) - \sum_{i \in T} d_{it} = \sum_{i \in \bar{I} \bigcap T} s_i + \sum_{i \in \bar{I} \bigcap S} s_i + d(I, \bar{I}).$$

Так как $\sum_{i \in \bar{I}} s_i = -\sum_{i \in I} s_i$, условие (1.14) выполнено тогда и только тогда, когда $d(I', \bar{I}') \geq d(T, \bar{T})$.

По теореме о максимальном потоке, существует поток X' из s в t, насыщающий конечные дуги. Сужение X потока X' на множество дуг исходной сети очевидно удовлетворяет условиям (1.3), (1.6). Для $i \in S$

$$s_i = x'_{si} = \sum_j x'_{ij} - \sum_j x'_{ji} = \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji},$$

Для $i \in T$

$-s_i = x'_{it} = \sum_j x'_{ji} - \sum_j x'_{ij}$, то есть справедливы условия (1.5), (1.7).

Следствие. *Транспортная задача в матричной постановке имеет решение тогда и только тогда, когда она сбалансирована.*

Для того чтобы эффективно проверить допустимость транспортной задачи, достаточно решить задачу о максимальном потоке в расширенной сети. Транспортная задача имеет решение, если величина максимального потока равна суммарному спросу или предложению.

Простота условий транспортных задач позволяет на основе каждого обычного метода линейного программирования получить менее трудоемкий специальный алгоритм. Эффективность алгоритма решения транспортной задачи зависит, в основном, от того, насколько точно учтена ее специфика.

Существующие методы решения транспортных задач можно разделить на две группы. Первая группа основана на наиболее популярном методе линейного программирования – методе последовательного улучшения плана (симплекс-методе). Решение начинается с отыскания первоначального базисного распределения поставок. Затем проверяют, не является ли это распределение оптимальным, и если оно не оказывается таковым, дальнейший ход решения заключается в постепенном приведении его к искомому оптимуму. Типичный представитель этой группы алгоритмов – метод потенциалов – наиболее ранний точный метод решения транспортной задачи. Также в эту группу входит распределительный метод и ряд его модификаций.

Методы второй группы базируются на идеях одновременного решения прямой и двойственной задачи (последовательного уменьшения невязок). Здесь сначала отыскивается распределение, которое не обязательно удовлетворяет требованиям допустимости, но строго соответствует требованию оптимальности. Процесс решения состоит в постепенном вводе распределения в границы допустимости при соблюдении условия оптимальности. В эту группу методов входят метод дифференциальных рент, венгерский метод.

2. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

2.1. Предварительные сведения

Для изучения специальных методов решения транспортной задачи понадобятся некоторые понятия и утверждения из теории графов.

Пусть G=(V, E) – конечный неориентированный граф, V – множество вершин, E – множество ребер.

Путь из i_1 в i_k в графе будем представлять его вершинами: $(i_1,\ldots,i_k)$. Путь называется простым, если все его вершины различны. Если $i_1 = i_k$, то путь называется циклом. В дальнейшем, если не оговорено обратного, предполагается, что рассматриваемые пути простые.

Граф $G' = (V', E')$ есть подграф графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Подграф графа G, индуцированный подмножеством S множества V вершин графа G, – это подграф, который получается в результате удаления всех вершин из $V \setminus S$ и всех ребер, инцидентных им.

Пусть множество $S \subseteq V$ состоит из фиксированной вершины и всех вершин, которые могут быть соединены с ней путем. Подграф, индуцированный этим множеством, называется компонентой связности графа. Очевидно, граф связен в том и только том случае, если он состоит из единственной компоненты.

Справедливы следующие утверждения [3].

Лемма 2.1. *Если из каждой вершины графа выходит не менее двух ребер, то граф содержит цикл.*

Лемма 2.2. *Если граф связен и из каждой вершины выходят ровно два ребра, то этот граф является циклом.*

Лемма 2.3. *Если вершина i_0 связана путем с вершиной i_r, а i_r — с вершиной j_0, $i_0 \neq j_0$, то i_0 и j_0 также можно связать путем.*

Лемма 2.4. *Если граф не содержит циклов, то любой путь однозначно определяется заданием конечных вершин.*

Лемма 2.5. *Пусть $|V| = n$. Если множество E содержит менее $n-1$ ребра, то граф (V,E) несвязен.*

Связный неориентированный граф, не содержащий циклов, называется *деревом*.

Теорема 2.1. *Если граф имеет n вершин, то любые два из следующих трех условий характеризуют дерево, а третье условие следует из них.*

1) *Граф G связен.*

2) *Граф имеет n—1 ребро.*

3) *Граф не имеет циклов.*

Доказательство. Докажем сначала, что если G – дерево, то $|E| = |V| - 1|$. Воспользуемся математической индукцией. При $n = 2$ утверждение леммы тривиально. Допустим, что для графов с числом вершин $n-1$ оно также доказано, и рассмотрим граф, для которого $V=\{1,\ldots,n-1,n\}$. Поскольку граф (V, E) не содержит циклов, то согласно лемме 2.1, найдется вершина (пусть это будет n), из которой выходит ровно одна дуга (n,i) (одна дуга обязательно есть, так как граф связен). Рассмотрим граф $(\widetilde{V},\widetilde{E})$, где $\widetilde{V}=\{1,\ldots,n-1\}$ и $\widetilde{E}=E\setminus(n,i)$. Ясно, что граф $(\widetilde{V},\widetilde{E})$ удовлетворяет условиям 1), 3), поскольку им удовлетворяет граф (V, E). По предположению индукции, в $\widetilde{E}$ содержится ровно $n-1$ ребер. Следовательно, в E содержится n ребер — на единицу меньше, чем число вершин во множестве V.

Пусть граф связен и имеет $n-1$ ребро. Предположим, в графе существует цикл. Удаление произвольного ребра из цикла, очевидно, не нарушит связность графа. С другой стороны, получающийся граф содержит n вершин и $n-2$ ребра, следовательно, согласно лемме 2.5, является несвязным.

Пусть граф не имеет циклов, $|E|=|V|-1$ и s – число компонент связности графа G. Поскольку каждая компонента связности G_i связна и не имеет циклов, $|E|=\sum(|V_i|-1)=|V|-s$, откуда $s=1$ и, следовательно, граф связен.

Следствие. *Если граф связен и* $|E|=|V|$, *то он содержит ровно один цикл.*

В самом деле, из теоремы 2.1 следует, что граф должен содержать циклы. Предположим, имеется два цикла. Очевидно, что выбрасывание из цикла одной произвольной дуги не может нарушить связности графа. Следовательно, удалив в каждом из двух циклов по одной дуге так, чтобы эти дуги были различны, получим связный граф, в котором число дуг равно $|V|-2$, что противоречит лемме 2.5.

Подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом, называется *остовным деревом* графа.

2.2. Опорные планы

Пусть $X=\{x_{ij}\}$ – некоторый поток в сети. Рассмотрим множество дуг

$$D(X)=\{(i,j):0<x_{ij}<d_{ij}\}.$$

Опорой потока называется неориентированный граф (V, $D(X)$).

Обозначим через A матрицу системы ограничений (1.4), столбец матрицы A, соответствующей переменной x_{ij}, обозначим a^{ij}. Тогда $a^{ij}\in R^n$, i-я координата равна 1, j-я – (-1), остальные нулю. Сложив строки матрицы A, получим нулевой вектор, то есть система ограничений (1.4) линейно зависима. С другой стороны, нетрудно заметить, что любые $n-1$ строк матрицы A линейно независимы. Ранг матрицы A равен, следовательно, $n-1$.

Пусть $A(X)$ – система вектор - столбцов матрицы A, соответствующих координатам плана X таким, что $0 < x_{ij} < d_{ij}$. Очевидно, $a^{ij} \in A(X)$ тогда и только тогда, когда $(i, j) \in D(X)$.

Если в задаче имеются ограничения (1.3) на пропускные способности, приведем задачу к канонической форме. Обозначим через u_{ij} дополнительную переменную, соответствующую ограничению (1.3) для x_{ij}. Матрица системы ограничений примет вид

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ E & E \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица. Столбцы матрицы B, соответствующие переменным x_{ij} и u_{ij} обозначим A^{ij} и u^{ij}.

Нетрудно показать, что план (X,U) транспортной задачи является опорным в том и только том случае, когда система $A(X)$ линейно независима.

Ранг матрицы B равен $n+m-1$, где $m = |D|$ – число дуг сети. Таким образом, опорный план транспортной задачи с ограничениями на пропускные способности имеет не более $m+n-1$ положительных компонент x_{ij} и u_{ij}. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности $n+m-1$, то план является невырожденным, а если меньше – то вырожденным.

Теорема 2.2. *План транспортной задачи является опорным тогда и только тогда, когда опора потока X не содержит циклов.*

Доказательство. Пусть опора потока X содержит цикл $(i_1, i_2, ..., i_k, i_1)$. По определению опоры, при всех $1 \le l \le k$ $(i_{k+1} = i_1)$ либо $a^{i_l i_{l+1}} \in A(X)$, либо $a^{i_{l+1} i_l} \in A(X)$. В первом случае положим $b^{i_l i_{l+1}} = a^{i_l i_{l+1}}$, во втором $b^{i_l i_{l+1}} = -a^{i_{l+1} i_l}$. Поскольку $b^{i_l i_{l+1}}$ - вектор, компонента i_l которого равна 1, i_{l+1}-я компонента равна (-1), а остальные – 0, то

$$b^{i_1 i_2} + b^{i_2 i_3} + ... + b^{i_k i_1} = 0.$$

Таким образом, векторы a^{ij}, соответствующие дугам цикла, линейно зависимы, следовательно, линейно зависима и вся система $A(X)$, содержащая линейно зависимую подсистему.

С другой стороны, пусть система $A(X)$ линейно зависима, то есть найдутся числа β_{ij}, не все равные нулю, такие, что выполнено условие

$$\sum \beta_{ij} a^{ij} = 0,$$

где суммирование ведется по $(i, j) \in D(X)$. Из вида столбцов матрицы A вытекает, что если $\beta_{ij} \ne 0$, то обязательно найдется столбец $a^{ip} \in A(X)$, $p \ne j$, для которого $\beta_{ip} \ne 0$, в противном случае i-я координата вектора $\sum \beta_{ij} a^{ij}$ была бы отлична от нуля. Это означает, что во множестве $D(X)$ найдется дуга вида (i,p), где $p \neq j$. Тем самым доказано, что из каждого пункта i выходит не менее двух дуг. Из леммы 2.1 теперь вытекает, что опора потока содержит цикл.

Опора потока, соответствующего опорному плану транспортной задачи, содержит не более $n-1$ ребра. Если опора содержит ровно $n-1$ ребро, то есть соответствующий план транспортной задачи невырожденный, то поток также называют невырожденным.

Из теорем 2.1, 2.2 вытекает тогда, что в невырожденном потоке, которому отвечает допустимый базисный план задачи, дороги, по которым осуществляются перевозки груза, не достигающие по объему ограничения на пропускную способность, образуют остовное дерево рассматриваемой транспортной сети.

Все вышесказанное очевидно справедливо и для транспортной задачи в матричной постановке. Система ограничений (1.9), (1.10) содержит mn переменных x_{ij} и $m+n$ уравнений, по одному на каждый пункт отправления и назначения. Расположим переменные x_{ij} следующим образом:

$$x_{11},\, x_{12},\, \ldots,\, x_{1n},\, x_{21},\, x_{22},\, \ldots,\, x_{2n},\, \ldots,\, x_{m1},\, x_{m2},\, \ldots,\, x_{mn}.$$

Матрица ограничений транспортной задачи, имеющая размерность $(m+n)\times mn$, состоит из нулей и единиц и распадается на две группы однотипных блоков. Первая (верхняя) часть матрицы соответствует ограничениям на объемы вывоза из пунктов производства, и образована n матрицами размера $m\times n$, в i-й матрице i-я строка состоит из единиц, остальные элементы – нули. Нижняя часть матрицы A соответствует ограничениям на удовлетворение потребностей в пунктах назначения и состоит из m единичных матриц порядка n. Ранг матрицы A равен $n+m-1$.

Пусть X – некоторый поток. Так как отсутствуют ограничения на пропускные способности дуг, $(i,j)\in D(X)$ тогда и только тогда, когда $x_{ij}>0$. Поскольку естественно считать, что все числа a_i, $i=1,\ldots,m$, b_j, $j=1,\ldots,n$ положительны, то из ограничений (1.9), (1.10) вытекает, что в опоре потока X из всякой вершины выходит по крайней мере одно ребро: из всякого пункта производства осуществляется хотя бы одна перевозка и наоборот, во всякий пункт потребления обязательно поступает товар.

Поскольку опора потока является двудольным графом, нетрудно показать, что всякий цикл в опоре содержит четное число дуг.

Задача линейного программирования называется вырожденной, если у нее существует хотя бы один вырожденный опорный план. Оказывается, что для транспортной задачи в матричной постановке выяснить, является ли она вырожденной, достаточно просто.

Теорема 2.3 [3]. *Транспортная задача* (1.8) – (1.11) *является вырожденной тогда и только тогда, когда суммарный запас товара в нескольких (не всех) пунктах производства равен суммарной потребности нескольких (не всех) пунктов потребления, т. е. существуют собственные подмножества* $G\subset M=\{1,2,\ldots,m\}$, $H\subset N=\{1,2,\ldots,n\}$, *для которых*

$$\sum_{i \in G} a_i = \sum_{j \in H} b_j . \qquad (2.1)$$

Доказательство. Поскольку имеет место равенство $\sum_{i \in M} a_i = \sum_{j \in N} b_j$, то вместе с (2.1) выполняется равенство

$$\sum_{i \in M \setminus G} a_i = \sum_{j \in N \setminus H} b_j .$$

Рассмотрим транспортную задачу, в которой в качестве поставщиков выступают только пункты $i \in G$, а в качестве потребителей— пункты $j \in H$. Пусть число элементов в G равно n_1, а в H равно m_1. Тогда существует опорный план такой задачи, содержащий не более $n_1 + m_1 - 1$ положительных компонент. Аналогично, для транспортной задачи для второй группы поставщиков и потребителей найдется опорный план, включающий не более $(m-m_1) + (n-n_1) - 1$ перевозок. Совокупность всех введенных перевозок образует опорный план исходной транспортной задачи. Следовательно, если равенство (2.1) имеет место, то задача (1.8) – (1.11) вырождена — существует план, имеющий не более $m + n - 2$ положительных компонент, в то время как ранг матрицы ограничений равен $m+n-1$.

Докажем теорему в обратную сторону. Если у задачи (1.8) – (1.11) существует вырожденный опорный план X, то число его положительных компонент меньше $m+n-1$. В таком случае соответствующая ему опора несвязна (согласно лемме 2.5). Найдутся два пункта, например i_0 и j_0, которые нельзя связать путем. Обозначим через H множество всех пунктов потребления, которые можно связать путем с i_0. Отметим, что множество H непусто, так как пункт i_0 связан дугой хотя бы с одним из пунктов потребления. С другой стороны, $H \neq N$, так как $j_0 \notin H$. Обозначим через G множество всех пунктов производства, каждый из которых можно связать путем хотя бы с одним из пунктов из множества H. Множество G не пусто, поскольку $i_0 \in G$. Вместе с тем $G \neq M$. В самом деле, если $G = M$, то G содержит некоторый элемент i, связанный с j_0. Но тогда по лемме 3 существует путь, связывающий j_0 и i_0, что противоречит выбору j_0. Очевидно, что ни один пункт $i \in G$, не может быть соединен путем ни с одним пунктом $j \in N \setminus H$, и ни один пункт $j \in H$ не может быть соединен путем ни с одним пунктом $i \in M \setminus G$.

Сказанное означает, что если $i \in G$ и $x_{ij} > 0$, то $j \in H$. Аналогично, если $j \in H$ и $x_{ij} > 0$, то $i \in G$. С учетом этого из системы ограничений задачи (1.8) – (1.11) вытекает, что

$$\sum_{j \in H} x_{ij} = a_i \ \ \forall i \in G , \ \sum_{i \in G} x_{ij} = b_j \ \forall j \in H ,$$

откуда

$$\sum_{i \in G} a_i = \sum_{i \in G} \sum_{j \in H} x_{ij} = \sum_{j \in H} b_j .$$

2.3. Критерий оптимальности

Построим задачу, двойственную (1.1), (1.3), (1.4). Обозначим двойственные переменные, соответствующие ограничениям (1.4), через $-v_i$, а соответствующие ограничениям (1.3) на пропускные способности дуг – через γ_{ij}. Тогда двойственная задача будет иметь вид:

$$-\sum_{i\in V} s_i v_i - \sum_{(i,j)\in A} d_{ij}\gamma_{ij} \to \max$$
$$v_j - v_i - \gamma_{ij} \le c_{ij}, \ (i,j)\in D,$$
$$\gamma_{ij} \ge 0, \ (i,j)\in D.$$

Применяя теоремы двойственности, получаем, что поток $X=\{x_{ij}\}$ является оптимальным, если существует план двойственной задачи, удовлетворяющий условиям:

$$v_j - v_i - \gamma_{ij} = c_{ij}, \text{ как только } x_{ij} > 0,$$
$$\gamma_{ij} = 0, \text{ если } x_{ij} < d_{ij}.$$

Таким образом, исключая γ_{ij}, можно получить следующий критерий оптимальности для плана транспортной задачи:

Для того чтобы допустимый поток X был оптимальным, необходимо и достаточно существование для каждого узла i такого числа v_i*, что для всех дуг*

$$v_j - v_i \le c_{ij}, \textit{ если } x_{ij} = 0,$$
$$v_j - v_i = c_{ij}, \textit{ если } 0 < x_{ij} < d_{ij},$$
$$v_j - v_i \ge c_{ij}, \textit{ если } x_{ij} = d_{ij}.$$

Числа v_i, $i \in V$, принято называть *потенциалами*. В транспортной задаче потенциалы можно рассматривать как локальные цены (или наценки к единой цене) на перевозимый продукт в пунктах производства и потребления, создающие заинтересованность в правильном направлении перевозок. Разность потенциалов $v_j - v_i$ можно трактовать как увеличение цены продукта при его перевозке из пункта *i* в пункт *j*.

Для транспортной задачи в матричной постановке двойственные переменные, соответствующие группе ограничений (1.9), обозначим через α_i, а (1.10) – через β_j. Тогда двойственная задача будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j \to \max$$
$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}, \ \mathrm{i}=1,\dots,m, \ j=1,\dots,n.$$

Для того, чтобы допустимый план транспортной задачи $X = \{x_{ij}\}$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся план $\{\alpha_i, \beta_j\}$ двойственной задачи такой, что

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \text{ если } x_{ij} > 0.$$

Потенциалами (пунктов назначения и пунктов потребления соответственно) в этом случае обычно называют числа $u_i = -\alpha_i$ и $v_j = \beta_j$. В дальнейшем переменные α_i, β_j также будем называть потенциалами.

2.4. Метод потенциалов для сетевой транспортной задачи

Метод потенциалов представляет собой конечный итеративный процесс, состоящий, аналогично общему симплекс-методу, из следующих этапов.

1. Определяется начальный опорный план (опорный поток).
2. Текущий опорный поток проверяется на оптимальность. Если поток оптимальный, вычисления заканчиваются.
3. Осуществляется переход к новому опорному потоку.

Рассмотрим каждый этап подробно.

Начальный поток

Наиболее простой метод генерации исходного допустимого потока основан на идеях, сходных с идеями *метода искусственного базиса*, используемого для построения опорного плана задачи линейного программирования. Данный метод предполагает решение вспомогательной задачи, которая получается из основной в результате следующих преобразований.

К множеству узлов сети добавляется фиктивный нулевой узел с нулевой интенсивностью ($s_0 = 0$).

Все узлы, имеющие отрицательную интенсивность, соединяются с добавленным узлом 0 входящими дугами $(0, i)$, а узлы, обладающие положительной интенсивностью – исходящими дугами $(i, 0)$. Ограничения на пропускные способности для добавляемых дуг отсутствуют.

Стоимости перемещения единицы продукта для вновь добавленных дуг полагаются равными 1, а для дуг, соответствующих транспортной сети основной задачи, – 0.

Построенная вспомогательная задача обладает очевидным допустимым потоком, получаемым назначением объемов, равных интенсивностям вершин, по всем добавленным дугам, то есть

$$x_{0i} = a_i,\ i \in S,\ x_{i0} = b_i,\ i \in T,\ x_{ij} = 0,\ (i, j) \in D.$$

Если оптимальное решение вспомогательной задачи содержит ненулевые перевозки по вновь добавленным дугам, то есть минимальное значение ее целевой функции больше нуля, то в основной задаче отсутствуют допустимые планы. В противном случае (минимальное значение целевой функции равно нулю) перевозки по вновь добавленным дугам в оптимальном решении вспомогательной задачи нулевые, и сужение потока на множество дуг D является допустимым потоком для исходной задачи. Очевидно, что опора потока при этом не содержит циклов (иначе этот цикл присутствовал бы и в опоре потока вспомогательной задачи).

Проверка оптимальности текущего потока

Пусть в начале очередной итерации метода потенциалов имеется некоторый допустимый поток $X = \{x_{ij}\}$. Если поток вырожден, ему соответствует несвязная опора. Для преодоления вырожденности в текущий вырожденный опорный план будем включать фиктивные компоненты с нулевыми объемами так, чтобы соответствующие им дуги дополняли опору до остова сети. Построенный таким способом план позволяет выполнить все действия, входящие в стандартную итерацию метода потенциалов, поэтому далее считаем, что поток X невырожденный.

По имеющемуся потоку строится система потенциалов пунктов сети. Каждому узлу сети сопоставляется число v_i так, чтобы для всех дуг опоры разность потенциалов равнялась стоимости единичной перевозки по данному маршруту. Так как невырожденная опора содержит $n-1$ дугу, то в системе

$$v_j - v_i = c_{ij},\ (i, j) \in D(X) \tag{2.2}$$

число неизвестных на единицу превышает число уравнений. Поэтому одно из неизвестных можно положить равным произвольному числу, например приравнять v_1 нулю. Значения остальных потенциалов определяются последовательно следующим образом.

Если в системе (2.2) имеется уравнение $v_1 - v_{i_0} = c_{i_0 1}$ или $v_{i_0} - v_1 = c_{i_0 1}$, то из него находится величина v_{i_0}. В общем случае, если найден потенциал узла i, то потенциал смежного к ней в опоре потока узла j определяется по правилу

$$v_j = v_i + c_{ij}, \text{ если } (i, j) \in D(X) \text{ (дуга направлена от } i\text{)},$$

$$v_j = v_i - c_{ji}, \text{ если } (j, i) \in D(X) \text{ (дуга направлена к } i\text{)}.$$

Так как опора, соответствующая невырожденному потоку, связна, постепенно будут определены потенциалы всех узлов сети. В самом деле, пусть, например, требуется вычислить потенциал узла k. Тогда в опоре существует путь $(1, i_0, i_1, \ldots, i_k, k)$, соединяющий узлы 1 и k. Так как значение v_1 известно, по указанному правилу можно вычислить последовательно потенциалы узлов i_0, $i_1, \ldots$, i_k, k.

Возможность определить потенциалы единственным образом вытекает из свойства отсутствия цикла у опоры сети и леммы 2.3.

Пусть имеется полная система потенциалов. Для каждой дуги (i, j), не входящей в опору, положим $\Delta_{ij} = v_j - v_i - c_{ij}$, если $x_{ij} = 0$, $\Delta_{ij} = v_i - v_j + c_{ij}$, если $x_{ij} = d_{ij}$. Отметим, что вычисленные значения Δ_{ij} фактически являются оценками замещения (коэффициентами последней строки симплекс-таблицы) при решении задачи (1.1), (1.3), (1.4) симплекс-методом. Найденный опорный план является оптимальным, если среди чисел Δ_{ij} нет положительных. Если же для некоторой дуги $\Delta_{ij}>0$, то исходный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану.

Переход к новому потоку

Очередной поток получается за счет «ввода» в опору очередной дуги (для которой нарушается условие критерия оптимальности) и «вывода» другой. Если условия критерия оптимальности нарушаются сразу для нескольких дуг, то для ввода имеет смысл выбрать ту, на которой достигается максимальное отклонение цены от разности потенциалов соединяемых вершин, то есть Δ_{ij} максимально.

Пусть для ввода выбрана некоторая дуга (i_0, i_1). Согласно теореме 2.2, опора потока, дополненная ребром (i_0, i_1), содержит циклы. Так как ранее она не обладала таким свойством, то такой цикл единствен и включает дугу (i_0, i_1), т. е. имеет вид $(i_0, i_1, \ldots, i_k, i_0)$.

Если $x_{i_0 i_1} = 0$, то в новый план включается перевозка из i_0 в i_1 объемом θ. Обозначим через $D^+(i_0, i_1)$ множество дуг данного цикла, ориентация которых совпадает с ориентацией дуги (i_0, i_1), а через $D^-(i_0, i_1)$ – множество дуг, имеющих противоположную ориентацию.

Положим

$$\begin{aligned} x'_{i_r i_{t+1}} &= x_{i_r i_{r+1}} + \theta, \ (i_r, i_{r+1}) \in D^+(i_0, i_1), \\ x'_{i_{s+1} i_t} &= x_{i_{r+1} i_r} - \theta, \ (i_r, i_{r+1}) \in D^-(i_0, i_1), \end{aligned} \tag{2.3}$$

то есть при циклическом преобразовании текущего потока увеличиваются объемы грузоперевозок на тех дугах, которые сонаправлены вводимой дуге, и уменьшаются на дугах, имеющих обратную ориентацию. Очевидно, свойство (1.4) сохранения потока при этом преобразовании не нарушается.

Максимально возможное значение объемов грузоперевозок θ, «перемещаемых» по циклу, определяем из следующих условий:

– Для нового потока должны выполняться ограничения на пропускные способности дуг.

– Ни по какому маршруту не должны выполняться перевозки с отрицательным объемом грузов.

Таким образом,

$$\theta = \min\{\delta_1, \delta_2\},$$

где $\delta_1 = \min\{d_{ij} - x_{ij}, (i,j) \in D^+(i_0 . i_1)\}$, $\delta_2 = \min\{x_{ij}, (i,j) \in D^-(i_0, i_1)\}$.

Если $x_{i_0 i_1} = d_{i_0, i_1}$, то в новом плане перевозка из i_0 в j_0 уменьшается на θ. В этом случае через $D^+(i_0, i_1)$ обозначим множество дуг данного цикла, ориентация которых противоположна ориентации дуги (i_0, i_1), а через $D^-(i_0, i_1)$ – множество дуг, ориентация которых с ней совпадает. Пересчет компонент текущего потока производится по формулам (2.3), то есть теперь уменьшаются объемы грузоперевозок на тех дугах, которые сонаправлены вводимой дуге, и увеличиваются на дугах, имеющих обратную ориентацию.

При указанном преобразовании потока по крайней мере одна из дуг цикла становится недопустимой ($x'_{ij} = 0$ или $x'_{ij} = d_{ij}$) и исключается из опоры, поэтому в опоре нового потока циклы вида $(i_0, i_1, \ldots, i_k, i_0)$ отсутствуют и, следовательно, новый план - опорный. Если ставших недопустимыми дуг несколько, то новый поток будет вырожденным.

Проверим, что при переходе к новому опорному потоку $X' = \{x'_{ij}\}$ значение целевой функции задачи не увеличивается. Поскольку изменяются только переменные, входящие в цикл, приращение целевой функции равно

$$\sum_{(i,j)\in D} c_{ij}\left(x'_{ij} - x_{ij}\right) = \theta \sum_{(i_r, i_{r+1})\in D^+(i_0, i_1)} c_{i_t i_{r+1}} - \theta \sum_{(i_r, i_{r+1})\in D^-(i_0, i_1)} c_{i_{t+1} i_r} .$$

Для всех дуг цикла, кроме (i_0, i_1), выполняются равенства (2.2), то есть

$$c_{i_r i_{r+1}} = v_{i_{r+1}} - v_{i_r},\ (i_r, i_{r+1}) \in D^+(i_0, i_1),$$
$$-c_{i_{r+1} i_r} = v_{i_{r+1}} - v_{i_r},\ (i_r, i_{r+1}) \in D^-(i_0, i_1).$$

Поэтому

$$\sum_{(i,j)\in D} c_{ij}\left(x'_{ij} - x_{ij}\right) = \theta \sum_{(i_r, i_{r+1})\in D^+(i_0, i_1)} \left(v_{i_{r+1}} - v_{i_r}\right) + \theta \sum_{(i_r, i_{r+1})\in D^-(i_0, i_1)} \left(v_{i_{r+1}} - v_{i_r}\right) =$$
$$= \theta\left(c_{i_0 i_1} + v_{i_0} - v_{i_1}\right) = -\theta \Delta_{i_0 i_1} \le 0$$

Если поток X невырожденный, $\theta > 0$ и шаг метода потенциалов сопровождается снижением суммарных транспортных затрат.

Полученный новый поток проверяют на оптимальность и так далее. В результате итерационного процесса после конечного числа шагов получают оптимальный план задачи.

Пример 2.1. Решим методом потенциалов задачу примера 1.1. Для определения начального потока построим вспомогательную сеть, добавив фиктивную нулевую вершину. Положив $x_{1,0} = 40$, $x_{2,0} = 50$, $x_{0,4} = 30$, $x_{0,5} = 60$, получаем допустимый вырожденный поток для вспомогательной задачи. Чтобы опора потока была связной, нужно дополнить ее дугой, инцидентной вершине 3, например, дугой (1,3) (рис. 2.1).

Проверим полученный поток на оптимальность. Положим v_0=0, тогда v_4=v_5=1, v_1=v_2=v_3= –1. Условие оптимальности нарушено для дуг (1,4), (3,5), (2,5).

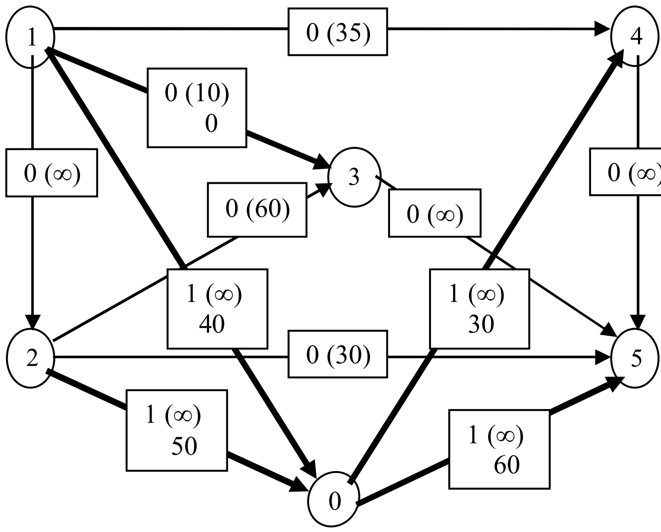

Рис. 2.1. Вспомогательная сеть

Присоединив к опоре дугу (1,4), получаем цикл (1,4,0,1), в котором дуги (1,0) и (0, 4) имеют противоположное вводимой дуге направление. Поток через дугу (1,4) можно увеличить не более, чем на 35 единиц, поток по дугам (1,0) и (0, 4) уменьшить не более, чем на 30 единиц. Тем самым, θ=30. Измененный поток показан на рис. 2.2.

Определяем потенциалы: v_0=0, v_5=1, v_1=v_2=v_3=v_4=-1. Вводим дугу (3,5). Для цикла (3,5,0,1,3) получаем δ_1=10, δ_2=10. В результате пересчета плана недопустимыми становятся дуги (1,3) и (1,0). Чтобы опора потока оставалась связной, дугу (1,3) в ней оставляем (рис. 2.3).

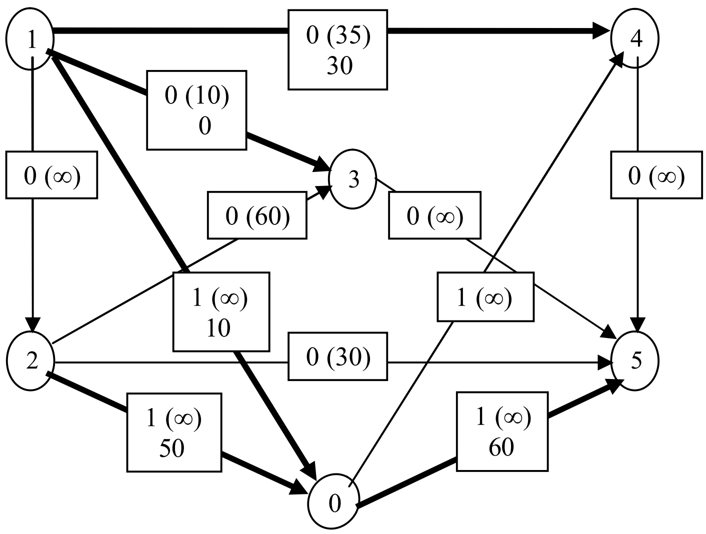

Рис. 2.2. Первая итерация поиска начального потока

Потенциалы вершин v_0=0, v_1=v_3=v_4=v_5=1, v_2=–1. Данный план также не является оптимальным, поэтому продолжаем его улучшать, вводя на этот раз дугу (2,5). В результате сдвига по циклу (2,5,0,2) дуга (2,5) становится насыщенной, поэтому опора потока остается без изменения (рис. 2.4).

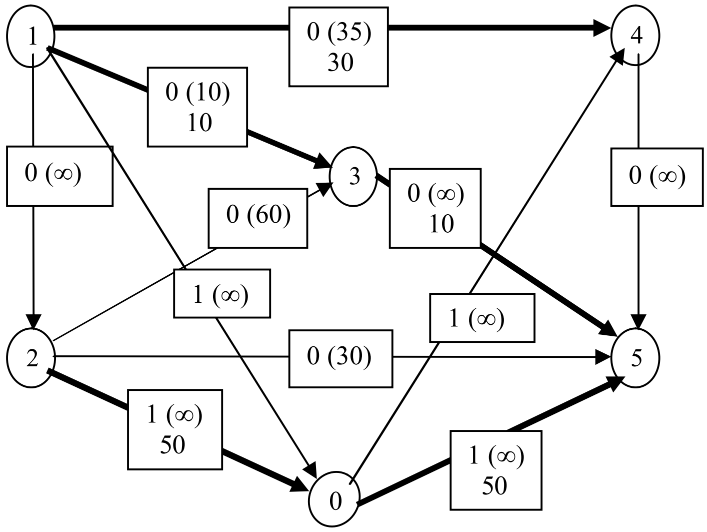

Рис. 2.3. Вторая итерация поиска начального потока

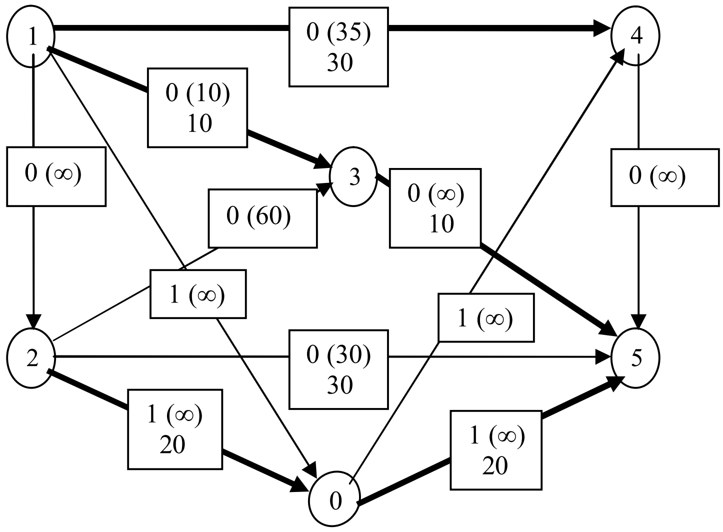

Рис. 2.4. Третья итерация поиска начального потока

Потенциалы вершин v_0=0, v_5=v_3=v_1=v_4=1, v_2=−1. К опоре присоединяется дуга (2,3) (рис. 2.5).

Найдя потенциалы вершин, убеждаемся, что полученный поток является оптимальным. Тем самым имеем начальное допустимое базисное решение исходной задачи (рис. 2.6).

Продолжаем применять алгоритм метода потенциалов для данного потока. Потенциалы v_1=0, v_4=5, v_3=7, v_5=15, v_2=5. Вводим дугу (4,5), затем, после проверки плана на оптимальность, дугу (1,2).

В итоге получаем оптимальный поток (рис. 2.7), по которому вычисляется оптимальное (наименьшее) значение суммарных издержек на перевозку:

$$f^*(x) = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 35 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 30 + 8 \cdot 25 + 4 \cdot 5 = 490\,.$$

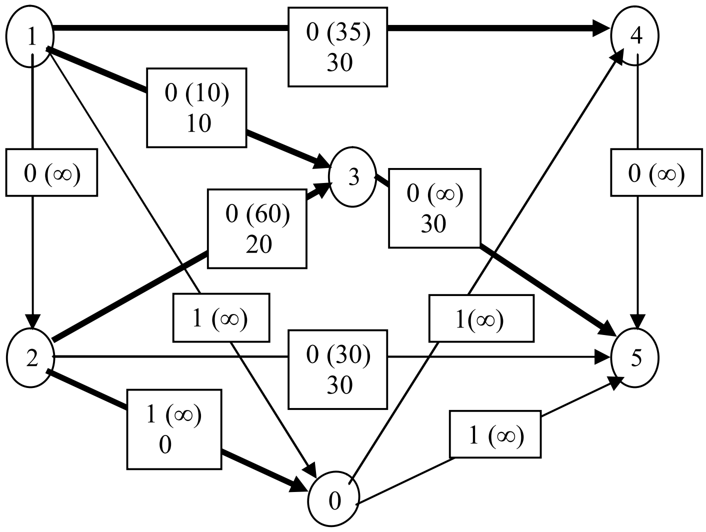

Рис. 2.5. Оптимальное решение вспомогательной задачи

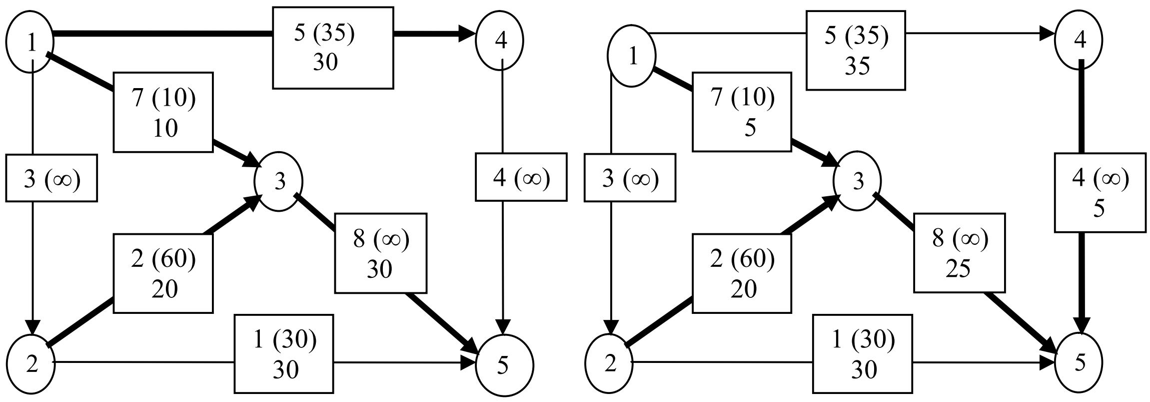

Рис. 2.6. Применение метода потенциалов

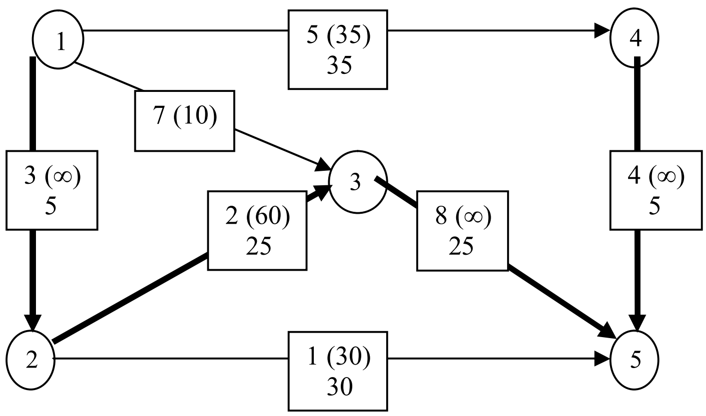

Рис. 2.7. Оптимальный поток

2.5. Метод потенциалов для транспортной задачи в матричной постановке

Рассмотрим применение метода потенциалов к транспортной задаче (8) – (11). Предполагаем, что транспортная задача сбалансирована.

Исходные данные и процесс решения транспортной задачи в матричной постановке оформляют в виде последовательности таблиц, имеющих следующую структуру (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Транспортная таблица

Спрос Предложение	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Строки транспортной таблицы соответствуют пунктам производства (в первой клетке каждой строки указан объем запаса продукта a_i), а столбцы – пунктам потребления (первая клетка каждого столбца содержит значение потребности b_j). Все клетки таблицы (кроме тех, которые расположены в верхней строке и левом столбце) содержат информацию о перевозке из i-го пункта в j-й: в левом верхнем углу находится цена перевозки единицы продукта, а в правом нижнем – значение объема перевозимого груза для данных пунктов. Клетки, которые содержат отличные от нуля перевозки, называются занятыми, а остальные – свободными.

Из определения опорного плана вытекает, что существует оптимальный план, содержащий не более чем $n + m–1$ положительных значений x_{ij}. Невырожденному опорному плану соответствует, следовательно, $n+m$-1 занятая клетка.

Начальный опорный план

Специальная структура задачи позволяет променять достаточно простые методы построения начального опорного потока.

Сущность этих методов состоит в том, что опорный план находят последовательно за $n+m–1$ шагов, на каждом из которых в транспортной таблице заполняют одну клетку. Величины текущих нераспределенных запасов на шаге q обозначим $a_i(q)$, а текущих неудовлетворенных потребностей - $b_j(q)$, полагаем $a_i(0)=a_i$, $b_j(0)=b_j$. При заполнении клетки, расположенной в строке i и столбце j, переменной x_{ij} присваивается максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение, то есть $x_{ij}=\min\{a_i(q),\ b_j(q)\}\geq 0$. Значения нераспределенного запаса и неудовлетворенной потребности в соответствующих пунктах уменьшаются на данную величину: $a_i(q+1)=a_i(q)-x_{ij}$, $b_j(q+1)=b_j(q)-x_{ij}$. Очевидно, при этом либо полностью удовлетворяется потребность в грузе пункта назначения j ($b_j(q+1)=0$), либо полностью вывозится груз из пункта отправления i ($a_i(q+1)=0$).

В первом случае, временно исключают из рассмотрения (вычеркивают) столбец j, содержащий заполненную на данном шаге клетку, и рассматривают задачу, таблица условий которой содержит на один столбец меньше, чем было перед этим шагом, но то же количество строк. Во втором случае вычеркивают строку i, содержащую заполненную клетку, и считают, что таблица условий имеет на одну строку меньше при неизменном количестве столбцов.

Если на некотором (но не на последнем) шаге потребности очередного пункта назначения равны запасам очередного пункта отправления ($a_i(q)=b_j(q)$), также временно исключают из рассмотрения либо столбец, либо строку (что-нибудь одно). Причем оставшейся строке (столбцу) приписывается нулевое предложение (спрос). В этом случае план X будет содержать менее чем $m+n-1$ положительных компонент, то есть будет вырожденным.

После того как проделаны $m+n-2$ описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом останется свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребностям оставшегося пункта назначения. Заполнив эту клетку, тем самым делают $(n+m-1)$-й шаг. Поскольку текущие нераспределенные запасы и неудовлетворенные потребности становятся равными нулю, полученный набор чисел является планом перевозок, содержащим $n+m-1$ занятых клеток, что является исходным условием для проверки последнего на оптимальность и нахождения оптимального плана.

Теорема 2.4. *План X, построенный указанным образом, является опорным.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2, достаточно показать, что опора потока X не содержит циклов. Допустим, имеется цикл вида $(i_1,j_1,i_2,j_2,\ldots,i_k,j_k,i_1)$.

Можно считать, что клетка (i_1,j_1) была заполнена первой среди всех в данном цикле, иначе мы рассмотрели бы цикл $(i_2,j_2,\ldots,i_k,i_1,j_1,i_2)$ и т.д.

Наличие в опоре потока X, пары (i_1,j_k) говорит о том, что при заполнении клетки (i_1,j_1) был удален из рассмотрения столбец j_1, то есть потребность в товаре пункта j_1, полностью удовлетворена. Но в таком случае присутствие в опоре потока дуги (i_2, j_1) невозможно.

Метод северо-западного угла. При нахождении опорного плана транспортной задачи этим методом на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} («северо-западный угол») и заканчивается клеткой для неизвестного x_{mn}, т.е. идет как бы по диагонали таблицы.

Метод наименьшей стоимости. На каждом шаге для заполнения в транспортной таблице выбирается клетка с наименьшим тарифом. Если таких клеток несколько, выбор произволен, например, среди клеток с равной стоимостью можно выбирать для заполнения ту, в которую можно направить наибольшую поставку.

Метод аппроксимации Фогеля. На каждой итерации для каждой строки и столбца, которым соответствует строго положительное предложение или спрос, вычисляется разность между двумя записанными в них минимальными стоимостями. Среди указанных разностей выбирают максимальную. В строке (или столбце), которой данная разность соответствует, заполняют клетку с минимальным тарифом. Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

Если не вычеркнута только одна строка или только один столбец, либо всем невычеркнутым строкам и столбцам соответствуют нулевые объемы предложения и спроса, оставшиеся базисные элементы находят методом наименьшей стоимости.

В общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение, а метод северо-западного угла – наихудшее, поскольку при составлении первоначального опорного плана этим методом не учитывается стоимость перевозки. Однако метод северо-западного угла требует меньшего объема вычислений.

Проверка оптимальности

Для проверки текущего опорного плана на оптимальность каждому пункту отправления (строке транспортной таблицы) и каждому пункту назначения (столбцу транспортной таблицы) сопоставляется потенциал α_i или β_j соответственно так, чтобы их сумма для каждой заполненной клетки была равна стоимости единичной перевозки по данному маршруту. Как и раньше, один из потенциалов можно положить равным произвольному числу, например, приравнять α_1 или β_1 нулю. Значения остальных потенциалов последовательно определяются из таблицы. Если известен, например, потенциал столбца *j*, то можно найти потенциалы всех строк, содержащих занятую клетку в этом столбце. Если найден потенциал некоторой строки *i*, то определяются потенциалы связанных с ней столбцов. Так как в опоре потока отсутствуют циклы, все потенциалы (кроме первого) определяются однозначно.

После того как все потенциалы найдены, для каждой из свободных клеток определяют числа $\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij}$. Если все числа $\Delta_{ij} \le 0$ (то есть α_i, β_j удовлетворяют условию критерия оптимальности), то найденный опорный план является оптимальным. Если же для некоторой свободной клетки $\Delta_{ij}>0$, то исходный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану.

Переход к новому плану

Среди всех чисел $\Delta_{ij}>0$ выбирается максимальное. Клетку (i_0,j_0), которой это число соответствует, следует заполнить, то есть в базис вводится вектор $x_{i_0 j_0}$.

Граф, полученный присоединением к опоре потока X дуги содержит единственный цикл, и этот цикл включает дугу (i_0,j_0), т. е. имеет вид $(i_0,j_0,i_1,j_1,\ldots,i_k,j_k,i_0)$. Данному циклу соответствует последовательность клеток (i_0,j_0), (i_1,j_0), (i_1,j_1),…,(i_0,j_k) в транспортной таблице.

Циклом в транспортной таблице называется набор клеток, в котором ровно две соседние клетки расположены в одном столбце или одной строке таблицы, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая.

Таким образом, если к занятым клеткам, определяющим опорный невырожденный план, присоединить какую-либо незанятую клетку, то появляется единственный цикл в таблице, все вершины которого, за исключением одной, лежат в занятых клетках. Этот цикл называется *циклом пересчета*.

В цикле $(i_0,j_0,i_1,j_1,\ldots,i_k,j_k,i_0)$ дуги, сонаправленные дуге (i_0,j_0), и имеющие противоположную ей ориентацию чередуются. Поэтому каждой из клеток в цикле пересчета приписывают поочередно знаки минус и плюс, начиная с плюса в свободной клетке. Так как любой цикл пересчета содержит четное чило звеньев, направление обхода цикла не имеет значения.

После того, как для выбранной свободной клетки построен цикл пересчета, необходимо, в соответствии с (2.3), переместить грузы в пределах клеток, связанных с данной свободной клеткой. Пусть в новый план включается перевозка из i_0 в j_0 объемом θ. К объемам перевозок в клетках, помеченных знаком «+», добавляется θ, а из объемов перевозок клеток, помеченных знаком «-», он вычитается. Так как новые значения базисных переменных должны остаться неотрицательными, в качестве θ берется меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. Клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а минусовая клетка, в которой стояло минимальное из чисел x_{ij}, считается свободной.

Описанный выше переход от одного опорного плана транспортной задачи к другому ее опорному плану называется *сдвигом по циклу пересчета*.

При сдвиге по циклу пересчета число занятых клеток остается неизменным, а именно остается равным $m+n-1$. При этом если в минусовых клетках имеются два (или более) одинаковых числа x_{ij}, то освобождается лишь одну из таких клеток, а остальные остаются занятыми (с нулевыми поставками), то есть опорный план вырожденный. Имея новое базисное решение, следует повторить вычисления потенциалов.

Пример 2.2. Решим задачу из примера 1.2. Транспортная таблица имеет вид табл. 2.2.

Таблица 2.2

Транспортная таблица для примера 2.2

Станции Хранилища	1 100	2 40	3 140	4 60	5 160
1 100	15	8	9	11	12
2 150	4	10	7	5	8
3 250	6	3	4	15	20

Опорный план задачи должен содержать 3+5–1=7 занятых клеток. Построим начальный план методом северо-западного угла. Начинаем с клетки (1,1). Максимально возможная поставка в эту клетку равна 100, предложение первой строки и спрос первого столбца становятся равными нулю. Выводим из рассмотрения первую строку. Следующая северо-западная клетка, (2,1), получает нулевую поставку и из рассмотрения исключается первый столбец. Далее последовательно заполняем клетки (2,2), (2,3), (3,3), (3,4). Полученный опорный план (табл. 2.3) является вырожденным, его стоимость равна

$$15\cdot100+10\cdot40+7\cdot110+4\cdot30+15\cdot60+20\cdot160=6890.$$

Таблица 2.3

Метод северо-западного угла

Станции Хранилища	1 100	2 40	3 140	4 60	5 160
1 100	15 100	8	9	11	12
2 150	4 0	10 40	7 110	5	8
3 250	6	3	4 30	15 60	20 160

Воспользуемся теперь методом минимальной стоимости (табл. 2.4). Наименьший элемент в таблице стоимостей равен 3 и находится в клетке (3,2). Ее и заполняем первой, из рассмотрения выводится второй столбец. Стоимость 4 имеют дуги (клетки) (2,1) и (3, 3). Заполняем сначала клетку (3,3), так как возможная здесь поставка больше (исключается третий столбец), а потом клетку (2,1) (исключается первый столбец).

Продолжая аналогично, заполняем клетки (2,4), (1,4), (1,5) и (3,5). Стоимость полученного решения равна 11·10+12·90+4·100+5·50+3·40+4·140+20·70=3920.

Рассмотрим применение метода Фогеля к этой же задаче (табл.2.5). Разности между минимальными элементами строк равны 1, столбцов – 2, 5, 3, 6 и 4 соответственно. Выбираем четвертый столбец, в котором заполняем клетку (2,4). Так как из рассмотрения уходит столбец, нужно пересчитать разности для строк. Они стали равны 1, 3, 1. Рассматриваем второй столбец, в котором заполняем клетку (3,2). Разность минимальных элементов в строке 1 стала равной 3, в третьей – 2. Выбираем пятый столбец и заполняем клетку (2,5). Оценки для оставшихся столбцов равны 9 (первый столбец), 5 (третий) и 8 (пятый). Заполняем клетку (3,1), затем – клетку (3,3), после чего в таблице остаются невычеркнутыми элементы первой строки. Достраиваем опорный план, заполняя клетки (1,3) и (1,5) по методу наименьшей стоимости. Стоимость полученного решения равна

$$9\cdot30+12\cdot70+5\cdot60+8\cdot90+6\cdot100+3\cdot40+4\cdot110=3290.$$

Таблица 2.4

Метод минимального элемента

Станции Хранилища	1 100	2 40	3 140	4 60	5 160
1 100	15	8	9	11 10	12 90
2 150	4 100	10	7	5 50	8
3 250	6	3 40	4 140	15	20 70

Таблица 2.5

Метод Фогеля

Станции Хранилища	1 100	2 40	3 140	4 60	5 160
1 100	15	8	9 30	11	12 70
2 150	4	10	7	5 60	8 90
3 250	6 100	3 40	4 110	15	20

Проверим на оптимальность план, полученный методом Фогеля. Найдем потенциалы строк и столбцов, начиная с $\beta_1=0$ и рассчитывая далее последовательно α_3, β_2, β_3, α_1, β_5, α_2, β_4 (потенциалы указываем справа и снизу транспортной таблицы). Для свободных клеток определяем $\Delta_{ij}=\alpha_i+\beta_j-c_{ij}$. Получаем, что $\Delta_{21}=3$, остальные оценки $\Delta_{ij}\le 0$. Клетку (2,1) следует заполнить. Цикл пересчета состоит из клеток (2,1), (3,1), (3,3), (1,3), (1,5), (2,5) (табл. 2.6). Перемещаемый по циклу объем поставок равен

$$\theta=\min\{100,\ 30,\ 90\}=30.$$

Преобразуем план. Клетка (1,3) уходит из базиса. Полученный план (табл. 2.7) оптимален, его стоимость равна

$$12\cdot100+4\cdot30+5\cdot60+8\cdot60+6\cdot70+3\cdot40+4\cdot140=3200.$$

Таблица 2.6

Цикл пересчета

Станции Хранилища	1 100	2 40	3 140	4 60	5 160	
1 100	15	8	9 - 30	11	12 + 70	11
2 150	4 +	10	7	5 60	8 - 90	7
3 250	6 - 100	3 40	4 + 110	15	20	6
	0	–3	–2	–2	1	

Таблица 2.7

Оптимальный план

Станции Хранилища	1 100	2 40	3 140	4 60	5 160	
1 100	15	8	9	11	12 100	8
2 150	4 30	10	7	5 60	8 60	4
3 250	6 70	3 40	4 140	15	20	6
	0	-3	-2	1	4	

Важной составной частью метода потенциалов решения транспортной задачи, как ясно из его описания, является отыскание в опоре потока пути, соединяющего два заданные вершины. Эта операция присутствует при проверке оптимальности текущего плана и переходе к новому плану и заменяет все вычисления обычной симплекс – процедуры. Опишем один из возможных способов нахождения требуемого пути.

Пусть рассматривается связный неориентированный граф без циклов, определяемый парой (V, E). Заданы пункты i, j и требуется найти путь, их соединяющий. Если дуга (i,j) принадлежит E, то требуемый путь найден. В противном случае, присоединим данную дугу к графу, т. е. будем рассматривать граф (V, $\widetilde{E}$), где $\widetilde{E} = E \bigcup (i, j)$.

В графе (V, E) существует путь, соединяющий i и j. Присоединение дуги (i, j) делает такой путь неединственным в (V, $\widetilde{E}$), из чего на основании леммы 4 заключаем, что граф (V, $\widetilde{E}$) содержит цикл. Этот цикл единственный и должен иметь вид $(i, j, i_1, i_2, ..., i_k, i)$. Если этот цикл удастся найти, то путь $(j, i_1, i_2, ..., i_k, i)$ и будет искомым.

Таким образом, задача отыскания пути сведена к задаче отыскания цикла. Эта же проблема является основной и при переходе к новому решению в методе потенциалов.

Поиск такого цикла осуществим следующим образом. Удалим из графа вершины, имеющие степень 1 и инцидентные этим вершинам ребра. Поскольку степень каждой вершины, являющейся внутренней для некоторого пути, не меньше двух, полученный граф останется связным и ни одна вершина, участвующая в цикле, выброшена не будет. Может представиться две возможности.

1) В результате описанной процедуры граф не изменился — ни одну из вершин не удалось удалить.

2) Общее число вершин уменьшилось хотя бы на 1. В этом случае следует повторить описанную процедуру последовательного удаления вершин графа. Поскольку исходный граф содержит цикл, то после некоторого количества повторений процедуры мы обязательно придем к случаю 1).

Покажем, что в первом случае граф (V, $\widetilde{E}$) является циклом. Пусть $|V| = n$. Поскольку граф (V, E) является деревом, то согласно теореме 2, множество E содержит $n-1$ ребер. В таком случае $\widetilde{E}$ содержит ровно n ребер. Поскольку из каждой вершины выходит не менее двух ребер, нетрудно видеть, что в таком случае из каждой вершины выходит ровно два ребра. Ссылка на лемму 2 заканчивает доказательство.

Таким образом, в случае 1) нужно строить произвольный путь максимальной длины, начинающийся в пункте i,— он и окажется требуемым циклом.

При работе с транспортной таблицей множеству E соответствует множество занятых клеток. Добавляя к нему одну свободную клетку, получаем множество $\widetilde{E}$. Поэтому описанная процедура сводится к удалению из рассмотрения сначала строк, а затем столбцов, содержащих не более одной занятой клетки.

Максимизация целевой функции

Рассмотрим случай, когда требуется найти поток в сети, удовлетворяющий условиям (1.3), (1.4) и максимизирующий целевую функцию

$$\sum c_{ij} x_{ij} .$$

Коэффициенты c_{ij} могут выражать не стоимость, а например, эффективность использования данной дуги.

В этой ситуации также можно использовать метод потенциалов, но опорный план будет оптимальным в том случае, если все оценки Δ_{ij} будут неотрицательными. Для ввода в план выбирается дуга (i,j) с максимальным по модулю отрицательным Δ_{ij}. При составлении начального опорного плана транспортной задачи в матричной постановке вместо метода наименьшей стоимости следует использовать метод наибольшей стоимости, то есть в первую очередь заполняются клетки с наиболее высокими значениями показателя c_{ij} .

Если задача поставлена в матричной форме, можно перейти к эквивалентной задаче на минимум, вычитая каждое c_{ij} из достаточно большого числа K, например, K=max c_{ij} и затем минимизируя

$$\sum_{i,j} \left(K - c_{ij}\right) x_{ij} = K \sum_i a_i - \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} .$$

3. УСЛОЖНЕНИЯ В ПОСТАНОВКЕ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

При исследовании конкретных транспортных моделей часто приходится учитывать условия, не предусмотренные классическими постановками транспортных задач. Рассмотрим транспортные задачи с дополнительными ограничениями, которые можно привести к виду (1.1), (1.3), (1.4) или (1.8) – (1.11).

Открытая транспортная задача

Несбалансированная транспортная задача возникает в двух случаях:
суммарные запасы превышают суммарные потребности: $\sum a_i > \sum b_j$;
суммарные потребности превышают суммарные запасы: $\sum a_i < \sum b_j$.

В случае избытка продукта допустимые ограничения (1.5) транспортной задачи примут вид

$$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} \le a_i,\ i \in S,$$

так как запасы поставщиков используются не полностью.

Введем фиктивный (n+1)-й пункт - сток потребностью $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$, равной величине избытка продукта, и соединим ее входящими дугами с узлами – источниками. Пропускные способности вновь введенных дуг бесконечны, стоимости $c_{i,n+1}$, $i \in S$, представляют собой штраф за единицу нереализованного продукта в пункте i. Обозначим через $x_{i,n+1}$ количество продукта, нереализованного в пункте $i \in S$.

Этим задача сводится к обычной транспортной задаче, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи.

В случае дефицита продукта следует учесть в виде неравенств ограничения (1.7):

$$\sum_j x_{ji} - \sum_k x_{ik} \le b_i,\ i \in T,$$

то есть запасы поставщиков не достаточны для удовлетворения всех потребностей потребителей.

Вводится фиктивный пункт-источник с запасами, равными величине дефицита продукта $a_{n+1} = \sum b_j - \sum a_i$, который соединяется исходящими дугами с вершинами-стоками. Пропускные способности вновь введенных дуг бесконечны, стоимости $c_{n+1,i}$, $i \in T$, обозначают штрафы за единицу продукта, недопоставленного в пункт $i \in T$.

Обозначив $x_{n+1,j}$ - количество продукта, недопоставленного в пункт j, получаем сбалансированную транспортную задачу.

По умолчанию часто считают, что штрафы равны нулю и целевая функция не меняется при балансировке.

При матричной постановке транспортной задачи указанные преобразования заключаются в добавлении к транспортной таблице столбца или строки соответственно.

Пример 3.1. Предположим, что в условиях примера 1.2 рассматривается целесообразность снабжения заправочных станций с хранилища, стоимости перевозок бензина от которого равны 7, 12, 8, 10 и 15 соответственно. Добавим к сети новый пункт – поставщик, объем предложения которого положим пока равным суммарному спросу на продукцию. Так как задача становится несбалансированной, придется добавить также пункт – потребитель. Транспортная таблица примет вид 3.1.

Таблица 3.1

Пример 3.1

Станции Хранилища		1 100	2 40	3 140	4 60	5 160	6 500
1	100	15	8	9	11	12	0
2	150	4	10	7	5	8	0
3	250	6	3	4	15	20	0
4	500	7	12	8	10	15	0

Поставки в шестом столбце будут показывать остаток горючего на соответствующем хранилище, что позволит скорректировать их ежедневный объем предложения.

Транспортная задача с запретами

При некоторых реальных условиях перевозки груза от определенных поставщиков некоторым потребителям не могут быть осуществлены (из-за отсутствия необходимых условий хранения, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т.д.), то есть отсутствует дуга между соответствующими пунктами i и j. Можно считать тогда, что пропускная способность дуги (i,j) равна нулю.

Для транспортной задачи в матричной постановке это ограничение можно учесть, искусственно завысив стоимости в клетках, перевозки через которые следует запретить. То есть предполагается, что в этих клетках $c_{ij}=M$, где M – большая величина, например,

$$M = \max(c_{ij})\left(\sum b_j\right).$$

При этом условии находят решение новой транспортной задачи, и если решение исходной задачи существует, в оптимальном плане новой задачи $x_{ij} = 0$. Такой подход к нахождению решения транспортной задачи называют запрещением перевозок или *блокированием* соответствующей клетки таблицы данных задачи.

Нижние границы пропускных способностей

Иногда требуется найти решение транспортной задачи, при котором из пункта отправления i в пункт назначения j должно быть завезено не менее заданного количества груза l_{ij}, то есть дуга (i,j) имеет положительную нижнюю границу пропускной способностии и дуговой поток должен удовлетворять ограничениям

$$l_{ij} \le x_{ij} \le d_{ij}.$$

Нижнюю границу пропускной способности l_{ij} можно удалить из ограничений с помощью подстановки $x_{ij}=x_{ij}'+l_{ij}$. Для нового потока x_{ij}' верхней границей пропускной способности будет величина $d_{ij}-l_{ij}$. В этом случае новая интенсивность узла i равна $s_i - \sum_j l_{ij} + \sum_j l_{ji}$.

При работе с транспортной таблицей считают, что запасы пункта i и потребности пункта j меньше фактических на l_{ij} единиц. После этого находят оптимальный план новой транспортной задачи, на основании которого и определяют решение исходной задачи, добавляя обязательные поставки.

Транспортная задача с фиксированными перевозками

В отдельных транспортных задачах дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза независимо от того, выгодно это или нет. Пусть, например, из пункта i в пункт j требуется обязательно перевезти d_{ij} единиц груза, то есть в задаче имеется ограничение

$$x_{ij} = d_{ij}.$$

Как и в предыдущем случае, следует сделать подстановку $x_{ij} = x'_{ij} + d_{ij}$, при этом для нового потока верхней границей пропускной способности дуги (i,j) будет ноль.

Для матричной транспортной задачи в этом случае после уменьшения запаса груза у поставщиков и спроса потребителей клетку (i,j) транспортной таблицы считают свободной со сколь угодно большим тарифом перевозок M.

Оптимальный план полученной новой транспортной задачи корректируют с учетом обязательных поставок.

Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

В некоторых транспортных задачах вида (1.8) – (1.11) требуется найти оптимальный план перевозок при условии, что из пункта отправления i в пункт назначения j перевозится не более чем d_{ij} единиц груза, то есть транспортный маршрут имеет ограничения по пропускной способности вида (1.3) $x_{ij} \le d_{ij}$. Пусть в столбце j таблицы исходных данных задачи ограничения на пропускную способность имеются клетки в строках $i_1,\ldots,i_k$. Для каждого такого ограничения предусматривают дополнительный столбец с потребностями, равными $d_{i_l j}$, $l=1,\ldots,k$, клетки (i_p,j) $p \ne l$ блокируют, остальные тарифы те же, что и в столбце j. Потребности столбца j считают равными $b_j - \sum_l d_{i_l j}$, а тарифы в клетках с ограниченной пропускной способностью полагают равными некоторому большому числу M.

Решение полученной транспортной задачи может быть найдено обычным образом, и тем самым будет определен оптимальный план или установлена неразрешимость исходной задачи.

Пропускная способность узлов

Пусть в сетевой задаче величина потока, проходящего через промежуточный узел i, ограничена, то есть

$$\sum_j x_{ij} \le k_i \ , \ \sum_j x_{ji} \le k_i .$$

Введем дополнительный узел i' и дугу (i,i') с пропускной способностью k_i и нулевой стоимостью, и исходящие дуги (i,j) заменим дугами (i',j) с теми же параметрами. В оптимальном решении новой задачи поток по дуге (i,i') равен потоку через узел i в исходной задаче, узлы i и i' следует снова совместить.

Транзитная перевозка продукции

Главным отличием сетевой задачи от задачи в матричной постановке является то, что груз из пунктов производства может частично или полностью перевозится через другие исходные пункты, промежуточные пункты для временного хранения грузов или пункты назначения транзитом, прежде чем достигнет установленного пункта назначения. Если ограничения на пропускные способности дуг отсутствуют, то каждую пару пунктов производитель-потребитель можно связать кратчайшим путем из звеньев сети. После этого задача может быть переписана в матричной форме с матрицей транспортных расходов, состоящей из стоимостей перевозок по кратчайшим путям (если пункты не связаны сетью, то соответствующий элемент матрицы блокируется).

Для определения минимальной стоимости прямой перевозки единицы продукции из одного пункта в другой следует либо обратиться к алгоритму нахождения кратчайшего пути, либо, в задачах небольшой размерности, определить кратчайшие пути непосредственно.

Другим методом учета транзитных перевозок является введение дополнительного буфера емкостью B такой, чтобы вместить объем всего предложения (или спроса) сбалансированной транспортной задачи, т. е. $B \ge \sum a_i = \sum b_j$. Пункты, которым соответствуют как входящие, так и выходящие дуги, назовем транзитными. Оставшиеся будут либо истинными пунктами отправления, либо истинными пунктами назначения. Пусть имеется m истинных пунктов отправления, n истинных пунктов назначения и k транзитных пунктов. Эту модель можно преобразовать в обычную транспортную модель с $m+k$ пунктами отправления и $n+k$ пунктами назначения. Соответствующие объемы спроса и предложения, вычисляются следующим образом:

Объем предложения истинного пункта отправления i равен a_i.

Объем предложения транзитного пункта i равен $a_i +B$.

Объем спроса истинного пункта назначения j равен b_j.

Объем спроса транзитного пункта j равен $b_j +B$.

Стоимости в расчете на единицу груза равны стоимостям дуг, соединяющих соответствующие пункты. Заметим, что стоимость перевозки из некоторого пункта в него же равна нулю, и стоимость перевозки может меняться в зависимости от направления движения.

Путь минимальной стоимости между пунктом производства и пунктом назначения в такой модели отыскивается автоматически.

Следует также учитывать, что в оптимальном плане X преобразованной транспортной задачи элементы вида x_{ii} (диагональные элементы транспортной таблицы) получены в результате использования буфера и не дают никакой информации об окончательном решении.

Эквивалентность задач

Очевидно, матричная постановка транспортной задачи является частным случаем сетевой постановки, и, следовательно, задачи о потоке минимальной стоимости. Тем не менее, применяя указанные выше преобразования, произвольную транспортную задачу в сетевой постановке можно привести к эквивалентной матричной форме. Опишем преобразование в транспортную задачу задачи о потоке минимальной стоимости (1.1) – (1.3) за один шаг ([11]).

Пусть дана задача о потоке минимальной стоимости. Построим транспортную задачу следующим образом.

Дуге (i,j) соответствует пункт отправления ij, вершине i - пункт назначения i. Дуги (ij,j) имеют стоимость c_{ij} и бесконечную пропускную способность, дуги (ij,i) имеют нулевую стоимость и бесконечную пропускную способность. Все другие дуги отсутствуют (имеют нулевую пропускную способность). Запас в пункте отправления ij полагаем равным d_{ij}.

Чтобы задать потребности, введем обозначение

$$d_i = \sum_{j:(i,j)\in D} d_{ij} .$$

Таким образом, d_i – это общая пропускная способность из вершины i. Потребность в пункте назначения i определяется формулами

$$d_i - v,\ i=s,$$
$$d_i + v,\ i=t,$$
$$d_i,\ i \neq s, t.$$

Транспортная задача состоит в нахождении такого потока $X=(x_{ij,k})$, что достигается

$$\min \sum_{ij} x_{ij,j} c_{ij}$$

при условиях

$$x_{ij,j} + x_{ij,i} = d_{ij} \tag{3.1}$$

(запас в пункте отправления ij полностью используется);

$$\sum_i \left(x_{ij,i} + x_{ji,i} \right) = \begin{cases} d_i - v & для \quad i = s, \\ d_i + v & для \quad i = t, \\ d_i & для \quad i \neq s, t \end{cases} \tag{3.2}$$

(потребность в вершине i удовлетворяется); и

$$x_{ij,k} \geq 0 \text{ для всех } i, j, k.$$

Заметим, что задача сбалансирована.

Лемма 3.1. *Исходная задача о потоке минимальной стоимости и построенная транспортная задача эквивалентны в том смысле, что допустимый поток в одной из них соответствует допустимому потоку той же стоимости в другой.*

Доказательство. Пусть сначала $X=\{x_{ij}\}$ – допустимый поток в задаче о потоке минимальной стоимости (1.1) – (1.3). Тогда, если положить

$$x_{ij,j}=x_{ij}\geq 0,$$
$$x_{ij,i}=d_{ij}-x_{ij}\geq 0, \tag{3.3}$$

то эти потоки будут удовлетворять (3.1). Подставляя их в (3.2), получаем

$$\sum_i\left(d_{ij}-x_{ij}+x_{ji}\right)=d_i+\sum_i\left(x_{ji}-x_{ij}\right)=\begin{cases} d_i-v & для \quad i=s,\\ d_i+v & для \quad i=t,\\ d_i & для \quad i\neq s,t,\end{cases}$$

что и требовалось.

Пусть теперь дан допустимый поток $x_{ij,k}$ в транспортной задаче (3.1), (3.2). Дуговой поток отличен от 0 только тогда, когда $k=i$ или $k=j$. Положим в исходной задаче о потоке минимальной стоимости

$$x_{ij}=x_{ij,j}.$$

Тогда, учитывая запас в пункте отправления ij, имеем $0\leq x_{ij}\leq d_{ij}$. Кроме того, используя равенства (3.1) и (3.2), получаем, что чистый поток из вершины i в задаче о потоке минимальной стоимости равен

$$\sum_i x_{ij,j}-\sum_j x_{ji,i}=\sum_i\left(d_{ij}-x_{ij,i}\right)-\sum_i x_{ij,i}=d_i-\sum_i\left(x_{ij,i}+x_{ji,j}\right)=\begin{cases} v & для \quad i=s,\\ -v & для \quad i=t,\\ 0 & для \quad i\neq s.\end{cases}$$

Таким образом, все ограничения выполнены.

Легко видеть, что стоимости (в соответствующих задачах) потоков, связанных равенствами (3.3), одинаковы.

Итак, задача о потоке минимальной стоимости (а, следовательно, и сетевая транспортная задача) является частным случаем транспортной задачи в том смысле, что для любой индивидуальной задачи о потоке минимальной стоимости можно построить индивидуальную транспортную задачу, имеющую то же самое решение. Следовательно, задача о потоке минимальной стоимости, сетевая транспортная задача и транспортная задача в матричной постановке эквивалентны, то есть можно перейти от одной задачи к другой и решение при этом не изменится.

Пример 3.2. Получим матричную постановку задачи из примера 1.1. Пункт 1 является истинным пунктом отправления, пункт 5 – истинным пунктом назначения, остальные – промежуточные. Поэтому без учета ограничений на пропускные способности получим задачу с четырьмя пунктами отправления (1, 2, 3 и 4) и четырьмя пунктами назначения (2, 3, 4 и 5). Объем буфера равен B = 40 + 50 = (или = 30 + 60) = 90 млн. галлонов воды.

Расстояние от пункта до него самого (диагональные элементы транспортной таблицы) полагаем равным нулю. Если дуга, связывающая пункты i и j отсутствует, принимаем $c_{ij}=M$, где M – большое число. Транспортная таблица имеет вид табл. 3.2. Вводим дополнительные столбцы для избавления от ограничений на пропускные способности в клетках столбцов 3, 4 и 5 (табл. 3.3). Поскольку столбцы 3_3 и 4_2 имеют только по одной допустимой клетке, заполним эти клетки и исключим указанные столбцы из рассмотрения, изменив предложение соответствующих пунктов (табл. 3.4).

Таблица 3.2

Учёт промежуточных пунктов

Спрос / Предложение		2 ***B***	3 ***B***	4 **30+*B***	5 60
1	**40**	**3**	**7(10)**	**5(35)**	*M*
2	**50+B**	**0**	**2(60)**	***M***	1(30)
3	***B***	***M***	**0**	***M***	8
4	*B*	*M*	*M*	0	4

Таблица 3.3

Учёт ограничений на пропускную способность

		2 **90**	3_1 **10**	3_2 **60**	3_3 **20**	4_1 **35**	4_2 **85**	5_1 **30**	5_2 30
1	**40**	**3**	**7**	***M***	***M***	**5**	***M***	***M***	*M*
2	**140**	**0**	***M***	**2**	***M***	***M***	***M***	**1**	*M*
3	**90**	***M***	**0**	**0**	**0** **20**	***M***	***M***	**8**	8
4	90	*M*	*M*	*M*	*M*	0	0 85	4	4

Таблица 3.4

Итоговая таблица

		2 **90**	3_1 **10**	3_2 **60**	4_1 **35**	5_1 **30**	5_2 30
1	**40**	**3**	**7**	***M***	**5**	***M***	*M*
2	**140**	**0**	***M***	**2**	***M***	**1**	*M*
3	**70**	***M***	**0**	**0**	***M***	**8**	8
4	5	*M*	*M*	*M*	0	4	4

Решая полученную задачу методом потенциалов, получим следующий опорный план (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Оптимальный опорный план

	2	3_1	3_2	4_1	5_1	5_2
1	**3** **5**	**7**	***M***	**5** **35**	***M***	*M*
2	**0** **85**	***M***	**2** **25**	***M***	**1** **30**	*M*
3	***M***	**0** **10**	**0** **35**	***M***	**8**	8 25
4	*M*	*M*	*M*	0	4	4 5

Оптимальный план в исходной таблице (соответствующий рис. 2.7) получаем, складывая столбцы 3_1, 3_2 и 3_3, 5_1 и 5_2, 4_1 и 4_2.

4. ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД

Алгоритм одновременного решения прямой и двойственной задачи линейного программирования (прямо-двойственный алгоритм) начинается с определения допустимого решения двойственной задачи. Затем находится оптимальное решение вспомогательной задачи, называемой ограниченной прямой задачей. В результате либо определяется оптимальное решение исходной задачи, либо делается переход к улучшенному решению двойственной задачи. Далее процесс повторяется. За конечное число шагов либо достигается оптимальность, либо устанавливается, что задача не имеет решения. Метод особенно эффективен для задач типа транспортной, так как в этом случае можно использовать специальные вычислительные схемы и, следовательно, отпадает необходимость в привлечении общего симплекс – метода. Прямо-двойственный алгоритм решения транспортной задачи называют *венгерским методом*.

4.1. Итерации алгоритма

Рассмотрим применение этого метода для решения транспортной задачи в матричной постановке (1.8) – (1.11) с ограничениями вида (1.3) на пропускные способности некоторых дуг.

Поскольку для всех допустимых переменных справедливо неравенство

$$x_{ij} \le \min\{a_i, b_j\},$$

можно считать, что ограничения (1.3) заданы для всех $i = 1,2, ..., m,$ $j= 1,2, ..., n$. Если поставки из пункта назначения i в пункт назначения j не осуществляются, считаем, что $d_{ij} = 0$.

Предполагаем, выполнено условие баланса (1.13), необходимое для разрешимости задачи. Множества пунктов-поставщиков и пунктов – потребителей опять обозначим через M и N соответственно.

Задача, двойственная к (1.8) – (1.10), (1.3) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\gamma_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j \to \max \tag{4.1}$$

при условиях

$$\alpha_i - \gamma_{ij} + \beta_j \le c_{ij},\ i \in M,\ j \in N, \tag{4.2}$$

$$\gamma_{ij} \ge 0,\ i \in M,\ j \in N, \tag{4.3}$$

где двойственные переменные α_i соответствуют ограничениям (1.9), β_j – ограничениям (1.10), γ_{ij} – ограничениям на пропускные способности (1.3).

Условия дополняющей нежесткости для решений прямой и двойственной задачи (для всех $i \in M$, $j \in N$):

$$(\alpha_i - \gamma_{ij} + \beta_j - c_{ij})x_{ij} = 0,$$

$$\gamma_{ij}\left(d_{ij}-x_{ij}\right)=0.$$

Предположим, известно некоторое допустимое решение задачи (4.1) – (4.3). Согласно теории двойственности, если можно найти допустимый план $X=\{x_{ij}\}$ задачи (1.8) – (1.10), (1.3), в котором

$$x_{ij}=0, \text{ если } \alpha_i-\gamma_{ij}+\beta_j<c_{ij},$$

$$x_{ij}=d_{ij}, \text{ если } \gamma_{ij}>0,$$

то этот план будет оптимальным.

***Шаг* 0**. Алгоритм начинается с выбора допустимого решения двойственной задачи, например

$$\alpha_i=\min_j c_{ij},\ \beta_j=\min_i(c_{ij}-\alpha_i),\ \gamma_{ij}=0. \tag{4.4}$$

***Шаг* 1**. С помощью текущего решения двойственной задачи определяются множества

$$I_1=\{(i,j):\alpha_i+\beta_j=c_{ij}\},$$

$$I_2=\{(i,j):a_i+\beta_j<c_{ij}\},$$

$$I_3=\{(i,j):a_i+\beta_j-\gamma_{ij}=c_{ij}\}.$$

Дугам $(i,j)\in I_1\bigcup I_2$ соответствуют значения $\gamma_{ij}=0$, $\gamma_{ij}>0$ для дуг из I_3.

Тогда X – оптимальное решение транспортной задачи, если выполнены условия (1.9), (1.10), (1.3) и, кроме того,

$$x_{ij}=0,\ (i,j)\in I_2,\ x_{ij}=d_{ij},\ (i,j)\in I_3. \tag{4.5}$$

Для нахождения такого плана X можно использовать метод, аналогичный методу искусственного базиса для поиска начального плана в канонической задаче линейного программирования. Пусть ξ_i, $i=1,\ldots,n+m$ – искусственные переменные, рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^{m+n}\xi_i\to\min$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+\xi_i=a_i,\ i\in M,$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}+\xi_{m+j}=b_j,\quad j\in N,$$

$$\xi_i\ge 0,\ i=1,\ldots,n+m,$$

$$0\le x_{ij}\le d_{ij},\ i\in M,\ j\in N,$$

$$x_{ij}=0,\ (i,j)\in I_2,$$

$$x_{ij}=d_{ij},\ (i,j)\in I_3.$$

Эта задача называется *ограниченной прямой задачей*. Если значение целевой функции оптимального решения (ξ, X) этой задачи равно нулю, то X удовлетворяет ограничениям (1.9), (1.10), (1.3), (4.5) и, следовательно, является оптимальным решением задачи (1.8) – (1.10).

Решение ограниченной прямой задачи

Значение целевой функции этой задачи можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\ ,$$

поэтому можно переформулировать задачу без искусственных переменных следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to \max \tag{4.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i \in M\ , \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j,\ j \in N\ , \tag{4.8}$$

и выполнены условия (1.3), (4.5).

Рассмотрим сеть с вершинами $\{s\} \cup M \cup N \cup \{t\}$ и следующими пропускными способностями дуг:

$$d'_{si} = a_i - \sum_{j:(i,j)\in I_3} d_{ij}\ ,\ i \in M\ ,$$

$$d'_{jt} = b_j - \sum_{i:(i,j)\in I_3} d_{ij}\ ,\ j \in N\ ,$$

$$d'_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & (i,j) \in I_1, \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда (4.6) – (4.8), (1.3), (4.5) – задача о максимальном потоке в этой сети.

Решая ее методом расстановки пометок, получаем решение $\{x_{ij}\}$ (максимальный поток) для $(i,j) \in I_1$ и множества $I \subset M$, $J \subset N$ помеченных узлов, определяющих минимальный разрез. Значения переменных x_{ij} для $(i,j) \in I_2 \cap I_3$ определяются согласно (4.5).

Если $\sum_{MN} x_{ij} = \sum_{M} a_i = \sum_{N} b_j$, то $X=\{x_{ij}\}$ - оптимальное решение исходной задачи и процесс заканчивается. В самом деле, в этом случае $\sum_{j} x_{ij} = a_i$, $\sum_{i} x_{ij} = b_j$, то есть X – допустимое решение задачи (1.8) – (1.10), (1.3), и так как условия $\gamma_{ij} > 0$ приводят к равенству $x_{ij} = d_{ij}$,

$$\sum_{ij} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i} a_i\alpha_i - \sum_{j} b_j\beta_j + \sum_{ij} d_{ij}\gamma_{ij} = \sum_{ij}\left(c_{ij} - \alpha_i - \beta_j + \gamma_{ij}\right)x_{ij}\ .$$

Но из $c_{ij} - \alpha_i - \beta_j + \gamma_{ij} > 0$ следует x_{ij}=0, тогда разность между значениями целевых функций прямой и двойственной задач обращается в 0.

В противном случае следует перейти к новому допустимому решению двойственной задачи.

Шаг 2. Изменение двойственных переменных

Новые значения переменных двойственной задачи определяются следующим образом.

$$\alpha_i' = \begin{cases} \alpha_i + \theta, & i \in I \\ \alpha_i, & i \in \bar{I} \end{cases},$$

$$\beta_j' = \begin{cases} \beta_j - \theta, & j \in J \\ \beta_j, & j \in \bar{J} \end{cases}$$

$$\gamma_{ij}' = \begin{cases} \gamma_{ij} + \theta, & (i,j) \in I\bar{J} \bigcap (I_1 \bigcup I_3) \\ \gamma_{ij} - \theta, & (i,j) \in \bar{I}J \bigcap I_3 \\ \gamma_{ij} & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь $\theta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, где $\delta_1 = \min\limits_{I\bar{J} \bigcap I_2} (c_{ij} - \alpha_i - \beta_j)$, $\delta_2 = \min\limits_{\bar{I}J \bigcap I_3} \gamma_{ij}$.

Если число θ определить нельзя (оба множества, на которых ищется минимум, пусты), решения транспортной задачи не существует.

Лемма 4.1. *Если* α_i, β_j, γ_{ij} *допустимы для двойственной задачи, то это же верно для* α_i', β_j', γ_{ij}'.

Доказательство. По определению θ, $\gamma_{ij}' \ge 0$. Очевидно, что для дуг из множеств IJ и $\bar{I}\bar{J}$ $\alpha_i' + \beta_j' - \gamma_{ij}' = \alpha_i + \beta_j - \gamma_{ij}$. Поэтому рассмотрим множества $I\bar{J}$ и $\bar{I}J$.

Пусть $(i,j) \in I\bar{J}$. Тогда, если $(i,j) \in I_1 \bigcup I_3$, то $\alpha_i' + \beta_j' - \gamma_{ij}' = \alpha_i + \beta_j - \gamma_{ij}$. Если $(i,j) \in I_2$, то по определению θ,

$$\alpha_i' + \beta_j' - \gamma_{ij}' = \alpha_i + \beta_j - \gamma_{ij} + \theta \le \alpha_i + \beta_j - \gamma_{ij} + c_{ij} - \alpha_i - \beta_j = c_{ij}.$$

Пусть $(i,j) \in \bar{I}J$. Тогда, если $(i,j) \in I_3$, то $\alpha_i' + \beta_j' - \gamma_{ij}' = \alpha_i + \beta_j - \gamma_{ij}$. Если $(i,j) \in I_1 \bigcup I_2$, $\alpha_i' + \beta_j' - \gamma_{ij}' = \alpha_i + \beta_j - \gamma_{ij} - \theta < c_{ij}$.

Лемма 4.2. *При переходе к новым переменным значение целевой функции возрастает на* $\theta\left[\sum\limits_M a_i - v - \sum\limits_{I_3} d_{ij}\right] > 0$.

Доказательство. Пусть $\theta<\infty$, $\sum\limits_{MN} x_{ij} < \sum\limits_M a_i$. Тогда изменение целевой функции двойственной задачи равно

$$\sum_M a_i(\alpha_i' - \alpha_i) + \sum_N b_j(\beta_j' - \beta_j) + \sum_{MN} d_{ij}(\gamma_{ij}' - \gamma_{ij}) =$$

$$= \theta\left[\sum_I a_i - \sum_J b_j + \sum_{\bar{I}J \bigcap I_3} d_{ij} - \sum_{I\bar{J} \bigcap (I_1 \bigcup I_3)} d_{ij}\right]. \qquad (4.9)$$

Величина максимального потока v равна $\sum_{MN} x_{ij} - \sum_{I_3} d_{ij}$ для x_{ij} из множества, определенного ограничениями (27), (28), (3), (25), то есть

$$v < \sum_{M} a_i - \sum_{I_3} d_{ij} .$$

Величина минимального разреза в терминах отмеченных множеств I и J задается равенством выражением

$$\sum_{\bar{I}} a_i - \sum_{\bar{I}N \bigcap I_3} d_{ij} + \sum_{J} b_j - \sum_{MJ \bigcap I_3} d_{ij} + \sum_{I\bar{J} \bigcap I_1} d_{ij} .$$

Так как

$$\sum_{\bar{I}N \bigcap I_3} d_{ij} + \sum_{MJ \bigcap I_3} d_{ij} + \sum_{\bar{I}J \bigcap I_3} d_{ij} - \sum_{\bar{I}J \bigcap I_3} d_{ij} = \sum_{I_3} d_{ij} ,$$

$$v = \sum_{M} a_i - \sum_{I} a_i - \sum_{I_3} d_{ij} + \sum_{I\bar{J} \bigcap (I_1 \bigcup I_3)} d_{ij} + \sum_{J} b_j - \sum_{\bar{I}J \bigcap I_3} d_{ij}$$

и, следовательно, выражение в скобках в (4.9) равно

$$\sum_{M} a_i - \sum_{I_3} d_{ij} - v > 0 .$$

После преобразования двойственных переменных переходим на шаг 1, где определяются новые множества I_1, I_2, I_3, решается соответствующая ограниченная прямая задача и так далее.

Так как $\theta \left[\sum_{i} a_i - v - \sum_{I_3} d_{ij} \right] \geq 1$, если $\sum_{MN} x_{ij} < \sum_{M} a_i$, то вычисления закончатся через конечное число шагов. При этом либо, в случае $\sum_{MN} x_{ij} = \sum_{M} a_i$, будет найдено оптимальное решение, либо будет установлено, что исходная задача неразрешима.

Обозначим множества дуг, соответствующие новым двойственным переменным, через I_1', I_2', I_3' соответственно. Докажем, что новый процесс расстановки пометок при решении ограниченной прямой задачи можно начать с потока $X=\{x_{ij}\}$.

Так как условия (4.7), (4.8), (1.3) очевидно справедливы, достаточно показать, что $x_{ij}=d_{ij}$ для $(i,j) \in I_3'$, $x_{ij}=0$ для $(i,j) \in I_2'$.

Пусть $(i,j) \in I_3'$. Если $(i,j) \in I_3$, то решение подзадачи оставляет x_{ij} неизменным и равным d_{ij}. С другой стороны, любая дуга $(i,j) \in I_3'$, не содержащаяся в I_3, содержится в $I_1 \bigcap I\bar{J}$, так как только для таких дуг значение переменной γ_{ij} увеличивается при преобразовании. В этом случае $x_{ij}=d_{ij}$, иначе пункт j мог бы быть помечен, исходя из пункта i.

Пусть $(i,j) \in I_2'$. Если $(i,j) \in I_2$, то при решении подзадачи x_{ij}, равное 0, не меняется. Если $(i,j) \in I_1 \bigcup I_3$, то это означает, что при преобразовании переменных значение β_j уменьшилось, а значение α_i не изменилось, то есть $(i, j) \in I_1 \cap \bar{I}J$ и из процесса расстановки пометок следует, что x_{ij}=0.

4.2. Матричная форма алгоритма

При решении задачи с использованием транспортных таблиц вычислительный процесс состоит в эквивалентном преобразовании матрицы стоимостей *C*. На каждом этапе элементы матрицы имеют вид $c_{ij}-\alpha_i-\beta_j$. Таким образом, дугам множества I_1 соответствуют клетки транспортной таблицы с нулевыми стоимостями, назовем их допустимыми, дугам множества I_2 отвечают положительные стоимости, дугам множества I_3 – клетки с отрицательными стоимостями.

С каждой строкой и с каждым столбцом таблицы будут связаны соответственно некоторые излишки и нехватки (нераспределенное предложение и неудовлетворенный спрос). Вначале этими величинами являются a_i и b_j, далее это обозначение сохраняется. Вычисления заканчиваются, если все излишки и нехватки равны нулю.

Шаг* 0. *Начальная таблица

Приведем матрицу стоимостей сначала по строкам, затем по столбцам. Легко заметить, что вычитаемые в процессе приведения из строк и столбцов числа (константы приведения) соответствуют решению (24) двойственной задачи.

Шаг* 1. *Решение ограниченной прямой задачи

Процесс расстановки пометок может начинаться с любого потока *X*, удовлетворяющего ограничениям (4.7), (4.8), (1.3), (4.5).

Смысл процедуры *поиска допустимого потока* сводится к частичному удовлетворению спроса в столбцах за счет предложения в строках, при использовании в качестве возможных маршрутов перевозок только тех дуг, которые соответствуют допустимым клеткам.

Рассмотрим первую сверху строку таблицы, в которой существуют допустимые клетки. Найдем минимум предложения этой строки, спроса соответствующего столбца и пропускной способности дуги. Поместим это число в таблицу, одновременно изменим на него спрос и предложение. Заполнив таким образом все допустимые клетки строки, перейдем к следующей строке и т.д. Продолжаем, пока не будут рассмотрены все строки.

Поиск увеличивающего пути. Будем помечать поочередно строки и столбы матрицы номером предыдущего пункта на увеличивающем пути от источника к стоку.

Строки *i*, для которых $a_i > 0$, получают пометку 0. Если таких строк нет, текущее распределение поставок оптимально.

Выберем отмеченную строку i и неотмеченные столбцы j, для которых $(i,j)\in I_1$, $x_{ij}<d_{ij}$, пометим номером i. Повторяем, пока не будут исчерпаны все отмеченные строки.

Затем выбираем отмеченный столбец j и все неотмеченные строки i, для которых $(i,j)\in I_1$, $x_{ij}>0$, получают пометку j. Повторяем это до тех пор, пока не будут исчерпаны все отмеченные столбцы.

Продолжаем процесс поочередной метки строк и столбцов до тех пор, пока или

(a) будет помечен некоторый столбец j, у которого $b_j>0$, или

(b) дальнейший процесс метки станет невозможен.

В случае (a) получаем увеличивающий путь $(j,l,j_1,i_1,\ldots,i_{k-1},j_k,i_k)$, где l – пометка столбца j, j_1 – пометка строки l, i_1 – пометка столбца j_1 и так далее, метка строки i_k равна 0. В клетках пути, начиная с (l,j), расставим поочередно знаки + и –. Определим минимальный элемент h множества, состоящего из чисел $d_{ij}–x_{ij}$ для всех положительных клеток, чисел x_{ij} для отрицательных, излишка строки i_k и нехватки столбца j, то есть

$$h=\min\{b_j,d_{l,j}-x_{lj},x_{lj_1},d_{i_1j_1}-x_{i_1j_1},x_{i_1,j_2},\ldots,a_{i_k}\}.$$

Поочередно прибавляя и вычитая h к последовательности x_{lj}, x_{lj_1}, …, $x_{i_kj_k}$, увеличим значение потока на h. Другими словами, перейдем в только что отмеченном столбце к элементу, лежащему в строке, указанной меткой столбца, и прибавим к нему h, потом перейдем в этой стой строке к элементу, определяемому меткой строке, и вычтем из него h, и т.д. Остановимся, как только будет достигнута строка с меткой 0. Уменьшим a_l и b_j на h. Затем повторяем процесс метки.

В конце концов, получим случай (b). Тогда примем за I множество индексов отмеченных строк, за J – множество индексов отмеченных столбцов. Если все излишки и нехватки в таблице равны нулю, текущий поток является оптимальным. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Изменение матрицы

Определяем величины δ_1 – минимальный положительный элемент матрицы стоимостей, лежащий на пересечении отмеченных строк и неотмеченных столбцов, δ_2 – минимальный из модулей отрицательных элементов, лежащих на пересечении непомеченных строк и помеченных столбцов, $\theta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Вычитаем θ из элементов отмеченных строк и прибавляем к элементам отмеченных столбцов. Как уже говорилось, такое преобразование стоимостей не влияет на оптимальное решение задачи.

Все метки удаляем и переходим к шагу 1. Положительные поставки, записанные в старой таблице, остаются и в новой.

Процедура повторяется до тех пор, пока либо не будет найден оптимальный поток, либо будет показано, что задача не имеет решений.

***Особенности работы алгоритма в случае транспортной задачи* (1.8) – (1.11)**. Поскольку ограничения на пропускные способности дуг множества MN отсутствуют, множество $I_1 \bigcap I\bar{J}$ всегда будет оставаться пустым, так как если пункт $i \in M$ помечен, соседний с ним пункт $j \in N$ также может быть помечен исходя из i. Значения всех двойственных переменных γ_{ij} остаются нулевыми во время работы алгоритма, то есть множество дуг I_3 остается пустым. Поэтому при переходе к новым переменным $\theta = \delta_1$.

В процессе расстановки пометок в этом случае метку, исходя из помеченной строки, получает каждый столбец, содержащий допустимую (нулевую) клетку в этой строке. При увеличении потока h определяется как минимум излишка строки i_k, нехватки столбца j, и чисел x_{ij} в отрицательных (четных) клетках увеличивающего пути.

Пример 4.1. Применим венгерский метод для решения задачи из примера 1.2.

Приведение матрицы стоимостей. Константы приведения по строкам равны 8, 4, 3. Вычитая их, получаем матрицу, приведенную по строкам.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 12 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Приводим матрицу по столбцам. Константы приведения равны 0, 0, 1, 1, 4. Получаем редуцированную (приведенную) матрицу.

Решение ограниченной прямой задачи. Составим транспортную таблицу, используя приведенную матрицу стоимостей. Для построения начального потока сначала заполним клетки (2,1) и (2,4), так как это единственные допустимые клетки первого и четвертого столбца. Далее ненулевую поставку получают клетки (1,5), (3,2) и (3,3). Расставляем пометки. Нераспределенный остаток имеется только в третьей строке, она получает метку 0. Содержащие нулевые элементы в третьей строке столбы 2 и 3 помечаются цифрой 3. Других пометок поставить нельзя – текущий поток максимальный (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Ограниченная прямая задача

Станции Хранилища		1 0	2 0	3 0	4 10	5 60	
1	0	7	0	0	2	0 100	
2	0	0 100	6	2	0 50	0	
3	70	3	0 40	0 140	11	13	0
			3	3			

Преобразование таблицы. Минимальный положительный элемент третьей (помеченной) строки равен 3. Вычитаем 3 из элементов третьей строки и прибавляем к элементам второго и третьего столбцов.

Решение ограниченной прямой задачи. Начинаем расстановку меток с потока, полученного на предыдущем этапе. Помечаем строку 3, исходя из нее – столбцы 1, 2 и 3. В первом столбце имеется заполненная нулевая клетка, поэтому соответствующая строка 2 получает метку 1. Исходя из второй строки, помечаем столбец 4, имеющий неудовлетворенный спрос. Согласно пометкам, восстанавливаем увеличивающий путь (2,4), (2,1), (3,1), по которому перераспределяем поставку объемом 10 (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Увеличивающий путь

Станции Хранилища	1 0	2 0	3 0	4 10	5 60	
1 0	7	3	3	2	0 100	
2 0	0 100	9	6	0 50	0	1
3 70	0	0 40	0 140	8	10	0
	3	3	3			

Таблица 4.3

Увеличение потока

Станции Хранилища	1 0	2 0	3 0	4 0	5 60	
1 0	7	3	3	2	0 100	
2 0	0 90	9	6	0 60	0	1
3 60	0 10	0 40	0 140	8	10	0
	3	3	3	2	2	

Снова расставляем пометки. Теперь можем пометить пятый столбец. Восстанавливаем увеличивающий путь (2,5), (2,1), (3,1), (табл. 4.3) по которому сдвигаем поставку объемом 60. Так как в результате излишки всех строк и нехватки всех столбцов стали равны нулю, полученный поток является оптимальным (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Оптимальный поток

Станции Хранилища	1 0	2 0	3 0	4 0	5 0
1 0	7	3	3	2	0 100
2 0	0 30	9	6	0 60	0 60
3 0	0 70	0 40	0 140	8	10

Стоимость полученного решения рассчитывается исходя из первоначальной матрицы стоимостей.

Пример 4.2. Решим с помощью венгерского метода задачу из примера 3.2. Приводим матрицу стоимостей (табл. 4.5).

Решение ограниченной прямой задачи. Заполняем последовательно клетки (4,4), (3,3), (1,2), (2,2) и (2,5). Расставляем пометки (табл. 4.6) и переходим к преобразованию таблицы.

Таблица 4.5

Приведённая матрица

Спрос Предложение		2 **90**	3 **90**	4 **120**	5 60
1	**40**	**0**	**4(10)**	**2(35)**	-
2	**140**	**0**	**2(60)**	**-**	0(30)
3	**90**	**-**	**0**	**-**	7
4	90	-	-	0	3

Таблица 4.6

Первая итерация

Спрос Предложение		2 **0**	3 **0**	4 **30**	5 **30**	
1	**0**	**0** **40**	**4(10)**	**2(35)**	**-**	2
2	**60**	**0** **50**	**2(60)**	**-**	**0(30)** **30**	0
3	**0**	**-**	**0** **90**	**-**	**7**	
4	**0**	**-**	**-**	**0** **90**	**3**	
		2				

Преобразование таблицы. Вычитаем 2 из элементов первой и второй строк и прибавляем к элементам второго столбца (табл. 4.7).

Таблица 4.7

Вторая итерация. Изменение потока

Спрос Предложение		2 **0**	3 **0**	4 **30**	5 **30**	
1	**0**	**0** **40**	**2(10)**	**0(35)**	**-**	2
2	**60**	**0** **50**	**0(60)**	**-**	**-2(30)** **30**	0
3	**0**	**-**	**0** **90**	**-**	**7**	
4	**0**	**-**	**-**	**0** **90**	**3**	
		2	2	1		

Решение ограниченной прямой задачи. Расставляем пометки. В результате найден увеличивающий путь (1,4), (1,2), (2,2). Сдвигаем по нему поставку объемом min{30, 35, 40,60}=30. Снова расставляем пометки и убеждаемся, что текущий поток – максимальный (табл. 4.8).

Таблица 4.8

Вторая итерация. Максимальный поток

Спрос / Предложение		2 **0**	3 **0**	4 **0**	5 **30**	
1	**0**	**0** **10**	**2(10)**	**0(35)** **30**	**-**	2
2	**30**	**0** **80**	**0(60)**	**-**	**-2(30)** **30**	0
3	**0**	**-**	**0** **90**	**-**	**7**	3
4	**0**	**-**	**-**	**0** **90**	**3**	4
		2	2	1		

Таблица 4.9

Третья итерация. Изменение потока

Спрос / Предложение		2 **0**	3 **0**	4 **0**	5 **30**	
1	**0**	**0** **10**	**2(10)**	**0(35)** **30**	**-**	2
2	**30**	**0** **80**	**0(60)**	**-**	**-2(30)** **30**	0
3	**0**	**-**	**0** **90**	**-**	**4**	3
4	**0**	**-**	**-**	**0** **90**	**0**	4
		2	2	1	4	

Таблица 4.10

Третья итерация. Максимальный поток

Спрос / Предложение		2 **0**	3 **0**	4 **0**	5 **25**	
1	**0**	**0** **5**	**2(10)**	**0(35)** **35**	**-**	2
2	**25**	**0** **85**	**0(60)**	**-**	**-2(30)** **30**	0
3	**0**	**-**	**0** **90**	**-**	**4**	3
4	**0**	**-**	**-**	**0** **85**	**0** **5**	
		2	2			

Преобразование таблицы. Вычитаем 3 из элементов пятого столбца.

Решение ограниченной прямой задачи. Расставляем пометки исходя из текущего потока. Восстанавливаем увеличивающий путь (4,5), (4,4), (1,4), (1,2), (2,2) (табл. 4.9). Поток увеличиваем на min{30, 90,5,10,30}=5, снова расставляем пометки. Полученный поток – максимальный (табл. 4.10).

Преобразование таблицы. Вычитаем 4 из элементов помеченных строк и прибавляем к элементам помеченных столбцов.

Решение ограниченной прямой задачи. Расставляем пометки исходя из текущего потока. По увеличивающему пути (3,5), (3,3), (2,3) (табл. 4.11) перераспределяем 25 единиц. В результате излишки строк и нехватки столбцов равны нулю, то есть текущий поток – оптимальный (табл. 4.12).

Таблица 4.11

Четвёртая итерация. Изменение потока

Спрос / Предложение	2 **0**	3 **0**	4 **0**	5 **25**	
1 **0**	**0** **5**	**2 (10)**	**-4 (35)** **35**	**-**	2
2 **25**	**0** **85**	**0 (60)**	**-**	**-6 (30)** **30**	0
3 **0**	**-**	**0** **90**	**-**	**0**	3
4 **0**	**-**	**-**	**0** **85**	**0** **5**	
	2	2		3	

Таблица 4.12

Четвёртая итерация. Максимальный поток

Спрос / Предложение	2 **0**	3 **0**	4 **0**	5 0
1 **0**	**0** **5**	**2 (10)**	**-4 (35)** **35**	-
2 **0**	**0** **85**	**0 (60)** **25**	**-**	-6 (30) 30
3 **0**	**-**	**0** **65**	**-**	0 25
4 0	**-**	-	0 85	0 5

Возвращаемся к исходной таблице (табл. 4.13). Поставки в недиагональных клетках таблицы соответствуют рис. 2.5.

Таблица 4.13

Оптимальный план

	2 **90**	3 **90**	4 **120**	5 60
1 **40**	**3** **5**	**7 (10)**	**5 (35)** **35**	*M*
2 **140**	**0** **85**	**2 (60)** **25**	***M***	1 (30) 30
3 **90**	***M***	**0** **65**	***M***	8 25
4 90	*M*	*M*	0 85	4 5

5. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

5.1. Целочисленность опорных планов

Транспортная задача имеет следующую любопытную особенность, связывающую ее с задачами целочисленного линейного программирования.

Теорема 5.1. *Если все интенсивности* (*объемы производства* a_i *и объемы потребления* b_j) *и верхние границы пропускных способностей* d_{ij} *– целые числа, то среди оптимальных решений транспортной задачи имеется хотя бы одно целочисленное решение – независимо от коэффициентов* c_{ij}.

Доказательство. Этот факт можно установить непосредственно, как следствие известных методов решения транспортной задачи. Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости следующих предложений:

Существует исходный опорный целочисленный план.

При переходе от одного опорного плана к другому целочисленность сохраняется.

Рассмотрим задачу (8) – (11). По построению, начальный опорный план, полученный в результате применения, например, метода северо-западного угла, будет целочисленным. Переход от одного опорного плана к другому в методе потенциалов не может нарушить целочисленности значений x_{ij}, так как в процессе работы значения переменных изменяются на целое число. Ввиду целочисленности предыдущего плана улучшенный план также будет целочисленным. Таким образом, установлено и второе предложение.

Поскольку, действуя методом потенциалов, за конечное число шагов можно получить решение задачи, то утверждение теоремы доказано.

Утверждение теоремы для сетевой транспортной задачи можно доказать аналогично.

Целочисленность решения транспортной задачи была впервые экспериментально подмечена Данцигом при применении симплекс-метода для решения данной задачи. В действительности данное свойство не связано с конкретными вычислительными методами, а имеет гораздо более глубокие причины, вызванные специфической структурой матрицы ограничений соответствующей задачи линейного программирования.

Рассмотрим некоторое многогранное множество $L(b)$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \text{i}=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{5.1}$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ m<n. \tag{5.2}$$

Многогранное множество называется целочисленным, если все его вершины (опорные планы) целочисленны (т.е. все их компоненты – целые числа).

Теорема 5.2. *Пусть* $A=\left(a_{ij}\right)$, i=1,…,*m*, j=1,…,*n* – *фиксированная матрица ранга т, все элементы которой целые числа. Для того, чтобы при любом целочисленном векторе правых частей* $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$ *многогранное множество L(b) было целочисленным, необходимо и достаточно, чтобы любой минор порядка т матрицы A был равен либо 0, либо* ±1.

Доказательство. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — вершина множества (5.1), (5.2) (опорный план). Обозначим через A_σ подматрицу A, составленную из вектор-столбцов базиса опорного плана x, а через x_σ — вектор, составленный из базисных координат x. Тогда $A_\sigma x_\sigma = b$. Решая эту квадратную систему уравнений по правилу Крамера, получаем, что $x_i = |A_i| / |A_\sigma|$, где A_i — матрица, полученная из A_σ заменой столбца a^i на вектор b. Поскольку все элементы матрицы A_i — целые числа, то и число $|A_i|$—целое. С учетом того, что $|A_\sigma| = \pm 1$, получаем утверждение теоремы.

Из теоремы 5.2 непосредственно следует условие целочисленности многогранных множеств $L(b)$, первоначально заданных системой равенств и неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=1,2,\ldots,k, \tag{5.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=k+1,\ldots,m, \tag{5.4}$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,n. \tag{5.5}$$

Здесь a_{ij}, b_i – целые числа.

Запишем условия (5.3) в канонической форме:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i=1,2,\ldots,k,$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,n+k.$$

Ранг матрицы

$$A' = \left(A \mid E'\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} & 0 & \ldots & 1 \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,n} & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

равен m. Имеет место

Теорема 5.3. *Пусть* $A=(a_{ij})$, i=1,2,…,*m*, j=1,2,…,*n*, - *фиксированная матрица, все элементы которой – целые числа. Для того чтобы многогранное множество* (5.3) – (5.5) *было целочисленным при любом целочисленном*

$b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$, достаточно (а в случае $k=m$ и необходимо), чтобы любой минор порядка m-$k,\ldots,\min(m,n)$ матрицы A был равен либо 0, либо ±1.

Доказательство. Квадратная подматрица порядка m матрицы A' может содержать l столбцов матрицы E', $l=\max\{0,m-n\},\ldots,k$. Последовательно разлагая определитель матрицы A'' по этим столбцам, получим $|A''|=\pm|\overline{A}|$где $\overline{A}$ - квадратная подматрица порядка матрицы A, образованная, при $l>0$, пересечением произвольных $m-l$ столбцов матрицы, последних m-k строк и k-l строк, соответствующих ограничениям (5.4). Утверждение теоремы получаем, применяя теорему 5.2.

Матрица A, все миноры которой равны либо 0, либо ±1, называется *унимодулярной* матрицей.

Лемма 5.1. *Матрицы условий* (1.4), (1.3) *и* (1.9), (1.10) *транспортных задач являются унимодулярными.*

Доказательство. Любая квадратная подматрица A' матрицы A ограничений (1.4) сетевой транспортной задачи обладает следующими свойствами:

Каждый элемент матрицы A' равен либо 0, либо 1; каждый столбец содержит не более двух ненулевых элементов; если два ненулевых элемента лежат в одном столбце матрицы A', то эти элементы 1 и (–1).

Покажем, что значение каждого минора матрицы A равно 0, 1, —1.

Проведем доказательство индукцией по порядку квадратных $l\times l$ матриц A'. Для $l = 1$ утверждение совпадает с первым свойством подматрицы. Пусть утверждение верно для квадратных матриц порядка l—1 и пусть A'— квадратная матрица порядка l.

Если каждый столбец матрицы A' имеет ровно два ненулевых элемента, то из третьего свойства вытекает, что сумма строк матрицы равна нулевому вектору, то есть строки матрицы A' линейно зависимы, и $|A'| = 0$. Если в некотором столбце все элементы равны нулю, то вновь $|A'|=0$. Остается рассмотреть случай, когда в каком-либо столбце матрицы имеется ровно один ненулевой элемент. Разложим определитель матрицы A' по этому столбцу. Тогда $|A'| =\pm|\overline{A}|$, где $\overline{A}$ — подматрица порядка l–1, получаемая вычеркиванием в матрице выделенного столбца и строки, содержащей ненулевой элемент этого столбца. По индуктивному предположению $|\overline{A}|= 0, \pm1$, откуда и имеем $|A'| =0, \pm1$.

Унимодулярность матрицы системы ограничений (1.9), (1.10) доказывается аналогично.

Рассмотрим, наконец, матрицу системы ограничений (1.4), (1.3), имеющую вид $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$, где A – унимодулярная матрица системы ограничений (1.4). Пусть A' – некоторая квадратная подматрица, содержащая элементы матрицы E. Тогда либо в A' имеются нулевые строки, тогда $|A'| =0$, либо последовательно разлагая определитель матрицы A' по строкам, содержащим один ненулевой элемент, получим, что $|A'| = \pm|\overline{A}|$, где $\overline{A}$ — подматрица матрицы A.

Целочисленность опорных планов транспортных задач является, таким образом, следствием теоремы 5.3. Используя ее доказательство, можно убедиться также в справедливости следующего утверждения:

Лемма 5.2. *Каждая перевозка* x_{ij} *любого опорного плана транспортной задачи* (1.1), (1.3), (1.4) *является линейной комбинацией чисел* s_i, d_{ij} *с коэффициентами* 0, ±1.

Из леммы вытекает, что в условиях теоремы 5.1 *любой опорный план транспортной задачи состоит из целочисленных перевозок.*

Построим пример оптимального нецелочисленного решения. Пусть $X_1 = \left(x_{ij}^{(1)}\right)$ и $X_2 = \left(x_{ij}^{(2)}\right)$ – разные оптимальные целочисленные решения некоторой транспортной задачи. Рассмотрим план $X_3=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$, т.е. $x_{ij}^{(3)} = \lambda x_{ij}^{(1)} + (1-\lambda)x_{ij}^{(2)},\ 0 \le \lambda \le 1$. В соответствии со свойствами задач линейного программирования план X_3 является оптимальным решением задачи.

Поскольку $X_1 \neq X_2$, то существуют такие значения $x_{ij}^{(1)}$ и $x_{ij}^{(2)}$, что $x_{ij}^{(1)} \neq x_{ij}^{(2)}$. Пусть $x_{ij}^{(1)} > x_{ij}^{(2)}$. Тогда при изменении λ от 0 до 1 значение $x_{ij}^{(3)}$ изменяется от $x_{ij}^{(2)}$ до $x_{ij}^{(1)}$. При значении $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{x_{ij}^{(1)} - x_{ij}^{(2)} - 1/2}{x_{ij}^{(1)} - x_{ij}^{(2)}}$ имеем

$$x_{ij}^{(3)}(\lambda_0) = \lambda_0 x_{ij}^{(1)} + (1-\lambda_0)x_{ij}^{(2)} = x_{ij}^{(1)} - \frac{1}{2},$$

то есть оптимальное решение X_3 целочисленным не является.

5.2. Венгерский метод для задачи о назначениях

Рассмотрим следующую задачу, называемую задачей о назначениях.

Пусть имеется n работ и n кандидатов (возможных исполнителей работ), причем назначение кандидата i на работу j требует затрат $c_{ij} \ge 0$. Требуется так распределить кандидатов по работам, чтобы суммарные затраты были минимальными, при этом каждого кандидата можно назначить только на одну работу и каждая работа может быть занята только одним кандидатом.

Приведем комбинаторную постановку задачи. Каждое назначение может быть описано подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

в первой строке – номера кандидатов, во второй – номера работ, на которые они назначены; вторая строка есть перестановка элементов первой строки.

Обозначим множество подстановок через P, $|P|=n!$. Для каждой подстановки $p \in P$ можно вычислить затраты $\sum_{i=1}^{n} c_{ip_i}$; требуется найти

$$\min_{p \in P} \sum_{i=1}^{n} c_{ip_i} .$$

Приведем формулировку задачи на языке целочисленного программирования. Введем переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если кандидат } i \text{ назначается на работу } j, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (5.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i=1,2,\ldots,n, \qquad (5.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j=1,2,\ldots,n, \qquad (5.8)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ i,j=1,2,\ldots,n. \qquad (5.9)$$

Ограничения (5.7) необходимы для того, чтобы каждый кандидат выполнял ровно одну работу. Ограничения (5.8) гарантируют, что каждая работа назначена точно одному исполнителю.

Допустимое решение задачи (5.6) – (5.9) называется *назначением* и может быть представлено nхn матрицей $X=(x_{ij})$ из нулей и единиц. Для построения назначения нужно выбрать ровно по одному элементу в каждой строке и каждом столбце матрицы X и положить их равными 1, все остальные элементы матрицы X равны нулю.

В задаче о назначениях вместо условия (5.9) запишем условие

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (5.10)$$

Получим транспортную задачу вида (1.8) – (1.11), у которой $m=n$, исполнители соответствуют пунктам производства, работы – пунктам потребления, а все величины спроса и предложения равны 1.

Согласно теореме 5.1, эта задача имеет оптимальное целочисленное решение. Поэтому задачу о назначениях можно считать частным случаем транспортной задачи.

Можно было бы считать, что изначально количество исполнителей не равно количеству работ и высказать задачу в смешанной форме с равенствами и неравенствами, требуя, чтобы каждая работа выполнялась не более чем одним кандидатом или чтобы ни один исполнитель не был назначен более чем на одну работу. Прежде чем решать такую задачу необходимо ликвидировать дисбаланс, добавив фиктивные работы или кандидатов соответственно.

Иногда предполагается, что c_{ij} – не затраты, а эффективность выполнения кандидатом i работы j. В этом случае назначение должно быть таким, чтобы суммарная эффективность была максимальной. Переход к эквивалентной задаче на минимум осуществляется точно так же, как и в случае транспортной задачи – все элементы матрицы стоимостей следует умножить на (–1) и сложить их с достаточно большим числом так, чтобы новая матрица не содержала бы отрицательных элементов.

Задачу о назначениях можно эффективно решить точно так же, как и транспортную задачу. Однако при применении, например, метода потенциалов, следует учитывать ее вырожденность (согласно теореме 2.3).

Остановимся на особенностях применения венгерского метода, первоначально разработанного именно для задачи о назначениях.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение. Пусть $G=[S \cup T, D]$ – двудольный граф. Множество узлов графа такое, что каждая дуга из D инцидентна хотя бы одному узлу из этого множества, называется S, T – рассекающим множеством узлов.

Теорема 5.4 (Кёниг – Эгервари). *Максимальное число дуг двудольного графа G, попарно не имеющих общих узлов, равно минимальному числу узлов в некотором S, T –рассекающем множестве узлов.*

Доказательство. Присоединим к рассматриваемой сети узлы s и t и множества дуг (s,S) и (T,t). Для получившейся сети определим функцию пропускной способности формулами

$$d_{si}=1,\ i \in S,$$
$$d_{it}=1,\ i \in T,$$
$$d_{ij}=\infty,\ (i,j) \in D.$$

Из теоремы Форда - Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе следует, что разрез $(I,\bar{I})$, разделяющий s и t, является минимальным тогда и только тогда, когда в любом максимальном потоке $X=(x_{ij})$ из s в t $x_{ij}=d_{ij}$ для всех дуг разреза $(I,\bar{I})$, $x_{ij}=0$ для дуг разреза $(\bar{I},I)$.

Пусть X – произвольный целочисленный максимальный поток и $(I,\bar{I})$ – какой-либо минимальный разрез, разделяющий s и t. Тогда, так как величина потока конечна, разрез состоит из дуг вида (s,i), где $i \in S \cap \bar{I}$ и (i,t), где $i \in T \cap I$. Поэтому множество $V=(S \cap \bar{I}) \cup (T \cap I)$ является S, T-рассекающим и его узлы находятся во взаимно однозначном соответствии с дугами разреза $(I,\bar{I})$.

Согласно свойству сохранения потока, дуги множества $Y=\{(i,j) \in D : x_{ij}=1\}$ попарно не имеют общих узлов. Число элементов множества Y равно величине потока X и, следовательно, числу элементов множества V. Поскольку максимальное число дуг графа G, попарно не имеющих общих узлов, очевидно, меньше или равно минимальному числу узлов в любом S, T-рассекающем множестве, теорема доказана.

Доказательство теоремы содержит способ построения минимального S, T –рассекающего множества узлов, если известен некоторый минимальный разрез, разделяющий источник и сток во вспомогательной сети. С другой стороны, пользуясь заданным минимальным рассекающим множеством V, можно определить минимальный разрез $\left(I, \bar{I}\right)$, положив

$$I = \{s\} \cup \left(S \setminus V\right) \cup \left(T \cap V\right). \tag{5.11}$$

Иногда теорему Кёнига - Эгервари формулируют в терминах таблиц размера m на n, содержащих клетки двух видов, скажем допустимые и недопустимые. Строки и столбцы такой таблицы назовем общим термином «ряд».

Множество рядов *покрывает* допустимые клетки данной таблицы, если каждая допустимая клетка содержится хотя бы в одном ряду из этого множества.

Множество допустимых клеток *независимо*, если никакие его две клетки не лежат в одном и том же ряду.

Для двудольного графа G такого, что $|S|=m$, $|T|=n$, в таблице размера $m\times n$ допустимыми считаются клетки, соответствующие дугам графа. Из построения таблицы видно, что понятие «независимого множества допустимых клеток» («покрывающего множества рядов») в точности соответствует понятию «множества дуг, попарно не имеющих общих узлов» («S, T-рассекающего множества узлов»). Поэтому теорема 5.4 принимает вид:

Максимальное число независимых допустимых клеток равно минимальному числу рядов, покрывающих все допустимые клетки.

Венгерский алгоритм

Во время работы прямо-двойственного алгоритма каждая ограниченная прямая задача сводится к задаче о максимальном потоке в сети, аналогичной использованной при доказательстве теоремы 5.4. Поэтому для решения каждой такой задачи нужно построить максимальное множество допустимых дуг, попарно не имеющих общих узлов. Для перехода к новому решению двойственной задачи достаточно знать, однако, не сам максимальный поток, а его величину и некоторый минимальный разрез. Согласно теореме 5.4, для этого можно найти минимальное S, T – рассекающее множество узлов V и воспользоваться формулой (5.11).

Матричная форма венгерского метода для задачи о назначениях примет, с учетом сделанных замечаний, следующий вид.

Шаг 1. *Приведение матрицы стоимостей.*

Шаг 2. *Определение назначений.*

Требуется построить максимальное множество независимых клеток в транспортной таблице (максимальный поток), используя, например, процесс расстановки пометок.

Для упрощения вычислений можно поступить следующим образом.

Найти строку или столбец, содержащую ровно один нулевой элемент (допустимую клетку). Заполнить эту клетку (произвести назначение), вычеркнуть соответствующие строку и столбец. Повторить эту операцию пока остаются строки или столбцы, содержащие одну допустимую клетку.

В результате либо допустимых клеток не останется, либо придем к квадратной матрице меньшего размера. При увеличении потока h=1, то есть в клетках увеличивающего пути поочередно ставим и убираем единицу.

Если построенное назначение полное (вычеркнуты все элементы матрицы), то, в силу неотрицательности стоимостей в редуцированной матрице, оно является оптимальным.

Если нельзя найти полного назначения, перейти к шагу 3.

Шаг 3. *Модификация матрицы.*

В транспортной таблице найти минимальное множество рядов, покрывающих все допустимые клетки. Для этого можно, например, поочередно вычеркивать ряды, содержащие максимальное число нулей.

Если на шаге 2 использовался процесс расстановки пометок, то вычеркнуть следует непомеченные строки и помеченные столбцы.

Найти наименьший невычеркнутый элемент, вычесть его из всех невычеркнутых элементов и прибавить к элементам, стоящим на пересечении вычеркнутых рядов.

Перейти к шагу 2.

***Пример* 5.1.** Эффективность работы пяти продавцов на пяти торговых точках задается матрицей на рис. 5.1а. Найти оптимальное назначение продавцов на работу.

4	6	16	3	8
3	9	8	10	5
6	13	21	4	15
3	16	23	1	2
9	2	22	7	2

а)

19	17	7	20	15
20	14	15	13	18
17	10	2	19	8
20	7	0	22	21
14	21	1	16	21

б)

Рис. 5.1. Задача о назначениях

Имеем задачу о назначении, в которой следует максимизировать целевую функцию. Положим $c'_{ij} = 23 - c_{ij}$. Получаем матрицу на рис. 5.2б.

Приведение матрицы стоимостей. Результат приведения, вообще говоря, зависит от того, приводится в первую очередь матрица по строкам или по столбцам. Так как целевая функция задачи, двойственной к задаче о назначении, представляет собой сумму двойственных переменных (констант приведения), лучшей будет приведенная матрица, сумма констант приведения для которой больше.

Приведем матрицу стоимостей сначала по строкам, затем по столбцам. Получим редуцированную матрицу, сумма констант приведения которой равна 36 (рис. 5.2). Приведем теперь матрицу стоимостей сначала по столбцам, а затем по строкам (рис. 5.3), сумма констант приведения равна 47. Эту матрицу и используем для дальнейшей работы.

19	17	7	20	15	7
20	14	15	13	18	13
17	10	2	19	8	2
20	7	0	22	21	0
14	21	1	16	21	1

12	10	0	13	8
7	1	2	0	5
15	8	0	17	6
20	7	0	22	21
13	20	0	15	20
7	1	0	0	5

5	9	0	13	3
0	0	2	0	0
8	7	0	17	1
13	6	0	22	16
6	19	0	15	15

Рис. 5.2. Приведение матрицы стоимостей, первый способ

19	17	7	20	15
20	14	15	13	18
17	10	2	19	8
20	7	0	22	21
14	21	1	16	21
14	7	0	13	8

5	10	7	7	7	5
6	7	15	0	10	0
3	3	2	6	0	0
6	0	0	9	13	0
0	14	1	3	13	0

0	5	2	2	2
6	7	15	0	10
3	3	2	6	0
6	0	0	9	13
0	14	1	3	13

Рис. 5.3. Приведение матрицы стоимостей, второй способ

Определение назначений. В столбцах 4, 5 и строке 5 находится по одной допустимой клетке и эти клетки независимы. Четвертый нулевой элемент можно отметить либо во втором, либо в третьем столбце. Полученное множество независимых клеток, очевидно, максимально.

0	5	2	2	2
6	7	15	$\underline{0}$	10
3	3	2	6	$\underline{0}$
6	$\underline{0}$	0	9	13
$\underline{0}$	14	1	3	13

0	5	2	2	2
6	7	15	0	10
3	3	2	6	0
6	0	0	9	13
0	14	1	3	13

$\underline{0}$	4	1	2	2
6	6	14	$\underline{0}$	10
3	2	1	6	$\underline{0}$
7	$\underline{0}$	0	10	12
0	13	$\underline{0}$	3	13

Рис. 5.4. Решение задачи

Модификация матрицы. Минимальное число рядов, покрывающее все допустимые клетки, равно четырем, вычеркиваем их. Минимальный невычеркнутый элемент равен 1, вычитаем 1 из невычеркнутых элементов и прибавляем 1 к элементам на пересечении четвертой строки и первого, четвертого, пятого столбцов.

В полученной таблице существует полное назначение, которое и будет оптимальным (рис. 5.4). Таким образом, первый продавец назначается на первую торговую точку, второй – на четвертую, третий – на пятую, четвертый – на вторую, на третьей торговой точке будет работать пятый продавец.

6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите леммы 1.1 – 1.5.

2. Сформулируйте вспомогательную задачу поиска начального допустимого потока в сетевой транспортной задаче как задачу линейного программирования.

3. Решите задачу из примера 3.1.

4. ([1]) На трех ж/д станциях A1, A2, A3 скопилось 120, 110 и 130 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо наиболее экономичным способом переправить на 5 других станций B1, B2, B3, B4, B5, потребность в вагонах на которых равна 80, 60, 70, 100, 50 соответственно. С A2 не представляется возможным переправить вагоны на B2 и B4. Тарифы перевозки вагонов заданы в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Упражнение 4

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	2	4	1	6	7
A2	3	3	5	4	2
A3	8	9	6	3	4

5. ([12]) Три нефтеперегонных завода с ежедневной производительностью 6, 5 и 8 млн галлонов бензина снабжают три бензохранилища, ежедневная потребность которых составляет 4, 8 и 4 млн галлонов соответственно. Стоимость транспортировки составляет 10 центов за 1000 галлонов на 1 милю длины трубопровода. Расстояния в милях – в табл. 6.2. Избыток продукции первый и второй заводы могут направить на другие хранилища, расходы на транспортировку 100 галлонов составят тогда 1.5 и 2.2 долл. соответственно. Третий завод может использовать излишки для собственных нужд. Найти оптимальную схему транспортировки.

Таблица 6.2

Упражнение 5

заводы	хранилища		
	120	180	–
	300	100	80
	200	250	120

6. ([10]) Строительный песок добывается в трех карьерах с производительностью в день 46, 34 и 40 т. соответственно. Затраты на добычу одной тонны песка составляют 1, 2 и 3 руб. соответственно. Песок доставляется на четыре строительных площадки, потребность которых составляет 40, 35, 30 и 45 т. Транспортные расходы на перевозку одной тонны песка заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

а) Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за карьерами, если штраф за недопоставку песка на четвертую площадку составляет 1 у.е. за тонну.

б) Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за карьерами при условии, что потребности четвертой строительной площадки должны быть удовлетворены полностью.

в) Пусть недостающее количество песка можно обеспечить, увеличивая производительность либо первого, либо второго карьера. Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за карьерами и оптимальный вариант расширения поставок песка.

7. ([12]) Электрическая компания Вайоминга транспортирует по трубопроводам угольную пульпу от трех шахт к трем электростанциям. Каждый трубопровод может транспортировать не более 10 тонн пульпы в час. Стоимость транспортировки одной тонны пульпы (в долл.), а также предложение шахт и спрос электростанций представлены в табл. 6.3

Таблица 6.3

Упражнение 7

Спрос Предложение	16	6	14
8	5	8	4
10	6	9	12
18	3	1	5

Найдите оптимальную схему транспортировки угля к электростанциям.

8. ([12]) Разрабатывается 4-этапный план производства некоего продукта согласно следующим данным (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Упражнение 8

Этап	Объем спроса	Стоимость единицы продукции	Стоимость хранения единицы продукции
1	100	24	1
2	110	26	2
3	95	21	1
4	125	24	2

а) Определить объем производства продукции на каждом этапе, предполагая, что заказы нельзя выполнять «задним числом».

б) Определить объем производства продукции на каждом этапе, если возможна недопоставка продукции со штрафом 1,5 долл. за единицу продукции при задержке в течение одного этапа.

в) Решить предыдущую задачу при дополнительном условии, что производственные возможности каждого из четырех этапов составляют соответственно 110, 95, 125 и 100 единиц продукции, что не позволяет выполнить все заказы (без недопоставок продукции) в срок.

9. ([12]) Агентство по найму рабочей силы получило заказ на рабочих на 5 месяцев вперед согласно следующему графику (табл. 6.5).

Таблица 6.5

Упражнение 9, график

Месяц	1	2	3	4	5
К-во рабочих	100	120	80	170	50

Поскольку спрос на рабочих различен в разные месяцы, возможно, экономически целесообразно нанять больше рабочих, чем требуется, в текущем месяце. Стоимость найма рабочих и удержания их в «ждущем режиме» зависит от времени трудоустройства, как показано в табл. 6.6.

Таблица 6.6

Упражнение 9, стоимости

Длительность периода трудоустройства (месяцы)	1	2	3	4	5
Стоимость трудоустройства одного рабочего (долл.)	100	130	180	220	250

Определите количество рабочих, нанятых в каждый месяц.

10. Задача о поставщике ([13]). Поставщику нужно поставлять r_i салфеток, i=1,…,N, в течение N последовательных дней. Поставщик может либо покупать новые салфетки по p центов за каждую, либо отдавать использованные салфетки в стирку. В прачечной имеется два вида обслуживания. Срочная стирка занимает m дней и стоит q центов за салфетку, обычная стирка занимает $n>m$ дней и стоит $v<q$ центов за салфетку. В конце каждого дня поставщик должен решить, сколько грязных салфеток послать в срочную стирку, сколько стирать в обычном режиме и сколько ликвидировать. Потребность r_i на любой день покрывается теми чистыми салфетками, которые можно получить из прачечной, плюс новые салфетки, которые необходимо докупить. Пусть вначале у поставщика нет салфеток. Как ему удовлетворить потребность в салфетках с минимальными расходами?

Сформулируйте эту задачу как задачу о потоке минимальной стоимости.

Решите задачу при N=3, r_1=3, r_2=2, r_3=4, m=1 (салфетки, посланные в срочную прачечную, готовы на следующий день), n=2, p=10, q=6 и v=3.

11. ([12]) Химическая компания владеет двумя заводами, которые производят химические компоненты для двух клиентов; потребности этих клиентов составляют 660 и 800 тонн продукции ежемесячно. Первый завод может производить от 400 до 800 тонн, а второй – от 450 до 900 тонн продукции ежемесячно. На первом заводе расходы на производство одной тонны продукции составляют 25, на втором – 28 долл. Сырье для заводов поставляют два поставщика, которые могут поставить не менее 500 тонн сырья по цене 200 долл. за тонну первому заводу и не менее 750 тонн по цене 210 долл. второму заводу. Химическая компания предполагает самостоятельно транспортировать и сырье, и готовую продукцию. Стоимость транспортировки одной тонны сырья от первого поставщика к заводам составляет 10 долл. для первого завода и 12 долл. – для второго. Аналогичные стоимости перевозок от второго поставщика равны 9 и 13 долл. соответственно. Стоимость перевозки одной тонны продукции от первого завода к клиентам 1 и 2 составляет 3 и 4, от второго завода – 5 и 2 долл. соответственно. Допустим, из одной тонны сырья можно получить одну тонну готовой продукции. Сформулируйте задачу в виде сетевой модели и найдите ее решение.

12. ([12]) Авиакомпания выполняет полеты между городами А и В согласно расписанию, приведенному в таблице. Рейсы могут обслуживаться экипажами из городов А или В. Любой экипаж выполняет пару рейсов – «туда и обратно» (табл. 6.7). Время, необходимое для подготовки самолета к очередному рейсу - 90 минут. Составьте расписание назначения экипажей на рейсы, минимизирующее суммарное время простоев всех экипажей (не включающее время подготовки самолета к рейсу).

Таблица 6.7

Упражнение 12

Рейс	Отлет из А	Прилет в В	Рейс	Отлет из В	Прилет в А
А1	6.00	8.30	В1	7.30	9.30
А2	8.15	10.45	В2	9.15	11.15
А3	13.30	16.00	В3	16.30	18.30
А4	15.00	17.30	В4	20.00	22.00

13. ([12]) Дана задача распределения четырех рабочих по четырем видам работ. Стоимость работ приведена в табл. 6.8.

Таблица 6.8

Упражнение 13

Рабочие	Виды работ			
	1	2	3	4
1	50	50	–	20
2	70	40	20	30
3	90	30	50	–
4	70	20	60	70

а) Найти оптимальное решение.

б) Будет ли выгодным заменить одного из рабочих новым, выполняющим работы со стоимостью, соответственно, 60, 45, 30 и 80 у.е.?

в) Предположим, необходимо ввести новый вид работы, который может выполнять любой из рабочих со стоимостью 20, 10, 20 и 80 у.е. соответственно. Будет ли новая работа более выгодной по сравнению с имеющимися?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 319с.
2. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с.
3. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 340 с.
4. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования: Задачи транспортного типа. – М.: ЛИБРОКОМ, 2010. – 184 с.
5. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и приложения. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
6. Ермольев Ю.М., Мельник И.М. Экстремальные задачи на графах. — Киев: Наукова думка, 1968. — 172 с.
7. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
8. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. — СПб: Питер, 2000. — 208 с.
9. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
10. Мастяева И.Н. Математические методы и модели в логистике.– М.: Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2000. – 55с.
11. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1984. – 512 с.
12. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – 7-е изд.: Пер. с англ. – М: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
13. Форд Л.Р, Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1963. – 276 с.
14. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 516 с.

Алла Александровна **Тюхтина**

Математические модели логистики

Транспортная задача

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.