

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского**

МАЯТНИК ОБЕРБЕКА

Практикум

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальностям 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 10.05.07 «Противодействие техническим разведкам», 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

Нижний Новгород
2020

УДК 531.3+531.5 (076.5)
ББК 22.213я73-5
М-39

Рецензент: д.ф.-м.н. **О.И. Канаков**

М-39 МАЯТНИК ОБЕРБЕКА: Составитель: Анисимов Е.И. Практикум.
– Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 9 с.

В лабораторной работе исследуется вращательное движение твердого тела на примере маятника Обербека.

Практикум предназначен для студентов I курса радиофизического факультета, выполняющих работы в лабораториях общего практикума кафедры общей физики.

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии радиофизического
факультета ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 531.3+531.5 (076.5)
ББК 22.213я73-5

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2020

Введение

Маятник Обербека представляет собой вращающийся в вертикальной плоскости маховик со шкивом и четырьмя спицами, приводимый в движение с помощью груза, прикрепленного нитью к шкиву. На спицах можно закреплять тяжелые цилиндры одинаковой массы. Устанавливая их на разных расстояниях от оси вращения, можно изменять момент инерции маховика. Вначале, вращая маховик, наматывают нить на шкив, после чего отпускают маятник, и груз под действием силы тяжести опускается, раскручивая маховик. Достигнув нижнего положения, груз затем поднимается вверх за счет кинетической энергии вращающегося маховика, проходя при этом несколько меньшее расстояние, чем при движении вниз. Если маятник не зафиксировать в тот момент, когда груз находится в верхнем положении, груз снова начнет опускаться, вращая маховик в обратную сторону.

В данной работе на примере маятника Обербека исследуется вращательное движение твердого тела: проводятся измерения движения маятника, на основании экспериментальных данных вычисляется момент инерции его маховика, проверяются основные законы вращательного движения.

Динамика маятника Обербека

Рассмотрим систему, состоящую из маховика, движущегося вниз груза и нити, соединяющей груз и шкив маховика. Для описания движения такой системы будем использовать второй закон Ньютона для груза и уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси для маховика. Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось x (см. рис. 1) имеет вид

$$ma_x = mg - T, \quad (1)$$

где m – масса груза, a_x – проекция его ускорения на ось x , mg и T – модули действующих на него силы тяжести и силы натяжения нити. Уравнение вращательного движения для маховика относительно горизонтальной оси z , проходящей через его центр (см. рис. 1), можно записать так

$$I_z \beta_z = M_z - M_{\text{тр}}, \quad (2)$$

здесь I_z – момент инерции маховика относительно оси z , β_z и M_z – проекции на эту ось углового ускорения маховика и момента действующей на маховик силы натяжения нити \vec{T}' , а $M_{\text{тр}}$ – модуль суммарного момента сил трения, действующих на

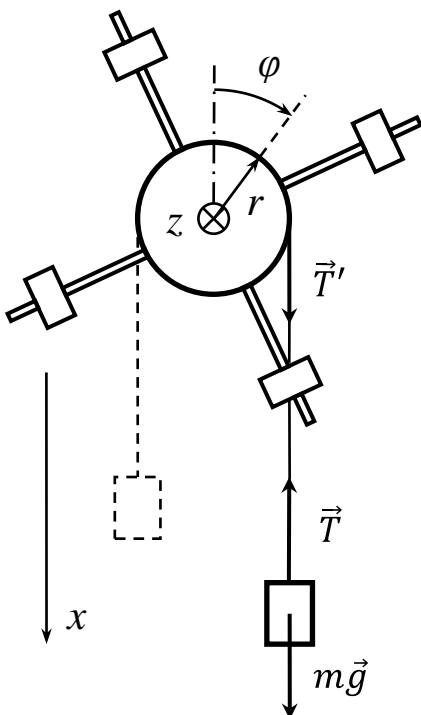


Рис. 1

маховик со стороны его подшипников и воздуха. Момент силы \vec{T}' выразим через ее модуль и радиус шкива r :

$$M_Z = T'r, \quad (3)$$

Будем считать нить нерастяжимой и невесомой, тогда

$$a_X = \beta_Z r, \quad (4)$$

$$T = T'. \quad (5)$$

Предполагая момент трения постоянным, можно решить систему уравнений (1) – (5) и найти угловое ускорение маховика при опускании груза, которое обозначим как β_{Z1} ,

$$\beta_{Z1} = \frac{mgr - M_{\text{тр}}}{I_Z + mr^2}. \quad (6)$$

Отметим, что при постоянном моменте трения угловое ускорение также будет постоянным. Однако в общем случае момент силы трения может зависеть от скорости вращения маховика и от его угла поворота, и решение системы уравнений (1) – (5) представляет собой более сложную задачу.

Зависимость угловой скорости вращения маховика от времени $\omega_Z(t)$ можно получить интегрированием ускорения, а зависимость от времени его угла поворота $\varphi(t)$ – интегрированием угловой скорости:

$$\omega_Z(t) = \omega_Z(t_0) + \int_{t_0}^t \beta_Z(t') dt', \quad \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \omega_Z(t') dt'. \quad (7)$$

Для постоянного значения углового ускорения и начальных условий, соответствующих движению груза вниз из состояния покоя,

$$t_0 = 0, \quad \omega_Z(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad (8)$$

находим зависимости угловой скорости и угла от времени:

$$\omega_Z(t) = \beta_{Z1} t, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2} \beta_{Z1} t^2. \quad (9)$$

В некоторый момент t_1 груз достигнет нижнего положения, а угловая скорость и угол поворота маховика примут значения, которые обозначим ω_{Z1} и φ_1 . При этом маховик продолжит свое вращение за счет накопленной кинетической энергии и будет наматывать нить на шкив, поднимая груз.

Угловое ускорение маховика при подъеме груза можно найти так же, как и при его опускании. Однако когда груз проходит нижнее положение, маховик, вращаясь в прежнем направлении, перебрасывает нить с одной стороны шкива на другую (на рис. 1 нить и груз во время подъема показаны пунктиром). При этом в кинематической связи ускорений маховика и груза меняется знак, а момент силы натяжения нити изменяет свое направление на

противоположное. Следовательно, выражения (3) и (4) при движении груза вверх принимают вид:

$$M_Z = -Tr, \quad (10)$$

$$a_X = -\beta_Z r, \quad (11)$$

Угловое ускорение β_Z будет иметь при подъеме груза новое значение β_{Z2} ,

$$\beta_{Z2} = -\frac{mgr + M_{\text{тр}}}{I_Z + mr^2}. \quad (12)$$

Тогда для нахождения зависимостей от времени угловой скорости и угла поворота необходимо определить новые начальные условия в уравнениях (7).

При прохождении груза через нижнее положение происходит резкое увеличение натяжения нити – рывок. Данный процесс аналогичен неупругому удару и приводит к потере кинетической энергии. В результате угловая скорость скачком меняется и к началу подъема груза принимает значение ω_{Z0} . Однако угол поворота является непрерывной функцией времени, поэтому при рывке не он изменяется и в начале подъема равен φ_1 . Следовательно, новые начальные условия выглядят так:

$$t_0 = t_1, \quad \omega_Z(t_1) = \omega_{Z0}, \quad \varphi(t_1) = \varphi_1. \quad (13)$$

Подставляя эти начальные условия и угловое ускорение (12) в уравнения (7), получим зависимости угловой скорости и угла поворота от времени при движении груза вверх:

$$\omega_Z(t) = \beta_{Z2}(t - t_1) + \omega_{Z0}, \quad (14)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta_{Z2}(t - t_1)^2 + \omega_{Z0}(t - t_1) + \varphi_1. \quad (15)$$

Поскольку $\beta_{Z2} < 0$, угловая скорость убывает и в какой-то момент станет равной нулю. Затем, если маятник не будет остановлен, груз снова начнёт опускаться, вращая маховик в обратную сторону.

Экспериментальное определение момента инерции и момента сил трения

Обозначим момент остановки маятника при достижении грузом верхнего положения как t_2 , а соответствующий угол поворота как φ_2 . Полагая значения t_1 и t_2 , φ_1 и φ_2 известными из экспериментальных данных, подставим их в выражения (9), (14) и (15) и получим систему уравнений относительно неизвестных ω_{Z1} и ω_{Z0} , β_{Z1} и β_{Z2} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{z1} = \beta_{z1} t_1 \\ \varphi_1 = \frac{1}{2} \beta_{z1} t_1^2 \\ 0 = \beta_{z2} (t_2 - t_1) + \omega_{z0} \\ \varphi_2 = \frac{1}{2} \beta_{z2} (t_2 - t_1)^2 + \omega_{z0} (t_2 - t_1) + \varphi_1 \end{array} \right. \quad (16)$$

Из этой системы следует, что

$$\omega_{z1} = \frac{\varphi_1}{2t_1}, \quad (17)$$

$$\omega_{z0} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2(t_2 - t_1)}, \quad (18)$$

$$\beta_{z1} = \frac{\varphi_1}{2t_1^2}, \quad (19)$$

$$\beta_{z2} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2(t_2 - t_1)^2}. \quad (20)$$

В данной работе углы поворота маховика φ_1 и φ_2 вычисляются через их кинематическую связь с координатами груза в начальном, нижнем и конечном положении – x_0 , x_1 и x_2 , соответственно, отсчитываемыми по закреплённой под кронштейном маховика линейке:

$$\varphi_1 = \frac{x_1 - x_0}{r}, \quad \varphi_2 = \frac{2x_1 - x_0 - x_2}{r}. \quad (21)$$

С учетом этих соотношений выражения (17) – (20) примут вид:

$$\omega_{z1} = \frac{x_1 - x_0}{2rt_1}, \quad (22)$$

$$\omega_{z0} = \frac{x_1 - x_2}{2r(t_2 - t_1)}, \quad (23)$$

$$\beta_{z1} = \frac{x_1 - x_0}{2rt_1^2}, \quad (24)$$

$$\beta_{z2} = -\frac{x_1 - x_2}{2r(t_2 - t_1)^2}, \quad (25)$$

Формулы для вычисления момента инерции маховика I_Z и момента сил трения $M_{\text{тр}}$ по известным значениям углового ускорения β_{z1} и β_{z2} можно получить из выражений (6) и (12):

$$I_z = \frac{2mgr}{\beta_{z1} - \beta_{z2}} - mr^2, \quad (26)$$

$$M_{\text{тр}} = mgr \frac{\beta_{z1} + \beta_{z2}}{\beta_{z2} - \beta_{z1}}. \quad (27)$$

Необходимые для вычислений величины r и m могут быть измерены при выполнении эксперимента, а величина ускорения свободного падения g взята с необходимой точностью из справочной литературы.

Задание

1. Экспериментально определить момент инерции маховика:

- а) без цилиндрических грузов на спицах;
- б) с грузами, закрепленными у оснований спиц;
- в) с грузами, закрепленными на середине спиц;
- г) с грузами, закрепленными на концах спиц.

По результатам этих опытов найти зависимость момента инерции грузов от их расстояния до оси вращения.

Для этого закрепите цилиндрические грузы в требуемом положении, определите с помощью штангенциркуля расстояние от центров грузов до оси вращения маховика. Вращая маховик, поднимите висящий на нити груз к верхнему концу закрепленной под кронштейном линейки, зафиксируйте начальное значение координаты груза x_0 . Удобно начальное положение груза устанавливать одно и то же во всех опытах. Отпустите маховик, с помощью секундомера определите моменты t_1 и t_2 , зафиксируйте координату x_2 груза в конце подъема. Для каждого пункта задания повторите измерения трижды. Координата x_1 нижнего положения груза определяется длиной нити, поэтому ее можно измерять только два раза – в начале работы и в конце, для того чтобы убедиться, что нить не растянулась во время эксперимента. Вычислите момент инерции маховика. Момент инерции грузов можно найти как разность моментов инерции маховика с грузами и без них.

2. Считая цилиндрические грузы на спицах однородными, рассчитать их момент инерции относительно оси вращения маховика для пунктов б) – г) задания 1. Сравнить результаты расчета с экспериментальными данными.

3. Для каждого пункта задания 1 определить:

- а) какая часть кинетической энергии маятника теряется при прохождении дополнительного груза через нижнее положение;
- б) работу сил трения.
- в) разность потенциальных энергий дополнительного груза в начальном и конечном положении

4. Для одного из пунктов задания 1 снять зависимости от времени угла поворота маятника $\varphi(t)$ и его угловой скорости $\omega_z(t)$. Зависимость $\omega_z(t)$

можно получить графическим или численным дифференцированием $\varphi(t)$. Построить графики $\varphi(t)$ и $\omega_z(t)$. Сделать вывод о справедливости гипотезы постоянного момента сил трения.

Замечание. Каждый раз, закрепив грузы на спицах маховика, необходимо убедиться, что его центр масс находится на оси вращения. Для этого приподнимите груз так, чтобы нить провисла – маховик при этом не должен вращаться.

Вопросы

1. Укажите направления моментов внешних сил, действующих на шкив маятника Обербека при спуске и подъеме груза.
2. Получите выражения (4), (5) и (11) из условий невесомости и нерастяжимости нити.
3. Получите зависимость $\omega_z(t)$ при условии, что момент силы трения прямо пропорционален угловой скорости.
4. Как изменились бы графики зависимостей $\varphi(t)$ и $\omega_z(t)$, если бы не было потерь энергии при движении маятника Обербека?
5. Вычислите силу натяжения нити при движении груза вниз и вверх. На сколько отличается она от силы тяжести груза?
6. Оцените величину силы натяжения нити при рывке, когда груз проходит нижнее положение. Как она зависит от радиуса шкива?
7. Оцените теоретически по аналогии с неупругим ударом потери кинетической энергии при рывке нити, возникающем, когда груз проходит нижнее положение.

Список литературы

1. Савельев И. В. Курс общей физики: учеб. пособие: в 5 т. Т. 1: Механика. – Изд. 2-е, испр. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2011. – 352 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учеб. пособие для студентов физ. специальностей вузов: [в 5 т.]. Т. 1: Механика. – Изд. 6-е, стер. – М.: Физматлит, 2017. – 560 с.

МАЯТНИК ОБЕРБЕКА

Составитель:
Евгений Игоревич **Анисимов**

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования "Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского" (ННГУ)
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.