

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского

В.С. Гаврилов  
Н.А. Денисова

# Метод характеристик для одномерного волнового уравнения

Учебно–методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией механико–математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика и математическое моделирование».

Нижний Новгород  
2014

УДК 53:51(075)  
ББК В161.68я73  
Г-12

Г-12 Гаврилов В.С., Денисова Н.А. Метод характеристик для одномерного волнового уравнения: Учебно–методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 72с.

Рецензент: д.ф.–м.н., профессор **М.И. Сумин**

В настоящем учебно–методическом пособии рассматриваются начальные и начально–краевые задачи для одномерного волнового уравнения. Подробно описывается метод характеристик для решения таких задач.

Пособие предназначено для студентов третьего курса механико–математического факультета и соответствует программе курсов ”Уравнение математической физики“ и ”Уравнения с частными производными“.

Ответственный за выпуск:  
зам. председателя методической комиссии  
механико–математического факультета ННГУ  
к.ф.–м.н., доцент **Жидков А.В.**

УДК 53:51(075)  
ББК В161.68я73

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2014

## Содержание

Введение.....	4
1. Общее решение одномерного волнового уравнения .....	4
Задание 1.....	6
2. Решение задачи Коши для однородного волнового уравнения. Формула Даламбера .....	7
Задание 2.....	9
3. Понятие области зависимости, области определенности, области влияния .....	9
Задание 3.....	12
4. Задачи для бесконечной струны.....	12
Задание 4.....	24
5. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения .....	25
Задание 5.....	26
6. Начально–краевые задачи для волнового уравнения на полуограниченной прямой.....	26
Задание 6.....	32
7. Задачи для полуограниченной струны.....	32
Задание 7.....	45
8. Задачи для ограниченной струны с однородными граничными условиями .....	46
Задание 8.....	60
9. Начально–краевые задачи с неоднородными граничными условиями .....	60
Задание 9.....	66
Ответы к заданиям для самостоятельной работы.....	66
Список литературы.....	71

## Введение

Одномерное волновое уравнение для функции  $u = u(x, t)$ , зависящей от одной пространственной переменной  $x$  и времени  $t$ , имеет вид

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t). \quad (1)$$

Это уравнение является простейшим уравнением гиперболического типа и используется для описания линейных волновых процессов различной физической природы. Например, уравнение (1) описывает малые поперечные колебания струны, продольные колебания тонкого стержня, применяется при рассмотрении широкого круга волновых процессов акустики, гидродинамики, электродинамики.

Для уравнений в частных производных, как правило, не ищут общие решения, а изучают различные постановки задач, включающие дополнительные условия, которые позволяют отобрать единственное решение, определяющее конкретный физический процесс. Одномерное волновое уравнение — это одно из немногих уравнений в частных производных второго порядка, для которого можно найти общее решение. Чтобы выделить единственное решение этого уравнения, чаще всего ставятся начальная (задача Коши) и начально–краевая (смешанная) задачи. Существуют различные методы их решения [1–6].

Данное учебно–методическое пособие посвящено методу характеристик. В пособии приведены необходимые теоретические сведения и решены различные, ставшие уже классическими, задачи о колебаниях струны, которые имеют и самостоятельное значение и позволяют глубже понять теоретический материал. Учебно–методическое пособие представляет собой переработанную и дополненную методическую разработку, изданную ранее в 1992 году и используемую на практических занятиях по курсу «Уравнения математической физики» на механико-математическом факультете ННГУ.

### 1. Общее решение одномерного волнового уравнения

В однородном волновом уравнении

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (1.1)$$

сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi = x + at, \\ \eta = x - at. \end{cases}$$

Введём обозначение

$$u(x, t) = V(x + at, x - at) = V(\xi, \eta). \quad (1.2)$$

Используя формулы дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned}
u_x &= V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x = V_\xi + V_\eta, \\
u_t &= V_\xi \xi_t + V_\eta \eta_t = a(V_\xi - V_\eta), \\
u_{xx} &= V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}, \\
u_{tt} &= a^2(V_{\xi\xi} - 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}).
\end{aligned}$$

После подстановки вторых производных  $u_{xx}$ ,  $u_{tt}$  в уравнение (1.1) будем иметь

$$V_{\xi\eta} = 0. \quad (1.3)$$

Положим

$$\frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial \eta} = W(\xi, \eta). \quad (1.4)$$

В силу (1.3) функция  $W(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0$$

Отсюда следует, что функция  $W(\xi, \eta)$  не зависит от  $\xi$ , а является функцией только переменной  $\eta$ ,

$$W = f_1(\eta).$$

Учитывая это, уравнение (1.4) перепишем:

$$\frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial \eta} = f_1(\eta). \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) будем интегрировать как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной  $\eta$  при фиксированном параметре  $\xi$ . При этом добавляется не произвольная постоянная интегрирования, а произвольная функция параметра  $\xi$ :

$$V(\xi, \eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} f_1(\zeta) d\zeta + g(\xi). \quad (1.6)$$

Первообразная произвольной функции  $f_1(\eta)$  является произвольной функцией переменной  $\eta$ . Введем обозначение

$$f(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} f_1(\zeta) d\zeta,$$

и решение (1.6) перепишем:

$$V(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi)$$

Таким образом, **общее решение уравнения (1.3) содержит две произвольные функции**. Возвращаясь по формулам (1.2) к старым переменным  $x$  и  $t$ , получим **общее решение однородного волнового уравнения (1.1)**

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at). \quad (1.7)$$

**Все решения волнового уравнения называются волнами.** Каждое слагаемое формулы (1.7) имеет физическую интерпретацию. Рассмотрим, например, функцию

$$u = f(x - at). \quad (1.8)$$

**Вид графика решения называется формой волны.** График решения (1.8) в фиксированный момент времени  $t_0 > 0$  получается из решения в начальный момент времени  $t = 0$  смещением вправо на величину  $at_0$  (рис. 1.1).

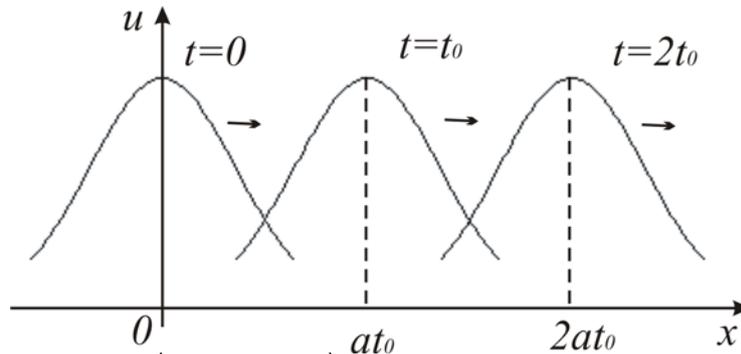


Рис. 1.1. Решение  $u = \exp(-(x - at)^2)$  смещается с течением времени слева направо

Поэтому функцию  $u = f(x - at)$  называют **волной, распространяющейся в направлении оси  $x$  со скоростью  $a$ , или прямой бегущей волной**. Аналогично трактуется функция  $u = g(x + at)$ . Это решение описывает волну, которая, не изменяя своей формы, движется со скоростью  $a$  в отрицательном направлении оси  $x$  и называется **обратной волной**. В соответствии с формулой (1.7) общее решение однородного волнового уравнения (1.1) представляется в виде суммы (суперпозиции) прямой и обратной волн.

### Задание 1.

1. Найти общее решение уравнений:
  - 1.1.  $u_{xy} = xy$ .
  - 1.2.  $u_{xy} + u_y = 0$ .
  - 1.3.  $u_{xy} + 2u_x = x$ .
  - 1.4.  $u_{tt} - u_{xx} + u_x + u_t = 0$ .
  - 1.5.  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \omega t$ .
2. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна при всех  $x$ , кроме точки  $x = x_0$ . В точке  $x = x_0$  функция  $f(x)$  имеет разрыв первого рода. Указать на фазовой полуплоскости  $(x, t)$  множество точек разрыва функции  $u(x, t) = f(x - at) + f(x + at)$ .

## 2. Решение задачи Коши для однородного волнового уравнения. Формула Даламбера

Задача Коши для однородного волнового уравнения формулируется следующим образом:

*найти решение однородного волнового уравнения*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (2.1)$$

*в области  $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ , удовлетворяющее в начальный момент времени  $t = 0$  условиям*

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.3)$$

Здесь  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  — заданные функции. Эту задачу часто называют начальной задачей, условия (2.2), (2.3) — начальными условиями (или условиями Коши), а функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  — начальными данными.

*Классическим решением задачи (2.1)–(2.3) называется функция  $u(x, t)$ , дважды непрерывно дифференцируемая по переменным  $x$  и  $t$  в области  $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ , и один раз дифференцируемая в области  $-\infty < x < \infty$ ,  $t \geq 0$ , удовлетворяющая уравнению (2.1) и начальным условиям (2.2), (2.3).*

Чтобы решить начальную задачу, следует общее решение однородного волнового уравнения (1.7) подставить в начальные условия и определить функции  $f(x)$ ,  $g(x)$ . В условие (2.3) входит производная, поэтому сначала продифференцируем (1.7) по  $t$  как сложную функцию:

$$\begin{aligned} u_t &= f'(x - at) \frac{\partial(x - at)}{\partial t} + g'(x + at) \frac{\partial(x + at)}{\partial t} = \\ &= -af'(x - at) + ag'(x + at), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где штрихом обозначена обыкновенная производная функции  $f(x)$ . После подстановки (1.7), (2.4) в условия (2.2), (2.3) получим систему уравнений для функций  $f(x)$ ,  $g(x)$ :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{cases} \quad (2.5)$$

Второе уравнение системы разделим на  $a$  и проинтегрируем. В результате система примет вид:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -f(x) + g(x) = \int_{x_0}^x \psi(\zeta) d\zeta + C. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения системы, получим

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\zeta) d\zeta - \frac{C}{2}, \quad (2.6)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\zeta) d\zeta + \frac{C}{2}. \quad (2.7)$$

Таким образом, прямая и обратная волны формулы (1.7) для начальной задачи (2.1)–(2.3) с точностью до постоянного слагаемого определяются начальными функциями  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ :

$$f(x-at) = \frac{1}{2} \varphi(x-at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\zeta) d\zeta - \frac{C}{2}, \quad (2.8)$$

$$g(x+at) = \frac{1}{2} \varphi(x+at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta + \frac{C}{2}. \quad (2.9)$$

После подстановки функций (2.7), (2.8) в (1.7) будем иметь

$$u(x,t) = \frac{1}{2} (\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \left( \int_{x_0}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\zeta) d\zeta \right).$$

Меняя местами верхний и нижний пределы интегрирования в последнем интеграле, на основании свойств определенного интеграла получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2} (\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta. \quad (2.10)$$

**Формула (2.10) называется формулой Даламбера.** Она получена в предположении существования решения задачи Коши (2.1)–(2.3). Если функция  $\varphi(x)$  имеет производные до 2-го порядка включительно:  $\varphi(x) \in C^2(R^1)$ , а  $\psi(x)$  производную 1-го порядка:  $\psi(x) \in C^1(R^1)$ , то функция  $u(x,t)$ , определяемая формулой (2.10), дважды дифференцируема по переменным  $x$  и  $t$ :  $u(x,t) \in C^2(R^2)$ . В том, что функция  $u(x,t)$  является решением задачи (2.1)–(2.3), можно убедиться непосредственной подстановкой  $u(x,t)$  в уравнение (2.1) и начальные условия (2.2)–(2.3).

При решении конкретных физических задач может оказаться, что функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  не удовлетворяют указанным условиям. Понятие решения в этом случае следует расширить и ввести обобщенные решения, так как классического решения не существует. Класс обобщенных решений должен быть шире класса классических решений. Если классическое решение существует, то оно должно быть и обобщенным решением задачи. Поскольку формула (2.10) имеет смысл для любых локально-интегрируемых функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , то функцию  $u(x,t)$ , определяемую формулой (2.10) называют **обобщенным ре-**

*шением задачи (2.1)–(2.3).* С общим понятием обобщенного уравнения для широкого класса уравнений можно познакомиться в [5].

### Задание 2.

1. Используя формулу Даламбера, найдите решения задач:

$$1.1. u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, u|_{t=0} = e^{-x^2}, u_t|_{t=0} = 0;$$

$$1.2. u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = xe^{-x^2};$$

$$1.3. u_{tt} - u_{xx} = 0, u|_{t=0} = \sin x, u_t|_{t=0} = \cos x.$$

2. Покажите, что решения двух задач:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = 0,$$

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = \varphi(x),$$

связаны между собой формулой  $u = v_t$  для любой  $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ .

3. Найдите решение задачи Коши:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > t',$$

$$u|_{t=t'} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=t'} = \psi(x).$$

4. Пусть функция  $v(x, t, t')$  при каждом фиксированном  $t' \geq 0$  является решением задачи Коши:

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, v|_{t=t'} = 0, v_t|_{t=t'} = f(x, t').$$

Покажите, что функция  $u(x, t) = \int_0^t v(x, t, t') dt'$  удовлетворяет неоднородному уравнению  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ ,  $-\infty < x < \infty, t > 0$

и нулевым начальным условиям  $u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0$

и нулевым начальным условиям  $u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0$

### 3. Понятие области зависимости, области определенности, области влияния

В задаче Коши (2.1)–(2.3) носителем начальных данных является ось  $x$ :  $t = 0, -\infty < x < \infty$ . Но, как следует из формулы Даламбера (2.10), решение задачи Коши в фиксированной точке  $(x_0, t_0)$  определяется значениями функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  не при всех  $x$ , а только на отрезке  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$  оси  $x$ . Действительно,

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}(\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)) + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(\zeta) d\zeta.$$

**Отрезок**  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$  **называется областью зависимости решения в точке**  $(x_0, t_0)$  **от начальных данных.**

Построим область зависимости для фиксированной точки  $(x_0, t_0)$  на фазовой полуплоскости  $(x, t)$ .

**Прямые**

$$\begin{cases} x - at = c_1, \\ x + at = c_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

**называются характеристиками одномерного волнового уравнения.**

Найдем характеристики волнового уравнения, проходящие через точку  $(x_0, t_0)$ . Чтобы выделить из семейств (3.1) нужные характеристики, подставим в (3.1)  $x = x_0$ ,  $t = t_0$  и определим, что  $c_1 = x_0 - at_0$ ,  $c_2 = x_0 + at_0$ . Таким образом, через точку  $(x_0, t_0)$  проходят две характеристики,

$$x - at = x_0 - at_0, \quad (3.2)$$

$$x + at = x_0 + at_0. \quad (3.3)$$

Характеристики (3.2), (3.3) пересекают ось  $x$  в точках с координатами  $x_0 - at_0$  и  $x_0 + at_0$ , соответственно. Поэтому для построения области зависимости точки  $(x_0, t_0)$  достаточно построить характеристики, проходящие через эту точку. Характеристики вырезают на оси  $x$  отрезок  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ . На рисунке 3.1 область зависимости для точки  $(x_0, t_0)$  выделена жирной линией.

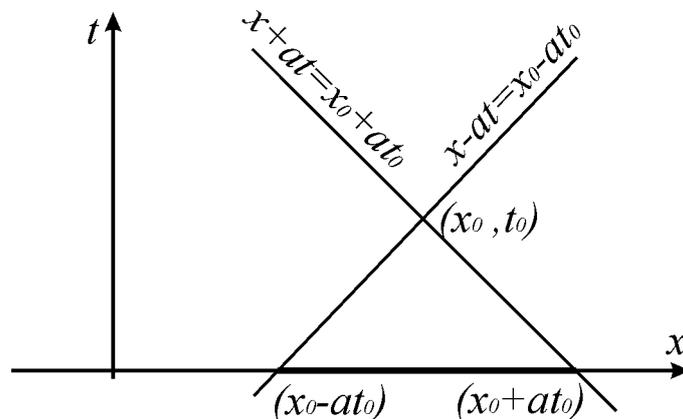


Рис. 3.1. Область зависимости для точки  $(x_0, t_0)$

Пусть начальные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  известны на отрезке  $[x_1, x_2]$ .

**Множество точек фазовой полуплоскости  $(x, t)$ , области зависимости которых принадлежат отрезку  $[x_1, x_2]$ , называется областью определенности.**

Во всех точках области определенности существует решение Даламбера (2.10). Кроме того, область определенности отрезка  $[x_1, x_2]$  — это максимальная область, в которой решение начальной задачи для однородного волнового уравнения с начальными условиями, заданными только на отрезке  $x \in [x_1, x_2]$  начальной прямой  $t = 0$ , существует, единственно и определяется по формуле Даламбера. Сами начальные условия в этом случае записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad x \in [x_1, x_2], \\ u_t|_{t=0} &= \psi(x), \quad x \in [x_1, x_2]. \end{aligned}$$

Чтобы построить на фазовой полуплоскости  $(x, t)$  область определенности отрезка  $[x_1, x_2]$  начальной прямой  $t = 0$ , нужно через концы этого отрезка провести характеристики волнового уравнения. Область определенности заключена между правой характеристикой, проходящей через левый конец отрезка начальной прямой, левой характеристикой, проходящей через правый конец отрезка, и самим отрезком прямой (рис. 3.2).

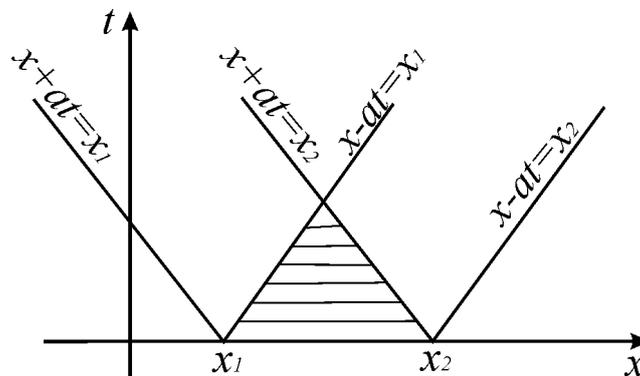


Рис. 3.2. Область определенности отрезка  $[x_1, x_2]$

Из формулы Даламбера следует, что значения функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , заданных при  $x \in [x_1, x_2]$ , влияют на значения решения  $u(x, t)$  не только в области определенности отрезка  $[x_1, x_2]$ , но и в области, ограниченной отрезком  $[x_1, x_2]$  оси  $x$  и характеристиками  $x - at = x_1, x + at = x_2$ . Эта область называется **областью влияния отрезка  $[x_1, x_2]$**  (рис. 3.3). Действительно, для любой точки из области влияния область зависимости имеет непустое пересечение с отрезком  $[x_1, x_2]$  оси  $x$ .

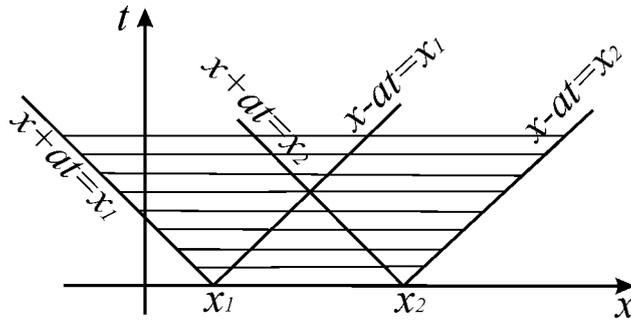


Рис. 3.3. Область влияния отрезка  $[x_1, x_2]$

### Задание 3.

1. Укажите на фазовой полуплоскости  $(x, t)$  область, в которой решение начальной задачи (2.1)–(2.3) не изменится, если изменить значения начальных функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  только на отрезке  $[x_1, x_2]$ .
2. Постройте область определенности для полубесконечного интервала  $[x_1, \infty)$ .
3. Пусть начальные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  обращаются в тождественный нуль, если  $|x| > c$ . Укажите на фазовой полуплоскости  $(x, t)$  область, в которой решение Даламбера также тождественно равно нулю.

## 4. Задачи для бесконечной струны

В задачах о малых поперечных колебаниях струны  $u(x, t)$  — *отклонение точек струны в момент времени  $t$  от положения равновесия (ось  $x$ )*,  $u_t(x, t)$  — *скорость точек струны в момент времени  $t$* . График функции  $u(x, t)$  в фиксированный момент времени  $t$  представляет собой *профиль струны*. Для однородной струны функция  $u = u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1), в котором  $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ ,  $f(x, t) = \frac{1}{\rho} \tilde{f}(x, t)$ . Здесь  $T_0$  — величина натяжения

струны,  $\rho$  — линейная плотность струны,  $\tilde{f}(x, t)$  — линейная плотность внешней поперечной силы.

В этом параграфе рассматривается случай, когда  $\tilde{f}(x, t) = 0$ . Такие колебания струны называются свободными. Так как в задачах о колебаниях струны разрывные решения лишены физического смысла, функция  $u(x, t)$  должна быть непрерывна. Поэтому в задачах о колебаниях струны в качестве начального отклонения  $\varphi(x)$  можно взять любую непрерывную функцию, а начальной скорости  $\psi(x)$  — кусочно-непрерывную функцию.

**Задача 4.1.** Бесконечная струна возбуждена начальным отклонением, отличным от нуля лишь на интервале  $(-c, c)$  и имеющим на плоскости  $(x, u)$  форму ломаной с вершинами в точках  $(-c, 0)$ ,  $(0, h)$ ,  $(c, 0)$ . Начальные скорости точек струны равны нулю. Построить профиль струны для моментов времени  $t_k = ck/4a$ ,  $k = \overline{0,5}$ .

По условию задачи начальные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  имеют вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > c, \\ h(1 - |x|/c), & |x| \leq c, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\psi(x) \equiv 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.2)$$

С такими начальными функциями формула Даламбера (2.10) определяет обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3). Это решение для нулевой функции  $\psi(x)$  упрощается:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - at) + \varphi(x + at)). \quad (4.3)$$

На рис. 4.1 изображен профиль струны в моменты времени  $t_k$ ,  $k = \overline{0,5}$ .

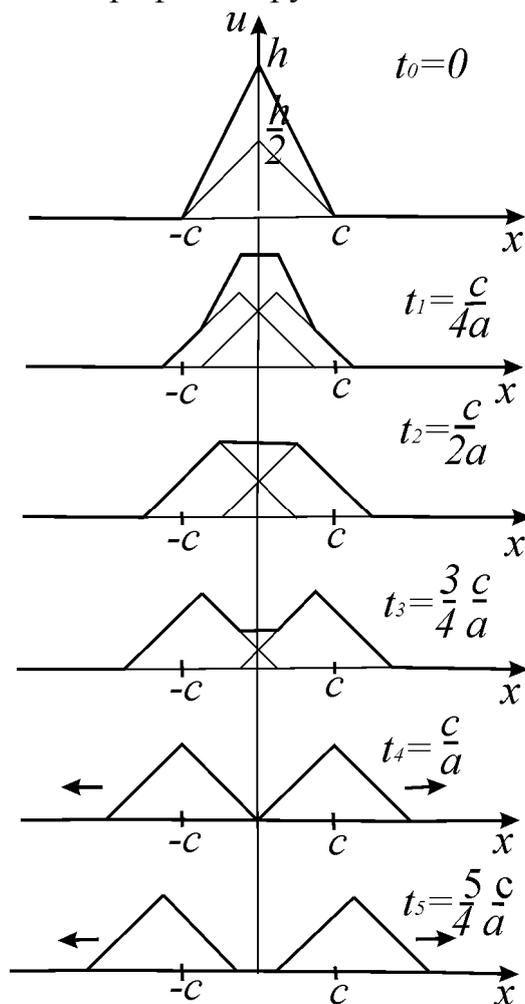


Рис. 4.1. Последовательные положения струны через промежутки времени  $\Delta t = \frac{c}{4a}$

Чтобы построить график решения (профиль струны) в моменты времени  $t_k$ , согласно (4.3), нужно построить графики функций  $\frac{1}{2}\varphi(x - at_k)$  и  $\frac{1}{2}\varphi(x + at_k)$ , а затем их сложить. График функции  $\frac{1}{2}\varphi(x - at_k)$  получается сдвигом графика функции  $\frac{1}{2}\varphi(x)$  на величину  $at_k$  вправо, а функции  $\frac{1}{2}\varphi(x + at_k)$  на ту же величину влево.

**Задача 4.2.** В условиях задачи 4.1 расписать формулу (4.3) при всех  $-\infty < x < \infty, t > 0$ .

Чтобы получить требуемые формулы для функции  $u(x, t)$ , удобно пользоваться фазовой полуплоскостью  $(x, t)$ . В рассматриваемой задаче функция  $\varphi(x)$  в интервалах  $x < -c, -c < x < c, x > c$  записывается различными аналитическими выражениями. На оси  $x$  фазовой полуплоскости  $(x, t)$  отметим границы этих интервалов, т.е. точки  $-c$  и  $c$ , и проведем через них характеристики волнового уравнения. Эти характеристики разобьют полуплоскость на шесть областей (рис. 4.2), в каждой из которых получится свое аналитическое выражение для функции  $u(x, t)$ .

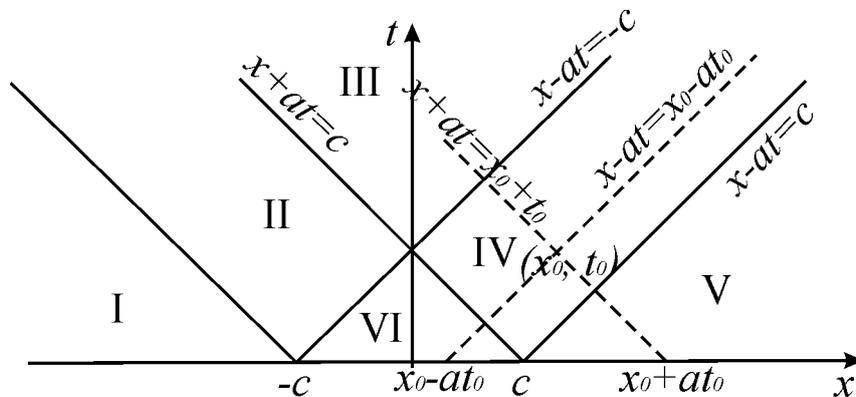


Рис. 4.2. Разбиение фазовой полуплоскости на 6 областей

Рассмотрим, например, область IV. Множество точек области IV задается неравенствами

$$\begin{cases} -c < x - at < c, \\ x + at > c. \end{cases}$$

Поэтому, в соответствии с (4.1),

$$\varphi(x - at) = h \left( 1 - \frac{|x - at|}{c} \right), \quad (4.4)$$

а

$$\varphi(x + at) = 0. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.4), (4.5) в (4.3), получим

$$u(x, t) = \frac{h}{2} \left( 1 - \frac{|x - at|}{c} \right), \quad (x, t) \in \text{области IV}. \quad (4.6)$$

Аналогично рассматриваются остальные области. В области II для любой точки  $(x, t)$

$$\begin{cases} -c < x + at < c, \\ x - at < -c. \end{cases}$$

Тогда из формулы (4.1) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi(x - at) &= 0, \\ \varphi(x + at) &= h \left( 1 - \frac{|x + at|}{c} \right). \end{aligned}$$

Поэтому в области II решением (4.3) является обратная волна

$$u(x, t) = \frac{h}{2} \left( 1 - \frac{|x + at|}{c} \right), \quad (x, t) \in \text{области II}.$$

Рассмотрим область VI,

$$\begin{cases} x - at > -c, \\ x + at < c, \\ t > 0. \end{cases}$$

Для любой точки из этой области

$$\begin{aligned} -c < x - at < c, \\ -c < x + at < c. \end{aligned}$$

Согласно (4.1),

$$\begin{aligned} \varphi(x - at) &= h \left( 1 - \frac{|x - at|}{c} \right), \\ \varphi(x + at) &= h \left( 1 - \frac{|x + at|}{c} \right), \end{aligned}$$

а решение (4.3) представляет собой суперпозицию прямой и обратной волн

$$u(x, t) = \frac{h}{2} \left( 2 - \frac{|x - at|}{c} - \frac{|x + at|}{c} \right), \quad (x, t) \in \text{области VI}.$$

В задачах с нулевой начальной скоростью решение (4.3) в точке  $(x, t)$  зависит от значений функции  $\varphi(x)$  только на концах области зависимости, т.е. в точках  $x - at, x + at$ . В данной задаче для любой точки из областей I, III, V концы области зависимости не попадают в интервал  $(-c, c)$ , где функция  $\varphi(x)$  отлична от нуля. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(x - at) &= 0, \\ \varphi(x + at) &= 0, \\ u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \text{областям I, III, V.} \end{aligned} \quad (4.7)$$

**Задача 4.3.** В условиях задачи 4.1 найти формулы, представляющие закон движения точки струны с координатой  $x_0 > c$ , при всех  $t > 0$ .

В задаче требуется найти отклонение  $u(x_0, t)$  при всех  $t > 0$ . Для решения задачи воспользуемся ответами задачи 4.2. На фазовой полуплоскости  $(x, t)$  (рис. 4.2) проведем вертикальную прямую  $x = x_0$ . Эта прямая пересекает области V, IV, III (рис. 4.3) и делится характеристиками  $x - at = c, x - at = -c$  на три части. В каждой части прямой  $x = x_0$  решение задачи записывается одной из формул (4.6), (4.7).

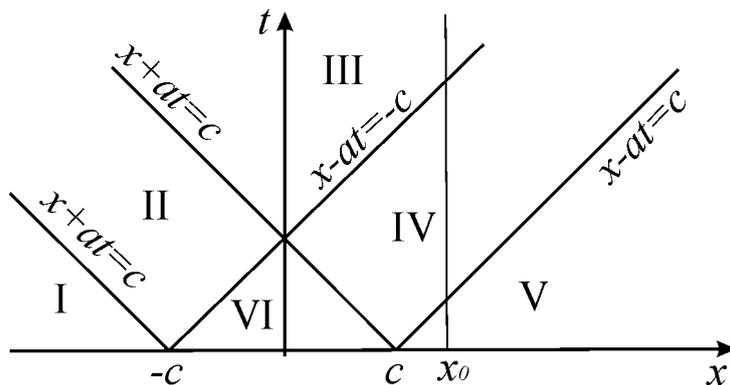


Рис. 4.3. Интерпретация задачи 4.3 в фазовой полуплоскости  $(x, t)$

Найдем точки пересечения прямой  $x = x_0$  с характеристиками  $x - at = c, x - at = -c$ . Для этого решим системы:

$$\begin{cases} x - at = c, \\ x = x_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0, \\ t = \frac{x_0 - c}{a}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - at = -c, \\ x = x_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0, \\ t = \frac{x_0 + c}{a}. \end{cases}$$

Формулы для функции  $u(x_0, t)$  в интервалах  $0 \leq t < \frac{x_0 - c}{a}$ ,

$\frac{x_0 - c}{a} \leq t < \frac{x_0 + c}{a}$ ,  $t \geq \frac{x_0 + c}{a}$  будут различными. Подставляя в (4.6), (4.7)

$x = x_0$ , в соответствии с рисунком 4.3, запишем ответ задачи:

$$u(x_0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{x_0 - c}{a}, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{|x_0 - at|}{c}\right), & \frac{x_0 - c}{a} \leq t < \frac{x_0 + c}{a}, \\ 0, & t \geq \frac{x_0 + c}{a}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Если  $0 \leq t < \frac{x_0 - c}{a}$ , то отклонение струны в точке  $x_0$  равно нулю. В момент

времени  $t = \frac{x_0 - c}{a}$  к этой точке подходит бегущая полуволна от точки  $c$ . При

$t > \frac{x_0 - c}{a}$  возмущение в точке  $x_0$  становится ненулевым, до тех пор, пока че-

рез эту точку не пройдет полуволна из точки  $-c$ . Начиная с момента времени

$t = \frac{x_0 + c}{a}$ , отклонение снова станет нулевым.

**Задача 4.4.** Для задачи 4.1 найти формулы, описывающие профиль струны в момент времени  $t = t_0$ ,  $t_0 > \frac{c}{a}$ .

На фазовой полуплоскости  $(x, t)$  проведем прямую  $t = t_0$  (рис. 4.4). Найдем координаты точек пересечения этой прямой с характеристиками:

$$A: \begin{cases} x + at = -c, \\ t = t_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -c - at_0, \\ t = t_0, \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} x + at = c, \\ t = t_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c - at_0, \\ t = t_0, \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} x - at = -c, \\ t = t_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -c + at_0, \\ t = t_0, \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} x - at = c, \\ t = t_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c + at_0, \\ t = t_0. \end{cases}$$

Прямая  $t = t_0$  пересекает I, II, III, IV, V области задачи 4.2 и разбивается характеристиками на пять частей. Интервалы изменения  $x$  этих частей определяются первыми координатами точек  $A, B, C, D$ .

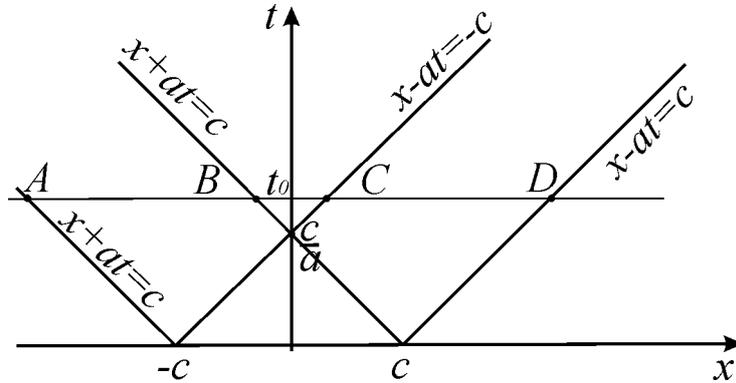


Рис. 4.4. Интерпретация задачи 4.4 в фазовой полуплоскости  $(x, t)$

Подставим  $t = t_0$  в формулы задачи 4.2 и запишем решение:

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0, & x < -c - at_0, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{|x + at_0|}{c}\right), & -c - at_0 \leq x < c - at_0, \\ 0, & c - at_0 \leq x < -c + at_0, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{|x - at_0|}{c}\right), & -c + at_0 \leq x < c + at_0, \\ 0, & x \geq c + at_0. \end{cases}$$

Точка оси  $x$ , разделяющая точки, в которых возмущения еще нет, от точек, в которых возмущение уже появилось, называется передним фронтом волны. В данной задаче в момент времени  $t = t_0$  есть два передних фронта  $x = -c - at_0$ ,  $x = c + at_0$ . Точка, разделяющая точки, в которых возмущение еще есть от точек, в которых возмущение уже исчезло, называется задним фронтом волны. В момент времени  $t = t_0$ , если  $t_0 > \frac{c}{a}$ , существует два задних фронта волны  $x = c - at_0$ ,  $x = -c + at_0$ .

**Задача 4.5.** Пусть в задаче о колебаниях бесконечной струны начальное отклонение  $\varphi(x) \equiv 0$ , а начальная скорость отлична от нуля только на интервале  $(x_1, x_2)$ , где принимает постоянное значение  $V_0$ ,

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ V_0, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x > x_2. \end{cases} \quad (4.9)$$

Найти формулы, представляющие закон движения точки струны  $x = x_0$ , для всех  $t > 0$ . Рассмотреть случай, когда  $x_0 > x_2$ .

Так как  $\varphi(x) \equiv 0$ , решение Даламбера имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta. \quad (4.10)$$

В задаче требуется расписать формулы для функции

$$u(x_0, t) = \frac{1}{2a} \int_{x_0-at}^{x_0+at} \psi(\zeta) d\zeta \quad (4.11)$$

при всех  $t > 0$ . Будем использовать фазовую полуплоскость  $(x, t)$ . Так как функция  $\psi(x)$  меняет свое аналитическое выражение при переходе через точки  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ , то на оси  $x$  фазовой полуплоскости  $(x, t)$  отметим эти точки и построим проходящие через них характеристики. Построим также прямую  $x = x_0$ , на которой нужно найти решение задачи. Прямая  $x = x_0$  пересекает характеристики  $x - at = x_1$ ,  $x - at = x_2$  в точках, вторая координата которых принимает значения  $\frac{x_0 - x_1}{a}$  и  $\frac{x_0 - x_2}{a}$  соответственно (рис. 4.5).

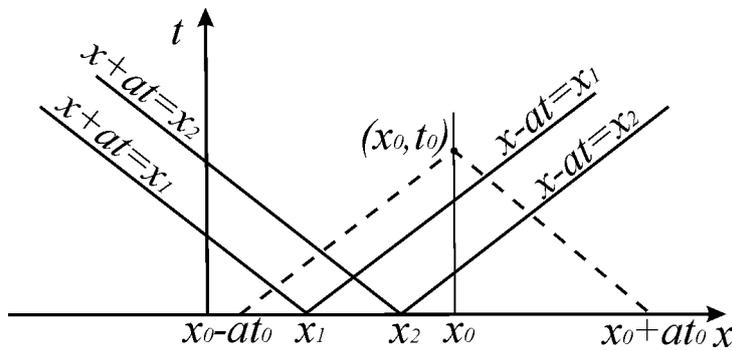


Рис. 4.5. Интерпретация задачи 4.5 в фазовой полуплоскости  $(x, t)$

Формулы для функции  $u(x_0, t)$  будут различными в интервалах  $0 < t < \frac{x_0 - x_2}{a}$ ,  $\frac{x_0 - x_2}{a} < t < \frac{x_0 - x_1}{a}$ ,  $t > \frac{x_0 - x_1}{a}$ . Распишем формулу в третьем интервале. Для этого возьмем любую точку  $(x_0, t_0)$  на прямой  $x = x_0$ , где  $t_0 > \frac{x_0 - x_1}{a}$ . Для точки  $(x_0, t_0)$  построим область зависимости. Область зависимости в этом случае разбивается точками  $x_1$  и  $x_2$  на три части, в которых функция  $\psi(x)$  записывается различными аналитическими выражениями.

Поэтому в момент времени  $t = t_0$ ,  $t_0 > \frac{x_0 - x_1}{a}$  интеграл (4.11) представим в виде суммы трех интегралов. В результате получим

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0 - at_0}^{x_1} \psi(\zeta) d\zeta + \int_{x_1}^{x_2} \psi(\zeta) d\zeta + \int_{x_2}^{x_0 + at_0} \psi(\zeta) d\zeta \right\} = \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0 - at_0}^{x_1} 0 d\zeta + \int_{x_1}^{x_2} V_0 d\zeta + \int_{x_2}^{x_0 + at_0} 0 d\zeta \right\} = \\ &= \frac{(x_2 - x_1)}{2a} V_0, \quad t_0 \geq \frac{x_0 - x_1}{a}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Рассмотрим точки прямой  $x = x_0$  в интервале  $\frac{x_0 - x_2}{a} < t < \frac{x_0 - x_1}{a}$ . Для любой точки  $(x_0, t_0)$  этого отрезка прямой левый конец области зависимости попадает в интервал  $(x_1, x_2)$ , а правый конец — в область  $x_0 + at_0 > x_2$ . Поэтому интеграл (4.11) разбиваем на сумму двух интегралов,

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0 - at_0}^{x_2} \psi(\zeta) d\zeta + \int_{x_2}^{x_0 + at_0} \psi(\zeta) d\zeta \right\} = \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0 - at_0}^{x_2} V_0 d\zeta + \int_{x_2}^{x_0 + at_0} 0 d\zeta \right\} = \\ &= \frac{V_0}{2a} (x_2 - x_0 + at_0), \quad \frac{x_0 - x_2}{a} \leq t_0 < \frac{x_0 - x_1}{a}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Для всех точек прямой  $x = x_0$ , у которых  $0 < t_0 < \frac{x_0 - x_2}{a}$  область зависимости располагается правее точки  $x_2$ . Так как функция  $\psi(x) \equiv 0$ ,  $x > x_2$ , то

$$u(x_0, t_0) \equiv 0, \quad 0 \leq t_0 < \frac{x_0 - x_2}{a}. \quad (4.14)$$

Заменяя в формулах (4.12)–(4.14)  $t_0$  на  $t$ , выпишем ответ задачи

$$u(x_0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{x_0 - x_2}{a}, \\ \frac{V_0}{2a} (x_2 - x_0 + at), & \frac{x_0 - x_2}{a} \leq t < \frac{x_0 - x_1}{a}, \\ \frac{V_0}{2a} (x_2 - x_1), & t \geq \frac{x_0 - x_1}{a}. \end{cases}$$

Точка струны  $x = x_0$  смещается не сразу, затем смещение в этой точке линейно растёт по времени, достигая максимума в момент времени  $t = \frac{x_0 - x_1}{a}$ . Начиная с этого момента времени, смещение точки не меняется и остается постоянным.

**Задача 4.6.** В условиях задачи 4.5 построить профиль струны для моментов времени  $t_k = \frac{x_2 - x_1}{8a} k, k = \overline{0,4}$ .

Введем функцию

$$F(x) = \frac{1}{2a} = \int_{x_1}^x \psi(\zeta) d\zeta. \quad (4.15)$$

Используя (4.15), формулу Даламбера (4.10) запишем в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x_1} \psi(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta = \\ &= F(x+at) - F(x-at). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Вычислим интеграл (4.15) при всех значениях  $x$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{1}{2a} \int_{x_1}^x V_0 d\zeta = \frac{V_0}{2a} (x - x_1), & x_1 \leq x < x_2, \\ \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x_2} V_0 d\zeta + \frac{1}{2a} \int_{x_2}^x 0 d\zeta = \frac{V_0}{2a} (x_2 - x_1), & x \geq x_2. \end{cases} \quad (4.17)$$

На рисунке 4.6 изображены графики функций  $\psi(x)$  и  $F(x)$ .

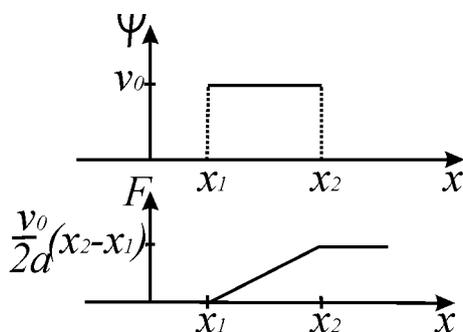


Рис. 4.6. Графики функций  $\psi(x)$  и  $F(x)$

Согласно формуле (4.16), профиль струны в момент времени  $t_k$  получается сложением графиков функций  $F(x + at_k)$  и  $-F(x - at_k)$ . Профили струны в моменты времени  $t_k, k = \overline{0,4}$  приведены на рис. 4.7.

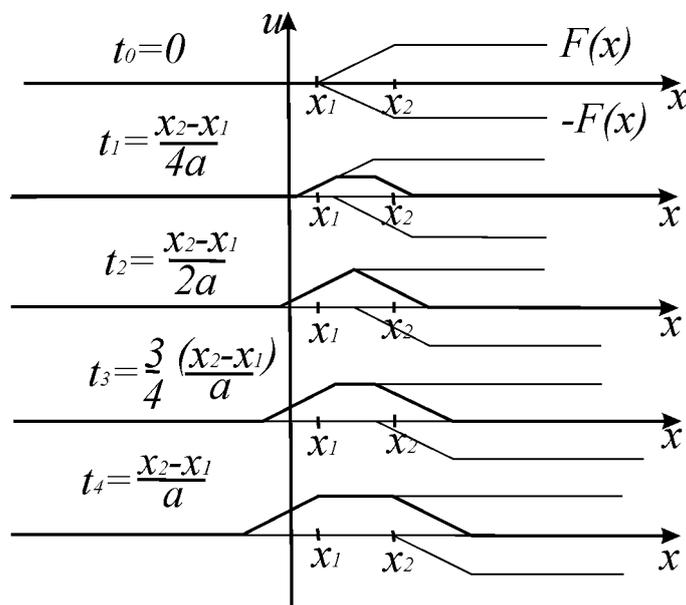


Рис. 4.7. Последовательные положения струны через промежутки времени  $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{4a}$

Для моментов времени  $t > \frac{x_2 - x_1}{2a}$  профиль струны имеет форму трапеции постоянной высоты, равномерно расширяющейся с течением времени.

**Задача 4.7.** В условиях задачи 4.5 найти формулы, описывающие профиль струны в момент времени  $t_0, t_0 > \frac{x_2 - x_1}{2a}$ .

При выполнении задания можно использовать либо формулу (4.10), либо формулу (4.16). Продемонстрируем способ использования формулы (4.16). На фазовой полуплоскости (рис. 4.8) проведем горизонтальную прямую  $t = t_0$ ,

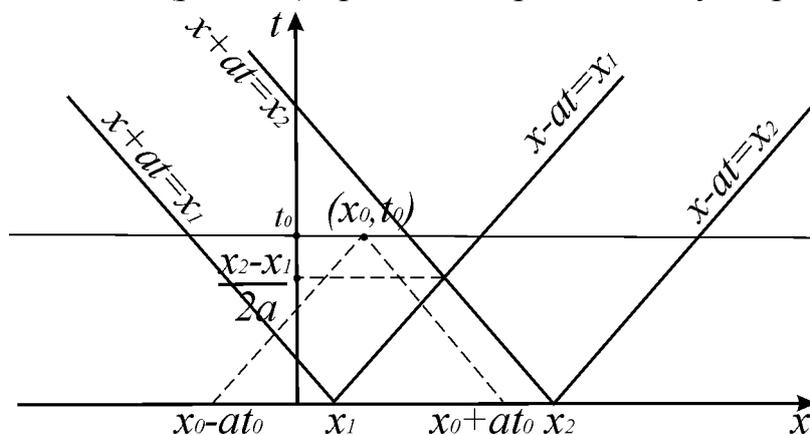


Рис. 4.8. Интерпретация задачи 4.7 в фазовой полуплоскости  $(x, t)$

пересекающую характеристики в точках с координатами  $(x_1 - at_0, t_0)$ ,  $(x_2 - at_0, t_0)$ ,  $(x_1 + at_0, t_0)$ ,  $(x_2 + at_0, t_0)$ . Эти четыре точки делят прямую  $t = t_0$  на пять интервалов, в которых решение  $u(x, t_0)$  записывается разными формулами. Рассмотрим, например, точку  $(x_0, t_0)$  этой прямой из интервала  $x_1 - at_0 \leq x_0 < x_2 - at_0$  и построим для нее область зависимости. Левый конец области зависимости лежит левее точки  $x_1$ , поэтому, в соответствии с формулой (4.17),

$$F(x_0 - at_0) = 0.$$

Правый конец попадает в интервал  $(x_1, x_2)$ , поэтому, в соответствии с (4.17),

$$F(x_0 + at_0) = \frac{V_0}{2a}(x_0 + at_0 - x_1),$$

По формуле (4.16) получим

$$u(x_0, t_0) = \frac{V_0}{2a}(x_0 + at_0 - x_1), \quad x_1 - at_0 \leq x_0 < x_2 - at_0.$$

Переобозначим  $x_0$  через  $x$  и перепишем формулу:

$$u(x, t_0) = \frac{V_0}{2a}(x + at_0 - x_1), \quad x_1 - at_0 \leq x < x_2 - at_0.$$

Для остальных значений  $x$  формулы получаются аналогично. Ниже приводится ответ задачи:

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0, & x < x_1 - at_0, \\ \frac{V_0}{2a}(x + at_0 - x_1), & x_1 - at_0 \leq x < x_2 - at_0, \\ \frac{V_0}{2a}(x_2 - x_1), & x_2 - at_0 \leq x < x_1 + at_0, \\ -\frac{V_0}{2a}(x - at_0 - x_2), & x_1 + at_0 \leq x < x_2 + at_0, \\ 0, & x \geq x_2 + at_0. \end{cases}$$

В задаче есть два передних фронта волны, и отсутствует задний фронт волны.

**Замечание.** Задача о построении профиля струны в фиксированные моменты времени в случае одновременно ненулевых функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , согласно (1.7), сводится к сложению графиков функций (2.7), (2.8). Для решения задачи функции (2.5), (2.6) нужно найти в явном виде, при этом константу  $c$  следует взять равной нулю, а нижний предел интегрирования в интеграле — любое число. Чаще всего выбирают  $x_0 = -\infty$  для сходящихся несобственных интегралов от функции  $\psi(x)$ , либо первое значение аргумента  $x$ , при переходе через которое функция  $\psi(x)$  меняет свое аналитическое выражение.

#### Задание 4.

1. Бесконечная струна возбуждена начальным отклонением, отличным от нуля лишь на интервалах  $(-3c, c)$  и  $(c, 3c)$ , и имеющим на плоскости  $(x, u)$  форму ломаной с вершинами в точках  $(-3c, 0)$ ,  $(-2c, h)$ ,  $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$ ,  $(2c, h)$ ,  $(3c, 0)$ . Начальная скорость равна нулю. Построить профиль струны для моментов времени  $t_k = \frac{kc}{2a}$ ,  $k = \overline{0, 8}$ . Найти формулы, определяющие закон движения точки струны с координатой  $x_0$ ,  $0 < x_0 < \frac{c}{2}$ .
2. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением, имеющим форму квадратичной параболы (рис. 4.9). Найти формулы для решения Даламбера при всех  $x$  и  $t$ , если начальная скорость равна нулю.

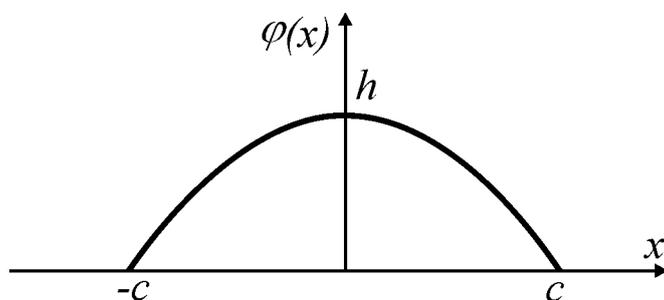


Рис. 4.9. Начальное отклонение струны в задаче 2

3. Неограниченной струне на отрезках  $-c < x < c$  и  $2c < x < 3c$  сообщена поперечная начальная скорость  $V_0$ , вне этих отрезков начальная скорость равна нулю. Начальное отклонение отсутствует. Построить профиль струны в моменты времени  $t_k = \frac{kc}{2a}$ ,  $k = \overline{0, 6}$ . Найти формулы, описывающие профиль струны в момент времени  $t_0 > \frac{2c}{a}$ .
4. Пусть в задаче Коши (2.1)–(2.3) начальные функции имеют вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} V_0, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти формулы для решения Даламбера при всех  $x$  и  $t$ .

## 5. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения

Сформулируем задачу Коши для неоднородного волнового уравнения:

**Найти функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую неоднородному волновому уравнению**

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) \quad (5.1)$$

**в области  $-\infty < x < \infty, t > 0$  и начальным условиям**

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (5.3)$$

Решать задачу (5.1)–(5.3) можно стандартным образом: сначала найти общее решение уравнения (5.1), а затем — удовлетворяющее начальным условиям (5.2), (5.3). Возможен и другой подход. В силу линейности задачи, её можно разбить на две, более простые, задачи:

$$\begin{aligned} 1) \quad & u_{tt}^{(1)} - a^2 u_{xx}^{(1)} = 0, & 2) \quad & u_{tt}^{(2)} - a^2 u_{xx}^{(2)} = f(x, t), \\ & u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x), & & u^{(2)}|_{t=0} = 0, \\ & u_t^{(1)}|_{t=0} = \psi(x); & & u_t^{(2)}|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} \quad (5.4)$$

удовлетворяет начальной задаче (5.1)–(5.3). Решение первой задачи определяется формулой Даламбера. Решение второй, используя результаты задания 2 (№3, 4), можно записать с помощью формулы

$$u^{(2)}(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(\zeta, t') d\zeta dt'. \quad (5.5)$$

На полуплоскости  $(\zeta, t')$  интегрирование функции  $f(\zeta, t')$  осуществляется по области, имеющей вид треугольника, ограниченного характеристиками, проходящими через точку  $(x, t)$ , и прямой  $t' = 0$  (рис. 5.1).

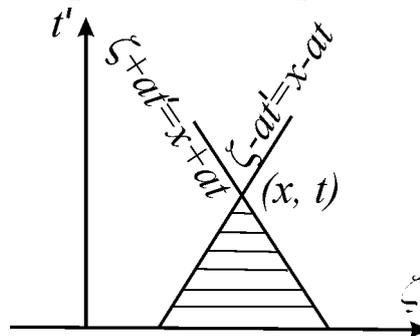


Рис. 5.1. Область зависимости для точки  $(x, t)$  от правой части уравнения

В соответствии с формулой (5.4), решение задачи (5.1)–(5.3) имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2a} \int_0^t dt' \int_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(\zeta, t') d\zeta. \quad (5.6)$$

Формула (5.6) также называется формулой Даламбера.

### Задание 5.

1. Решить задачи:

$$1) u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \omega t, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0;$$

$$2) u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \omega x, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

2. Пусть  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $\psi(x) \equiv 0$ , функция  $f(x, t)$  отлична от нуля в области  $a < x < b$ ,  $0 < t < t_0$ , вне этой области  $f(x, t) \equiv 0$ . Указать на фазовой полуплоскости множество точек  $(x, t)$ , для которых  $u(x, t) \equiv 0$  и множество точек  $(x, t)$ , для которых  $u(x, t)$  принимает постоянное ненулевое значение.

3. Найти решение задач:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \omega t \times \sigma(T - t), \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0;$$

где

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \text{— функция Хевисайда.}$$

## 6. Начально-краевые задачи для волнового уравнения на полуограниченной прямой

Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой  $x \geq 0$ .

В этом случае *классической начально-краевой (смешанной) задачей для волнового уравнения называется задача о нахождении функции  $u(x, t)$ , удовлетворяющей в первом квадранте  $Q = \{x, t : x > 0, t > 0\}$  уравнению*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (6.1)$$

*начальным условиям*

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad (6.2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geq 0, \quad (6.3)$$

и граничному условию

$$(\alpha_1 u_x - \beta_1 u)|_{x=0} = \mu(t), t \geq 0. \quad (6.4)$$

Здесь  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\mu(t)$  — заданные функции,  $\alpha_1, \beta_1$  — заданные неотрицательные константы, причем  $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ .

*Классическим решением задачи (6.1)–(6.4) называется функция  $u(x, t)$ , непрерывная вместе с первыми производными в замкнутой области  $\bar{Q}$ , имеющая производные второго порядка в  $Q$ , удовлетворяющая в  $Q$  уравнению (6.1), начальным условиям (6.2), (6.3) и граничному условию (6.4).*

Получим необходимые условия существования классического решения задачи (6.1)–(6.4). Пусть функция  $u(x, t)$  имеет непрерывные производные второго порядка в области  $Q$ . Тогда функция  $u_{tt} - a^2 u_{xx}$  непрерывна в области  $Q$ . Поэтому для того, чтобы функция  $u(x, t)$  обращала уравнение (6.1) в тождество по переменным  $(x, t) \in Q$ , необходимо, чтобы  $f(x, t)$  также была непрерывна в области  $Q$  ( $f(x, t) \in C(Q)$ ). Так как классическое решение  $u(x, t) \in C^1(\bar{Q})$ , то  $u(x, 0) \in C^1(x \geq 0)$ . Поэтому после подстановки  $u(x, t)$  в условие (6.2) получим тождество по переменной  $x$ , только, если  $\varphi(x) \in C^1(x \geq 0)$ . Аналогично, из условий (6.3), (6.4) получим, что  $\psi(x) \in C(x \geq 0)$ ,  $\mu(t) \in C(t \geq 0)$ . Кроме условий гладкости, должно выполняться условие согласования начального (6.2) и граничного (6.4) условий. Последнее обстоятельство связано с тем, что в точке  $x = 0, t = 0$  задано и начальное, и граничное условие. Полагая в начальном условии (6.2)  $x = 0$ , найдем

$$u|_{t=0} = \varphi(0), \quad (6.5)$$

После дифференцирования по  $x$  левой и правой частей соотношения (6.2), подставим  $x = 0$ . В результате получим

$$u_x|_{t=0} = \varphi'(0), \quad (6.6)$$

С другой стороны, комбинацию  $\alpha_1 u_x - \beta_1 u$  в точке  $(0, 0)$  можно найти из граничного условия (6.4)

$$(\alpha_1 u_x - \beta_1 u)|_{x=0} = \mu(0). \quad (6.7)$$

Из формул (6.5)–(6.7) следует условие согласования

$$\alpha_1 \varphi'(0) - \beta_1 \varphi(0) = \mu(0). \quad (6.8)$$

Таким образом, для существования классического решения задачи (6.1)–(6.4) необходимо, чтобы

$$f(x, t) \in C(\bar{Q}), \varphi(x) \in C^1(x \geq 0), \psi(x) \in C(x \geq 0), \mu(t) \in C(t \geq 0)$$

и выполнялось условие согласования (6.8).

Если необходимые условия существования классического решения не выполнены, понятие решения следует расширить и ввести понятие обобщенного решения [5].

Различные варианты решения начально-краевой задачи (6.1)–(6.4) методом характеристик продемонстрируем на примерах.

**Задача 6.1.** Найти решение начально-краевой задачи:

$$u_{tt} - u_{xx} = 6(x+t), \quad x > 0, t > 0, \quad (6.9)$$

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad x \geq 0, \quad (6.10)$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (6.11)$$

$$(u_x - u)|_{x=0} = 1 + \frac{9}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^3, \quad t \geq 0. \quad (6.12)$$

После приведения к каноническим переменным

$$\xi = x - t, \eta = x + t$$

уравнение (6.9) примет вид

$$u_{\xi\eta} = -\frac{3}{2}\eta.$$

Проинтегрируем его

$$u = -\frac{3}{4}\xi\eta^2 + f(\xi) + g(\eta)$$

и возвратимся к старым переменным

$$u = -\frac{3}{4}(x-t)(x+t)^2 + f(x-t) + g(x+t). \quad (6.13)$$

Аргумент функции  $f(x-t)$  в первом квадранте  $\bar{Q}$  принимает положительные, нулевые и отрицательные значения, а аргумент функции  $g(x+t)$  — только неотрицательные. Поэтому функцию  $f(x)$  нужно найти при всех значениях аргумента  $-\infty < x < \infty$ , а  $g(x)$  только, если  $x \geq 0$ .

Подставим общее решение (6.13) в начальные условия (6.10), (6.11)

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x^3 + f(x) + g(x) = \sin x, & x \geq 0, \\ -\frac{3}{4}x^3 + f'(x) + g'(x) = 0, & x \geq 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

Из системы (6.14) найдем функции  $f(x)$  и  $g(x)$  при неотрицательных значениях аргумента

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}\sin x - \frac{c}{2}, \quad x \geq 0, \quad (6.15)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\sin x + \frac{c}{2}, \quad x \geq 0. \quad (6.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x-t) &= \frac{1}{4}(x-t)^3 + \frac{1}{2}\sin(x-t) - \frac{c}{2}, \quad x-t \geq 0, \\ g(x+t) &= \frac{1}{2}(x+t)^3 + \frac{1}{2}\sin(x+t) + \frac{c}{2}, \quad x+t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Подставляя функции  $f(x-t)$  и  $g(x+t)$  в (6.13), получим решение задачи в области  $x-t \geq 0, t \geq 0$

$$u = t^3 + 3xt^2 + \sin x \cos t. \quad (6.18)$$

Чтобы найти решение задачи в оставшейся части квадранта  $Q$ , функцию  $f(x)$  нужно определить при отрицательных значениях аргумента. Для этого воспользуемся граничным условием (6.12). После подстановки решения (6.13) в условие (6.12) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}t^2 + f'(-t) + g'(t) - \frac{3}{4}t^3 - f(-t) - g(t) &= \\ = 1 + \frac{9}{4}t^2 - \frac{5}{4}t^3, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

В силу (6.16)

$$g(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}\sin t + \frac{c}{2}, \quad t \geq 0, \quad (6.20)$$

$$g'(t) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}\cos t, \quad t \geq 0. \quad (6.21)$$

Подставив (6.20), (6.21) в (6.19), будем иметь

$$f'(-t) - f(-t) = 1 - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{c}{2}, \quad t \geq 0.$$

После замены  $t = -z$  получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка для функции  $f(z)$

$$f'(z) - f(z) = 1 - \frac{1}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z + \frac{c}{2}, \quad z \leq 0. \quad (6.22)$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов в виде

$$f_p(z) = M \cos z + N \sin z + P. \quad (6.23)$$

Подставляя (6.23) в уравнение (6.22) и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем

$$M = \frac{1}{2}, \quad N = 0, \quad P = -1 - \frac{c}{2}.$$

Общее решение неоднородного уравнения (6.22) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$f(z) = \tilde{c} e^z + \frac{1}{2} \cos z - 1 - \frac{c}{2}, z \leq 0.$$

Отсюда

$$f(x) = \tilde{c} e^x + \frac{1}{2} \cos x - 1 - \frac{c}{2}, x \leq 0. \quad (6.23)$$

Функция  $f(x)$  определяется различными выражениями, если  $x \geq 0$  и  $x \leq 0$  (формулы (6.15), (6.23)) и должна быть непрерывна при любых  $x$ . Воспользуемся условием непрерывности в точке  $x = 0$ ,

$$f(-0) = f(+0). \quad (6.24)$$

Учитывая (6.15), (6.23), из условия (6.24) найдем, что

$$\tilde{c} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \cos x - 1 - \frac{c}{2}, x \leq 0.$$

$$f(x-t) = \frac{1}{2} e^{x-t} + \frac{1}{2} \cos(x-t) - 1 - \frac{c}{2}, x-t \leq 0. \quad (6.25)$$

Подставляя (6.17), (6.25) в (6.13), получим решение задачи в области  $x-t \leq 0, x > 0$

$$u = \frac{1}{2} [(x+t)^2 (2t-x) + e^{(x-t)} + \sin(x+t) + \cos(x-t) - 2].$$

Выпишем ответ задачи:

$$u(x,t) = \begin{cases} t^3 + 3xt^2 + \sin x \cos t, & x-t \geq 0, \\ \frac{1}{2} [(x+t)^2 (2t-x) + e^{(x-t)} + \sin(x+t) + \\ + \cos(x-t) - 2], & x-t < 0. \end{cases}$$

Существуют и другие подходы к решению начально-краевой задачи (6.1)–(6.4). Можно, например, решение начально-краевой задачи для неоднородного уравнения свести к решению начально-краевой задачи для однородного уравнения. Для этого нужно знать частное решение неоднородного волнового уравнения (6.1). Его можно найти по формуле (5.5), если функцию  $f(x, t)$ , заданную в первом квадранте фазовой полуплоскости  $(x, t)$ , продолжить во второй квадрант.

**Задача 6.2.** Найти решение начально-краевой задачи:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 1, x > 0, t > 0. \quad (6.26)$$

$$u|_{t=0} = x^3, x \geq 0, \quad (6.27)$$

$$u_t|_{t=0} = 0, x \geq 0, \quad (6.28)$$

$$u_x|_{x=0} = -3 \cos t + 3, t \geq 0. \quad (6.29)$$

В данной задаче продолжим правую часть уравнения на всю полуплоскость, начальные функции — на всю ось с помощью формул

$$f(x, t) = 1, -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (6.30)$$

$$\varphi(x) = x^3, -\infty < x < \infty, \quad (6.31)$$

$$\psi(x) = 0, -\infty < x < \infty. \quad (6.32)$$

Используя формулу Даламбера (5.6), найдем решение начальной задачи (5.1)–(5.3) с входными данными (6.30)–(6.32):

$$u^{(1)}(x, t) = x^3 + 12xt^2 + \frac{1}{2}t^2.$$

Представим решение задачи (6.26)–(6.29) в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u^{(1)}(x, t) + W(x, t) = \\ &= x^3 + 12xt^2 + \frac{1}{2}t^2 + W(x, t), \end{aligned} \quad (6.33)$$

где  $W(x, t)$  — новая неизвестная функция. Сформулируем начально-краевую задачу для функции  $W(x, t)$ . Для этого подставим сумму (6.33) в уравнение (6.26) и условия (6.27)–(6.29). В результате получим

$$W_{tt} - 4W_{xx} = 0, x > 0, t > 0, \quad (6.34)$$

$$W|_{t=0} = 0, x \geq 0, \quad (6.35)$$

$$W_t|_{t=0} = 0, x \geq 0, \quad (6.36)$$

$$W_x|_{x=0} = -3 \cos t + 3 - 12t^2, t \geq 0. \quad (6.37)$$

Подставляя общее решение уравнения (6.34)

$$W = f(x - 2t) + g(x + 2t) \quad (6.38)$$

в начальные условия (6.35), (6.37), найдем

$$f(x) = -\frac{c}{2}, g(x) = \frac{c}{2}, x \geq 0.$$

Так как при подстановке функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в (6.38) постоянная интегрирования  $c$  всегда сокращается, то ее можно выбрать нулевой. Тогда

$$f(x) = 0, x \geq 0, \quad (6.39)$$

$$g(x) = 0, x \geq 0. \quad (6.40)$$

Поскольку в первом квадранте  $x + 2t \geq 0$ , то, в силу (6.40),  $g(x + 2t) = 0$ , и в решении (6.38) присутствует только прямая бегущая волна

$$W = f(x - 2t). \quad (6.41)$$

Чтобы определить функцию  $f(x)$  при отрицательных значениях  $x$ , воспользуемся граничным условием (6.37). После подстановки (6.41) в (6.37) получим

$$f'(-2t) = -3 \cos t + 3 - 12t^2, t \geq 0.$$

Делая замену  $-2t = x$ , запишем дифференциальное уравнение для определения функции  $f(x)$  при отрицательных значениях  $x$ :

$$f'(x) = -3 \cos \frac{x}{2} + 3 - 3x^2, x \leq 0.$$

Отсюда

$$f(x) = -6 \sin \frac{x}{2} + 3x - x^3 + \tilde{c}, x \leq 0. \quad (6.42)$$

Постоянную интегрирования  $\tilde{c}$  найдем из условия непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $x=0$ . Из формул (6.39), (6.42) следует, что  $f(+0) = 0, f(-0) = \tilde{c}$ . Поэтому  $\tilde{c} = 0$  и

$$f(x) = -6 \sin \frac{x}{2} + 3x - x^3, x \leq 0. \quad (6.43)$$

С учетом (6.39), (6.40), (6.43) решение (6.41) принимает вид

$$W(x, t) = \begin{cases} 0, & x - 2t \geq 0, \\ -6 \sin \frac{(x-2t)}{2} + 3(x-2t) - (x-2t)^3, & x - 2t < 0. \end{cases}$$

В соответствии с формулой (6.33),

$$u = \begin{cases} x^3 + 12xt^2 + \frac{1}{2}t^2, & x - 2t \geq 0, \\ -6 \sin \frac{(x-2t)}{2} + 3(x-2t) + 6x^2t + 8t^3 + \frac{1}{2}t^2, & x - 2t < 0. \end{cases}$$

**Задание 6.** Решить начально-краевые задачи:

1.  $u_{tt} - u_{xx} = 0, x > 0, t > 0, u|_{t=0} = x, u_t|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = \sin t.$
2.  $u_{tt} - 9u_{xx} = 3 \sin t, x > 0, t > 0, u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, u_x|_{x=0} = 27t^2.$
3.  $u_{tt} - 4u_{xx} = 4 \sin x, x > 0, t > 0, u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = 0, (u_x - u)|_{x=0} = 0.$

## 7. Задачи для полуограниченной струны

Для описания процесса колебаний полуограниченной струны ставится начально-краевая задача (6.1)–(6.4). Граничное условие (6.4) принимает конкретный вид в зависимости от рассматриваемой физической задачи. Ниже приведена таблица возможных граничных условий.

Таблица 1

## Типы граничных условий

N	Граничное условие	Описание	Примечание
1а	$u _{x=0} = \mu(t)$	Конец $x = 0$ движется в поперечном направлении по заданному закону	
1б	$u _{x=0} = 0$	Конец $x = 0$ жестко закреплен	
2а	$u_x _{x=0} = \mu(t)$	К концу $x = 0$ приложена заданная внешняя сила $\tilde{f}(t)$ , параллельная оси $u$ .	$\mu(t) = -\frac{1}{T_0} \tilde{f}(t)$
2б	$u_x _{x=0} = 0$	Конец $x = 0$ свободен	
3а	$[u_x - h(u - \mu(t))]_{x=0} = 0$ или $(u_x - hu) _{x=0} = h\mu(t)$	Задан закон движения упруго закрепленного конца $x = 0$	$h = \frac{k}{T_0}$ Со стороны заделки на конец действует упругая сила, пропорциональная смещению и направленная в противоположную сторону $\tilde{f}(t) = -ku(0, t)$
3б	$(u_x - hu) _{x=0} = 0$	Конец $x = 0$ упруго закреплен	

Граничные условия 1а, 1б называют граничными условиями 1–го рода, 2а, 2б — граничными условиями 2–го рода, а 3а, 3б — 3–го рода.

**Задача 7.1.** Решить задачу о свободных колебаниях струны с жестко закрепленным концом.

Соответствующая начально–краевая задача имеет вид

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (7.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad (7.2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geq 0, \quad (7.3)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0. \quad (7.4)$$

Подставим общее решение уравнения (7.1),

$$u = f(x - at) + g(x + at) \quad (7.5)$$

в условия (7.2)–(7.4). В результате получим систему уравнений для определения функций  $f(x)$  и  $g(x)$ :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), x \geq 0, \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x), x \geq 0, \\ f(-at) + g(at) = 0, t \geq 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Из первых двух уравнений системы (7.6) найдем функции  $f(x)$  и  $g(x)$  также как и в случае неограниченной струны (2.5)–(2.10). В отличие от неограниченной струны, здесь функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены только при неотрицательных значениях  $x$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\zeta) d\zeta - \frac{C}{2}, x \geq 0, \quad (7.7)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\zeta) d\zeta + \frac{C}{2}, x \geq 0 \quad (7.8)$$

и нижний предел интегрирования  $x_0 \geq 0$ . Из последнего уравнения системы (7.9) получим

$$f(x) = -g(-x), x \leq 0.$$

Отсюда, учитывая (7.8), найдем функцию  $f(x)$  при отрицательных значениях  $x$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(-x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x} \psi(\zeta) d\zeta - \frac{C}{2}, x \leq 0. \quad (7.9)$$

Аргумент функции  $f(x - at)$  в первом квадранте  $x > 0, t > 0$  может быть как положительным, так и отрицательным. Характеристика  $x - at = 0$  делит первый квадрант на две области (рис. 7.1). Первая область задается неравенствами  $x - at > 0, t > 0$ . Подставляя в (7.5) функции (7.7), (7.8), получим формулу Даламбера. Для нахождения решения во второй области  $x - at < 0, x > 0$  будем использовать (7.9), (7.8).

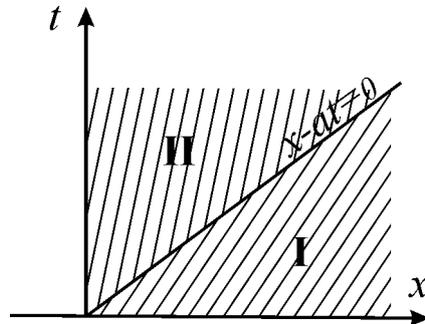


Рис. 7.1. Фазовая полуплоскость для задачи 7.1

Решение задачи в первом квадранте имеет вид:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta, & x-at \geq 0, \\ \frac{1}{2}[-\varphi(at-x) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta, & x-at < 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

**Задача 7.2.** Указать достаточные условия существования классического решения задачи (7.1)–(7.4).

Если

$$\varphi(x) \in C^2(x \geq 0), \psi(x) \in C^1(x \geq 0), \quad (7.11)$$

то решение задачи (7.1)–(7.4), определяемое формулами (7.10), будет иметь непрерывные частные производные по переменным  $x$  и  $t$  до второго порядка включительно в области  $x > 0, t > 0, x - at \neq 0$ . На характеристике  $x - at = 0$  само решение и его производные могут иметь разрыв. Вычислим значение решения на характеристике. Из формул (7.10) получим

$$u|_{x-at=+0} = \frac{1}{2}[\varphi(0) + \varphi(2at)] + \frac{1}{2a} \int_0^{2at} \psi(\zeta) d\zeta,$$

$$u|_{x-at=-0} = \frac{1}{2}[-\varphi(0) + \varphi(2at)] + \frac{1}{2a} \int_0^{2at} \psi(\zeta) d\zeta.$$

Отсюда следует, что

$$u|_{x-at=+0} - u|_{x-at=-0} = \varphi(0).$$

Если  $\varphi(0) \neq 0$ , то решение задачи на характеристике  $x - at = 0$  терпит разрыв первого рода. При выполнении условия

$$\varphi(0) = 0 \quad (7.12)$$

функция (7.10) непрерывна в  $\bar{Q}$ . Аналогично, вычислив производные от функции (7.10) и рассмотрев их на характеристике  $x - at = 0$ , можно убедиться в их непрерывности, если

$$\psi(0) = 0, \quad (7.13)$$

$$\varphi''(0) = 0. \quad (7.14)$$

Условия (7.11)–(7.14) достаточны для того, чтобы решение (7.10) было классическим.

**Задача 7.3.** Показать, что решение задачи (7.1)–(7.4) можно получить из формулы Даламбера, если функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , заданные при  $x \geq 0$ , продолжить на отрицательную полуось  $x$  нечетным образом.

Рассмотрим начальную задачу

$$v_{tt} - v_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (7.15)$$

$$v|_{t=0} = \tilde{\Phi}(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (7.16)$$

$$v_t|_{t=0} = \tilde{F}(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (7.17)$$

в которой функции  $\tilde{\Phi}(x)$  и  $\tilde{F}(x)$  получаются из  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  нечетным продолжением на отрицательную полуось  $x$ ,

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad (7.18)$$

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

Запишем формулу Даламбера для задачи (7.15)–(7.17):

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x - at) + \tilde{\Phi}(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{F}(\zeta) d\zeta. \quad (7.20)$$

Покажем, что в области  $Q$

$$v(x, t) = u(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (7.21)$$

Действительно, если  $x - at > 0$ , то, согласно (7.18), (7.19),

$$\tilde{\Phi}(x \pm at) = \varphi(x \pm at), \quad \tilde{F}(\zeta) = \psi(\zeta), \quad \zeta \in [x - at, x + at],$$

и функция (7.20) совпадает с функцией (7.10). В случае  $x - at < 0$  интеграл в (7.20) разобьем на сумму двух интегралов:

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x - at) + \tilde{\Phi}(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{at-x} \tilde{F}(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \tilde{F}(\zeta) d\zeta. \quad (7.22)$$

Так как интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, равен нулю, то

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x - at) + \tilde{\Phi}(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \tilde{F}(\zeta) d\zeta. \quad (7.23)$$

В области  $x - at < 0$ , согласно (7.18), (7.19),

$$\tilde{\Phi}(x - at) = -\varphi(at - x),$$

$$\tilde{\Phi}(x + at) = \varphi(x + at), \quad \tilde{F}(\zeta) = \psi(\zeta), \quad \zeta \in [at - x, x + at],$$

и поэтому функция (7.23) совпадает с функцией (7.10).

Таким образом, **решение начально–краевой задачи с однородным краевым условием 1–го рода можно найти по формуле Даламбера, если начальные функции продолжить на всю ось нечетно относительно начала координат.**

**Метод отыскания решения начально–краевой задачи в виде формулы Даламбера и продолжения начальных функций на отрицательную полуось называется методом продолжений. Этот метод работает только в случае однородных граничных условий 1–го и 2–го рода.** Рассмотрим пример с однородным граничным условием 2–го рода.

**Задача 7.4.** Решить задачу о колебаниях полугораниченной струны со свободным концом  $x = 0$ .

Сформулируем начально-краевую задачу:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (7.24)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad (7.25)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geq 0, \quad (7.26)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0. \quad (7.27)$$

Покажем, что решение начально-краевой задачи с однородным граничным условием 2-го рода совпадает с решением Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x - at) + \tilde{\Phi}(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{F}(\zeta) d\zeta, \quad (7.28)$$

в котором функции  $\tilde{\Phi}(x)$  и  $\tilde{F}(x)$  являются четными относительно точки  $x = 0$ , а при  $x > 0$  совпадают с  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  соответственно, т.е.

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (7.29)$$

Функция  $u(x, t)$ , определяемая по формуле Даламбера, является решением уравнения (7.24) при произвольных функциях  $\tilde{\Phi}(x)$  и  $\tilde{F}(x)$ , удовлетворяет начальным условиям (7.25), (7.26) в силу (7.29). Покажем, что функция (7.28) удовлетворяет и граничному условию (7.27). Для этого продифференцируем (7.28) по переменной  $x$ :

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}'(x - at) + \tilde{\Phi}'(x + at)] + \frac{1}{2a} [\tilde{F}(x - at) - \tilde{F}(x + at)]$$

Подставляя в последнюю формулу  $x = 0$ , получим

$$u_x|_{x=0} = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}'(-at) + \tilde{\Phi}'(at)] + \frac{1}{2a} [\tilde{F}(-at) - \tilde{F}(at)]. \quad (7.30)$$

Так как функции  $\tilde{\Phi}(x)$  и  $\tilde{F}(x)$  являются четными,

$$\tilde{\Phi}(-x) = \tilde{\Phi}(x), \quad \tilde{F}(-x) = \tilde{F}(x),$$

а производная от четной функции является нечетной,

$$\tilde{\Phi}'(-x) = -\tilde{\Phi}'(x),$$

то из (7.30) следует, что

$$u_x|_{x=0} = 0.$$

**Задача 7.5.** Полугораниченная струна со свободным концом  $x = 0$  возбуждена начальным отклонением, изображенным на рис. 7.2. Начальная ско-

рость равна нулю. Построить профиль струны в моменты времени

$$t_k = \frac{ck}{2a}, k = \overline{1,7}.$$

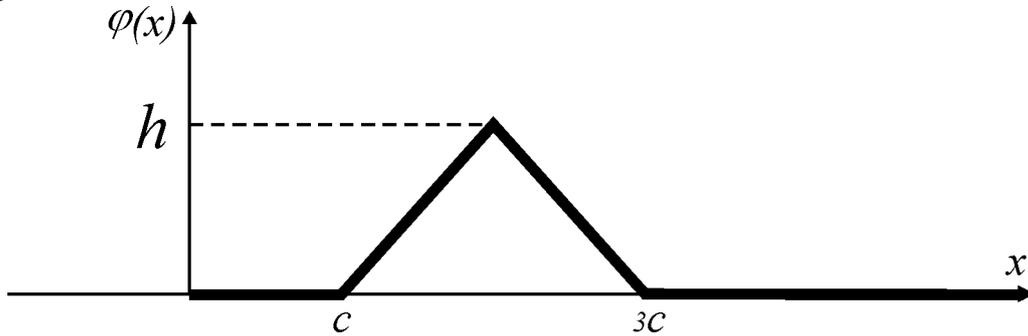


Рис. 7.2. Начальное отклонение полуограниченной струны

Задача сводится к задаче 7.4, в которой

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < c, \\ \frac{h}{c}(x - c), & c \leq x < 2c, \\ \frac{h}{c}(3c - x), & 2c \leq x < 3c, \\ 0, & x \geq 3c, \end{cases} \quad (7.31)$$

$$\psi(x) = 0, x \geq 0.$$

Функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  следует продолжить на отрицательную ось четно:

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < -3c, \\ \frac{h}{c}(3c + x), & -3c \leq x < -2c, \\ \frac{h}{c}(-x - c), & -2c \leq x < -c, \\ 0, & -c \leq x < c, \\ \frac{h}{c}(x - c), & c \leq x < 2c, \\ \frac{h}{c}(3c - x), & 2c \leq x < 3c, \\ 0, & x \geq 3c. \end{cases} \quad (7.32)$$

$$\tilde{F}(x) = 0.$$

Решение Даламбера (7.27) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\Phi}(x - at) + \tilde{\Phi}(x + at)]. \quad (7.33)$$

Для построения профиля струны в момент времени  $t_k$  нужно построить графики функций  $\frac{1}{2}\tilde{\Phi}(x - at_k)$ ,  $\frac{1}{2}\tilde{\Phi}(x + at_k)$  и их сложить. Сложение графиков следует проводить только при значениях  $x > 0$  (рис. 7.3). В фиктивной области  $x < 0$  горбик,двигающийся влево, можно не рисовать. На рис. 7.3 стрелки указывают направление движения горбиков. Если  $0 < t < \frac{c}{a}$  процесс распространения волн происходит так же, как и на неограниченной струне. Заданное отклонение разбивается на две полуволны, движущиеся в разные стороны с постоянной скоростью  $a$ , причем это продолжается до тех пор, пока полуволна, идущая налево, не дойдет до точки  $x = 0$ .

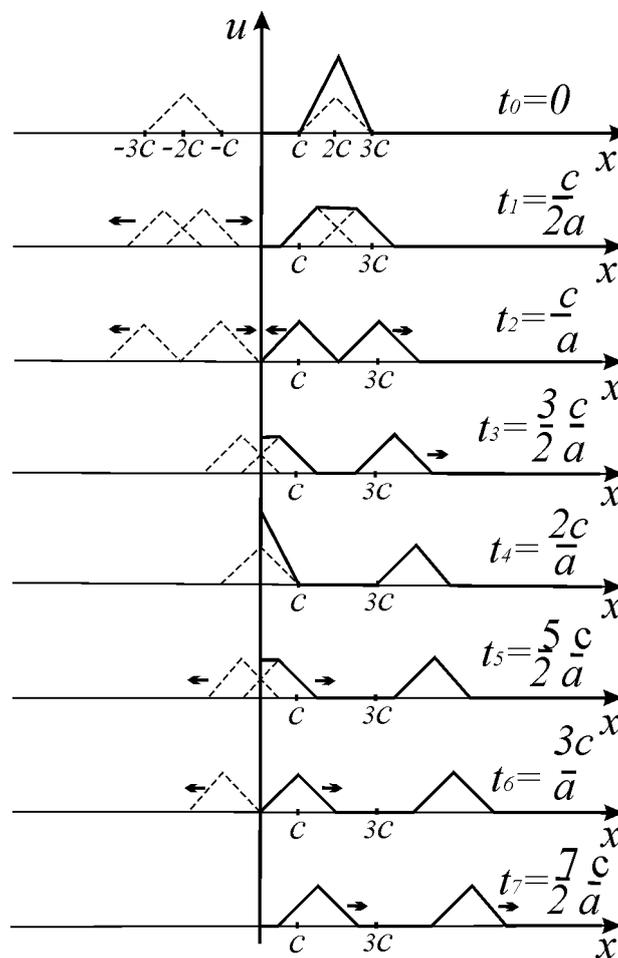


Рис. 7.3. Последовательные положения струны через промежутки времени  $\Delta t = \frac{c}{2a}$

В момент времени  $t = \frac{c}{a}$ , начинается отражение от свободного конца. Заметим, что из фиктивной области  $x < 0$  к точке  $x = 0$  в этот момент времени подходит полуволна с такой же фазой. Отражение заканчивается в момент времени

$t = \frac{3c}{a}$ . Начиная с этого момента времени, две полуволны движутся вправо с постоянной скоростью  $a$ .

**Задача 7.6.** В условиях задачи 7.5 расписать формулы, описывающие закон движения точки струны с координатой  $x = 4c$ .

Будем использовать фазовую полуплоскость  $(x, t)$ . На оси  $x$  отметим точки, при переходе через которые функция  $\tilde{\Phi}(x)$  меняет свое аналитическое выражение. Через эти точки проведем характеристики волнового уравнения, пересекающие прямую  $x = 4c$  (рис. 7.4). Найдем координаты точек пересечения характеристик с прямой  $x = 4c$ :

$$A(4c, \frac{c}{a}), B(4c, \frac{2c}{a}), C(4c, \frac{3c}{a}), D(4c, \frac{5c}{a}), E(4c, \frac{6c}{a}), F(4c, \frac{7c}{a}).$$

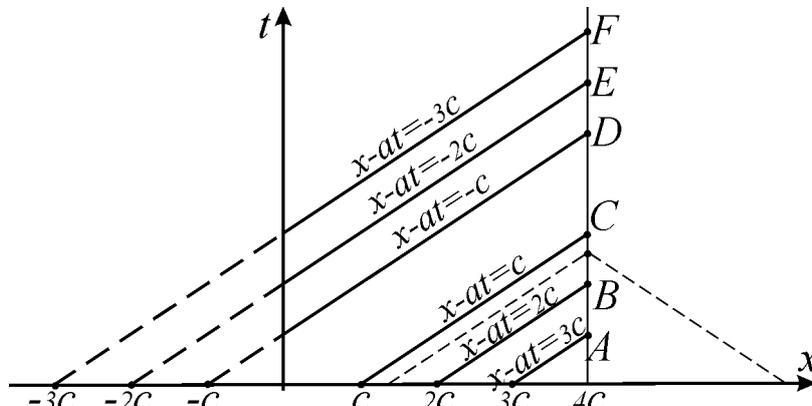


Рис. 7.4. Интерпретация задачи 7.6 на фазовой полуплоскости  $(x, t)$

Значения вторых координат этих точек определяют границы тех интервалов оси  $t$ , в которых функция  $u(4c, t)$  имеет различные аналитические выражения. Возьмем, например, любую точку  $(4c, t_0)$  на отрезке  $BC$  и построим для нее область зависимости  $[4c - at_0, 4c + at_0]$ . Здесь левый конец области зависимости попадает в интервал  $(c, 2c)$ , а правый  $4c + at_0 > 3c$ . Поэтому, в соответствии с формулами (7.33), (7.32), получим

$$\tilde{\Phi}(4c - at_0) = \frac{h}{c}(4c - t_0 - c) = \frac{h}{c}(3c - t_0),$$

$$\tilde{\Phi}(4c + at_0) = 0,$$

$$u(4c, t_0) = \frac{h}{2c}(3c - t_0), \quad \frac{2c}{a} < t_0 < \frac{3c}{a}.$$

Заменим  $t_0$  переменной  $t$ , тогда

$$u(4c, t) = \frac{h}{2c}(3c - t), \quad \frac{2c}{a} < t < \frac{3c}{a}.$$

Аналогично, рассматривая остальные отрезки прямой  $x = 3c$ , выпишем ответ задачи

$$u(4c, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{c}{a}, \frac{3c}{a} \leq t < \frac{5c}{a}, t \geq \frac{7c}{a}, \\ \frac{h}{c}(at - c), & \frac{c}{a} \leq t < \frac{2c}{a}, \\ \frac{h}{c}(3c - at), & \frac{2c}{a} \leq t < \frac{3c}{a}, \\ \frac{h}{c}(at - 5c), & \frac{5c}{a} \leq t < \frac{6c}{a}, \\ \frac{h}{c}(7c - at), & \frac{6c}{a} \leq t < \frac{7c}{a}. \end{cases}$$

**Задача 7.7.** Полуограниченной струне с жестко закрепленным концом  $x = 0$  сообщена начальная скорость, равная  $V_0$  на отрезке  $[c, 2c]$  и нулю вне этого отрезка. Начальное отклонение равно нулю. Построить профиль струны в моменты времени  $t_k = \frac{ck}{2a}$ ,  $k = \overline{1, 5}$ .

Выпишем соответствующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0, \quad x > 0, t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad x \geq 0, \\ u_t|_{t=0} &= \begin{cases} 0, & 0 \leq x < c, x > 2c, \\ V_0, & c \leq x \leq 2c, \end{cases} \\ u|_{x=0} &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Согласно методу продолжений (см. задачу 7.3) решение задачи определяется по формуле Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{F}(\zeta) d\zeta, \quad (7.34)$$

в которой

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < -2c, -c < x < c, x > 2c, \\ -V_0, & -2c \leq x \leq -c, \\ V_0, & c \leq x \leq 2c. \end{cases} \quad (7.35)$$

Здесь использовалось нечетное продолжение начальной скорости на отрицательную полуось  $X$ . Введем функцию

$$F(x) = \frac{1}{2a} \int_{-2c}^x \tilde{F}(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0, & x < -2c, x > 2c, \\ -\frac{V_0}{2a}(x+2c), & -2c \leq x \leq -c, \\ -\frac{V_0 c}{2a}, & -c < x < c, \\ \frac{V_0}{2a}(x-2c), & c \leq x \leq 2c. \end{cases} \quad (7.36)$$

Используя функцию (7.36), решение (7.34) запишем в виде

$$u(x, t) = F(x + at) - F(x - at). \quad (7.37)$$

Для построения профиля струны в момент времени  $t_k$  нужно построить графики функций  $F(x)$ ,  $-F(x)$ . Затем график функции  $F(x)$  сдвинуть на  $at_k$  влево, а функции  $-F(x)$  — на  $at_k$  вправо и сложить графики при  $x > 0$ . На рис. 7.5 приведены последовательные положения струны в моменты времени  $t_k$ .

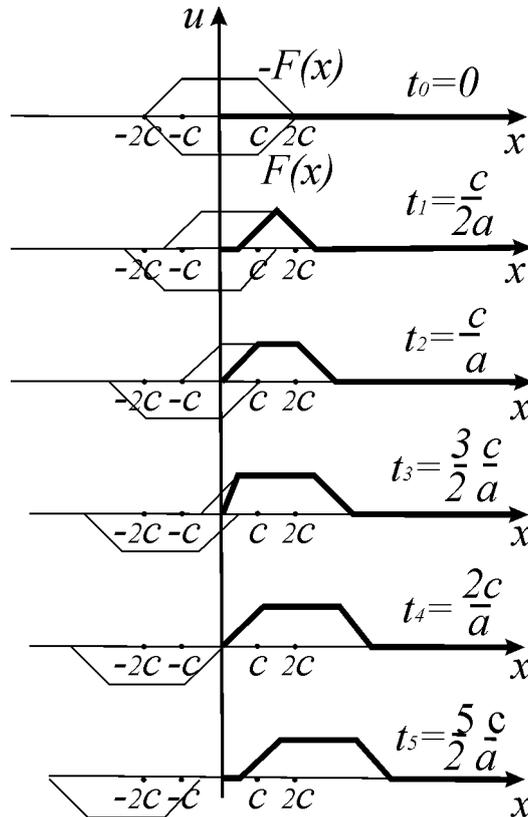


Рис. 7.5. Последовательные положения струны через промежутки времени  $\Delta t = \frac{c}{2a}$

В интервале времени  $0 < t < \frac{c}{a}$  возмущение от точки  $c$  не успевает достичь границы  $x = 0$ , граничное условие не влияет на характер решения, процесс распространения волны происходит так же, как на неограниченной струне.

Если  $\frac{c}{a} < t < \frac{2c}{a}$  происходит процесс отражения от закрепленного конца. Начиная с момента времени  $t = \frac{2c}{a}$ , волна с профилем в виде равнобедренной трапеции с постоянной скоростью  $a$  движется вправо.

**Задача 7.8.** В условиях задачи 7.7 расписать формулы, описывающие профиль струны в момент времени  $t_0$ ,  $\frac{c}{a} < t_0 < \frac{3c}{2a}$ .

Будем использовать фазовую полуплоскость  $(x, t)$  (рис. 7.6). Временные координаты всех точек пересечения характеристик (рис. 7.6) разграничивают различные этапы распространения волнового процесса. В интервале времени  $(\frac{c}{a}, \frac{3c}{2a})$ , заданном в задаче, происходит первая половина отражения волны от закрепленного конца.

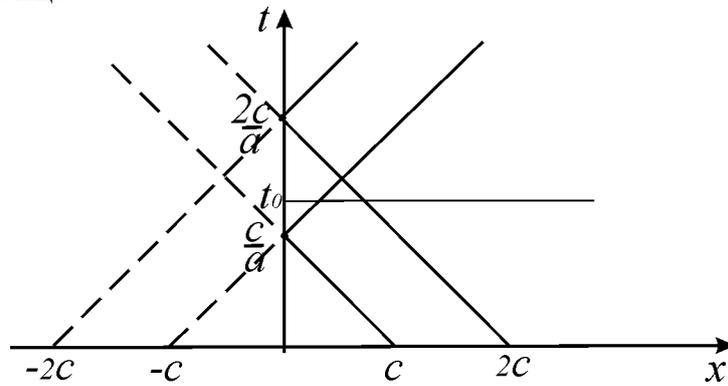


Рис. 7.6. Фазовая полуплоскость для задачи 7.8

Возьмем точку  $x = x_0$ ,  $0 < x_0 < -c + at_0$  на прямой  $t = t_0$ . Левый конец области зависимости для точки  $(x_0, t_0)$  лежит в интервале  $(-2c, -c)$ , а правый в интервале  $(c, 2c)$ . Поэтому по формуле (7.36)

$$F(x_0 - at_0) = -\frac{V_0}{2a}(x_0 - at_0 + 2c),$$

$$F(x_0 + at_0) = \frac{V_0}{2a}(x_0 + at_0 - 2c).$$

Учитывая формулу (7.37), найдем смещение струны в точке  $(x_0, t_0)$

$$u(x_0, t_0) = \frac{V_0}{a}x_0, \quad 0 \leq x_0 < -c + at_0.$$

Заменяем  $x_0$  переменной  $x$  и перепишем:

$$u(x, t_0) = \frac{V_0}{a}x, \quad 0 \leq x < -c + at_0.$$

Перемещая точку  $(x, t_0)$  по прямой  $t = t_0$  и определяя для нее области зависимости, используя формулы (7.36), (7.37), найдем

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{V_0}{a} x, & 0 \leq x < -c + at_0, \\ \frac{V_0}{2a} (x + at_0 - c), & -c + at_0 \leq x < 2c - at_0, \\ \frac{V_0 c}{2a}, & 2c - at_0 \leq x < c + at_0, \\ -\frac{V_0}{2a} (x - at_0 - 2c), & c + at_0 \leq x < 2c + at_0, \\ 0, & x \geq 2c + at_0. \end{cases}$$

До точек с координатой  $x > 2c + at_0$  в момент времени  $t = t_0$  возмущение еще не дошло.

**Задача 7.9.** Конец полуограниченной струны  $x = 0$  движется по закону  $u|_{x=0} = \frac{1}{3} \sin 3t$ . Найти отклонения всех точек струны при  $t > 0$ , если в начальный момент времени отклонения и скорости всех точек струны равны нулю.

*Начально–краевые задачи для однородного волнового уравнения*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

*с нулевыми начальными условиями*

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (7.38)$$

*и неоднородным граничным условием называются задачами о распространении краевого режима.* Допишем граничное условие задачи 7.9

$$u|_{x=0} = \frac{1}{3} \sin 3t, \quad t \geq 0. \quad (7.39)$$

Решение задачи можно найти в виде прямой бегущей волны

$$u(x, t) = f(x - at). \quad (7.40)$$

Подставляя (7.40) в условия (7.38), (7.39), получим

$$\begin{cases} f(x) = 0, & x \geq 0, \\ f(-at) = \frac{1}{3} \sin 3t, & t \geq 0. \end{cases} \quad (7.41)$$

Система (7.41) определяет функцию  $f(x)$  при всех значениях  $x$ :

$$\begin{cases} f(x) = 0, & x \geq 0, \\ f(x) = -\frac{1}{3} \sin \frac{3x}{a}, & x < 0. \end{cases} \quad (7.42)$$

Подставив функцию (7.42) в (7.40), получим решение задачи:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x - at \geq 0, \\ \frac{1}{3} \sin 3\left(t - \frac{x}{a}\right), & x - at < 0. \end{cases} \quad (7.43)$$

В фиксированный момент времени  $t$  возмущения от конца струны  $x = 0$ , распространяющиеся со скоростью  $a$ , не дойдут до тех точек струны, координаты которых  $x \geq at$  (рис. 7.7,  $a = 1$ ). В тоже время отклонение струны в точке  $x, x < at$  определяется отклонением конца струны в предшествующий момент времени  $t - \frac{x}{a}$  (эффект запаздывания). Здесь  $\frac{x}{a}$  — время, которое требуется возмущению, распространяющемуся со скоростью  $a$ , для того, чтобы пройти путь от конца  $x = 0$  до точки с координатой  $x$ .

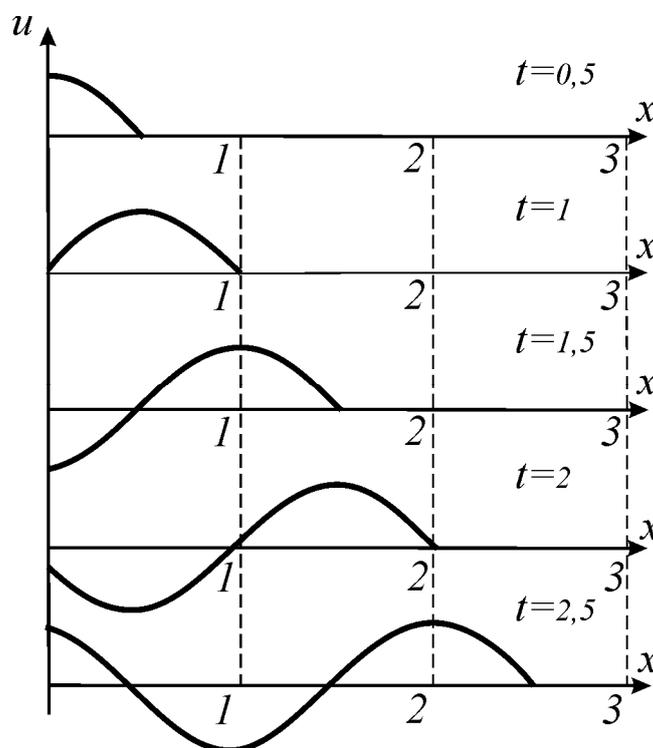


Рис. 7.7. График решения задачи 7.9 в фиксированные моменты времени  $t_k = \frac{k}{2}, k = \overline{1,5}$

### Задание 7

1. Полуограниченная струна, закрепленная в конце  $x = 0$ , возбуждена начальным отклонением, отличным от нуля лишь на интервале  $(c, 3c)$  и имеющим форму ломаной с вершинами в точках  $c, 2c, 3c$ . Построить профиль струны в моменты времени  $t_k = \frac{ck}{2a}, k = \overline{1,7}$ . Расписать формулы описывающие профиль струны в момент времени  $t = \frac{4c}{3a}$ .
2. Полуограниченной струне со свободным концом  $x = 0$  сообщена начальная скорость, равная  $V_0$  на отрезке  $[c, 2c]$  и нулю вне этого отрезка.

Построить профиль струны в моменты времени  $t_k = \frac{ck}{2a}$ ,  $k = \overline{1,7}$ . Расписать формулы, представляющие закон движения точки струны с координатой  $x = 3c$ .

3. Решить задачи о распространении краевого режима:

1.  $u_{tt} - u_{xx} = 0, x > 0, t > 0,$

$$u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, x \geq 0,$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{1}{3} \sin 3t, t \geq 0.$$

2.  $u_{tt} - u_{xx} = 0, x > 0, t > 0,$

$$u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, x \geq 0,$$

$$(u_x - u)|_{x=0} = \sin 3t, t \geq 0.$$

## 8. Задачи для ограниченной струны с однородными граничными условиями

Для описания колебаний ограниченной струны ставится следующая начально-краевая задача:

*найти решение уравнения*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), 0 < x < l, t > 0, \quad (8.1)$$

*удовлетворяющее начальным*

$$u|_{t=0} = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (8.2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (8.3)$$

*и граничным условиям*

$$(\alpha_1 u_x - \beta_1 u)|_{x=0} = \mu(t), t \geq 0, \quad (8.4)$$

$$(\alpha_2 u_x + \beta_2 u)|_{x=l} = \mu(t), t \geq 0. \quad (8.5)$$

Граничные условия задачи определяются физической постановкой задачи. Различные варианты граничных условий для левого конца струны приведены в таблице 1. Формально граничные условия для правого конца могут быть получены из граничных условий для левого конца, если сделать замену переменных  $\xi = l - x$ , при этом левый и правый концы меняются местами. Например, граничное условие упруго закрепленного левого конца имеет вид

$$(u_x - hu)|_{x=0} = 0.$$

После замены получим

$$(-u_\xi - hu)|_{\xi=l} = 0.$$

Заменяя  $\xi$  переменной  $x$ , граничное условие, перепишем в виде

$$(u_x + hu)|_{x=l} = 0.$$

Ниже приведена таблица различных типов граничных условий для правого конца струны.

**Таблица 2**

Типы граничных условий для правого конца струны

N	Граничное условие	Описание	Примечание
1а	$u _{x=l} = \mu(t)$	Конец $x = l$ движется в поперечном направлении по заданному закону	
1б	$u _{x=l} = 0$	Конец $x = l$ жестко закреплен	
2а	$u_x _{x=l} = \mu(t)$	К концу $x = l$ приложена заданная внешняя сила $\tilde{f}(t)$ , параллельная оси $u$ .	$\mu(t) = \frac{1}{T_0} \tilde{f}(t)$
2б	$u_x _{x=l} = 0$	Конец $x = l$ свободен	
3а	$[u_x + h(u - \mu(t))] _{x=l} = 0$ или $(u_x + hu) _{x=l} = h\mu(t)$	Задан закон движения упруго закрепленного конца $x = l$	$h = \frac{k}{T_0}$ Со стороны заделки на конец действует упругая сила, пропорциональная смещению и направленная в противоположную сторону $\tilde{f}(t) = -ku(l, t)$
3б	$(u_x + hu) _{x=l} = 0$	Конец $x = l$ упруго закреплен	

Продемонстрируем возможности метода характеристик на решении примеров начально–краевых задач для однородного волнового уравнения.

В этом параграфе будем рассматривать начально–краевые задачи для однородного волнового уравнения с простейшими граничными условиями. Простейшими граничными условиями называют однородные граничные условия 1-го и 2-го рода. Решение таких задач можно искать в виде формулы Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x - at) + \tilde{\Phi}(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{F}(\xi) d\xi. \quad (8.1)$$

Для любых  $\tilde{\Phi}(x)$ ,  $\tilde{F}(x)$  функция (8.1) удовлетворяет однородному волновому уравнению. Конкретный вид функций  $\tilde{\Phi}(x)$ ,  $\tilde{F}(x)$  находится из начальных и

граничных условий. Можно сформулировать четыре различных начально-краевых задач для однородного волнового уравнения с простейшими граничными условиями на концах  $x = 0$ ,  $x = l$ .

### Задача 8.1

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \quad (8.2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (8.3)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (8.4)$$

$$u|_{x=0} = 0, t \geq 0, \quad (8.5)$$

$$u|_{x=l} = 0, t \geq 0. \quad (8.6)$$

Подстановка функции (8.1) в условия (8.3)–(8.6) приводит к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Phi}(x) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \\ \tilde{F}(x) = \psi(x), 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{2}(\tilde{\Phi}(at) + \tilde{\Phi}(-at)) + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \tilde{F}(\zeta) d\zeta = 0, t \geq 0, \\ \frac{1}{2}[\tilde{\Phi}(l-at) + \tilde{\Phi}(l+at)] + \frac{1}{2a} \int_{l-at}^{l+at} \tilde{F}(\zeta) d\zeta = 0, t \geq 0. \end{array} \right. \quad (8.7)$$

Согласно первым двум уравнениям системы, функции  $\tilde{\Phi}(x)$  и  $\tilde{F}(x)$  совпадают с функциями  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  на отрезке  $0 \leq x \leq l$ . Третье и четвертое соотношения системы (8.7) будут выполняться при всех  $t \geq 0$ , если функции  $\tilde{\Phi}(x)$ ,  $\tilde{F}(x)$  нечетны относительно точек  $x = 0$ ,  $x = l$ :

$$\tilde{\Phi}(-x) = -\tilde{\Phi}(x), \tilde{\Phi}(l-x) = -\tilde{\Phi}(l+x), \quad (8.8)$$

$$\tilde{F}(-x) = -\tilde{F}(x), \tilde{F}(l-x) = -\tilde{F}(l+x). \quad (8.9)$$

Покажем, что из равенств (8.8), (8.9) следует, что функции  $\tilde{\Phi}(x)$ ,  $\tilde{F}(x)$  являются периодическими с периодом  $2l$ . Действительно,

$$\tilde{\Phi}(2l+x) = \tilde{\Phi}(l+(l+x)) = -\tilde{\Phi}(l-(l+x)) = -\tilde{\Phi}(-x) = \tilde{\Phi}(x)$$

Аналогично получается, что

$$\tilde{F}(2l+x) = \tilde{F}(x).$$

Таким образом, функции  $\tilde{\Phi}(x)$  и  $\tilde{F}(x)$  совпадают с функциями  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  на промежутке  $[0, l]$  и являются  $2l$ -периодическими нечетными продолжениями начальных функций на всю ось  $x$ . В этом случае функция (8.1) удовлетворяет уравнению (8.2) и условиям (8.3)–(8.6).

Покажем, что решение задачи 8.1 является функцией, периодической по переменной  $t$  с периодом  $\frac{2l}{a}$ . В соответствии с формулой (8.1),

$$u(x, t + \frac{2l}{a}) = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x - at - 2l) + \tilde{\Phi}(x + at + 2l)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at-2l}^{x+at+2l} \tilde{F}(\zeta) d\zeta. \quad (8.10)$$

В интеграле формулы (8.10) сделаем замену переменной  $\xi = \zeta + 2l$ , воспользуемся условием периодичности подынтегральной функции и представим получившийся интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{x-at-2l}^{x+at+2l} \tilde{F}(\zeta) d\zeta &= \int_{x-at}^{x+at+4l} \tilde{F}(\xi - 2l) d\xi = \int_{x-at}^{x+at+4l} \tilde{F}(\xi) d\xi = \\ &= \int_{x-at}^{x+at} \tilde{F}(\xi) d\xi + \int_{x+at}^{x+at+4l} \tilde{F}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Так как интеграл от периодической функции по любому промежутку с длиной, кратной периоду, имеет одно и то же значение, то

$$\int_{x+at}^{x+at+4l} \tilde{F}(\xi) d\xi = \int_{-2l}^{2l} \tilde{F}(\xi) d\xi.$$

Последний интеграл равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции и симметричности промежутка интегрирования. Поэтому

$$\int_{x-at-2l}^{x+at+2l} \tilde{F}(\xi) d\xi = \int_{x-at}^{x+at} \tilde{F}(\xi) d\xi. \quad (8.12)$$

Учитывая (8.12) и периодичность функции  $\tilde{\Phi}(x)$ , формулу (8.10) приведем к виду

$$u(x, t + \frac{2l}{a}) = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(x - at) + \tilde{\Phi}(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{F}(\xi) d\xi = u(x, t).$$

### Задача 8.2.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (8.10)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8.11)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8.12)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (8.13)$$

$$u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \quad (8.14)$$

Задача 8.2 отличается от задачи 8.1 только граничным условием на конце  $x = 0$ . Поэтому часть результатов задачи 8.1 справедлива и в этой задаче:

$$\tilde{\Phi}(x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$\tilde{F}(x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\tilde{\Phi}(l-x) = -\tilde{\Phi}(l+x), \quad \tilde{F}(l-x) = -\tilde{F}(l+x). \quad (8.15)$$

Чтобы воспользоваться условием (8.13), вычислим производную от функции (8.1):

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\Phi}'(x - at) + \tilde{\Phi}'(x + at)] + \frac{1}{2a}[\tilde{F}(x + at) - \tilde{F}(x - at)] \quad (8.16)$$

Подставляя (8.16) в (8.13), получим

$$\frac{1}{2}[\tilde{\Phi}'(-at) + \tilde{\Phi}'(at)] + \frac{1}{2a}[\tilde{F}(at) - \tilde{F}(-at)] = 0. \quad (8.17)$$

Соотношение (8.17) будет выполняться при всех  $t \geq 0$  для четных относительно точки  $x = 0$  функций  $\tilde{F}(x)$  и  $\tilde{\Phi}(x)$ ,

$$\tilde{F}(-x) = \tilde{F}(x), \quad \tilde{\Phi}(-x) = \tilde{\Phi}(x), \quad (8.18)$$

т.к. производная от четной функции  $\tilde{\Phi}(x)$  относительно точки  $x = 0$  является функцией нечетной относительно этой точки

$$-\tilde{\Phi}'(-x) = \tilde{\Phi}'(x).$$

Функции, удовлетворяющие условиям (8.15), (8.18) при всех  $x$ , периодичны с периодом  $4l$ . Обоснование проведем для функции  $\tilde{F}(x)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(4l + x) &= \tilde{F}(l + (3l + x)) = -\tilde{F}(l - (3l + x)) = -\tilde{F}(-2l - x) = \\ &= -\tilde{F}(2l + x) = -\tilde{F}(l + (l + x)) = \tilde{F}(l - (l + x)) = \tilde{F}(-x) = \tilde{F}(x). \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи 8.2 определяется по формуле (8.1), в которой функции  $\tilde{\Phi}(x)$  и  $\tilde{F}(x)$  получаются из функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ , четным продолжением относительно точки  $x = 0$ , нечетным — относительно точки  $x = l$ , а затем — периодическим продолжением с периодом  $4l$  на всю ось.

Можно показать, что решение задачи 8.2 имеет период по переменной  $t$ , равный  $\frac{4l}{a}$ . Действительно, аналогично задаче 8.1, получим

$$\begin{aligned} u(x, t + \frac{4l}{a}) &= \frac{1}{2}[\tilde{\Phi}(x - at - 4l) + \tilde{\Phi}(x + at + 4l)] + \\ &+ \int_{x-at}^{x+at} \tilde{F}(\xi) d\xi + \int_{x+at}^{x+at+8l} \tilde{F}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Так как функция  $\tilde{F}(x)$  периодична с периодом  $4l$ , то

$$\int_{x+at}^{x+at+8l} \tilde{F}(\xi) d\xi = \int_{-3l}^{5l} \tilde{F}(\xi) d\xi.$$

Интеграл по симметричному промежутку относительно точки  $x = l$  от нечетной относительно этой точки функции равен нулю. Поэтому, учитывая периодичность  $\tilde{\Phi}(x)$ , получим

$$u(x, t + \frac{4l}{a}) = u(x, t).$$

**Задача 8.3.**

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \quad (8.19)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (8.20)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (8.21)$$

$$u|_{x=0} = 0, t \geq 0, \quad (8.22)$$

$$u_x|_{x=l} = 0, t \geq 0. \quad (8.23)$$

Задача решается аналогично задачам 8.1, 8.2. Приведем ответ задачи. Решение задачи имеет вид (8.1). Функции  $\tilde{F}(x)$  и  $\tilde{\Phi}(x)$  совпадают на отрезке  $0 \leq x \leq l$  с функциями  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , а вне этого отрезка с продолжением этих функций на всю ось  $x$ . Способ продолжения зависит от типа граничного условия. В точке  $x = 0$  задано граничное условие 1-го рода, поэтому функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  продолжают на отрицательную ось нечетно относительно точки  $x = 0$ . В точке  $x = l$  задано граничное условие 2-го рода, и продолжение на полуось  $x \geq l$  будет четным относительно точки  $x = l$ . Функции  $\tilde{F}(x)$  и  $\tilde{\Phi}(x)$  имеют период  $4l$ . Решение задачи периодически по переменной  $t$  с периодом  $\frac{4l}{a}$ .

**Задача 8.4.**

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \quad (8.24)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (8.25)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (8.26)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, t \geq 0, \quad (8.27)$$

$$u_x|_{x=l} = 0, t \geq 0. \quad (8.28)$$

Граничные условия и в точке  $x = 0$  и в точке  $x = l$  — однородные 2-го рода. Функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  продолжают относительно точек  $x = 0, x = l$  четно. Получившиеся функции  $\tilde{F}(x)$  и  $\tilde{\Phi}(x)$  будут периодическими с периодом  $2l$ . Решение (8.1) в общем случае не является функцией периодической по переменной  $t$ . Преобразования, аналогичные (8.10)–(8.12) приводят к результату

$$u(x, t + \frac{2l}{a}) = u(x, t) + \frac{2}{a} \int_0^l \psi(\xi) d\xi, \quad (8.29)$$

так как 
$$\int_{-2l}^{2l} \tilde{F}(\xi) d\xi = 4 \int_0^l \psi(\xi) d\xi.$$

Из соотношения (8.29) следует, что

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + \frac{t}{l} \int_0^l \psi(\xi) d\xi,$$

где функция  $\tilde{u}(x, t)$  является периодической по переменной  $t$  с периодом  $\frac{2l}{a}$ .

**Задача 8.5.** Решить задачу о колебании струны  $0 < x < 1$  с жестко закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму синусоиды  $\varphi(x) = \sin \pi x$ .

Соответствующая начально-краевая задача имеет вид:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, 0 < x < 1, t > 0, \quad (8.30)$$

$$u|_{t=0} = A \sin 2\pi x, 0 \leq x \leq 1, \quad (8.31)$$

$$u_t|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq 1, \quad (8.32)$$

$$u|_{x=0} = 0, t \geq 0, \quad (8.33)$$

$$u|_{x=1} = 0, t \geq 0. \quad (8.34)$$

Это частный случай задачи 8.1. Для нахождения функции  $\tilde{\Phi}(x)$  будем использовать ее свойства, приведенные в задаче 8.1. На отрезке  $0 \leq x \leq 1$

$$\tilde{\Phi}(x) = A \sin 2\pi x$$

Пусть  $-1 \leq x \leq 0$ . Используя нечетность функции  $\tilde{\Phi}(x)$  относительно точки  $x = 0$ , получим

$$\tilde{\Phi}(x) = -\tilde{\Phi}(-x) = -A \sin(-2\pi x) = A \sin 2\pi x.$$

Таким образом, на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$

$$\tilde{\Phi}(x) = A \sin 2\pi x.$$

На всю ось  $X$  функция продолжается периодически с периодом 2. Поэтому

$$\tilde{\Phi}(x) = A \sin 2\pi x, -\infty < x < \infty.$$

Так как  $\psi(x) = 0, 0 \leq x \leq l$ , то для функции  $\tilde{F}(x)$  получим

$$\tilde{F}(x) = 0, -\infty < x < \infty.$$

Подставляя найденные функции в формулу (8.1), найдем решение задачи

$$u(x, t) = \frac{A}{2} [\sin 2\pi(x - t) + \sin 2\pi(x + t)] = A \sin 2\pi x \cos 2\pi t, \quad (8.35)$$

которое представляет собой произведение двух функций. Первая из этих функций зависит только от переменной  $x$ , вторая только от  $t$ . Решения такого

типа называются **стоячими волнами**. Точка  $x = \frac{1}{2}$  остается неподвижной в процессе движения,  $u(\frac{1}{2}, t) = 0, t \geq 0$  (рис. 8.1). Такие точки называются **узлами стоячей волны**. Точки, в которых  $u(x, t)$  достигает максимальных значений, называются **пучностями**, а минимальные — **впадинами стоячей волны**. Стоячая волна (8.35) получается в результате суперпозиции двух синусоидальных бегущих волн одинаковой амплитуды, распространяющихся в противоположных направлениях со скоростью  $a = 1$ .

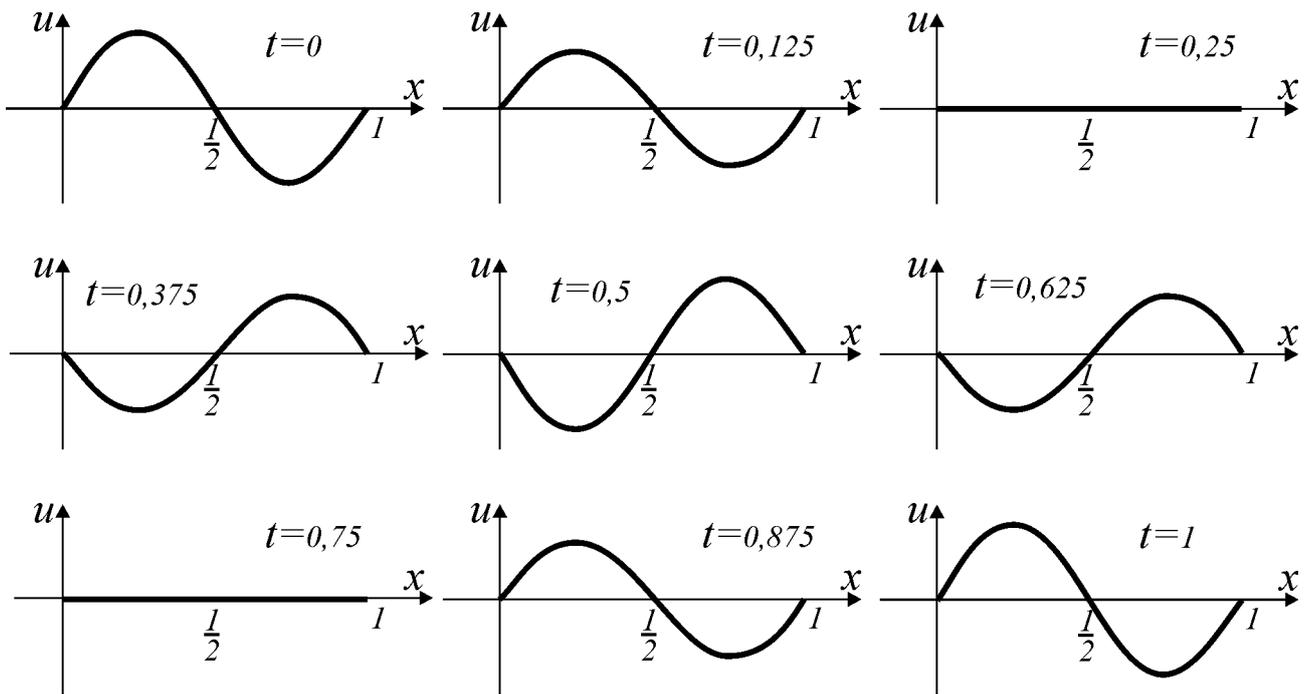


Рис. 8.1. График решения задачи 8.5 в фиксированные моменты времени  $t_k = \frac{k}{8}, k = \overline{0,8}$

### Задача 8.6.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = Ax, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0.$$

Найти решение задачи в момент времени  $t = \frac{3l}{2a}$ .

Используя результаты задачи 8.3 функцию  $Ax$ , заданную на интервале  $0 \leq x \leq l$ , сначала продолжим нечетно относительно точки  $x = 0$ , четно относительно точки  $x = l$ , а затем периодически с периодом  $4l$  (рис. 8.2).

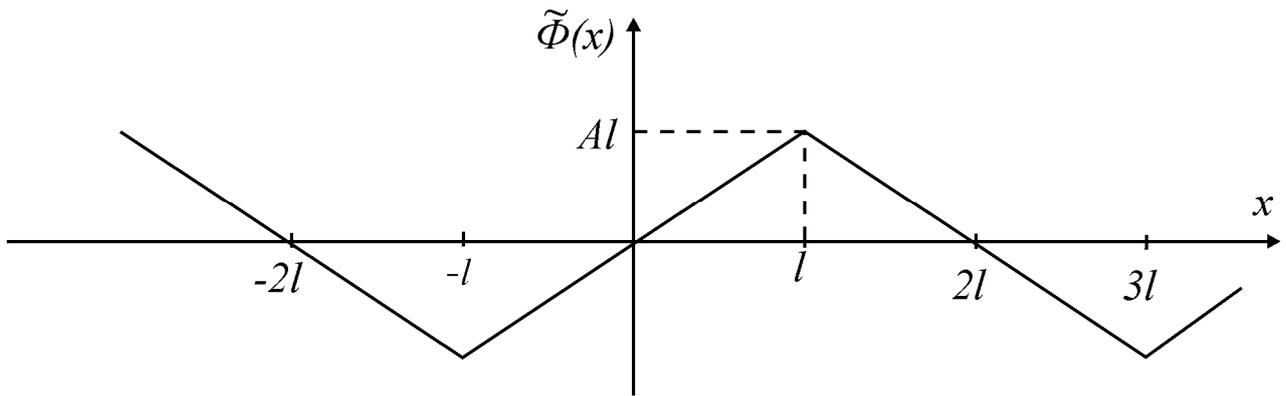


Рис. 8.2. График функции  $\tilde{\Phi}(x)$  в задаче 8.6

Выберем отрезок длины  $4l$ , на котором продолженная функция  $\tilde{\Phi}(x)$  меняет аналитическое выражение только один раз. На этом интервале

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} Ax, & -l \leq x \leq l, \\ A(2l - x), & l < x \leq 3l. \end{cases} \quad (8.36)$$

Чтобы расписать решение задачи по формуле (8.1), будем использовать фазовую полуплоскость. На оси  $x$  фазовой полуплоскости  $(x, t)$  отметим точки, разбивающие ось на отрезки, в которых продолженную функцию можно записать аналитически одним выражением. Через точки с координатами  $-3l, -l, l, 3l$  проведем характеристики. Прямоугольник  $0 < x < l, 0 < t < \frac{4l}{a}$  разбивается этими характеристиками на 5 областей (рис. 8.3).

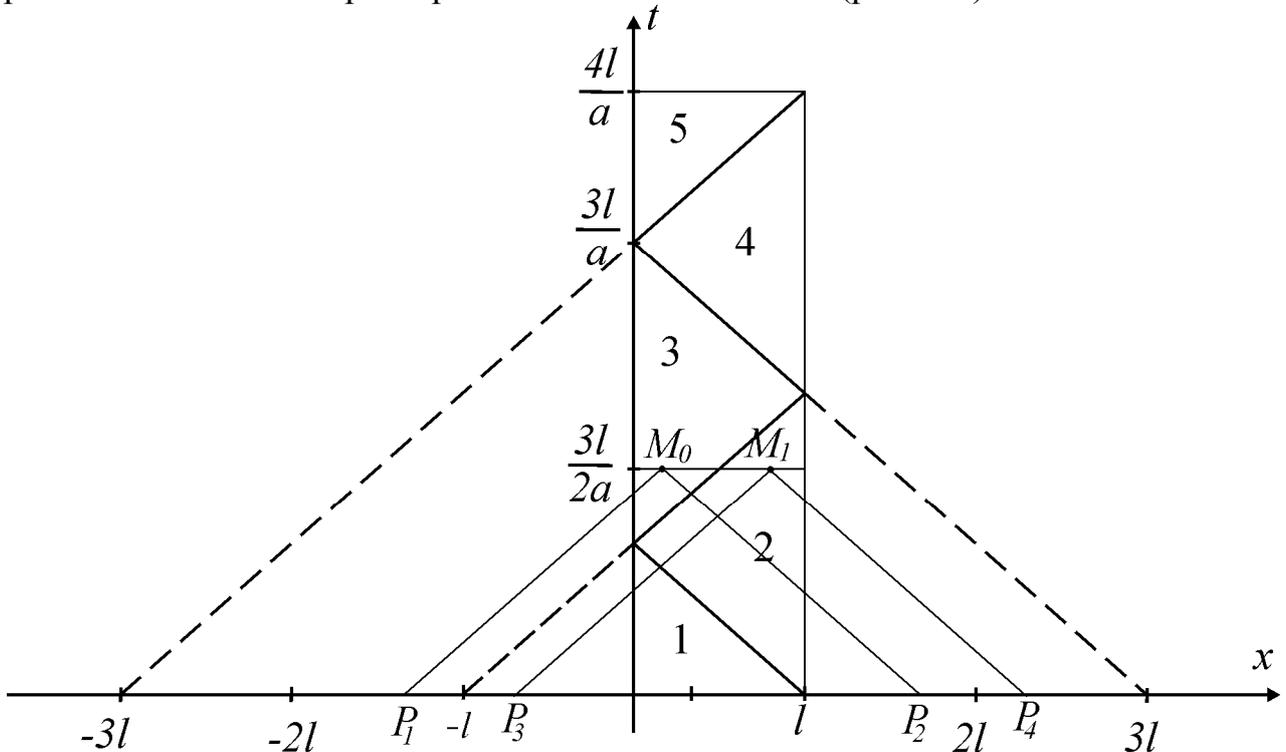


Рис. 8.3. Фазовая полуплоскость для задачи 8.6

Проведем прямую  $t = \frac{3l}{2a}$ . Эта прямая пересекает 3 и 2 области. Абсцисса точки пересечения этой прямой и характеристики  $x - at = -l$  имеет значение  $x = \frac{l}{2}$ . В момент времени  $t = \frac{3l}{2a}$  решение будет записываться разными выражениями в интервалах,  $0 < x < \frac{l}{2}$  и  $\frac{l}{2} < x < l$ .

Возьмем произвольную точку в первом интервале  $M_0(x_0, \frac{3l}{2a})$ ,  $0 < x_0 < \frac{l}{2}$  и построим для нее область зависимости. Абсциссы точек  $P_1$  и  $P_2$  удовлетворяют неравенствам

$$-3l < x_0 - \frac{3l}{2} < -l, \quad l < x_0 + \frac{3l}{2} < 3l.$$

Учитывая, что функция  $\tilde{\Phi}(x)$  имеет период  $4l$ , получим

$$\tilde{\Phi}\left(x_0 - \frac{3l}{2}\right) = \tilde{\Phi}\left(x_0 - \frac{3l}{2} + 4l\right) = \tilde{\Phi}\left(x_0 + \frac{5l}{2}\right),$$

причем  $l < x_0 + \frac{5l}{2} < 3l$ . Тогда, в соответствии с (8.36),

$$\tilde{\Phi}\left(x_0 - \frac{3l}{2}\right) = A\left(2l - \left(x_0 + \frac{5l}{2}\right)\right) = -A\left(x_0 + \frac{l}{2}\right),$$

$$\tilde{\Phi}\left(x_0 + \frac{3l}{2}\right) = A\left(2l - \left(x_0 + \frac{3l}{2}\right)\right) = A\left(\frac{l}{2} - x_0\right).$$

Подставляя найденные функции в (8.1) и учитывая, что  $\tilde{F}(x) = 0$ , получим

$$u\left(x_0, \frac{3l}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Phi}\left(x_0 - \frac{3l}{2a}\right) + \tilde{\Phi}\left(x_0 + \frac{3l}{2a}\right)\right) = -2Ax_0, \quad 0 < x_0 < \frac{l}{2} \quad (8.37)$$

Чтобы найти решение задачи в интервале  $\frac{l}{2} < x < l$ , возьмем произвольную

точку  $M_1(x_1, \frac{3l}{2a})$ ,  $\frac{l}{2} < x_1 < l$  и построим для нее область зависимости. Абсциссы точек  $P_3$  и  $P_4$  удовлетворяют неравенствам

$$-l < x_1 - \frac{3l}{2a} < l,$$

$$l < x_1 + \frac{3l}{2a} < 3l.$$

Используя формулы (8.36), (8.1), будем иметь

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right) &= A\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right), \\ \tilde{\Phi}\left(x_1 + \frac{3l}{2}\right) &= A\left(2l - \left(x_1 + \frac{3l}{2}\right)\right), \\ u\left(x_1, \frac{3l}{2a}\right) &= -Al, \quad \frac{l}{2} < x_1 < l.\end{aligned}\tag{8.38}$$

Заменяя в формулах (8.37), (8.38)  $x_0$  и  $x_1$  переменной  $x$ , выпишем ответ

$$u\left(x, \frac{3l}{2a}\right) = \begin{cases} -2Ax, & 0 < x < \frac{l}{2}, \\ -Al, & \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

**Задача 8.7.** Однородная струна длиной  $l$ , закрепленная на концах  $x = 0$  и  $x = l$ , в начальный момент времени оттянута в точке  $x = \frac{l}{3}$  на малое расстояние  $h$  от оси  $x$ , затем отпущена без сообщения ее точкам начальной скорости. Найти отклонение  $u(x, t)$  при всех  $0 < t < \frac{l}{3a}$ .

Задача сводится к решению волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

с условиями

$$\begin{aligned}u|_{t=0} &= \begin{cases} \frac{3hx}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{3}, \\ \frac{3h(l-x)}{2l}, & \frac{l}{3} < x \leq l, \end{cases} \\ u_t|_{t=0} &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{x=l} &= 0, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

В соответствии с задачей 8.1 решение задачи представляется по формуле (8.1), в которой  $\tilde{F}(x) \equiv 0, -\infty < x < \infty$ . Функция  $\tilde{\Phi}(x)$  получается из функции  $\varphi(x)$  нечетным продолжением относительно точек  $x = 0, x = l$ , а затем периодически с периодом  $2l$ . Функция  $\tilde{\Phi}(x)$  изображена на рис. 8.4.

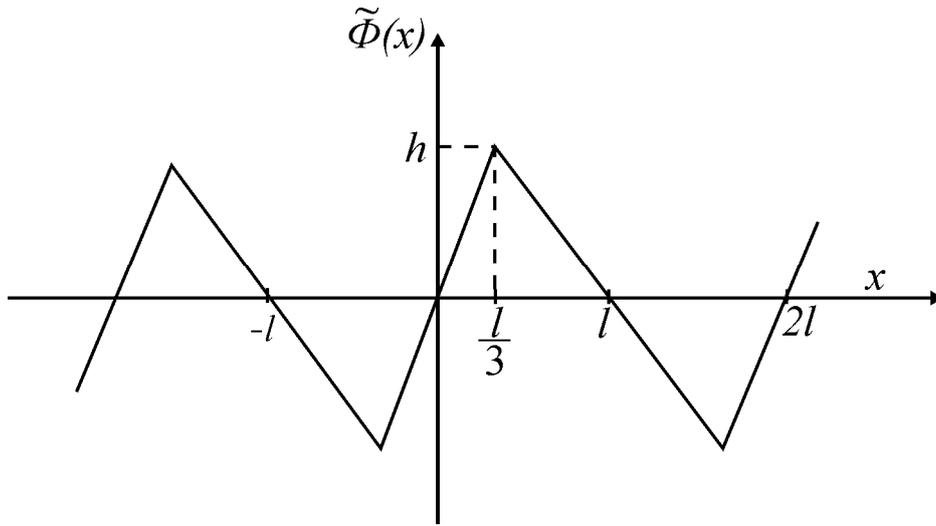


Рис. 8.4. График функции  $\tilde{\Phi}(x)$  в задаче 8.7

Запишем явный вид функции  $\tilde{\Phi}(x)$  на промежутке длиной  $2l$ :

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \frac{3hx}{l}, & -\frac{l}{3} \leq x \leq \frac{l}{3}, \\ \frac{3h(l-x)}{2l}, & \frac{l}{3} \leq x \leq \frac{5l}{3}. \end{cases} \quad (8.36)$$

Будем использовать фазовую полуплоскость  $(x, t)$ . На фазовой полуплоскости выделим прямоугольник, в котором нужно найти решение

$$0 < x < l, \quad 0 < t < \frac{l}{3a}.$$

На оси  $x$  (рис. 8.5) отметим точки, при переходе через которые функция  $\tilde{\Phi}(x)$  меняет свое аналитическое выражение. Через эти точки проведем характеристики. На видно, что только две характеристики пересекают прямоугольник. Этими характеристиками прямоугольник разбивается на три части. В каждой части решение (8.1) будет иметь свое аналитическое выражение.

Рассмотрим первую область,

$$\begin{cases} x > 0, \\ t > 0, \\ x + at < \frac{l}{3}. \end{cases}$$

Возьмем произвольную точку  $M_0(x_0, t_0)$  в этой области и проведем через нее характеристики. Эти характеристики отсекают на оси  $x$  отрезок  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$  — область зависимости решения в точке  $M_0$ . Отрезок

$[x_0 - at_0, x_0 + at_0] \subset \left(-\frac{l}{3}, \frac{l}{3}\right)$ , поэтому в соответствии с формулой (8.36),



пересекают ось  $x$  в точках  $P_3$  и  $P_4$ . Абсциссы точек  $P_3$  и  $P_4$  удовлетворяют неравенствам

$$-\frac{l}{3} < x_1 - at_1 < \frac{l}{3},$$

$$\frac{l}{3} < x_1 + at_1 < \frac{5l}{3}.$$

По формулам (8.36), (8.1) будем иметь

$$\tilde{\Phi}(x_1 - at_1) = \frac{3h(x_1 - at_1)}{l},$$

$$\tilde{\Phi}(x_1 + at_1) = \frac{3h(l - x_1 - at_1)}{2l},$$

$$u(x_1, t_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{3h(x_1 - at_1)}{l} + \frac{3h(l - x_1 - at_1)}{2l} \right) = \frac{3h(x_1 - 3at_1 + l)}{4l}.$$

Меняя  $x_1$  на  $x$  и  $t_1$  на  $t$ , запишем

$$u(x, t) = \frac{3h(x - 3at + l)}{4l}.$$

Рассмотрим третью область,

$$\begin{cases} x - at > \frac{l}{3}, \\ x < l, \\ t > 0. \end{cases}$$

Область зависимости любой точки из этой области целиком лежит в интервале  $(\frac{l}{3}, \frac{5l}{3})$ . Поэтому

$$\tilde{\Phi}(x - at) = \frac{3h(l - x + at)}{2l},$$

$$\tilde{\Phi}(x + at) = \frac{3h(l - x - at)}{2l},$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{3h(l - x + at)}{2l} + \frac{3h(l - x - at)}{2l} \right) = \frac{3h(l - x)}{2l}.$$

Выпишем ответ задачи:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{3hx}{l}, & x > 0, t > 0, x + at < \frac{l}{3}, \\ \frac{3h(x - 3at + l)}{4l}, & x + at > \frac{l}{3}, x - at < \frac{l}{3}, t < \frac{l}{3a}, \\ \frac{3h(l - x)}{2l}, & x - at > \frac{l}{3}, x < l, t > 0. \end{cases}$$

### Задание 8

1. Решить задачу о колебаниях струны, конец  $x = 0$  которой закреплен жестко, а  $x = \pi$  свободен. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид

$$u|_{t=0} = \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \sin \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

2. Однородная струна, закрепленная на концах  $x = 0$  и  $x = l$ , имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти отклонение точек струны от положения равновесия в момент времени  $t = \frac{l}{4a}$ , если начальные скорости струны равны нулю.
3. Рассмотреть задачу о колебаниях ограниченной струны ( $a = 1$ ,  $l = 6$ ), закрепленной на концах  $x = 0$  и  $x = l$ , если в начальный момент времени скорости всех точек струны равны нулю, а начальное отклонение изображено на рис. 8.6. Нарисовать форму струны в моменты времени  $t = 1, 2, \dots, 12$ .

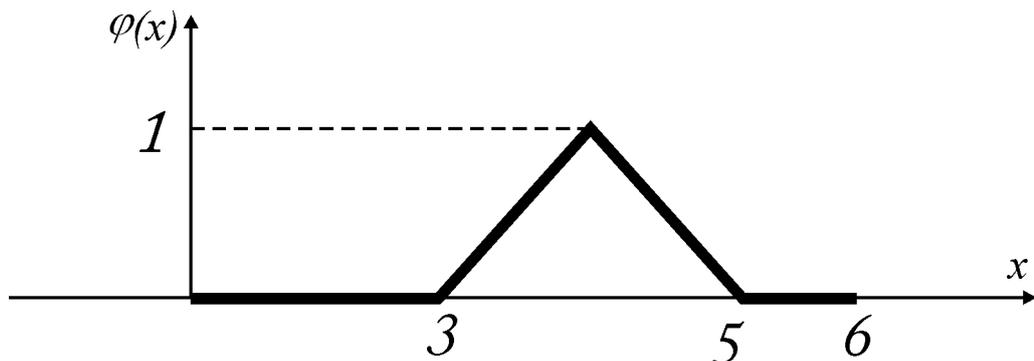


Рис. 8.6. Начальный профиль струны

## 9. Начально-краевые задачи с неоднородными граничными условиями

**Задача 9.1.** Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на конце  $x = 0$  и подверженной на конце  $x = l$  действию возмущаю-

шей силы, которая вызывает смещение, равное  $A \sin \omega t$ . В момент времени  $t = 0$  смещения и скорости точек струны равны нулю. Найти смещения точек струны при всех  $t > 0$ .

Сформулируем соответствующую начально–краевую задачу:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq l, \quad (9.1)$$

$$u_t|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq l, \quad (9.2)$$

$$u|_{x=0} = 0, t \geq 0, \quad (9.3)$$

$$u|_{x=l} = A \sin \omega t, t \geq 0. \quad (9.4)$$

Для решения задачи будем использовать общее решение однородного волнового уравнения

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at). \quad (9.5)$$

Здесь  $f(x)$  и  $g(x)$  — неизвестные функции, которые будем определять, используя условия (9.1)–(9.4). Прежде всего, воспользуемся условиями (9.1), (9.2). Подставляя (9.5) в (9.1), (9.2) будем иметь

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 0, 0 \leq x \leq l, \\ -af'(x) + ag'(x) = 0, 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Интегрируя второе уравнение системы, получим

$$-f(x) + g(x) = C_0, 0 \leq x \leq l.$$

Отсюда, учитывая первое уравнение системы, найдем

$$f(x) = -\frac{C_0}{2}, g(x) = \frac{C_0}{2}, 0 \leq x \leq l.$$

Константу  $C_0$  можно выбрать нулевой, так как на решение (9.5) этот выбор не влияет. Итак,

$$f(x) = 0, g(x) = 0, 0 \leq x \leq l. \quad (9.6)$$

Подставляя (9.5) в граничные условия (9.3), (9.4), получим соотношения

$$f(-at) + g(at) = 0, t \geq 0, \quad (9.7)$$

$$f(l - at) + g(l + at) = A \sin \omega t, t \geq 0, \quad (9.8)$$

которые позволяют продолжить функцию  $f(x)$  на отрицательную ось  $x$ , а  $g(x)$  — на бесконечный интервал  $x > l$ . В формуле (9.7) сделаем замену  $-at = x$ , а в (9.8) — замену  $l + at = x$ . В результате получим

$$f(x) = -g(-x), x \leq 0, \quad (9.9)$$

$$g(x) = A \sin \frac{\omega(x-l)}{a} - f(2l-x), x \geq l. \quad (9.10)$$

Будем поочередно пользоваться формулами (9.9), (9.10).

Если  $-l \leq x \leq 0$ , то  $0 \leq -x \leq l$  и, согласно (9.6),  $g(-x) = 0$ . Используя формулу (9.9), найдем, что при всех  $-l \leq x \leq 0$

$$f(x) = 0. \quad (9.11)$$

Объединяя (9.6), (9.11), можно записать

$$f(x) = 0, \quad -l \leq x \leq l. \quad (9.12)$$

Теперь используем соотношение (9.10). Пусть  $l \leq x \leq 3l$ . В этом случае  $-l \leq 2l - x \leq l$  и поэтому  $f(2l - x) = 0$ . Тогда, в соответствии с (9.10),

$$g(x) = A \sin \frac{\omega(x-l)}{a}, \quad l \leq x \leq 3l. \quad (9.13)$$

Рассмотрим интервал  $-3l \leq x \leq -l$ . Тогда  $l \leq -x \leq 3l$  и, согласно (9.13),

$$g(-x) = -A \sin \frac{\omega(x+l)}{a}, \quad l \leq -x \leq 3l. \quad (9.14)$$

Подставляя (9.14) в (9.9), найдем

$$f(x) = A \sin \frac{\omega(x+l)}{a}, \quad -3l \leq x \leq -l. \quad (9.15)$$

Если  $3l \leq x \leq 5l$ , то  $-3l \leq 2l - x \leq -l$ . Поэтому, учитывая (9.15), запишем

$$f(2l - x) = A \sin \frac{\omega(3l - x)}{a}, \quad 3l \leq x \leq 5l. \quad (9.16)$$

Используя (9.16), из соотношения (9.10) получим

$$g(x) = A \left( \sin \frac{\omega(x-l)}{a} + \sin \frac{\omega(x-3l)}{a} \right), \quad 3l \leq x \leq 5l. \quad (9.17)$$

Пусть  $-5l \leq x \leq -3l$ . В этом случае  $3l \leq -x \leq 5l$ , и из формулы (9.17) следует

$$g(-x) = -A \left( \sin \frac{\omega(x+l)}{a} + \sin \frac{\omega(x+3l)}{a} \right), \quad -5l \leq x \leq -3l. \quad (9.18)$$

С помощью соотношения (9.9) на этом интервале найдем функцию  $f(x)$ :

$$f(x) = A \left( \sin \frac{\omega(x+l)}{a} + \sin \frac{\omega(x+3l)}{a} \right), \quad -5l \leq x \leq -3l. \quad (9.19)$$

Таким образом, функция  $f(x)$  определена уже на интервале  $(-5l, l)$  (см. формулы (9.12), (9.15), (9.10)), а функция  $g(x)$  — на интервале  $(0, 5l)$  (см. формулы (9.6), (9.13), (9.17)). Продолжая использовать соотношения (9.9), (9.10), функцию  $f(x)$  найдем при всех  $x \leq -5l$ , а  $g(x)$  — если  $x \geq 5l$ . Используя метод математической индукции, можно показать, что при всех  $n = 0, 1, 2, \dots$  справедливы формулы

$$f(x) = A \sum_{k=0}^n \sin \frac{\omega(x + (2k+1)l)}{a}, \quad -(2n+3)l \leq x \leq -(2n+1)l, \quad (9.20)$$

$$g(x) = A \sum_{k=0}^n \sin \frac{\omega(x - (2k+1)l)}{a}, \quad (2n+1)l \leq x \leq (2n+3)l. \quad (9.21)$$

Найденные функции следует подставить в общее решение (9.5). Для этого будем использовать фазовую полуплоскость  $(x, t)$ . На оси  $x$  фазовой полуплоскости отметим точки  $x = (2k+1)l, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

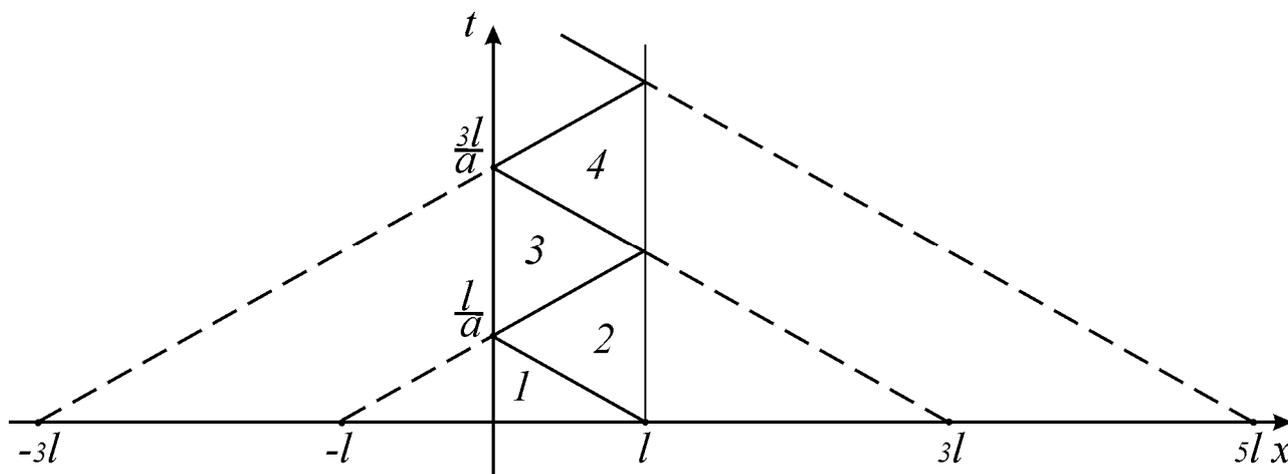


Рис. 9.1. Фазовая полуплоскость для задачи 9.1

Через точки, расположенные на отрицательной части оси  $x$ , проведем характеристики с положительным наклоном, а через точки, расположенные на положительной части оси  $x$ , характеристики с отрицательным наклоном. Эти характеристики разобьют полубесконечную полосу  $0 < x < l, t > 0$  на части, в каждой из которых для решения задачи будет свое аналитическое выражение (рис. 9.1).

Для того чтобы расписать решение в первой части полубесконечной полосы,

$$x + at < l, t > 0, x > 0,$$

определим расположение области зависимости любой точки из этой части. Так как левый конец области зависимости попадает в интервал  $(-l, l)$ , а правый конец в интервал  $(0, l)$ , то

$$f(x - at) = 0, g(x + at) = 0.$$

Подставляя эти значения в (9.5), получим

$$u(x, t) = 0.$$

Рассмотрим вторую область,

$$x + at > l, x - at > -l, x < l.$$

Для любой точки из этой области левый конец области зависимости попадает в интервал  $(-l, l)$ , поэтому

$$f(x - at) = 0,$$

а правый конец попадает в интервал  $(l, 3l)$ , поэтому

$$g(x+at) = A \sin \frac{\omega(x+at-l)}{a}.$$

Тогда, в соответствии с (9.5),

$$u(x,t) = A \sin \frac{\omega(x+at-l)}{a}. \quad (9.22)$$

Рассмотрим  $(2n+3)$ -ю область ( $n \geq 0$ ):

$$\begin{cases} x > 0, \\ x-at < -(2n+1)l, \\ x+at < (2n+3)l. \end{cases}$$

Построим область зависимости решения для точки из этой области. Левый конец области зависимости располагается в интервале  $-(2n+3)l, -(2n+1)l$ , а правый в  $((2n+1)l, (2n+3)l)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} f(x-at) &= A \sum_{k=0}^n \sin \frac{\omega(x-at+(2k+1)l)}{a}, \\ g(x+at) &= A \sum_{k=0}^n \sin \frac{\omega(x+at-(2k+1)l)}{a}, \\ u(x,t) &= A \sum_{k=0}^n \left( \sin \frac{\omega(x-at+(2k+1)l)}{a} + \sin \frac{\omega(x+at-(2k+1)l)}{a} \right) = \\ &= 2A \sin \frac{\omega x}{a} \sum_{k=0}^n \cos \omega \left( t - (2k+1) \frac{l}{a} \right). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Для любой точки из области под номером  $2n+2$ , ( $n > 0$ ) левый конец области зависимости попадает в интервал  $-(2n+1)l, -(2n-1)l$ , а правый — в интервал  $((2n+1)l, (2n+3)l)$ . Тогда, в соответствии с формулами (9.20), (9.21), (9.5), будем иметь

$$\begin{aligned} f(x-at) &= A \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\omega(x-at+(2k+1)l)}{a}, \\ g(x+at) &= A \sum_{k=0}^n \sin \frac{\omega(x+at-(2k+1)l)}{a}, \\ u(x,t) &= A \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\omega(x-at+(2k+1)l)}{a} + \right. \\ &\left. + \sin \frac{\omega(x+at-l)}{a} + \sum_{k=1}^n \sin \frac{\omega(x+at-(2k+1)l)}{a} \right) = \end{aligned}$$

$$= A \left( \sin \frac{\omega(x+at-l)}{a} + 2 \sin \frac{\omega(x-l)}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \omega \left( t - \frac{2(k+1)l}{a} \right) \right). \quad (9.24)$$

Вычисление сумм в формулах (9.23), (9.24) зависит от частоты  $\omega$ . Частоты

$$\omega_m = \frac{\pi m}{l} a, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9.25)$$

называются **собственными частотами** колебаний струны.

Если  $\omega$  не совпадает с собственными частотами колебаний, то, используя формулу [8, 1.341(3)]

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+ky) = \frac{\cos(x + \frac{n-1}{2}y) \sin \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}},$$

в областях с нечетным номером  $2n+3$  ( $x > 0, x-at < -(2n+1)l, x+at < (2n+3)l, n \geq 0$ ) получим

$$u(x,t) = 2A \frac{\sin \frac{\omega x}{a} \cos \omega \left( t - \frac{(n+1)l}{a} \right) \sin \frac{\omega(n+1)l}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}}, \quad (9.26)$$

а в областях с четным номером  $2n+2$  ( $x < l, x+at > (2n+1)l, x-at > -(2n+1)l, n > 0$ )

$$u(x,t) = A \left( \sin \omega \left( t - \frac{l-x}{a} \right) - 2 \frac{\sin \frac{\omega(l-x)}{a} \cos \omega \left( t - \frac{(n+1)l}{a} \right) \sin \frac{\omega n l}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}} \right). \quad (9.27)$$

Рассмотрим частный случай, когда  $\omega = \frac{\pi a}{2l}$ . На основании свойств тригонометрических функций формулы (9.26), (9.27) значительно упрощаются. Для областей с нечетными номерами  $4s+3, s \geq 0$  и  $4s+5, s \geq 0$  будем, соответственно, иметь

$$u(x,t) = 2A \sin \frac{\pi x}{2l} \sin \omega t, \quad (9.28)$$

$$u(x,t) = 0. \quad (9.29)$$

Для областей с четным индексом  $4s+2, s > 1$  и  $4s+4, s > 0$ , соответственно получим

$$u(x,t) = 0, \quad (9.30)$$

$$u(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{a} \right). \quad (9.29)$$

Функции (9.26)–(9.29) не зависят от номера  $s$ , решение задачи является функцией периодической по переменной  $t$  с периодом  $\frac{4l}{a}$ . В первой области решение равно нулю, во 2-й области решение определяется по формуле (9.22)

$$u(x, t) = -A \cos \omega \left( t + \frac{x}{a} \right),$$

в 3-й области решение имеет вид стоячей волны (9.27), в 4-й решение представляет собой прямую бегущую волну (9.30), в 5-й области решение опять равно нулю.

**Задача 9.2.** Рассмотреть случай, когда частота совпадает с одной из собственных частот колебаний струны:  $\omega = \omega_{m_0}$ .

Решение задачи можно получить из формул (9.26), (9.27) предельным переходом при  $\omega \rightarrow \omega_{m_0}$ . Раскрывая неопределенность типа  $\frac{0}{0}$  по правилу Лопиталя, найдем, что в областях с нечетным номером  $2n + 3$

$$u(x, t) = 2A(-1)^{m_0} (n + 1) \sin \frac{\omega_{m_0} x}{a} \cos \omega_{m_0} t, \quad (9.31)$$

в областях с четным номером  $2n + 2$

$$u(x, t) = A(-1)^{m_0} \left( \sin \omega_{m_0} \left( t + \frac{x}{a} \right) + 2n \sin \frac{\omega_{m_0} x}{a} \cos(\omega_{m_0} t) \right). \quad (9.32)$$

Из формул (9.31), (9.32) следует, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает с ростом  $n$ . Имеет место явление резонанса.

**Задание 9.** Решите задачу о поперечных колебаниях струны, если к концу  $x = 0$  приложена сила  $F(t) = A \sin \omega t$ , а конец  $x = l$  — жёстко закреплён. В момент времени  $t = 0$  смещения и скорости точек струны равны нулю. Найти смещения точек струны при  $0 < t < \frac{2l}{a}$ .

### Ответы к заданиям для самостоятельной работы

**Задание 1.**

1.1.  $\frac{x^2 y^2}{4} + f(x) + g(x)$ . 1.2.  $f(y)e^{-x} + g(x)$ . 1.3.  $\frac{x^2}{4} + f(x)e^{-2y} + g(y)$ .

1.4.  $f(x+t)e^{(x-t)/2} + g(x-t)$ . 1.5.  $-\frac{1}{\omega^2} \sin \omega t + f(x+at) + g(x-at)$ .

2.  $x - at = x_0, \quad x + at = x_0$ .

**Задание 2.**

1.1.  $\frac{1}{2}(e^{-(x-at)^2} + e^{-(x+at)^2})$ . 1.2.  $\frac{1}{4a}(e^{-(x-at)^2} - e^{-(x+at)^2})$ . 1.3.  $\sin(x+t)$ .

3.  $\frac{1}{2}(\varphi(x-a(t-t')) + \varphi(x+a(t-t'))) + \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} \psi(\xi) d\xi$ .

4. [2, стр.47-48]

**Задание 3.**

1.  $\begin{cases} x-at > x_2, \\ t > 0; \end{cases} \begin{cases} x+at < x_1, \\ t > 0. \end{cases}$

2.  $x-at > x_1, \quad t > 0.$

3.  $u \equiv 0, \begin{cases} x+at < -c, \\ t > 0; \end{cases} \begin{cases} x-at > c, \\ t > 0; \end{cases} u \equiv const, \begin{cases} x-at < -c, \\ x+at > c. \end{cases}$

**Задание 4.**

1.

$$u(x_0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{c-x_0}{a}; \\ \frac{2h}{c}(x_0 + at - c), & \frac{c-x_0}{a} < t < \frac{c+x_0}{a}; \\ \frac{h}{c}(at - c), & \frac{c+x_0}{a} < t < \frac{2c-x_0}{a}; \\ \frac{h}{c}(c-x_0), & \frac{2c-x_0}{a} < t < \frac{2c+x_0}{a}; \\ \frac{h}{c}(3c-at), & \frac{2c+x_0}{a} < t < \frac{3c-x_0}{a}; \\ \frac{h}{2c}(3c+x_0-at), & \frac{3c-x_0}{a} < t < \frac{3c+x_0}{a}; \\ 0, & t > \frac{3c+x_0}{a}. \end{cases}$$

2. [4, гл. II, §2, №53].

3.

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0, & x < -c - at_0; \\ \frac{v_0}{2a}(x + at_0 + c), & -c - at_0 < x < c - at_0; \\ \frac{v_0 c}{2a}, & c - at_0 < x < 2c - at_0; \\ \frac{v_0}{2a}(x + at_0), & 2c - at_0 < x < 3c - at_0; \\ \frac{3v_0 c}{2a}, & 3c - at_0 < x < -c + at_0; \\ \frac{v_0}{2a}(2c - x + at_0), & -c + at_0 < x < c + at_0; \\ \frac{v_0 c}{2a}, & c + at_0 < x < 2c + at_0; \\ \frac{v_0}{2a}(3c - x + at_0), & 2c + at_0 < x < 3c + at_0; \\ 0, & x > 3c + at_0. \end{cases}$$

$$4. u(x, t) = \begin{cases} 0, & \begin{cases} x + at < -\frac{\pi}{2}, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - at > \frac{\pi}{2}, \\ t > 0; \end{cases} \\ \frac{1}{2} \cos(x + at) + \frac{v_0}{2a}(x + at + \frac{\pi}{2}), & x - at < -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < x + at < \frac{\pi}{2}; \\ \cos x \cos at + v_0 t, & x - at > -\frac{\pi}{2}, x + at < \frac{\pi}{2}, t > 0; \\ \frac{v_0 \pi}{2a}, & x + at > \frac{\pi}{2}, x - at < \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2} \cos(x - at) + \frac{v_0}{2a}(\frac{\pi}{2} - x + at), & -\frac{\pi}{2} < x - at < \frac{\pi}{2}, x + at > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Задание 5.**

1.1.  $-\frac{1}{\omega^2}(\sin \omega t - \omega t)$ . 1.2.  $\frac{\sin \omega x}{a^2 \omega^2}(1 - \cos \omega at)$ .

2.  $u \equiv 0$ ,  $\begin{cases} x - at > x_2, \\ t > 0; \end{cases}$   $\begin{cases} x + at < x_1, \\ t > 0; \end{cases}$   $u \equiv const$ ,  $x + at > x_2 + at_0$ ,  $x - at < x_1 - at_0$ .

$$3. u(x,t) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\omega^2}(\omega t - \sin \omega t), & 0 < t < T; \\ \frac{1}{\omega^2}(\omega t - \sin \omega T + \omega(T-t)\cos \omega T), & t > T. \end{cases}$$

**Задание 6.**

$$1. u(x,t) \equiv \begin{cases} x, & x-t > 0, t > 0; \\ x - \sin(x-t), & x-t < 0, x > 0. \end{cases}$$

$$2. u(x,t) \equiv \begin{cases} -3\sin t + 3t, & x-3t > 0, t > 0; \\ (x-3t)^3 - 3\sin t + 3t, & x-3t < 0, x > 0. \end{cases}$$

$$3. u(x,t) \equiv \begin{cases} x^2 + 4t^2 - \sin x \cos 2t + \sin x, & x-2t > 0, t > 0; \\ \frac{3}{2}e^{x-2t} - \frac{1}{2}\cos(x-2t) - \frac{1}{2}\sin(x+2t) + 4xt - 2x + 4t + \sin x, & x+2t < 0, x > 0. \end{cases}$$

**Задание 7.**

1. [4, гл. II, §2, №59].

$$u\left(x, \frac{4c}{3a}\right) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & 0 < x < \frac{c}{3}; \\ \frac{h}{2c}\left(x + \frac{c}{3}\right), & \frac{c}{3} < x < \frac{2c}{3}; \\ \frac{h}{2c}\left(\frac{5c}{3} - x\right), & \frac{2c}{3} < x < \frac{5c}{3}; \\ 0, & \frac{5c}{3} < x < \frac{7c}{3}; \\ \frac{h}{2c}\left(x - \frac{7c}{3}\right), & \frac{7c}{3} < x < \frac{10c}{3}; \\ \frac{h}{2c}\left(\frac{13c}{3} - x\right), & \frac{10c}{3} < x < \frac{13c}{3}; \\ 0, & x > \frac{13c}{3}. \end{cases}$$

2. [4, гл. II, §2, №60].

$$u(3c, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{c}{a}; \\ \frac{v_0}{2a}(at - c), & \frac{c}{a} < t < \frac{2c}{a}; \\ \frac{v_0}{2a}c, & \frac{2c}{a} < t < \frac{4c}{a}; \\ \frac{v_0}{2a}(at - 3c), & \frac{4c}{a} < t < \frac{5c}{a}; \\ \frac{v_0}{a}(at - 3c), & t > \frac{5c}{a}. \end{cases}$$

$$3.1. u(x, t) \equiv \begin{cases} 0, & x - t > 0, t > 0; \\ \frac{1}{9}(\cos 3(x - t) - 1), & x - t < 0, x > 0. \end{cases}$$

$$3.2. u(x, t) \equiv \begin{cases} 0, & x - t > 0, t > 0; \\ \frac{3}{10}(\cos 3(x - t) - e^{x-t}) + \frac{1}{10} \sin 3(x - t), & x - t < 0, x > 0. \end{cases}$$

**Задание 8.**

$$1. \sin \frac{x}{2} \left( \cos \frac{at}{2} - \frac{1}{a} \sin \frac{at}{2} \right).$$

$$2. u\left(x, \frac{l}{4a}\right) = \begin{cases} \frac{h}{l} \left( 3x - \frac{l}{2} \right), & 0 < x < \frac{l}{4}; \\ \frac{4h}{l^2} \left( xl - x^2 - \frac{l^2}{16} \right), & \frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4}; \\ \frac{2h}{l}(l - x), & \frac{3l}{4} < x < l. \end{cases}$$

3. [6, стр.48–50].

**Задание 9.**

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x - at > 0, t > 0, x < l; \\ \frac{aA}{\omega T_0} \left( -1 + \cos \omega \left( t - \frac{x}{a} \right) \right), & x - at < 0, x + at < 2l, x > 0; \\ \frac{2aA}{\omega T_0} \sin \frac{\omega}{a}(l - at) \sin \frac{\omega}{a}(l - x), & x + at > 2l, x < l, t < \frac{2l}{a}. \end{cases}$$

### Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие для университетов. М.: Наука, 1966. — 724с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции: Учебное пособие для студентов высших технических заведений. М.: Наука, 1984. — 383с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: Учебник для студентов физических и механико–математических специальностей высших учебных заведений. М.: Наука, 1981. — 512с.
4. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике: Учебное пособие для студентов университетов. М.: Наука, 1972. — 687с.
5. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под редакцией Владимиров В.С.: Учебное пособие для студентов физико–математических специальностей высших учебных заведений. М.: Наука, 1982. — 254с.
6. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики: Учебно–методическое пособие для университетов. М.: Изд-во МГУ, 1993. — 154с.
7. Метод характеристик для решения волнового уравнения на плоскости: Методическая разработка. Составители: Денисова Н.А., Калинин А.В., Морозов С.Ф. Изд-во ННГУ, 1992. — 35с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: гос. Изд-во физико–математической литературы, 1963. — 1097с.

Владимир Сергеевич **Гаврилов**  
Наталья Андреевна **Денисова**

**Метод характеристик для одномерного волнового уравнения**

*Учебно–методическое пособие*

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23.

Подписано в печать . . . 2014. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.  
Заказ № . Тираж 200 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета  
им. Н.И. Лобачевского  
603950, г.Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37