МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Расчет цепей переменного тока.

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по специальностям 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

Нижний Новгород
2015

УДК 53 (076.5)
ББК В3Я73-5
Р24

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор **В.Г. Гавриленко**

Р24 Расчет цепей переменного тока: Составители: Агрба П.Д., Пикулин В.Д.: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 23 с.

В работе изложена методика расчета цепей переменного тока с применением векторных диаграмм и комплексных амплитуд. Методические указания могут быть использованы для самостоятельной работы студентами дневной формы обучения при изучении раздела «Цепи переменного тока» курса «Общей физики»

Данное пособие предназначено для студентов второго курса радиофизического факультета обучающихся по специальностям 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы».

Ответственный за выпуск:
Зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 53 (076.5)
ББК В3я73-5

ВВЕДЕНИЕ.

В качестве цепей переменного тока будем рассматривать системы, содержащие конечное число сосредоточенных линейных элементов[1] (сопротивлений R, емкостей C и индуктивностей L), соединенных друг с другом и с источником питания идеальными проводниками. Для простоты ограничимся рассмотрением гармонических источников питания, когда подводимые к цепям токи (при помощи источников тока) или напряжения (при помощи источников напряжения) изменяются со временем по закону синуса или косинуса:

$$\begin{aligned} i &= \mathcal{J}\cos(\omega t+\varphi_i), \\ u &= \mathcal{U}\cos(\omega t+\varphi_u). \end{aligned} \qquad (1)$$

Напомним, что в (1) $\mathcal{J}$ и $\mathcal{U}$ – амплитуды колебаний тока и напряжения, ω – циклическая частота, связанная с периодом колебаний T соотношением $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, φ_i и φ_u – начальные фазы колебаний тока и напряжения.

Основной особенностью цепей переменного тока (по сравнению с цепями постоянного тока) является наличие в них реактивных элементов – емкостей и индуктивностей[2]. Реактивные элементы, не рассеивая мощность электромагнитных колебаний, изменяют разность фаз между колебаниями электрического тока и напряжения на участке цепи. Вследствие этого амплитудные значения напряжения и силы тока достигаются не одновременно. При расчете электрической цепи переменного тока необходимо учитывать эту особенность, т.е. учитывать фазовые отношения между колебаниями токов и напряжений.

Перейдем теперь к математической постановке задачи расчета цепей. Определим, что рассчитать электрическую цепь с заданными параметрами – означает по заданным напряжениям или токам в некоторых участках цепи отыскать напряжения и токи во всех других участках цепи. Рассматриваются и более сложные задачи расчета цепей, когда известны напряжения и токи в отдельных участках цепи и только часть электрических параметров цепи, а требуется найти функциональные зависимости между неизвестными токами и напряжениями и всеми параметрами цепи.

1 ПРАВИЛО КИРХГОФА.

Очевидно, что для решения указанных задач необходимо иметь уравнения, связывающие между собой токи, напряжения и электрические параметры цепи. Напомним эти уравнения и методику их получения.

Известно, что для достаточно низкочастотных процессов, когда можно пренебречь электромагнитным излучением системы[3], из уравнений электромагнитного

---

[1] Линейными элементами называют такие элементы, значения параметров которых (R, Сили L) не зависят от величины приложенных к ним напряжений и протекающих через них токов. Ток и напряжение на таких элементах связаны между собой линейной зависимостью: $i = f(u)$, где f - линейная функция аргумента u.

[2] В том случае, когда в цепи переменного тока реактивные элементы отсутствуют, т.е. цепь содержит лишь омические сопротивления, расчет цепи переменного тока практически не отличается от расчета цепи постоянного тока.

[3] Для реальных систем такое приближение может быть вполне оправдано в диапазоне до частот порядка $\sim 10^8$ Гц.

поля (уравнений для циркуляции и потока вектора $\vec{E}$) следуют уравнения для мгновенных значений токов и напряжений. Эти уравнения обычно называют правилами Кирхгофа. Для произвольного участка цепи, не содержащего источников напряжения, эти правила могут быть сформулированы следующим образом:

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узловой точке, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} i_{\varphi} = 0 \qquad (1.1)$$

Напряжение на участке цепи (между точками a,b) равно алгебраической сумме падений напряжения на отдельных последовательно соединенных элементах, составляющих рассматриваемый участок цепи:

$$u_{a,b} = \sum_{s=1}^{n} u_s \qquad (1.2)$$

При этом уславливаются, что токи, подтекающие к узловой точке, записываются в (1.1), например, со знаком плюс, а оттекающие от нее – со знаком минус. Падение напряжения на S-том элементе (u_s в сумме (1.2)) записывается со знаком плюс, если направление обхода цепи (от «а»к «b») совпадает с направлением электрического тока через этот элемент и со знаком минус в противоположном случае. Если направления электрического тока в участках цепи заранее не известны, то они выбираются произвольным образом для какого-то определенного момента времени (ясно, что по истечении полупериода колебаний направления токов изменятся на противоположные). При этом выбранные колебания электрического тока в участках цепи могут и не совпадать с истинными. В результате решения задачи вычисленные значения электрического тока в таких участках цепи окажутся отрицательными, что эквивалентно изменению фазы колебания электрического тока на π или изменению его направления на противоположное.

Рассмотрим участок электрической цепи, изображенный на рис.1.

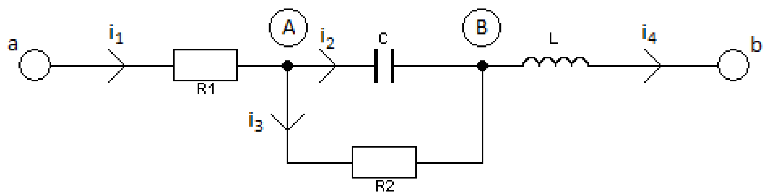

Рис. 1. Пример участка электрической цепи переменного тока.

Для узлов А и Вэтой цепи можно записать два уравнения типа (1.1):

$$\begin{aligned} &i_1 - i_2 - i_3 = 0 \qquad \text{для узла А,} \\ &i_2 + i_3 - i_4 = 0 \qquad \text{для узла В.} \end{aligned} \qquad (1.3а)$$

Если учесть, что из непрерывности электрического тока следует, что $i_4 = i_1$, то окажется, что написанные уравнения совпадают друг с другом. Это означает, что второе из написанных уравнений (1.3а) является излишним. Это правило можно распространить и на более сложные электрические цепи:

> Количество линейных независимых уравнений типа (1.2) равняется $(n-1)$, где n – число узлов электрической цепи.

Для участка a – bэлектрической цепи (рис.1) можем записать:

$$u_{a,b} = u_{R_1} + u_C + u_L$$

или

$$u_{a,b} = u_{R_1} + u_{R_2} + u_L \qquad (1.3б)$$

в зависимости от способа обхода участка a-b.

Если же предположить, что ток i_2 в электрической цепи (рис.1) течет в противоположном направлении, то уравнения (1.3) необходимо заменить на эквивалентные им уравнения:

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0,$$

$$\mathrm{u}_{a,b} = u_{R_1} - u_C + u_L. \qquad (1.3')$$

Уравнения (1.1), (1.2) являются уравнениями для задач расчета электрических цепей. Однако их необходимо дополнить уравнениями связи между токами и напряжениями на отдельных элементах схемы. При этом, как будет сказано ниже, принципиально важным является характер изменения токов и напряжений во времени. В интересующем нас случае, когда электрическая цепь содержит только линейные элементы, система уравнений (1.1), (1.2) представляет собой систему линейных уравнений. Отсюда вытекает важное следствие, которое сводится к следующему утверждению:

> Если известно, что один из токов в (1.1) (или одно из напряжений в (1.2)) изменяется по гармоническому закону (например, задается извне при помощи включенного в электрическую цепь источника тока или источника напряжения), то и все остальные токи и напряжения в этой электрической цепи будут изменяться по гармоническому закону с той же частотой.

Система уравнений (1.1), (1.2) для линейной цепи с гармоническими источниками запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{J}_k cos(\omega t + \varphi_k) = 0, \qquad (1.1')$$

$$u_{a,b} = \sum_{s=1}^{m} \mathcal{U}_s cos(\omega t + \varphi_s). \qquad (1.2')$$

Таким образом, задача об отыскании токов и напряжений в цепи переменного тока <u>сводится к задаче о сложении синхронных гармонических </u>колебаний<u>.</u> Поэтому при расчете цепей переменного тока широко используются методы сложения гармонических колебаний: метод векторных диаграмм и метод комплексных амплитуд.

2 ИМПЕДАНС. КОМПЛЕКСНЫЙ ИМПЕДАНС.

Прежде чем приступить к рассмотрению конкретных примеров расчета цепей переменного тока, получим уравнения, связывающие токи и напряжения на простейших элементах электрической цепи (сопротивлениях, емкостях, индуктивностях). Мы будем называть эти элементы простейшими двухполюсниками (рис. 2).

Двухполюсниками называют устройства, которые включаются в электрическую цепь при помощи двух проводников.

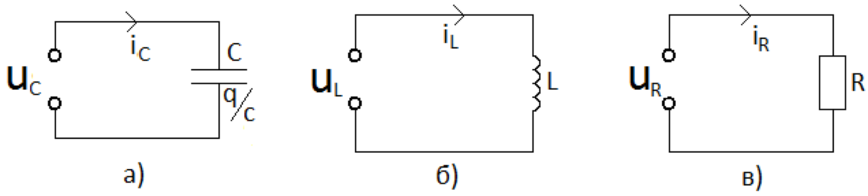

Рис. 2. Схемы включения в электрическую цепь простейших двухполюсников.

Пусть ток, протекающий через двухполюсник, изменяется по гармоническому закону:

$$i = \mathcal{J}\cos(\omega t + \varphi_i). \qquad (2.1)$$

Тогда напряжение на этом двухполюснике также будет изменяться по гармоническому закону той же частоты:

$$u = \mathcal{U}\cos(\omega t + \varphi_u). \qquad (2.2)$$

Коэффициент, равный отношению амплитуды напряжения на двухполюснике к амплитуде силы тока, протекающего через него, называется <u>ИМПЕДАНС</u> двухполюсника.

Будем обозначать импеданс буквой $\mathcal{Z}$. Тогда

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{J}}. \qquad (2.3)$$

Обозначим $\vartriangle\varphi$ разность фаз колебаний напряжения и тока:

$$\vartriangle\varphi = \varphi_u - \varphi_i \qquad (2.4)$$

Импеданс $\mathcal{Z}$ и разность фаз $\vartriangle\varphi$ полностью определяют связь между током и напряжением на двухполюснике. Действительно, пусть ток через двухполюсник изменяется по закону (2.1). Тогда напряжение на нем будет равно:

$$u = \underbrace{\mathcal{Z}\mathcal{J}}_{\mathcal{U}}\cos(\omega t + \underbrace{\varphi_i + \vartriangle\varphi}_{\varphi_u}). \qquad (2.5)$$

Часто вводят также комплексный импеданс $\hat{\mathcal{Z}}$.

Комплексным импедансом двухполюсника называется коэффициент, равный отношению комплексной амплитуды напряжения на двухполюснике к комплексной амплитуде силы тока, протекающего через него:

$$\widehat{\mathcal{Z}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}}}{\widehat{\mathcal{J}}}. \qquad (2.6)$$

Комплексные амплитуды тока и напряжения, изменяющихся по гармоническому закону (2.1), (2.2), равны:

$$\widehat{\mathcal{J}} = \mathcal{J}e^{j\varphi_i}, \widehat{\mathcal{U}} = \mathcal{U}e^{j\varphi_u}, \qquad (2.7)$$

где j – мнимая единица.

Следовательно,

$$\widehat{\mathcal{Z}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}}}{\widehat{\mathcal{J}}} = \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{J}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \mathcal{Z}e^{j\vartriangle\varphi}. \qquad (2.8)$$

Таким образом, зная комплексный импеданс $\widehat{\mathcal{Z}}$, можно найти как импеданс $\mathcal{Z}$, так и разность фаз $\vartriangle\varphi$ колебаний напряжения и тока:[1]

$$\mathcal{Z} = \left|\widehat{\mathcal{Z}}\right| = \sqrt{(Re\widehat{\mathcal{Z}})^2 + (\mathcal{J}m\widehat{\mathcal{Z}})^2},$$

$$\vartriangle\varphi = arg\widehat{\mathcal{Z}} = arctg\left(\frac{\mathcal{J}m\widehat{\mathcal{Z}}}{Re\widehat{\mathcal{Z}}}\right). \qquad (2.9)$$

3 ИМПЕДАНСЫ ПРОСТЕЙШИХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ.

Рассмотрим теперь простейшие двухполюсники.

Емкость.

Пусть к емкости C подключен источник напряжения (рис. 2а) u_C:

$$u_C = \mathcal{U}_C cos\omega t. \qquad (3.1)$$

Найдем ток, протекающий через емкость. По определению емкости:

$$C = \frac{q_C}{u_C}. \qquad (3.2)$$

Следовательно,

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu_C) = C\frac{du_C}{dt}. \qquad (3.3)$$

Учитывая (3.1), находим:

$$i_C = -C\,\mathcal{U}_C\,\omega\,sin(\omega t) = \omega\,C\,\mathcal{U}_C\,cos(\omega t + \frac{\pi}{2}). \qquad (3.4)$$

Таким образом,

[1] Формулы (2.9) получаются из формул (2.8), если применить формулу Эйлера: $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$.

$$\mathcal{J}_C = \omega C\,\mathcal{U}_C,$$
$$\varphi_i = \frac{\pi}{2}. \qquad (3.5)$$

Отсюда следует, что ток, протекающий через емкость, опережает напряжение на $\frac{\pi}{2}$, а амплитуда колебаний тока $\mathcal{J}_C = \omega C\,\mathcal{U}_C$ определяется не только амплитудой напряжения $\mathcal{U}_C$ и величиной емкости C, но и частотой колебаний ω, т.е. характером процесса.

Из (3.5) вытекает значение импеданса емкости:

$$\boxed{\mathcal{Z}_C = \frac{\mathcal{U}_C}{\mathcal{J}_C} = \frac{1}{\omega C}} \qquad (3.6)$$

На векторной диаграмме колебания тока i_C и напряжения u_C изобразятся взаимно перпендикулярными векторами (рис.3а).

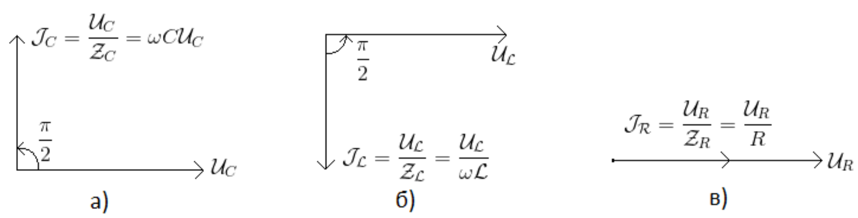

Рис. 3. Векторные диаграммы токов и напряжений для простейших двухполюсников.

Вычислим теперь комплексный импеданс емкости. Колебания напряжения на емкости (3.1) запишем в виде:

$$\widehat{u_C} = \widehat{\mathcal{U}_C} e^{j\omega t} = \mathcal{U}_C e^{j\omega t} \qquad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.5), находим:

$$\widehat{i_C} = j\omega C \widehat{\mathcal{U}_C} e^{j\omega t} = \widehat{\mathcal{J}_C} e^{j\omega t} \qquad (3.8)$$

где

$$\widehat{\mathcal{J}_C} = j\omega C \widehat{\mathcal{U}_C}. \qquad (3.9)$$

Из (3.9) находим:

$$\boxed{\widehat{\mathcal{Z}_C} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_C}}{\widehat{\mathcal{J}_C}} = \frac{1}{j\omega C}} \qquad (3.10)$$

Таким образом, получим:

1) Комплексный импеданс емкости: $\widehat{\mathcal{Z}_C} = \frac{1}{j\omega C}$.

2) Импеданс емкости: $\mathcal{U}_C = \frac{1}{\omega C}$.

3) Ток, протекающий через емкость, опережает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ напряжение на ней.

Индуктивность.

Пусть задан ток i_L , протекающий через индуктивность (рис. 2б):

$$i_L = \mathcal{J}_L cos\omega t \qquad (3.11)$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = \mathcal{L}\frac{di_L}{dt} \qquad (3.12)$$

Подставляя (3.11) в (3.12), получим:

$$u_L = -\mathcal{L}\mathcal{J}_L \omega sin\omega t = \omega\mathcal{L}\mathcal{J}_{\mathcal{L}} cos(\omega t + \frac{\pi}{2}). \qquad (3.13)$$

Следовательно,

$$\mathcal{U}_L = \omega\mathcal{L}\mathcal{J}_{\mathcal{L}},$$

$$\varphi_u = \frac{\pi}{2}. \qquad (3.14)$$

Таким образом, колебание напряжения на индуктивности опережает по фазе колебание тока на $\frac{\pi}{2}$.И наоборот, колебание тока, протекающего через индуктивность, отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от колебания напряжения на ней (рис. 3б).

Импеданс индуктивности, как следует из (3.14), равен

$$\boxed{\mathcal{Z}_{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{U}_{\mathcal{L}}}{\mathcal{J}_{\mathcal{L}}} = \omega\mathcal{L}} \qquad (3.15)$$

Вычислим комплексный импеданс индуктивности.

Колебания тока (3.11), протекающего через индуктивность, запишем в виде:

$$\widehat{i_{\mathcal{L}}} = \widehat{\mathcal{J}_{\mathcal{L}}} e^{j\omega t} = \mathcal{J}_{\mathcal{L}} e^{j\omega t} \qquad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в (3.12), получим

$$\widehat{u_{\mathcal{L}}} = j\omega\mathcal{L}\widehat{\mathcal{J}_{\mathcal{L}}} e^{j\omega t} = \widehat{\mathcal{U}_{\mathcal{L}}} e^{j\omega t} \qquad (3.17)$$

Следовательно,

$$\widehat{\mathcal{U}_{\mathcal{L}}} = j\omega\mathcal{L}\widehat{\mathcal{J}_{\mathcal{L}}}, \qquad (3.18)$$

откуда

$$\boxed{\widehat{\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{\mathcal{L}}}}{\widehat{\mathcal{J}_{\mathcal{L}}}} = j\omega\mathcal{L}} \qquad (3.19)$$

Таким образом получили:

1) Комплексный импеданс индуктивности: $\widehat{\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}} = j\omega\mathcal{L}$.

2) Импеданс индуктивности: $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}} = \omega\mathcal{L}.$

3) Ток, протекающий через индуктивность, отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от напряжения на ней.

Резистор.

Резистором называется двухполюсник, обладающий чисто омическим (активным) сопротивлением R (рис. 2в).

Связь между током и напряжением в этом случае определяется законом Ома

$$u_R = Ri_R. \qquad (3.20)$$

Следовательно, если

$$i_R = \mathcal{J}_R cos\omega t, \qquad (3.21)$$

то

$$u_R = R\mathcal{J}_R cos\omega t = \mathcal{U}_R cos\omega t, \qquad (3.22)$$

т.е. ток и напряжение на резисторе колеблются в фазе (рис. 3в).

В этом случае комплексные амплитуды колебаний тока и напряжения совпадают с действительными амплитудами. Отсюда следует, что комплексный импеданс резистора совпадает с его импедансом и, в соответствии с (3.22), равен R :

$$\boxed{\widehat{\mathcal{Z}_R} = \mathcal{Z}_R = \frac{\mathcal{U}_R}{\mathcal{J}_R} = R} \qquad (3.23)$$

Таким образом, получили:

1) Комплексный импеданс сопротивления

$$\widehat{\mathcal{Z}_R} = R.$$

2) Импеданс сопротивления

$$\mathcal{Z}_R = R.$$

3) Ток и напряжение на сопротивлении колеблются в фазе.

4 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Получим правила вычисления комплексного импеданса при последовательном или параллельном соединении двухполюсников.

Последовательное соединение

Очевидно, что при таком соединении через все двухполюсники протекает один и тот же ток (это следует также из 1-го правила Кирхгофа).

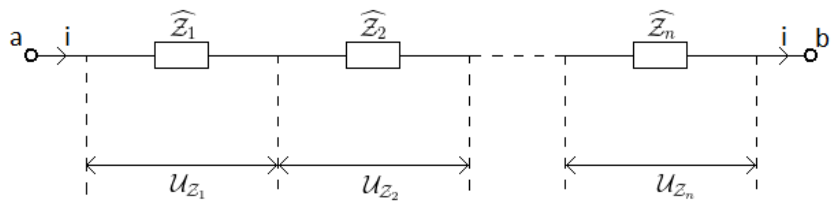

Рис. 4. Последовательное соединение двухполюсников.

Кроме того, из 2-го правила Кирхгофа (1.2) следует:

$$u_{ab} = u_{\mathcal{Z}_1} + u_{\mathcal{Z}_2} + \ldots + u_{\mathcal{Z}_n}. \qquad (4.1)$$

Переходя к комплексным амплитудам, запишем

$$\widehat{\mathcal{U}_{ab}} = \widehat{\mathcal{U}_{\mathcal{Z}1}} + \widehat{\mathcal{U}_{\mathcal{Z}2}} + \ldots + \widehat{\mathcal{U}_{\mathcal{Z}n}}. \qquad (4.2)$$

Учитывая, что

$$\widehat{\mathcal{U}_i} = \widehat{\mathcal{J}}\,\widehat{\mathcal{Z}_i}, \qquad (4.3)$$

где $\widehat{\mathcal{J}}$ – комплексная амплитуда тока, и, подставляя (4.3) в (4.2), получим:

$$\widehat{\mathcal{Z}_{ab}} = \widehat{\mathcal{Z}_1} + \widehat{\mathcal{Z}_2} + \ldots + \widehat{\mathcal{Z}_n} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mathcal{Z}_i}. \qquad (4.4)$$

Таким образом, при последовательном соединении двухполюсников их комплексные импедансы складываются.

Для импедансов это утверждение, вообще говоря, несправедливо. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{ab} &= \left|\widehat{\mathcal{Z}_{ab}}\right| = \left|\widehat{\mathcal{Z}_1} + \widehat{\mathcal{Z}_2} + \ldots + \widehat{\mathcal{Z}_n}\right| \neq \\ &\neq \left|\widehat{\mathcal{Z}_1}\right| + \left|\widehat{\mathcal{Z}_2}\right| + \ldots + \left|\widehat{\mathcal{Z}_n}\right| = \left|\mathcal{Z}_1\right| + \left|\mathcal{Z}_2\right| + \ldots + \left|\mathcal{Z}_n\right|. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Следовательно,

$$\mathcal{Z}_{ab} \neq \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \ldots + \mathcal{Z}_n. \qquad (4.6)$$

Исключение составляет случай, когда все $\widehat{\mathcal{Z}_i}$ в (4.4) имеют одинаковые аргументы.

Параллельное соединение

При параллельном соединении элементов в цепи (рис.5) из правил Кирхгофа следует:

$$\begin{aligned} &i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n, \\ &u_{ab} = u_1 = u_2 = \ldots = u_n. \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Переходя к комплексным амплитудам, запишем:

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}_1} + \widehat{\mathcal{J}_2} + \ldots + \widehat{\mathcal{J}_n}, \\ &\widehat{\mathcal{U}_{ab}} = \widehat{\mathcal{U}_1} = \widehat{\mathcal{U}_2} = \ldots = \widehat{\mathcal{U}_n}. \end{aligned} \qquad (4.9)$$

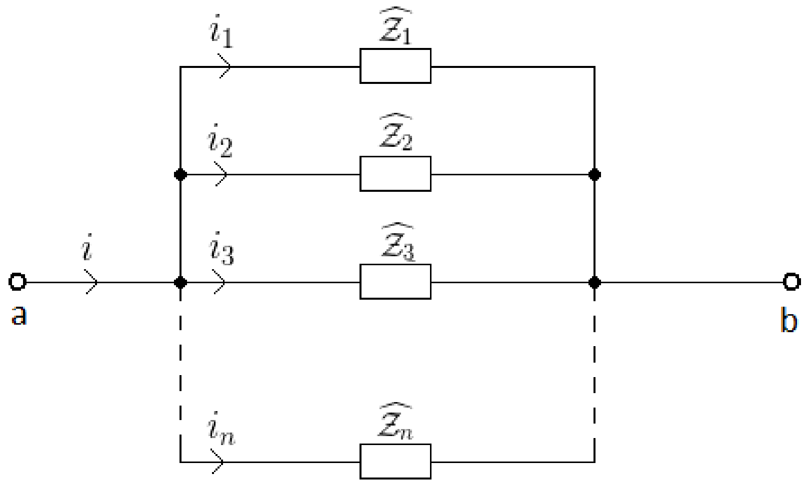

Рис. 5. Параллельное соединение двухполюсников.

Комплексный импеданс на участке «a-b»цепи равен

$$\widehat{\mathcal{Z}}_{ab} = \frac{\widehat{\mathcal{U}}_{ab}}{\mathcal{J}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}}_{ab}}{\widehat{\mathcal{J}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}_2 + \ldots + \widehat{\mathcal{J}}_n}. \qquad (4.10)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_{ab}} = \frac{\widehat{\mathcal{J}}_1}{\widehat{\mathcal{U}}_1} + \frac{\widehat{\mathcal{J}}_2}{\widehat{\mathcal{U}}_2} + \ldots + \frac{\widehat{\mathcal{J}}_n}{\widehat{\mathcal{U}}_n} = \frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_1} + \frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_2} + \ldots + \frac{1}{\widehat{\mathcal{Z}}_n}. \quad (4.11)$$

т.е., при параллельном соединении двухполюсников складываются величины, обратные их комплексным импедансам.

5 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ДВУХПОЛЮСНИКОВ

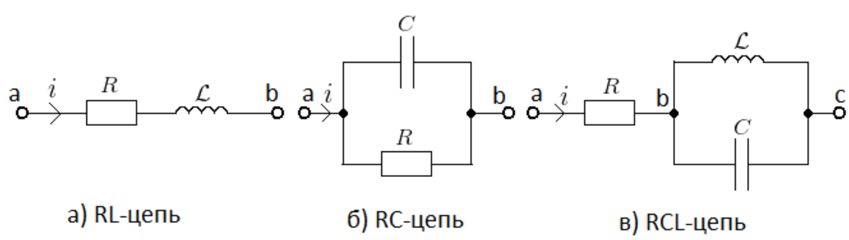

Рис. 6. Примеры двухполюсников.

Рассмотрим двухполюсники, изображенные на рис. 6. Рассчитаем их импедансы, а также токи и напряжения на них.

Рассчитать импеданс RL–цепочки (рис. 6а).

Используя формулу (4.4), получим

$$\widehat{\mathcal{Z}}_{ab} = R + j\omega\mathcal{L}, \qquad (5.1)$$

$$\mathcal{Z}_{ab} = \left|\widehat{\mathcal{Z}}_{ab}\right| = \sqrt{R^2 + \omega^2\mathcal{L}^2}. \qquad (5.2)$$

Если задан ток в цепи

$$i = \mathcal{J}cos\omega t, \qquad (5.3)$$

то можно рассчитать напряжение на участке «a-b» и амплитуду напряжения:

$$\mathcal{U}_{ab} = \mathcal{J}\mathcal{Z}_{ab} = \mathcal{J}\sqrt{R^2 + \omega^2\mathcal{L}^2}. \qquad (5.4)$$

Чтобы определить фазу колебания напряжения, воспользуемся формулой:

$$\varphi_u - \varphi_i = arg(\widehat{\mathcal{Z}}) = arctg\frac{\mathcal{J}m\widehat{\mathcal{Z}}}{Re\widehat{\mathcal{Z}}}. \qquad (5.5)$$

В нашем случае $\varphi_i = 0$ (это следует из (5.3)). Поэтому

$$\varphi_u = arctg\frac{\mathcal{J}m\widehat{\mathcal{Z}_{ab}}}{Re\widehat{\mathcal{Z}_{ab}}} = arctg\frac{\omega\mathcal{L}}{R}. \qquad (5.6)$$

Таким образом,

$$u_{ab} = \mathcal{J}\sqrt{R^2 + \omega^2\mathcal{L}^2}cos(\omega t + arctg\frac{\omega\mathcal{L}}{R}). \qquad (5.7)$$

Эти же результаты можно получить, используя метод векторных диаграмм.

Если ток в цепи изменяется по гармоническому закону (5.3), то и напряжения на элементах u_R и $u_\mathcal{L}$ изменяются также по гармоническому закону. Следовательно,

$$u_{ab} = u_R + u_\mathcal{L} \qquad (5.8)$$

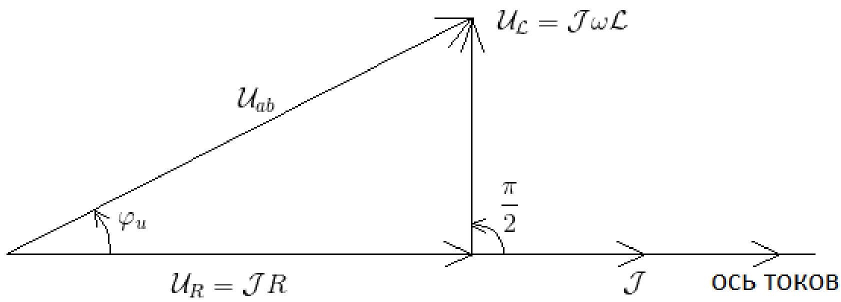

Рис. 7. Векторная диаграмма сложения гармонических колебаний (5.8).

представляет собой сумму гармонических колебаний . векторная диаграмма сложения этих колебаний изображена на рис. 7.

Напомним, что с помощью векторных диаграмм можно складывать гармонические колебания. При этом каждое из гармонических колебаний изображается на диаграмме в виде вектора, длина которого равняется амплитуде колебания, а угол между этим вектором и осью X (будем отсчитывать его в направлении против часовой стрелки) равен значению начальной фазы колебания. Колебание с начальной фазой $\varphi = 0$ изобразится вектором, направленным вдоль оси X. В нашем примере таким колебанием является колебание тока в цепи (5.3). поэтому ось X, относительно которой отсчитываются фазы гармонических колебаний, в нашем примере называется осью токов.

Колебания напряжения u_R на сопротивлении синфазны с колебаниями ток. Амплитуда напряжения u_R

$$\mathcal{U}_R = \mathcal{J}\mathcal{Z}_R = \mathcal{J}R. \qquad (5.9)$$

Поэтому колебание u_R изображается на векторной диаграмме (рис. 7) в виде вектора длины $\mathcal{U}_R = \mathcal{J}R$, направленного вдоль оси токов.

Колебания напряжения на индуктивности $u_\mathcal{L}$ опережают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ колебания тока. Амплитуда напряжения $u_\mathcal{L}$

$$\mathcal{U}_\mathcal{L} = \mathcal{J}_{\mathcal{Z}_\mathcal{L}} = \mathcal{J}\omega\mathcal{L}. \qquad (5.10)$$

Поэтому колебание $u_\mathcal{L}$ изображается на векторной диаграмме (рис. 7) в виде вектора длины $\mathcal{U}_\mathcal{L} = \mathcal{L}\omega\mathcal{J}$, повернутого относительно оси токов на угол $\frac{\pi}{2}$.

Напряжение на двухполюснике u_{ab} равняется сумме напряжений на отдельных его элементах:

$$u_{ab} = u_R + u_\mathcal{L}. \qquad (5.11)$$

Поэтому колебание u_{ab} на векторной диаграмме изображается в виде вектора, равного сумме векторов, изображающих колебания u_R и $u_\mathcal{L}$. Определяя из векторной диаграммы длину этого вектора и угол, который он составляет с осью токов, находим, соответственно, амплитуду $\mathcal{U}_{ab}$ и начальную фазу φ_u колебания u_{ab} :

$$\mathcal{U}_{ab} = \sqrt{\mathcal{U}_R^2 + \mathcal{U}_\mathcal{L}^2} = \mathcal{J}\sqrt{R^2 + \omega^2\mathcal{L}^2}, \qquad (5.12)$$

$$tg\varphi_u = \frac{\mathcal{U}_\mathcal{L}}{\mathcal{U}_R} = \frac{\mathcal{J}\omega\mathcal{L}}{\mathcal{J}R} = \frac{\omega\mathcal{J}}{R}. \qquad (5.13)$$

Таким образом,

$$u_{ab} = \mathcal{J}\sqrt{R^2 + \omega^2\mathcal{L}^2}\cos(\omega t + arctg\frac{\omega\mathcal{L}}{R}). \qquad (5.14)$$

Из (5.12) находим также

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{U}_{ab}}{\mathcal{J}} = \sqrt{R^2 + \omega^2\mathcal{L}^2}. \qquad (5.15)$$

Рассчитать импеданс RC–цепочки (рис. 6б).

Комплексный импеданс такой цепочки находим из уравнения:

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{-1} = \widehat{\mathcal{Z}}_R^{-1} + \widehat{\mathcal{Z}}_C^{-1}. \qquad (5.16)$$

Получаем:

$$\widehat{\mathcal{Z}} = \frac{\widehat{\mathcal{Z}_R}\widehat{\mathcal{Z}_C}}{\widehat{\mathcal{Z}_R} + \widehat{\mathcal{Z}_C}} = \frac{R\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega CR}. \qquad (5.17)$$

Отсюда находим:

$$\mathcal{Z} = \left|\widehat{\mathcal{Z}}\right| = \left|\frac{R}{1+j\omega RC}\right| = \frac{R}{\left|1+j\omega RC\right|} = \frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot (5.18)$$

Рассчитаем ток, протекающий через двухполюсник. Комплексная амплитуда тока

$$\widehat{\mathcal{J}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{ab}}}{\widehat{\mathcal{Z}}}. \qquad (5.19)$$

Пусть напряжение u_{ab} равняется

$$u_{ab} = \mathcal{U} cos\omega t. \qquad (5.20)$$

Тогда

$$\widehat{\mathcal{U}_{ab}} = \mathcal{U}. \qquad (5.21)$$

Следовательно,

$$\widehat{\mathcal{J}} = \frac{\mathcal{U}}{\widehat{\mathcal{Z}}} = \frac{\mathcal{U}}{R}(1+j\omega RC). \qquad (5.22)$$

Отсюда находим амплитуда и фазу тока:

$$\mathcal{J} = \left|\widehat{\mathcal{J}}\right| = \frac{\mathcal{U}}{R}\left|1+j\omega RC\right| = \frac{\mathcal{U}}{R}\sqrt{1+(\omega RC)^2}, \qquad (5.23)$$

$$\varphi = arcgt\frac{\mathcal{J}m\widehat{\mathcal{J}}}{Re\widehat{\mathcal{J}}} = arctg(\omega RC). \qquad (5.24)$$

Таким образом,

$$i = \frac{\mathcal{U}}{R}\sqrt{1+(\omega RC)^2} cos(\omega t + arctg(\omega RC)). \qquad (5.25)$$

Этот же результат можно получить, построив векторную диаграмму (рис. 8) для колебаний тока:

$$i = i_R + i_C. \qquad (5.26)$$

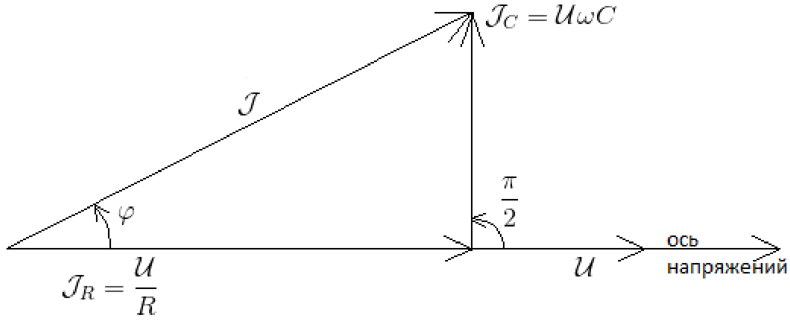

Рис. 8. Векторная диаграмма колебаний тока в RC-цепи (рис. 6б).

Из векторной диаграммы находим:

$$\mathcal{J} = \sqrt{\mathcal{J}_C^2 + \mathcal{J}_R^2} = \mathcal{U}\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = \frac{\mathcal{U}}{R}\sqrt{1+(\omega RC)^2}, (5.27)$$

$$\varphi = arctg\frac{\mathcal{J}_C}{\mathcal{J}_R} = arctg\frac{\mathcal{U}C\omega}{\frac{\mathcal{U}}{R}} = arctg\ \omega RC. \qquad (5.28)$$

что совпадает с (5.23), (5.24).

Рассчитать импеданс RLC–цепочки (рис. 6в).

Комплексный импеданс двухполюсника:

$$\widehat{\mathcal{Z}} = \widehat{\mathcal{Z}_R} + \widehat{\mathcal{Z}_{\mathcal{L}C}}, \qquad (5.29)$$

где

$$\widehat{\mathcal{Z}_{\mathcal{L}C}} = \frac{\widehat{\mathcal{Z}_\mathcal{L}}\widehat{\mathcal{Z}_C}}{\widehat{\mathcal{Z}_\mathcal{L}} + \widehat{\mathcal{Z}_C}} = \frac{j\omega\mathcal{L}\frac{1}{j\omega C}}{j\omega\mathcal{L} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega\mathcal{L}}{1-\omega^2\mathcal{L}C}. \qquad (5.30)$$

Следовательно,

$$\widehat{\mathcal{Z}} = R + j\frac{\omega\mathcal{L}}{1-\omega^2\mathcal{L}C}. \qquad (5.31)$$

Отсюда находим:

$$\mathcal{Z} = \left|\widehat{\mathcal{Z}}\right| = \sqrt{R^2 + \frac{\omega^2\mathcal{L}^2}{(1-\omega^2\mathcal{L}C)^2}}, \qquad (5.32)$$

$$\begin{aligned}\vartriangle\varphi = \varphi_u - \varphi_i = arg\,\widehat{\mathcal{Z}} = arctg\frac{\mathcal{J}m\,\widehat{\mathcal{Z}}}{Re\,\widehat{\mathcal{Z}}} = \\ = arctg\frac{\omega\mathcal{L}}{R(1-\omega^2\mathcal{L}C)}.\end{aligned} \qquad (5.33)$$

Таким образом, если задан ток, протекающий через двухполюсник:

$$i = \mathcal{J}cos\omega t, \qquad (5.34)$$

то напряжение на нем будет равно

$$u = \mathcal{J}\sqrt{R^2 + \frac{\omega^2\mathcal{L}^2}{(1-\omega^2\mathcal{L}C)^2}}\cos\left[\omega t + arctg\frac{\omega\mathcal{L}}{R(1-\omega^2\mathcal{L}C)}\right]. \quad (5.36)$$

Легко отыскать также и напряжение u_{bc} на участке «b-c»:

$$\widehat{\mathcal{U}}_{bc} = \widehat{\mathcal{J}}\,\widehat{\mathcal{Z}}_{\mathcal{L}C} = \mathcal{J}\frac{j\omega\mathcal{L}}{1-\omega^2\mathcal{L}C}. \qquad (5.37)$$

Отсюда

$$\mathcal{U}_{bc} = \mathcal{U}_\mathcal{L} = \mathcal{U}_C = \left|\widehat{\mathcal{U}_{bc}}\right| = \mathcal{J}\frac{\omega\mathcal{L}}{\left|1-\omega^2\mathcal{L}C\right|}, \qquad (5.38)$$

$$tg\varphi = \frac{\mathcal{J}m\,\widehat{\mathcal{U}}_{bc}}{Re\,\widehat{\mathcal{U}}_{bc}} = \begin{cases} +\infty,\ если\ (1-\omega^2\mathcal{L}C) > 0, \\ -\infty,\ если\ (1-\omega^2\mathcal{L}C) < 0. \end{cases} \qquad (5.39)$$

$(т.к.\ Re\,\widehat{\mathcal{U}}_{bc} = 0)$

Следовательно,

$$\varphi = \begin{cases} +\dfrac{\pi}{2}, \textit{ если } (1-\omega^2\mathcal{L}C) > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \textit{ если } (1-\omega^2\mathcal{L}C) < 0. \end{cases} \qquad (5.40)$$

Окончательно:

$$u_{bc} = u_{\mathcal{L}} = u_C = \frac{\mathcal{J}\omega\mathcal{L}}{\left|1-\omega^2\mathcal{L}C\right|} cos\left[\omega t + \frac{\pi}{2} sign(1-\omega^2\mathcal{L}C)\right], (5.41)$$

где

$$sign\, x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$$

Рассчитаем теперь токи, протекающие через индуктивность и емкость:

$$\widehat{\mathcal{J}_{\mathcal{L}}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{\mathcal{L}}}}{\widehat{\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}}} = \frac{\mathcal{J}\dfrac{j\omega\mathcal{L}}{1-\omega^2\mathcal{L}C}}{j\omega\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{J}}{1-\omega^2\mathcal{L}C}, \qquad (5.42)$$

$$\widehat{\mathcal{J}}_C = \frac{\widehat{\mathcal{U}}_C}{\widehat{\mathcal{Z}}_C} = \frac{\mathcal{J}\dfrac{j\omega\mathcal{L}}{1-\omega^2\mathcal{L}C}}{\dfrac{1}{j\omega C}} = -\frac{\mathcal{J}\omega^2\mathcal{L}C}{1-\omega^2\mathcal{L}C}. \qquad (5.43)$$

Следовательно,

$$\mathcal{J}_{\mathcal{L}} = \left|\widehat{\mathcal{J}_{\mathcal{L}}}\right| = \frac{\mathcal{J}}{\left|1-\omega^2\mathcal{L}C\right|}, \mathcal{J}_C = \frac{\mathcal{J}\omega^2\mathcal{L}C}{\left|1-\omega^2\mathcal{L}C\right|}. \qquad (5.44)$$

$$tg\varphi = 0 \text{ (т.к. } Re\widehat{\mathcal{J}} = 0). \qquad (5.45)$$

Поэтому

$$\begin{cases} i_{\mathcal{L}} = \dfrac{\mathcal{J}}{1-\omega^2\mathcal{L}C} cos\omega\, t, \\ i_C = \dfrac{\mathcal{J}\omega^2\mathcal{L}C}{1-\omega^2\mathcal{L}C} cos(\omega\, t + \pi). \end{cases} \quad \textit{если } (1-\omega^2\mathcal{L}C) > 0 \; (5.46)$$

или

$$\begin{cases} i_{\mathcal{L}} = \dfrac{\mathcal{J}}{\omega^2\mathcal{L}C - 1} cos(\omega\, t + \pi), \\ i_C = \dfrac{\mathcal{J}\omega^2\mathcal{L}C}{\omega^2\mathcal{L}C - 1} cos\omega\, t. \end{cases} \quad \textit{если } (1-\omega^2\mathcal{L}C) < 0 \; (5.47)$$

Из формул (5.46), (5.47) видно, что токи $i_{\mathcal{L}}$ и i_C колеблются всегда в противофазе. Отметим также, что при $\omega^2\mathcal{L}C \to 1$ амплитуды напряжений $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}, \mathcal{U}_C$ и токов $\mathcal{J}_{\mathcal{L}}, \mathcal{J}_C$ неограниченно нарастают. Это явление называется резонансом, а частота $\omega = \omega_{рез} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}$ называется резонансной частотой.

Построим теперь векторную диаграмму колебаний напряжения и тока в цепи (рис. 9):

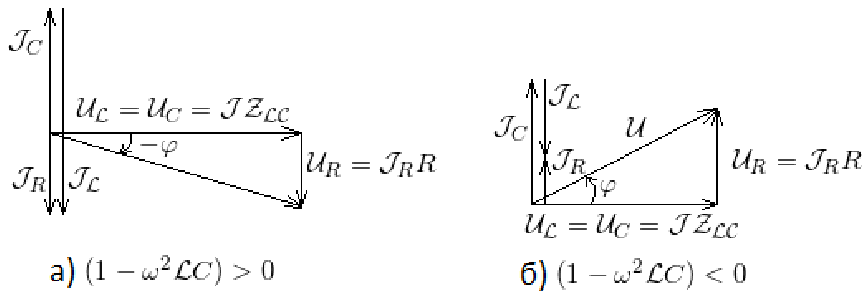

Рис. 9. Векторная диаграмма токов и напряжений в цепи рис. 6в.

Порядок построения диаграмм следующий.

Сначфала строим три вектора, изображающие колебания токов:

$$i_R = i_{\mathcal{L}} + i_C. \qquad (5.48)$$

Учитывая при этом, что $\mathcal{J}_{\mathcal{L}} > \mathcal{J}_C$, если $(1-\omega^2\mathcal{L}C)>0$, и $\mathcal{J}_{\mathcal{L}} < \mathcal{J}_C$, если $(1-\omega^2\mathcal{L}C)<0$. Учитывая также, что $i_{\mathcal{L}}$ и i_C колеблются в противофазе.

Затем строим вектор, изображающий колебания напряжения $u_C = u_{\mathcal{L}}$. вектор, изображающий это колебание, будет перпендикулярен векторам, изображающим колебания токов $i_{\mathcal{L}}$ и i_C. При построении учитывается, что колебание напряжения на емкости отстает, а на индуктивности – опережает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ соответствующее колебание тока.

Строим вектор, изображающий колебание напряжения u_R. Этот вектор параллелен вектору, изображающему колебания тока i_R (т.к. i_R и u_R колеблются в фазе).

Наконец, строим вектор, изображающий колебания напряжения на двухполюснике

$$u = u_{\mathcal{L}} + u_R. \qquad (5.49)$$

6 ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ.

Четырехполюсниками называют устройства, включаемые в электрическую сеть при помощи четырех проводников. При этом два проводника, подключенные обычно к источнику питания, называют входными или «входом», а два другие – выходными или «выходом».

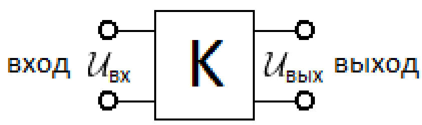

Рис. 10. Четырехполюсник.

Схематично четырехполюсник может быть изображен в виде прямоугольника с четырьмя выводами (рис. 10).

Характеристикой такой системы является коэффициент усиления K и разность фаз $\vartriangle\varphi$ между выходным и входным напряжениями. Если положить, что

$$\begin{aligned} u_{вх} &= \mathcal{U}_{вх}\cos(\omega t + \varphi_{вх}), \\ u_{вых} &= \mathcal{U}_{вых}\cos(\omega t + \varphi_{вых}). \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$K = \frac{\mathcal{U}_{вых}}{\mathcal{U}_{вх}}, \vartriangle\varphi = \varphi_{вых} - \varphi_{вх}. \tag{6.2}$$

Коэффициентом усиления четырехполюсника называют отношение амплитуды выходного напряжения к амплитуде входного напряжения. Часто вводят комплексный коэффициент передачи $\hat{K}$. Комплексным коэффициентом передачи называют отношение комплексной амплитуды выходного напряжения к комплексной амплитуде входного напряжения.

$$\hat{K} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{вых}}}{\widehat{\mathcal{U}_{вх}}} = \frac{\mathcal{U}_{вых}e^{j\varphi_{вых}}}{\mathcal{U}_{вх}e^{j\varphi_{вх}}} = Ke^{j(\varphi_{вых} - \varphi_{вх})} = Ke^{j\vartriangle\varphi}. \tag{6.3}$$

Из (6.3) получаем:

$$K = \left|\hat{K}\right|, \tag{6.4}$$

$$\arg\hat{K} = \varphi_{вых} - \varphi_{вх} = \vartriangle\varphi. \tag{6.5}$$

Отметим, что коэффициент передачи линейных четырехполюсников, также как импеданс двухполюсников, не зависит от амплитуды входного напряжения, а полностью определяется параметрами системы (величинами емкостей, индуктивностей и сопротивлений) и характером процесса (для гармонических процессов – частотой). Следовательно, зная коэффициент передачи системы и входное напряжение, можно определить напряжение на выходе четырехполюсника:

$$\widehat{\mathcal{U}_{вых}} = \widehat{K}\widehat{\mathcal{U}_{вх}}. \tag{6.6}$$

ПРИМЕР 1. Вычислить коэффициент передачи и разность фаз между выходным и входным напряжением для четырехполюсника, изображенного на рис. 11.

Пусть входное напряжение равно

$$u_{вх} = \mathcal{U}_{вх}cos\omega t. \tag{6.7}$$

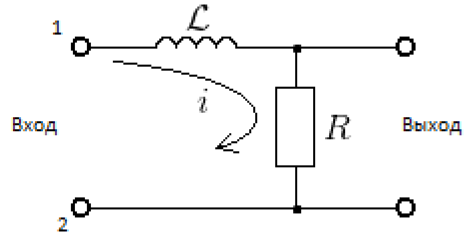

Рис. 11. RL-четырехполюсник.

Так как комплексный импеданс цепи, по которой протекает электрический ток, равен

$$\widehat{\mathcal{Z}}_{1,2} = \widehat{\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}} + \widehat{\mathcal{Z}_R} = j\omega\mathcal{L} + R, \qquad (6.8)$$

то

$$\widehat{\mathcal{J}}_R = \widehat{\mathcal{J}_{\mathcal{L}}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{вх}}}{\widehat{\mathcal{Z}}_{1,2}} = \frac{\mathcal{U}_{вх}}{j\omega\mathcal{L} + R}. \qquad (6.9)$$

Следовательно,

$$\widehat{\mathcal{U}_R} = \widehat{\mathcal{U}_{вых}} = \widehat{\mathcal{J}}R = \frac{R\mathcal{U}_{вх}}{R + j\omega\mathcal{L}}. \qquad (6.10)$$

Отсюда находим:

$$\hat{K} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{вых}}}{\widehat{\mathcal{U}_{вх}}} = \frac{R}{R + j\omega\mathcal{L}}, \qquad (6.11)$$

$$K = \left|\hat{K}\right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2\mathcal{L}^2}}, \qquad (6.12)$$

$$\triangle\varphi = \varphi_{вых} - \varphi_{вх} = arctg\,\frac{\mathcal{J}m\hat{K}}{Re\hat{K}} = -\frac{\omega\mathcal{L}}{R}. \qquad (6.13)$$

Этот результат можно получить, построив векторную диаграмму (рис. 12).

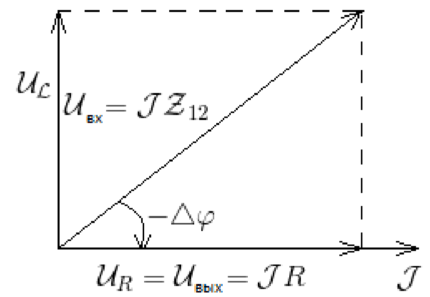

Рис. 12. Векторная диаграмма для расчета коэффициента передачи RL-четырехполюсника.

$$K = \frac{\mathcal{U}_{вых}}{\mathcal{U}_{вх}} = \frac{\mathcal{J}R}{\mathcal{J}\mathcal{Z}_{1,2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2\mathcal{L}^2}},$$

$$tg\triangle\varphi = -\frac{\mathcal{U}_{\mathcal{L}}}{\mathcal{U}_R} = -\frac{\mathcal{J}\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}}{\mathcal{J}\mathcal{Z}_R} = -\frac{\omega\mathcal{L}}{R}.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить комплексный коэффициент передачи $RCRC$ – четырехполюсника (см. рис. 13).

Предположим, что $\widehat{\mathcal{U}_{вых}}$ известно. Выразим $\widehat{\mathcal{U}_{вх}}$ через параметры системы и $\widehat{\mathcal{U}_{вых}}$

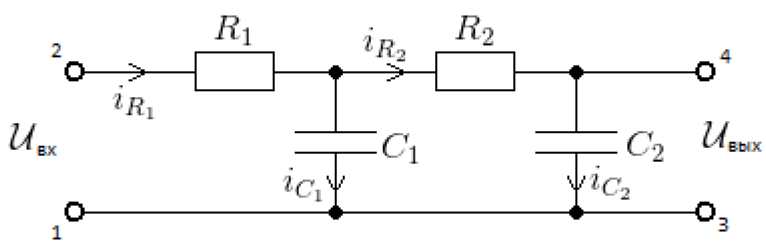

Рис. 13. RCRC-четырехполюсник.

$$\widehat{\mathcal{J}_{C_2}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{вых}}}{\widehat{Z_{C_2}}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{вых}}}{\dfrac{1}{j\omega C_2}} = j\omega C_2 \widehat{\mathcal{U}_{вых}}. \qquad (6.14)$$

Т.к. $\widehat{\mathcal{J}_{C_2}} = \widehat{\mathcal{J}_{R_2}}$, то

$$\widehat{\mathcal{U}_{R_2}} = \widehat{\mathcal{J}_{C_2}}\widehat{\mathcal{U}_{R_2}} = j\omega C_2 R_2 \widehat{\mathcal{U}_{вых}}. \qquad (6.15)$$

Напряжение $u_{C_1} = u_{R_2} + u_{C_2}$, следовательно

$$\widehat{\mathcal{U}_{C_1}} = \widehat{\mathcal{U}_{R_2}} + \widehat{\mathcal{U}_{C_2}} = \widehat{\mathcal{U}_{вых}}(j\omega C_2 R_2 + 1). \qquad (6.16)$$

Для узловой точки (5) (рис.13) $i_{R_1} = i_{C_1} + i_{R_2}$, т.е.

$$\widehat{\mathcal{J}_{R_1}} = \widehat{\mathcal{J}_{C_1}} + \widehat{\mathcal{J}_{R_2}}. \qquad (6.17)$$

Так как

$$\widehat{\mathcal{J}_{C_1}} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{C_1}}}{\widehat{\mathcal{Z}_{C_1}}} = \widehat{\mathcal{U}_{вых}}(j\omega C_2 R_2 + 1) j\omega C_1, \qquad (6.18)$$

то

$$\widehat{\mathcal{J}_{C_1}} = \widehat{\mathcal{U}_{вых}}\left[j\omega C_1(1 + j\omega C_2 R_2) + j\omega C_2\right], \qquad (6.19)$$

$$\widehat{\mathcal{U}_{R_1}} = R_1 \mathcal{U}_{вых}\left[j\omega C_1(1 + j\omega C_2 R_2) + j\omega C_2\right]. \qquad (6.20)$$

Таким образом, находим:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{U}_{вх}} &= \widehat{\mathcal{U}_{R_1}} + \widehat{\mathcal{U}_{C_1}} = \\ &= \widehat{\mathcal{U}_{вых}}\{R_1\left[j\omega C_1(1 + j\omega C_2 R_2) + j\omega C_2\right] + 1 + j\omega C_2 R_2\}. \end{aligned} \qquad (6.21)$$

Из соотношения (6.21) нетрудно получить выражение для комплексного коэффициента передачи:

$$\hat{K} = \frac{\widehat{\mathcal{U}_{вых}}}{\widehat{\mathcal{U}_{вх}}} = \{R_1\left[j\omega C_1(1 + j\omega C_2 R_2) + j\omega C_2\right] + 1 + j\omega C_2 R_2\}^{-1}. \qquad (6.22)$$

или

$$\hat{K} = \left[(1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2) + j\omega(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)\right]^{-1}.$$

$$K = \left|\hat{K}\right| = \left[(1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2)^2 + \omega^2 (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

$$tg\,\triangle\varphi = \frac{\mathcal{J}m\hat{K}}{Re\hat{K}} = -\frac{\omega(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2}.$$

Как видим, используя выражение (6.22) для коэффициента передачи четырехполюсника, легко получить соответствующие выражения для его коэффициента усиления и разности фаз между выходным и входным напряжениями.

Отметим, в заключение, что формула (6.6) может использоваться для вычисления выходного напряжения лишь в случае ненагруженного четырехполюсника. Подключение нагрузки к выходным клеммам четырехполюсника приводит к изменению электрических токов в цепи и, следовательно, к изменению выходного напряжения. Это означает, что подключение нагрузки изменяет коэффициент передачи четырехполюсника. Чтобы воспользоваться для расчета выходного напряжения формулой (6.6), цепь нагрузки следует считать составной частью электрической цепи четырехполюсника.

Рассмотренные примеры показывают, что расчет линейных цепей синусоидального тока фактически сводится к задаче о сложении гармонических колебаний. Поэтому методы сложения гармонических колебаний с успехом могут использоваться при расчете таких цепей. Каждый из методов при этом имеет свои преимущества. Если метод векторных диаграмм обладает большой наглядностью, то метод комплексных амплитуд позволяет однотипным образом рассчитывать различные по сложности электрические цепи.

Вследствие этого указанные методы находят широкое применение в физике, теории электрических цепей, электротехнике.

Расчет цепей переменного тока

Составители:
Павел Дмитриевич **Агрба**
Виктор Дмитриевич **Пикулин**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.