

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

О.И. Канаков, С. Флах

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ
В РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ:
ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Учебное пособие

Нижний Новгород
2011

УДК 537.86, 530.182
ББК 22.311
К-19

К-19 Канаков О.И., Флах С. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ В РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ: ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011.

Цель пособия – ознакомить читателя с современными методами анализа динамики консервативных решеточных систем с непрерывным временем на примере эффектов локализации энергии в решеточных системах (дискретные бризеры, модуляционная неустойчивость). Внимание уделяется особенностям динамики решеточных консервативных систем по сравнению с аналогичными пространственно-непрерывными системами, особенностям аналитического и численного исследования динамики консервативных систем по сравнению с диссипативными системами, совместному применению численных и аналитических (как точных, так и асимптотических) методов для анализа динамики.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов и сотрудников ННГУ, занимающихся исследованиями в области физики колебаний и решеточных систем. Для успешного усвоения материала желательно предварительное изучение дисциплин «Теория колебаний и волн», «Механика (теоретическая)».

Пособие подготовлено при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракты № П1467, № 02.740.11.0565), в рамках Конкурса учебно-методических разработок, подготовленных на основе внедрения в систему образования результатов научных исследований молодых кандидатов наук по приоритетному направлению развития ННГУ как национального исследовательского университета.

УДК 537.86, 530.182
ББК 22.311

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2011

Оглавление

Введение	5
1 Основы теории дискретных бризеров	10
1.1 Дискретные бризеры как строго периодические решения	10
1.1.1 Понятие дискретных бризеров. Существование дискретных бризеров	10
1.1.2 Количественные характеристики дискретных бризеров	12
1.2 Формирование бризеров с конечным временем жизни. Модуляционная неустойчивость	16
1.2.1 Дискретные бризеры в модели Клейна-Гордона	16
1.2.2 Дискретные бризеры и ротобризеры в модели Такено-Пейрара	24
2 Механизмы локализации энергии в нелинейных решетках	30
2.1 Нелинейность и пространственная дискретность	30
2.2 Периодичность локализованных решений	33
2.3 Примеры дискретных бризеров	35
3 Свойства дискретных бризеров в различных системах	39
3.1 Пространственная локализация	39
3.2 Устойчивость дискретных бризеров	43
3.3 Пороги энергии дискретных бризеров	46
3.4 Дискретные бризеры в диссипативных системах	50
3.4.1 Отыскание бризеров в диссипативных системах	50
3.4.2 Устойчивость бризеров в диссипативных системах	52
4 Получение и исследование дискретных бризеров в численных экспериментах	54
4.1 Долгоживущие возбуждения и приближение с сокращенным числом степеней свободы	54

4.2	Отыскание дискретных бризеров как строго периодических решений	62
4.2.1	Метод Фурье	62
4.2.2	Метод Ньютона в фазовом пространстве	67
4.2.3	Метод наискорейшего спуска в фазовом пространстве	70
4.2.4	Симметрии	71
4.3	Дискретные бризеры в переходных процессах и тепловом равновесии	72
4.3.1	Дискретные бризеры в переходных процессах	72
4.3.2	Бризеры в тепловом равновесии	74
	Заключение	78
	Список литературы	79

Введение

Теория структурообразования в диссипативных системах в настоящее время относится к основным и наиболее развитым отраслям нелинейной динамики. Математическим образом диссипативной структуры является аттрактор — притягивающее множество в фазовом пространстве. Своим существованием такие структуры обязаны диссипации, приводящей к сокращению фазового объёма и «стягиванию» к аттрактору всех траекторий из его бассейна притяжения.

Консервативные системы отличаются от диссипативных свойством сохранения фазового объёма, что приводит к отсутствию аттракторов в фазовом пространстве, а значит, к принципиальной невозможности структурообразования в том смысле, в котором оно понимается в случае диссипативных систем. Невозможность наблюдения структур с бесконечным временем жизни в классической равновесной статистической системе следует также из принципа равномерного распределения энергии по степеням свободы, согласно которому средняя по статистическому ансамблю (или, для эргодических систем, по времени) кинетическая энергия каждой степени свободы и средняя потенциальная энергия каждой колебательной степени свободы составляет величину, одинаковую для всех степеней свободы системы.

В то же время, эти соображения не запрещают существования структур, имеющих конечное время жизни, либо имеющих бесконечное время жизни, но при этом нулевую вероятностную меру соответствующего семейства решений в фазовом пространстве.

К таким разрешенным в консервативных системах структурам относятся дискретные бризеры — локализованные и не распространяющиеся в пространстве колебательные возбуждения в консервативных решеточных системах [1, 2, 3]. В зависимости от постановки задачи, говорят о дискретных бризерах либо с бесконечным временем жизни (в этом случае решение всегда периодически во времени [4], а соответствующее семейство траекторий имеет нулевую меру), либо с конечным временем жизни (такие решения имеют ненулевую вероятностную меру и могут быть реализованы в физических системах или статистическом численном эксперименте).

Существуют экспериментальные свидетельства возникновения таких локализованных возбуждений в различных физических системах, включая решетки спинов в антиферромагнетиках [5], решетки связанных нелинейных оптических волноводов [6], ансамбли микромеханических осцилляторов [7].

Применение подобных систем в качестве элементной базы перспективных радиочастотных фильтров, магнетометров и других устройств [8, 9] обуславливает не только фундаментальный, но и прикладной интерес к бризерным структурам.

Данное пособие содержит обзор основных имеющихся в литературе результатов теории дискретных бризеров в нелинейных решеточных системах. Для первоначального ознакомления достаточен материал главы 1. Главы 2 – 4 содержат дополнительные сведения и основываются на более сложном математическом аппарате.

Возможность долгоживущих локализованных колебательных решений в пространственно-дискретных системах была первоначально показана на примере двух связанных осцилляторов для классического и квантового случаев в 1969 году Овчинниковым А.А. [10]. Впоследствии в численных экспериментах были найдены многочисленные примеры таких решений. Наименование «дискретные бризеры» они получили по аналогии с известными ранее, но структурно неустойчивыми бризерами в непрерывных системах. Известны также другие наименования: внутренне-локализованные моды (*intrinsic localized modes*) — в физике твердого тела, дискретные солитоны — в нелинейной оптике.

Существование дискретных бризеров как периодических во времени решений, локализованных в дискретном пространстве, было строго доказано в 1994 году [4] для бесконечных цепочек локально диффузионно связанных нелинейных осцилляторов. Позже на основе этого доказательства был предложен численный метод отыскания дискретных бризеров [11]. Для некоторых систем была также показана устойчивость таких решений в линейном приближении [12].

С физической точки зрения, условием локализации энергии в дискретном бризере является невозможность ее излучения на бесконечность в виде распространяющихся линейных волн. Если частота дискретного бризера вместе со всеми гармониками лежит за пределами линейного спектра решетки, то излучения энергии не происходит, и решение остается экспоненциально локализованным в пространстве.

Таким образом, физические предпосылки существования дискретных бризеров — это ограниченность линейного спектра (достигаемая за счет пространственной дискретности) и нелинейность парциального элемента. При

выполнении этих условий частота решения вместе со всеми гармониками может лежать за пределами линейного спектра, что и обеспечивает пространственную локализацию.

Эти же соображения запрещают существование непериодических во времени локализованных решений с бесконечным временем жизни в безграничных цепочках. В самом деле, непериодическое (например, многочастотное квазипериодическое) решение в нелинейной системе имеет всюду плотный спектр гармоник, что делает неизбежным резонанс с линейным спектром системы и излучение энергии на бесконечность.

Условия локализации энергии и существования дискретных бризеров рассматриваются в разделе 1.1.1 и исследуются более детально в главе 2.

Основные свойства сильно локализованного дискретного бризера можно оценить с помощью одночастичного приближения. В рамках этого приближения все частицы, кроме одной, полагаются покоящимися в положении равновесия. Колебания частицы тогда описываются уравнением с одной степенью свободы, из которого следует зависимость частоты колебаний от энергии частицы. Если частота колебаний и все ее гармоники лежат вне линейного спектра и достаточно далеко от его границ, то можно ожидать, что цепочечная система имеет пространственно-локализованное решение с энергией и частотой, близкими к полученной оценке. Показатель локализации решения может быть выражен из дисперсионного соотношения для линеаризованных уравнений решетки. Условия одночастичного приближения выполняются тем лучше, и, значит, тем более точный результат дает приближение, чем сильнее локализовано решение.

Применение метода одночастичного приближения для оценки параметров дискретного бризера описано в разделе 1.1.2. Более развернутому анализу различных свойств бризерных решений посвящена глава 3.

Одним из возможных механизмов генерации дискретных бризеров с большим, но конечным временем жизни в физических процессах является разрушение гармонической волны вследствие модуляционной неустойчивости. Переход в уравнениях движения к комплексным амплитудам колебаний приводит в приближении медленного изменения этих амплитуд к нелинейному дискретному уравнению Шрёдингера. Линеаризация этого уравнения в окрестности решения вида гармонической бегущей волны дает область волновых чисел, для которых волна неустойчива.

Известно, что модуляционная неустойчивость может служить эффективным механизмом локализации энергии и формирования долгоживущих дискретных бризеров, когда начальные условия заданы в форме слабозашумленной гармонической волны. На начальном этапе эволюции системы из таких

начальных условий волна разбивается на отдельные волновые пакеты вследствие модуляционной неустойчивости. Развитие неустойчивости приводит к существенному изменению групповых скоростей отдельных пакетов, вплоть до однократного или многократного изменения направления движения. Такие замедленные пакеты с высокой эффективностью поглощают энергию сталкивающихся с ними более быстрых пакетов, что приводит к систематическому нарастанию их энергии. При превышении энергией пакета некоторого порога, близкого к упомянутому выше характерному значению, возбуждение становится неподвижным, и формируется долгоживущий дискретный бризер, продолжающий взаимодействовать с распространяющимися пакетами.

Этот механизм генерации дискретных бризеров рассматривается в разделе 1.2.1.

В системах, где потенциал парциального осциллятора и потенциал взаимодействия — периодические функции, переменные состояния могут трактоваться как углы или фазы, и наряду с колебательными, возможны также вращательные движения. Соответственно, помимо колебательных локализованных возбуждений — дискретных бризеров, здесь возможны также локализованные вращательные решения — ротобризеры [13].

В ротобризерном решении одна из фаз неограниченно нарастает со временем (элемент совершает вращение), а остальные колеблются с амплитудами, спадающими при удалении от вращающегося элемента. Такие решения наблюдались в численном эксперименте [13]. Их существование было строго доказано в работе [11]. Аналогично дискретным бризерам, говорят о ротобризерах как с бесконечным, так и с конечным временем жизни.

Такие решения могут существовать не только в консервативных системах с периодическим потенциалом, но и в диссипативных системах при наличии внешнего момента: в этом случае им отвечают аттракторы вращательного типа. В частности, ротобризерные решения детально изучены в решетках связанных джозефсоновских контактов — как теоретически [14], так и экспериментально [15]. Подобные решения представляют интерес при изучении динамики любых систем, описываемых уравнениями маятникового типа, например, ансамблей электрогенераторов, включенных в общую энергосеть [16] и сетей фазовой синхронизации [17].

При наличии диссипации, возможность возбуждения ротобризера в системе зависит от соотношения двух противоположных факторов: нарастания плотности энергии в некоторых элементах вследствие локализации энергии — с одной стороны, и спадания полной энергии системы вследствие диссипации — с другой стороны. Ротобризер в диссипативной системе представляет собой вращательный предельный цикл. Если вращательное движение возникает, то

нарастание его энергии ограничивается диссипацией, и в установившемся режиме имеет место баланс диссипации и подкачки энергии за счет внешнего момента.

Отметим, что за счет коллективной динамики, приводящей к локализации энергии, вращения в цепочечной системе могут возникать при значениях средней плотности энергии на порядки ниже величины порога выхода на вращательный режим в одиночном элементе.

Вопросу о генерации ротобризерных решений из бегущей волны вследствие модуляционной неустойчивости посвящен раздел 1.2.2. Свойства таких решений анализируются в разделе 3.4.

Помимо модуляционной неустойчивости, возможны другие физические механизмы образования локализованных решений. Различные такие механизмы и методы их численного моделирования обсуждаются в главе 4. Там же рассматриваются численные методы отыскания и исследования свойств дискретных бризеров как «математических» объектов (периодических решений с бесконечным временем жизни и нулевой вероятностной мерой).

Отметим также перспективное направление развития, которое теория дискретных бризеров получила в последнее время. Оказывается, идея построения локализованных решений может быть реализована не только в прямом пространстве решетки, но и во взаимном пространстве нормальных мод [18, 19]. При определенных условиях одномодовое периодическое решение линейной системы может быть продолжено на некоторую область ненулевых значений нелинейности. Такие продолженные решения характеризуются экспоненциальной локализацией в пространстве нормальных мод и, в силу аналогии с дискретными бризерами, были названы q -бризерами. Наряду с периодическими во времени решениями, возможны также долгоживущие непериодические решения, локализованные в пространстве мод (в этом состоит известный результат Ферми-Паста-Улама). Свойствами q -бризеров могут быть качественно и количественно объяснены с единых позиций основные составляющие проблемы Ферми-Паста-Улама: возвращаемость траекторий, локализация в пространстве мод и пороговая зависимость этих эффектов от энергии системы [18, 19]. Концепция q -бризеров может найти применение в различных задачах, связанных с нелинейным взаимодействием мод, например, в теории теплопроводности. Эти вопросы, однако, в данном пособии не освещаются.

Глава 1

Основы теории дискретных бризеров

1.1 Дискретные бризеры как строго периодические решения

1.1.1 Понятие дискретных бризеров. Существование дискретных бризеров

Решения, локализованные в пространстве и периодические во времени, называемые бризерами, известны в некоторых пространственно-непрерывных моделях. Типичным примером является нелинейное уравнение синус-Гордона

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u, \quad (1.1)$$

которое имеет семейство решений [4, 25]

$$u(x, t) = \pm 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha \sin \frac{t}{\sqrt{1+\alpha^2}}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha x}{\sqrt{1+\alpha^2}}} \right), \quad (1.2)$$

где α — действительный параметр.

Бризеры в непрерывных моделях структурно неустойчивы в том смысле, что малое изменение уравнений движения приводит к делокализации решения [28]. Таким образом, бризеры в непрерывных системах можно отнести к «редким» математическим объектам, что снижает интерес к ним с точки зрения физики.

Возможность долгоживущих локализованных колебательных решений в пространственно-дискретных системах была первоначально показана на примере двух связанных осцилляторов для классического и квантового случаев [10]. Такие решения были обнаружены в численных экспериментах [22, 23] и, по аналогии с бризерами в непрерывных системах, были названы дискретными бризерами [23]. Известны также другие наименования: *внутренне-локализованные моды* (intrinsic localized modes) — в физике твердого тела и *дискретные солитоны* — в нелинейной оптике.

Существование дискретных бризеров как периодических во времени решений, локализованных в дискретном пространстве, было строго доказано в работе [4] для бесконечных цепочек локально диффузионно связанных нелинейных осцилляторов, описываемых гамильтонианом

$$H = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2} + U(x_n) + \frac{1}{2} \varkappa (x_{n+1} - x_n)^2 \right), \quad (1.3)$$

где $U(x) \in C^2$ — нелинейный потенциал, $U'(0) = 0$, $U''(0) = \omega_0^2 > 0$, \varkappa — параметр связи. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_n = -U'(x_n) + \varkappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}). \quad (1.4)$$

Доказательство, предложенное в [4], носит конструктивный характер. А именно, в работе описан алгоритм построения дискретных бризеров в таких системах на основе метода непрерывного продолжения решения. В качестве продолжаемого рассматривается периодическое решение в бесконечной цепочке несвязанных осцилляторов ($\varkappa = 0$), где один из осцилляторов совершает колебательное движение, а остальные находятся в покое. Было доказано, что такое решение может быть непрерывно продолжено в банаховом пространстве обратимых во времени периодических решений на некоторую область ненулевых значений параметра связи $\varkappa \neq 0$ при выполнении условий неизохронности продолжаемой орбиты (то есть, ненулевой производной её периода по энергии решения) и нерезонансности ее частоты по отношению к малым колебаниям (то есть, ни сама частота, ни какая-либо из ее гармоник не может быть кратна частоте малых колебаний парциального осциллятора ω_0). Эти условия носят достаточно общий характер. Системы, допускающие существование дискретных бризеров, вообще говоря, неинтегрируемы. Таким образом, дискретные бризеры, в отличие от бризеров в непрерывных системах, не являются «редкими», поэтому можно говорить о потенциальной важности этого класса решений в физике.

На основе этого конструктивного алгоритма и метода точечных отображений Пуанкаре был предложен численный метод отыскания дискретных бризеров с высокой точностью [11]. Там же приводятся многочисленные примеры применения этого метода.

В работе [12] была показана устойчивость таких решений в линейном приближении (что означает лишь отсутствие экспоненциального нарастания малых отклонений от решения и не означает, вообще говоря, ни орбитальной устойчивости, ни устойчивости по Ляпунову) для некоторых систем в широком диапазоне параметров.

С физической точки зрения, условием локализации энергии в дискретном бризере является невозможность ее излучения на бесконечность в виде линейных волн. Поскольку амплитуда колебаний, по определению дискретного бризера, стремится к нулю с удалением от его центра, асимптотика хвостов дискретного бризера описывается линейным приближением. Таким образом, частота дискретного бризера вместе со всеми гармониками должна лежать за пределами линейного спектра решетки. Тогда излучения энергии не происходит, и решение остается локализованным в пространстве.

Физическими предпосылками существования дискретных бризеров являются, следовательно, ограниченность линейного спектра системы (достигаемая за счет пространственной дискретности) и неизохронность парциального элемента (благодаря которой частота нелинейных колебаний оказывается выше или ниже линейного спектра в некотором диапазоне значений энергии) [1].

1.1.2 Количественные характеристики дискретных бризеров

Основные характеристики сильно локализованного дискретного бризера можно оценить с помощью одночастичного приближения [34, 35]. В рамках этого приближения все частицы, кроме одной, предполагаются покоящимися в положении $x = 0$. Для колеблющейся частицы тогда имеем уравнение с одной степенью свободы, из которого можно (по крайней мере, численно) получить зависимость частоты колебаний Ω от энергии частицы ε . Если частота Ω и все ее гармоники $n\Omega$ лежат вне линейного спектра решетки и достаточно далеко от его границ, то можно ожидать, что решеточная система имеет пространственно-локализованное решение с частотой Ω и полной энергией $E \approx \varepsilon$. Показатель локализации решения может тогда быть выражен из дисперсионного соотношения линеаризованных уравнений динамики решетки. Условия одночастичного приближения выполняются тем лучше, и, значит, тем более точный результат дает приближение, чем сильнее локализовано решение.

Применим вышеописанный подход к исследованию одномерной системы (1.4), а также ее двумерного варианта. Уравнения движения для решетки произвольной размерности могут быть записаны в виде

$$\ddot{x}_{\mathbf{n}} = -U'(x_{\mathbf{n}}) + \varkappa \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{N}(\mathbf{n})} (x_{\mathbf{m}} - x_{\mathbf{n}}), \quad (1.5)$$

где \mathbf{n} , \mathbf{m} — двухкомпонентные векторы индексов решетки, а $\mathcal{N}(\mathbf{n})$ — множество ближайших соседей элемента с индексом \mathbf{n} .

Уравнения движения колеблющейся частицы в одночастичном приближе-

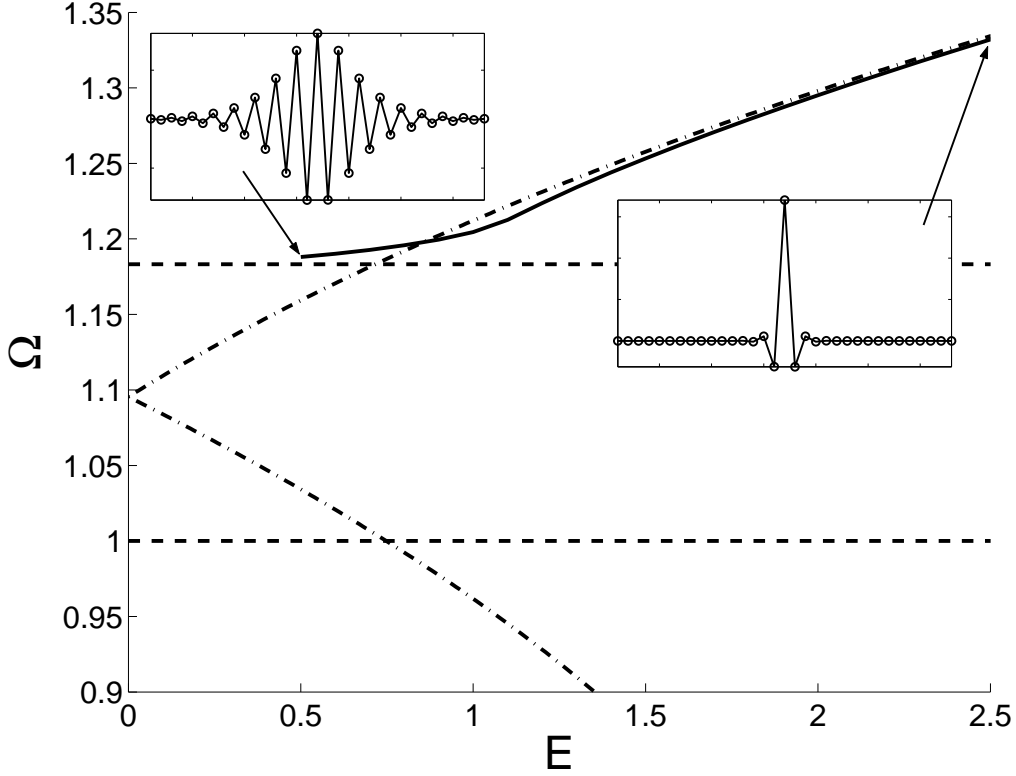


Рис. 1.1: Зависимость частоты дискретных бризеров от энергии. Штрихпунктирные кривые: одночастичное приближение для моделей Клейна-Гордона (вверху) и Такено-Пейрара (внизу). Сплошная кривая: численный расчет для цепочки Клейна-Гордона из $N = 33$ элементов. Врезки: вид дискретного бризера для $E = 0,5$ и $2,5$. Штриховые линии: границы линейного спектра.

нии принимают вид

$$\ddot{x} = -U'(x) - 2D\kappa x, \quad (1.6)$$

где D — размерность решетки.

В качестве примера рассмотрим дискретный аналог модели Клейна-Гордона, где потенциал $U(x)$ в (1.3), (1.4) задается в виде четного полинома четвертой степени

$$U(x) = \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4. \quad (1.7)$$

Рассчитанные численно зависимости $\Omega(\varepsilon)$ частоты колебаний от энергии дискретного бризера в одночастичной модели (1.6) с потенциалом (1.7) при $\omega_0 = 1$, $\kappa = 0.1$, $\beta = 0.25$ для одномерной и двумерной решеток показаны сплошными линиями на рисунках 1.1 (верхняя штрихпунктирная кривая) и 1.2, соответственно.

Далее, воспользуемся дисперсионными соотношениями линеаризованных уравнений движения для оценки показателя экспоненциальной пространственной локализации бризерных решений.

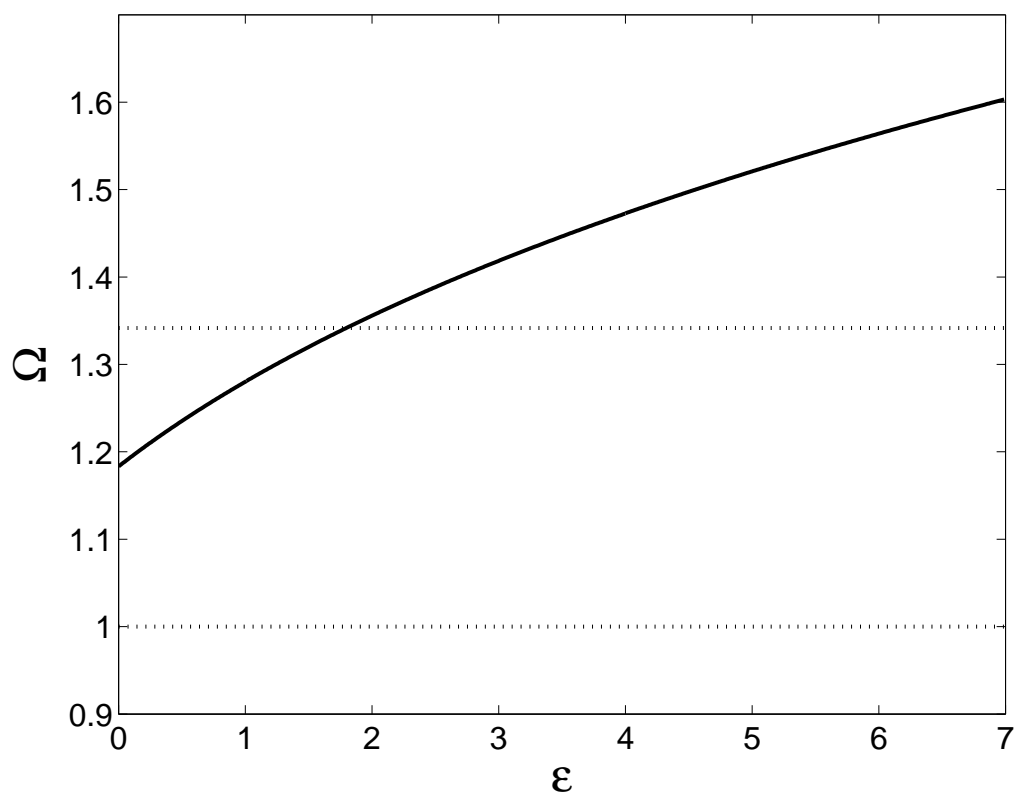


Рис. 1.2: Зависимость частоты от энергии дискретного бризера в одночастичном приближении для двумерной дискретной модели Клейна-Гордона при $\varkappa = 0.1$, $\beta = 0.25$. Также показаны верхняя и нижняя границы линейного спектра (пунктирные линии).

Линеаризуя уравнения (1.4), и подставляя решение в виде гармонической волны

$$x_n(t) = Ae^{i(\omega t - kn)}, \quad (1.8)$$

получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\kappa \sin^2 \frac{k}{2}. \quad (1.9)$$

Спектр гармонических волн в линеаризованной системе занимает полосу частот от $\omega_l = \omega_0$ до $\omega_u = \sqrt{\omega_0^2 + 4\kappa}$, называемую полосой пропускания или (в терминах физики твердого тела) фононной зоной. Границы этой полосы для рассматриваемого случая $\omega_0 = 1$, $\kappa = 0.1$ показаны на рис. 1.1 штриховыми линиями.

Решения линеаризованной системы с частотами за пределами этой полосы имеют комплексное волновое число k , то есть, не распространяются, а спадают в пространстве экспоненциально. Полагая в (1.9) $k = i\delta$, получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 4\kappa \operatorname{sh}^2 \frac{\delta}{2}, \quad (1.10a)$$

а для $k = \pi + i\delta$ имеем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\kappa \operatorname{ch}^2 \frac{\delta}{2}. \quad (1.10b)$$

Соотношения (1.10a,b) позволяют найти показатель пространственной локализации δ для частот ниже и выше фононной зоны, соответственно. Заметим, что показатель локализации увеличивается (то есть, длина локализации уменьшается) при удалении от краев зоны. При этом для частот ниже ω_l все частицы совершают колебания в фазе, а для частот выше ω_u соседние частицы колеблются в противофазе.

Из проведенного расчета следует характерное значение энергии $\varepsilon_{db} \approx 0,72$, определяемое из соотношения $\Omega(\varepsilon_{db}) = \omega_u$ (абсцисса пересечения верхней штрихпунктирной линии с верхней штриховой линией). Для энергий выше ε_{db} следует ожидать существования хорошо локализованных дискретных бризеров с частотами выше ω_u . С увеличением энергии частота дискретного бризера должна увеличиваться, а локализация усиливаться.

Отметим, что согласно теоретическим результатам [36], в такой одномерной цепочке существуют дискретные бризеры с любыми ненулевыми энергиями, то есть, отсутствует порог по энергии дискретного бризера. При стремлении энергии к нулю, длина локализации дискретного бризера увеличивается, а его частота стремится к ω_u сверху, оставаясь все время выше фононной зоны [37]. Пересечение кривой $\Omega(\varepsilon)$ с линейным спектром на рис. 1.1 означает

лишь, что в области $\varepsilon < \varepsilon_{db}$ перестает работать одночастичное приближение, так как дискретный бризер слабо локализован.

Для проверки выводов одночастичного приближения воспользуемся численным методом [11] отыскания периодических бризерных решений с заданной точностью. В цепочке из $N = 33$ элементов при $\varkappa = 0,1$, $\beta = 0,25$ были рассчитаны бризерные решения, локализованные в центре цепочки, для энергий в диапазоне $0,5 < E < 2,5$. Ошибка (расстояние между последовательными пересечениями секущей Пуанкаре) не превышает 10^{-8} . На рис. 1.1 построена зависимость частоты решения от энергии (сплошная кривая), а также приведены профили пространственного распределения координат частиц в момент, когда скорости обращаются в нуль, для двух крайних значений энергии. Как и ожидалось, одночастичное приближение хорошо работает для энергий, существенно превышающих ε_{db} . С уменьшением энергии бризер делокализуется. При этом частота его остается выше линейного спектра, а соседние частицы совершают колебания в противофазе.

Характерное значение энергии ε_{db} разделяет «слабо» и «сильно» локализованные дискретные бризеры. Как будет показано в следующем разделе, это значение имеет смысл при рассмотрении задач о формировании дискретных бризеров в физических процессах, например, вследствие модуляционной неустойчивости гармонических волн.

Для двумерной решетки дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\varkappa \left(\sin^2 \frac{k_1}{2} + \sin^2 \frac{k_2}{2} \right), \quad (1.11)$$

где k_1 и k_2 — компоненты волнового вектора. Фононная зона занимает полосу от $\omega_l = \omega_0$ до $\omega_u = \sqrt{\omega_0^2 + 8\varkappa}$, эти значения отмечены на рис. 1.2 пунктирными линиями. Верхний край фононной зоны оказывается выше, чем в одномерном случае. Кривые $\Omega(\varepsilon)$ также отличаются от одномерного случая. Это приводит, в частности, к увеличению характерного значения энергии перехода к сильно локализованным дискретным бризерам, которое в этом случае составляет $\varepsilon_{db} \approx 1.8$.

1.2 Формирование бризеров с конечным временем жизни. Модуляционная неустойчивость

1.2.1 Дискретные бризеры в модели Клейна-Гордона

Заметим, что множество дискретных бризеров как точных периодических решений в фазовом пространстве решеточной системы имеет меру нуль, что

означает нулевую вероятность реализации такого точного периодического решения в физической системе. Поэтому говорят также о дискретных бризерах в «физическом смысле» как о решениях, характеризующихся пространственной локализацией энергии, имеющей, в отличие от точных периодических решений, конечное время жизни. Именно в этом смысле термин «дискретный бризер» употребляется в дальнейшем.

Одним из возможных механизмов генерации дискретных бризеров в физических процессах является распад гармонической волны за счет модуляционной неустойчивости [29, 30, 31, 38, 39].

Этот вид неустойчивости для дискретных одномерных решеток вида (1.4) был исследован аналитически и численно в работах [30, 31]. Численное моделирование [30, 31] было проведено для случая $\beta < 0$ в потенциале (1.7) на временных масштабах порядка $1.5 \cdot 10^4$ периодов собственного колебания низшей частоты. Результаты [30, 31] показали, что модуляционная неустойчивость может служить эффективным механизмом формирования дискретных бризеров, когда начальные условия заданы в форме слабозашумленной гармонической волны. На начальном этапе эволюции системы из таких начальных условий волна разбивается на отдельные волновые пакеты вследствие модуляционной неустойчивости. Образующиеся волновые пакеты имеют различную энергию и за счет этого слегка различную групповую скорость распространения. На следующем этапе, процессы в котором существенно нелинейны, многочисленные столкновения волновых пакетов приводят к обмену энергией между пакетами. В результате этого обмена энергия в некоторых пакетах может стать достаточной для возбуждения дискретного бризера. Аналогичный механизм реализуется и в других моделях.

В данном разделе описанный выше сценарий исследуется численно в одномерных и квадратных двумерных решеточных системах, описываемых уравнениями (1.5), (1.7) с периодическими граничными условиями

$$x_0 = x_N, \quad x_{N+1} = x_1 \quad (1.12)$$

(в двумерном случае это условие применяется к каждому пространственному измерению), для случая $\omega_0 = 1$, $\beta = 0.25 > 0$, $\varkappa = 0.1$. В одномерной модели исследуется зависимость процесса генерации дискретных бризеров от энергии начальной волны, а также характер эволюции системы на больших временах после формирования дискретных бризеров.

Размер решетки $N = 400$ элементов в одномерном случае, и $N = 80$ в двумерном случае.

Для интегрирования уравнений движения используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка, реализованный на языке *C*. Шаг по времени составляет $\Delta t =$

0.01. Ошибка численного счета в консервативных системах контролируется по дрейфу полной энергии в системе. Относительное изменение энергии за время моделирования во всех расчетах не превышает 10^{-6} .

Начальные условия в одномерной решетке были заданы в виде гармонической волны со слабым мультипликативным шумом:

$$\begin{aligned} x_n(0) &= A(1 + \xi_n) \cos kn \\ \dot{x}_n(0) &= \omega A(1 + \xi_n) \sin kn \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $\omega^2 = 1 + 4\kappa \sin^2(k/2) + 3\beta A^2$. Случайные величины ξ_n независимы и распределены равномерно на интервале $(0, 0.001)$. Используемое выражение для ω учитывает нелинейную поправку первого порядка к частоте в зависимости от амплитуды [31].

Начальные условия для двумерной системы задавались аналогично одномерному случаю:

$$\begin{aligned} x_{ij}(0) &= A(1 + \xi_{ij}) \cos(k_1 i + k_2 j) \\ \dot{x}_{ij}(0) &= \omega A(1 + \xi_{ij}) \sin(k_1 i + k_2 j) \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\omega^2 = 1 + 4\kappa(\sin^2(k_1/2) + \sin^2(k_2/2)) + 3\beta A^2$, характеристики шума – как в одномерном случае.

Из анализа устойчивости [30] следует, что в одномерной решетке при $\beta > 0$ модуляционная неустойчивость имеет место для волновых чисел в диапазоне $\pi/2 < k < \pi$. В соответствии с этим результатом, который был обобщен на двумерный случай, для численного моделирования были выбраны значения волновых чисел $k_1 = k_2 = k = 3\pi/4$.

В качестве основной измеряемой величины выступает дискретная плотность энергии (локальная энергия заданной частицы) ε_n , определяемая соотношением

$$\varepsilon_n = \frac{\dot{x}_n^2}{2} + U(x_n) + \frac{1}{4}\kappa \sum_{m \in \mathcal{N}(n)} (x_m - x_n)^2, \quad (1.15)$$

где обозначения аналогичны используемым в (1.5). Энергия связи при таком определении делится пополам между связанными частицами.

Символом $\bar{\varepsilon}$ обозначается средняя плотность энергии – полная энергия системы, деленная на число частиц.

Было проведено моделирование одномерной системы для 99 различных реализаций случайного шума ξ_n при амплитуде начальной волны A , принимающей значения от 0.1 до 0.5 с шагом 0.05 на временном отрезке длительностью $T = 2.5 \cdot 10^4$.

На рис. 1.3(а,с) уровнем серого изображена эволюция плотности энергии в системе для одной из реализаций шума в начальных условиях при $A = 0.2$

($\bar{\varepsilon} = 0.027$) (a) и $A = 0.5$ ($\bar{\varepsilon} = 0.18$) (c). По оси абсцисс откладывается дискретная координата, по оси ординат – время.

Результаты моделирования хорошо согласуются со сценарием [31], который особенно наглядно прослеживается на рис. 1.3(a).

Развитие неустойчивости приводит к существенному изменению групповых скоростей отдельных пакетов, вплоть до однократного или многократного изменения направления движения. Такие замедленные пакеты с высокой эффективностью поглощают энергию сталкивающихся с ними более быстрых пакетов [30, 31], что приводит к систематическому нарастанию их энергии. При превышении энергией пакета некоторого порога, близкого к характерному значению $\varepsilon_{db} \approx 0.72$, полученному выше в рамках одночастичного приближения, возбуждение становится неподвижным, таким образом, формируется дискретный бризер, продолжающий взаимодействовать с распространяющимися пакетами.

Для количественного исследования процесса генерации дискретных бризеров необходимо ввести критерий дискретного бризера в численном эксперименте. Этот критерий должен учитывать такие свойства дискретного бризера, как неподвижность, высокую плотность энергии (по сравнению с движущимися возбуждениями) и большое время жизни (по сравнению, например, с периодом малых собственных колебаний). Исходя из этих соображений, был выбран следующий критерий.

На элементе с индексом n в момент t регистрируется дискретный бризер, если плотность энергии $\varepsilon_n(t)$, усредненная по M временным отсчетам, сделанным через время τ , превышает порог ε_{db} :

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon_n(t + m\tau) > \varepsilon_{db}, \quad (1.16)$$

где выбраны значения $M = 10$, $\tau = 50.0$. Полное время усреднения, таким образом, составляет $M\tau = 500.0$, то есть, порядка 100 периодов собственного колебания низшей частоты $T_0 = 2\pi$.

Результаты применения этого критерия к случаям, изображенным на рис. 1.3(a,c), показаны на рис. 1.3(b,d), соответственно. Зарегистрированные дискретные бризеры отмечены черным цветом. Как видно из этих рисунков, выбранный критерий вполне соответствует физическим представлениям о дискретном бризере.

В каждой реализации таким способом измеряется количество дискретных бризеров в зависимости от времени $n_{br}^\nu(t)$, где ν – номер реализации. Затем результат усредняется по всем реализациям, в результате чего получается

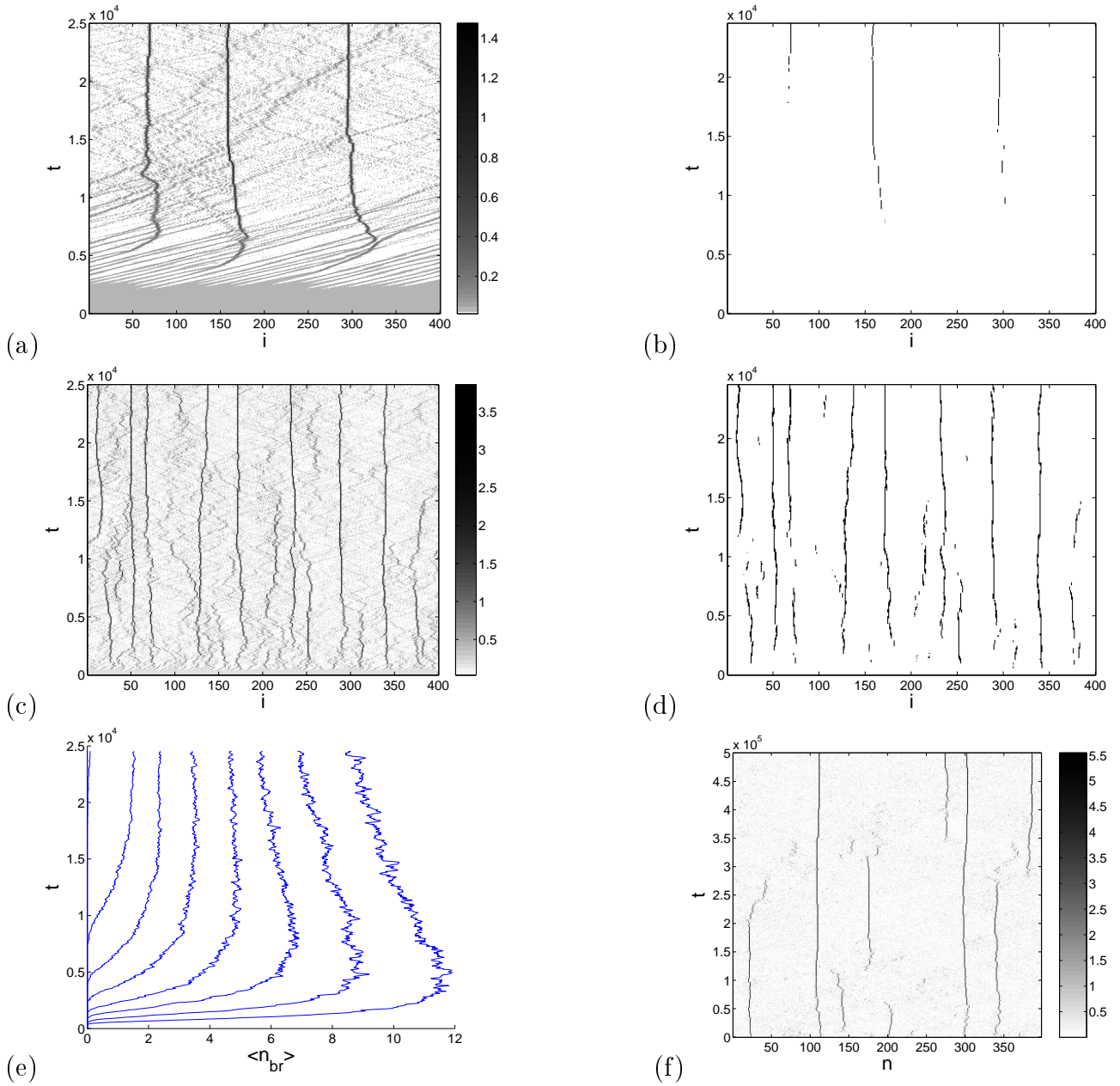


Рис. 1.3: Эволюция плотности энергии (a,c) и выделенные дискретные бризеры (b,d) в одномерной дискретной модели Клейна-Гордона для $A = 0.2$ ($\bar{\varepsilon} = 0.027$) (a,b) и $A = 0.5$ ($\bar{\varepsilon} = 0.18$) (c,d). Зависимость среднего по ансамблю из 99 реализаций количества дискретных бризеров от времени для $A = 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5$ ($\bar{\varepsilon} = 0.015, 0.027, 0.043, 0.062, 0.085, 0.11, 0.14, 0.18$) – кривые слева направо (e). Эволюция плотности энергии на большом интервале времени для $A = 0.5$ ($\bar{\varepsilon} = 0.18$) (f).

среднее по ансамблю количество бризеров в зависимости от времени:

$$\langle n_{br}(t) \rangle = \frac{1}{R} \sum_{\nu=1}^R n_{br}^{\nu}(t), \quad (1.17)$$

где $R = 99$ в данном эксперименте.

Измеренные зависимости $\langle n_{br}(t) \rangle$ для $A = 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5$ ($\bar{\varepsilon} = 0.015, 0.027, 0.043, 0.062, 0.085, 0.11, 0.14, 0.18$) изображены на рис. 1.3(e) (слева направо). Для наглядности сравнения с рис. 1.3(a-d), ось времени направлена вверх. При $A = 0.1$ ($\bar{\varepsilon} = 0.0067$) дискретные бризеры на рассматриваемом промежутке времени зарегистрированы не были.

Как можно заключить из графиков, характерное время формирования первого дискретного бризера t_{br} быстро растет с уменьшением средней плотности энергии. За время порядка нескольких t_{br} количество дискретных бризеров достигает максимума, после чего начинается постепенное уменьшение их количества. Величина максимального количества дискретных бризеров возрастающим образом зависит от энергии начальной волны.

Представляет интерес вопрос о дальнейшей эволюции системы на больших временах. Для выяснения этого вопроса было проведено моделирование для 40 различных реализаций случайного шума ξ_n при $A = 0.5$ ($\bar{\varepsilon} = 0.18$) на временном отрезке длительностью $T = 5 \cdot 10^5$ (что соответствует примерно 10^5 периодам собственного колебания низшей частоты).

Результат для одной из реализаций приведен на рис. 1.3(f). Как видно из рисунка, имеет место распад большей части бризеров, сформировавшихся на начальной стадии. Отметим, что интервал времени на рис. 1.3(f) в 20 раз больше, чем на рис. 1.3(c), а верхняя граница тональной шкалы существенно выше. Это свидетельствует о нарастании энергии выживающих бризеров.

Из 40 реализаций шума, 29 привели к формированию новых дискретных бризеров на больших временах после полного разрушения плоской волны, то есть, за рамками сценария [31]. В 11 из этих 29 реализаций наблюдались такие «поздние» дискретные бризеры с временами жизни больше $5 \cdot 10^4$ (такой случай приведен на рис. 1.3(f)).

Это явление не объясняется напрямую модуляционной неустойчивостью. Однако, можно предположить, что оно является следствием спонтанной локализации энергии в системе, которая связана с модуляционной неустойчивостью.

Снимки распределения локальной плотности энергии в двумерной решетке при начальной амплитуде волны $A = 0.5$ ($\bar{\varepsilon} = 0.22$) в моменты времени $t = 400, t = 500, t = 550$ и $t = 5000$ показаны на рис. 1.4(a,b,c,d), соответственно. Отметим, что масштаб тональной шкалы на этих рисунках различен.

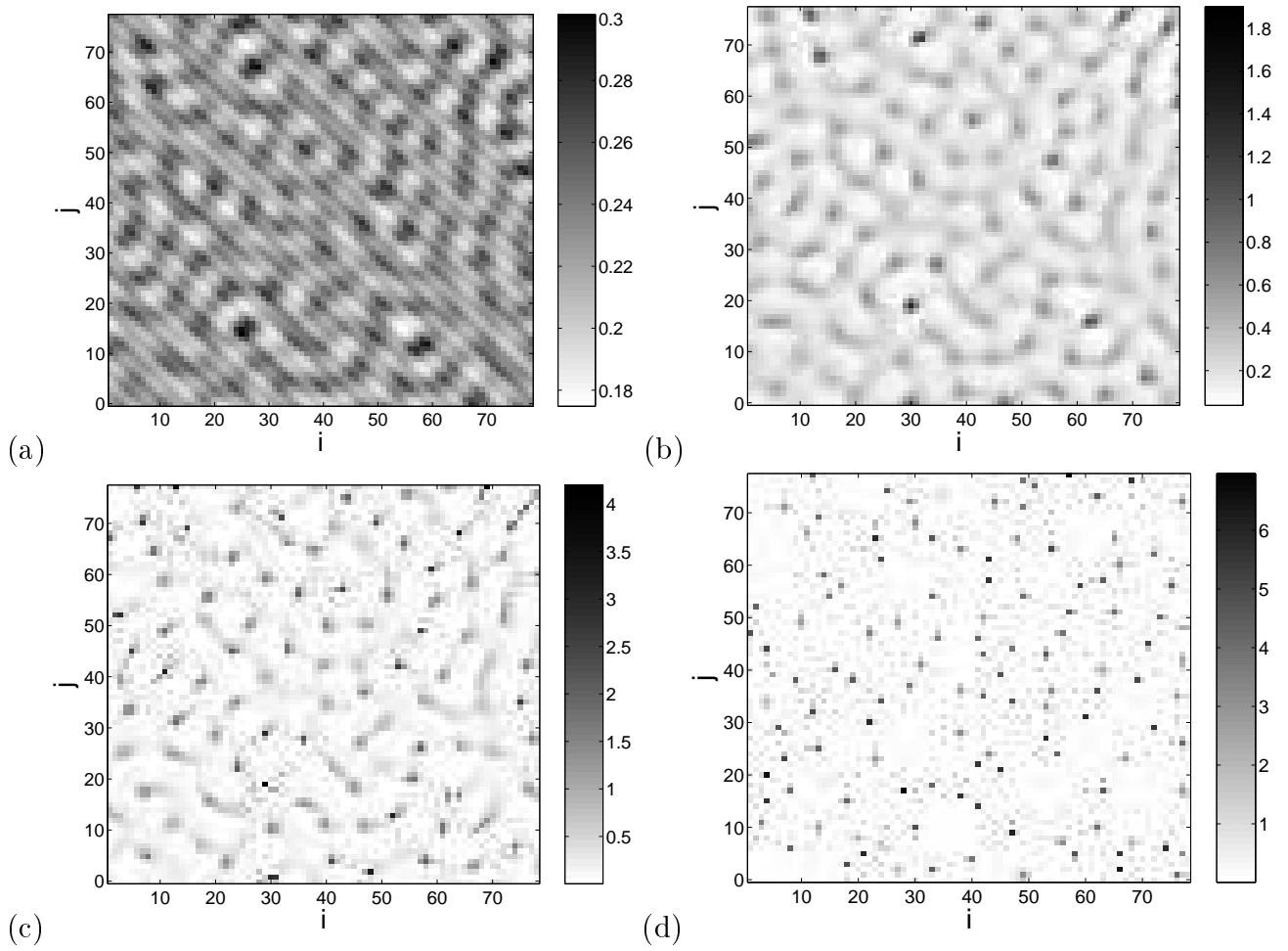


Рис. 1.4: Эволюция плотности энергии в двумерной решетке ($\bar{\varepsilon} = 0.22$). Снимки в моменты времени $t = 400, 500, 550, 5000$ — (a,b,c,d), соответственно.

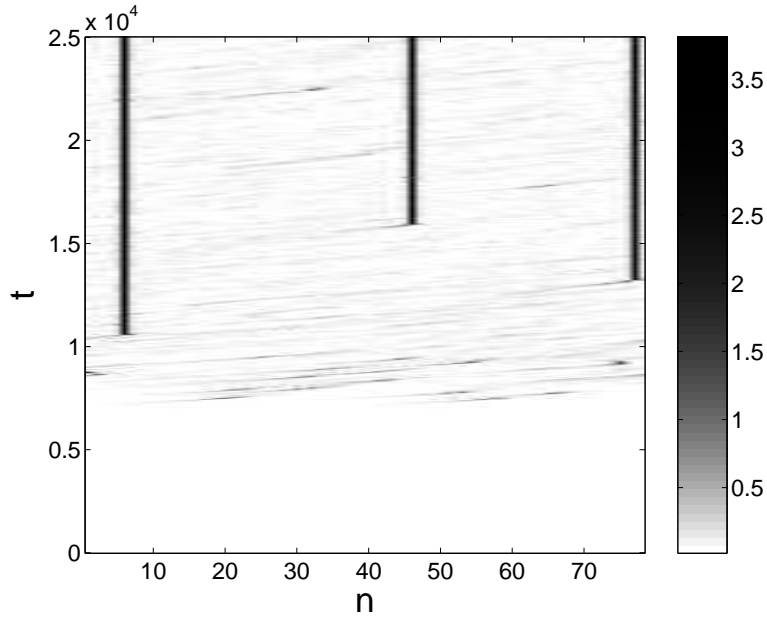


Рис. 1.5: Эволюция плотности энергии в двумерной решетке в «проекции» на одно пространственное измерение (см. пояснения в тексте) для $\bar{\varepsilon} = 0.016$.

На рис. 1.5 представлена эволюция плотности энергии в двумерной решетке со временем для $\bar{\varepsilon} = 0.016$. По оси ординат отложено время, по оси абсцисс — одна из двух дискретных пространственных координат. Уровень серого показывает максимальное значение плотности энергии в решетке по второй пространственной координате. Таким образом получается «одномерная проекция» двумерной решетки.

Наклонные темные линии на рисунке изображают движущиеся пакеты. Еще более темные точки, которыми оканчиваются некоторые из этих линий, соответствуют разрушению пакета по достижении максимальной концентрации энергии без образования бризера. Три отчетливые вертикальные линии отмечают сформировавшиеся дискретные бризеры.

Общий сценарий формирования дискретных бризеров в двумерных решетках качественно повторяет одномерный случай. Модуляционная неустойчивость приводит к концентрации энергии в волновые пакеты, которые распространяются в соответствии с вектором групповой скорости начальной волны. Моделирование показывает, что время формирования таких пакетов при равной начальной средней плотности энергии примерно в 1,5 раза больше, а плотность энергии примерно в 10 раз выше, чем в одномерном случае.

Моделирование на больших временных масштабах (до $T = 10^6$, одна реализация), как и в одномерном случае, продемонстрировало разрушение большинства дискретных бризеров, сформированных на начальной стадии. Формирование новых бризеров на больших временах также наблюдалось.

Основная особенность двумерного случая в сравнении с одномерным заключается в том, что изначально формирующиеся пакеты, плотность энергии в которых при наивысшей ее концентрации не превышает порога формирования дискретного бризера (величина которого, как и в одномерном случае, хорошо согласуется с предсказанием одночастичного приближения $\varepsilon_{db} = 1.8$, см. рис. 1.2), быстро разрушаются с образованием пакетов меньшей энергии. Поэтому лавинообразный процесс нарастания энергии пакета здесь не наблюдается так явно, как в одномерном случае.

Однако моделирование показывает, что хаотические столкновения пакетов, сопровождающиеся обменом энергией, все же приводят к локализации энергии, достаточной для формирования дискретных бризеров. Причем характерное время формирования бризера в двумерной системе оказывается в 1,5 – 2 раза короче, чем в одномерном случае при равной средней плотности энергии.

Для всех реализаций начальных условий как в одномерном, так и в двумерном случаях наблюдались дискретные бризеры с временем жизни порядка времени моделирования. Этот факт не дает возможности достоверно определить максимальное время жизни дискретного бризера и свидетельствует о существенном влиянии, которое оказывают дискретные бризеры на процесс установления теплового равновесия в системе.

1.2.2 Дискретные бризеры и ротобризеры в модели Такено-Пейрара

В системах, описываемых гамильтонианом вида

$$H = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2} + U(x_n) + V(x_{n+1} - x_n) \right) \quad (1.18a)$$

и уравнениями движения

$$\ddot{x}_n = -U'(x_n) + V'(x_{n+1} - x_n) - V'(x_n - x_{n-1}), \quad (1.18b)$$

где потенциал парциального осциллятора $U(x)$ и потенциал взаимодействия $V(x)$ — периодические функции: $U(x + 2\pi) = U(x)$, $V(x + 2\pi) = V(x)$ (период без ограничения общности положим равным 2π), переменные состояния x_n имеют смысл фаз, и наряду с колебательными, возможны также вращательные движения.

Соответственно, помимо колебательных локализованных возбуждений — дискретных бризеров, возможны также локализованные вращательные решения — *ротобризеры* [13, 11].

В ротобризерном решении одна из фаз неограниченно нарастает со временем (элемент совершает вращение), а остальные колеблются с амплитудами, спадающими при удалении от вращающегося элемента. Такие решения были впервые численно получены в работе [13] в системе вида (1.18) с потенциалами

$$U(x) = 1 - \cos x, \quad V(x) = \varkappa(1 - \cos x), \quad (1.19)$$

называемой по именам авторов [13] моделью Такено-Пейрара. Уравнения движения (1.18b) принимают вид

$$\ddot{x}_n = -\sin x + \varkappa(\sin(x_{n+1} - x_n) - \sin(x_n - x_{n-1})). \quad (1.20)$$

Ротобризеры в [13] были получены при моделировании системы (1.20) в равновесии с термостатом, а также путем задания специальных начальных условий (на одном из элементов задается начальная скорость достаточно большой величины). Существование таких решений в моделях вида (1.18) было строго доказано в работе [11]. Аналогично дискретным бризерам, говорят и о ротобризерах в «физическом смысле» с конечным временем жизни.

Следуя схеме, описанной в разделе 1.2.1, исследуем процессы генерации локализованных возбуждений вследствие модуляционной неустойчивости бегущей волны в модели (1.20).

В рамках одночастичного приближения построена зависимость частоты дискретного бризера от энергии, изображенная на рис. 1.1 (нижняя кривая). Дисперсионное соотношение линеаризованной системы совпадает с (1.9). В отличие от дискретной модели Клейна-Гордона, рассмотренной в предыдущем разделе, в данной модели возможные частоты дискретных бризеров лежат *ниже* фононной зоны, имея энергии выше порога $\varepsilon_{db} \approx 0.75$. При превышении порога, приближенно равного $\varepsilon_{rot} = 2.4$, элемент совершает вращательное движение. Заметим еще, что для дискретных бризеров в одночастичном приближении имеются запрещенные области энергий, для которых хотя бы одна гармоника попадает в фононную зону.

Поскольку член четвертой степени в разложении потенциала имеет отрицательную величину, в соответствии с условием модуляционной неустойчивости [30], неустойчивыми в этой системе являются волны с волновыми числами $0 < k < \pi/2$.

Было проведено численное моделирование системы (1.20) из $N = 400$ элементов с периодическими граничными условиями, при $\varkappa = 0.1$, с начальными условиями вида (1.13), где $k = \pi/4$, случайные величины ξ_n независимы и распределены равномерно на интервале $(0, 0.001)$. Были проведены расчеты для 10 различных реализаций начальных условий для каждого значения амплитуды A .

На рис. 1.6(a,c) изображена эволюция плотности энергии в системе для одной из реализаций шума в начальных условиях при $A = 0.25$ ($\bar{\varepsilon} = 0.032$) (a) и $A = 0.7$ ($\bar{\varepsilon} = 0.23$) (c). На рис. 1.6(b,d) приведены результаты выделения локализованных возбуждений в этих расчетах согласно критерию (1.16).

На рис. 1.6(e) приводятся измеренные в соответствии с (1.17) зависимости среднего по ансамблю количества локализованных возбуждений от времени $\langle n_{br}(t) \rangle$ для значений амплитуды $A = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ ($\bar{\varepsilon} = 0.021, 0.047, 0.081, 0.12, 0.17, 0.23$), слева направо. Качественный характер кривых аналогичен результату для дискретной модели Клейна-Гордона (рис. 1.3(e)).

Заметим, что измерение локальных плотностей энергии не позволяет отличить вращательные возбуждения от колебательных. Однако, построенные на рис. 1.6(f) зависимости всех координат от времени $x_n(t)$ для случая, изображенного на рис. 1.6(c), подтверждают наличие локализованных вращательных возбуждений, проявляющихся в виде больших набегов фаз на некоторых элементах. При этом направление вращения таких вращательных возбуждений носит случайный характер, а время жизни (по сравнению с временем жизни колебательного возбуждения) невелико.

Рассмотрим обобщение модели (1.20), включающее внешний момент и диссипацию:

$$\ddot{x}_n + \lambda \dot{x}_n = -\sin x + \varkappa(\sin(x_{n+1} - x_n) - \sin(x_n - x_{n-1})) + \gamma_n. \quad (1.21)$$

Такая модель представляет интерес, например, с точки зрения моделирования динамики электрогенераторов, включенных в общую энергосеть.

Следует ожидать, что в консервативном случае ($\lambda = 0$), при $|\gamma_n = \gamma| \ll 1$, и в отсутствие вращательных движений динамика систем (1.21) и (1.20) с точки зрения процессов разрушения бегущей волны и локализации энергии различается слабо. Различие проявляется при возникновении вращательных движений. В силу наличия внешнего момента, во-первых, имеется выделенное направление вращения; во-вторых, вращательное движение инфинитно и сопровождается неограниченным нарастанием энергии.

Это рассуждение подтверждается численным моделированием. На рисунке 1.7(a) изображена эволюция плотности энергии в системе (1.21) для $\lambda = 0$, $\gamma_n = \gamma = 0.01$, $A = 0.7$ ($\bar{\varepsilon} = 0.23$, ср. с аналогичным случаем при $\gamma = 0$ на рис. 1.6(c)). Черный цвет соответствует значениям плотности энергии, превышающим 4.0, что свидетельствует об инфинитном вращении элемента. Вертикальные черные линии, таким образом, соответствуют ротобризерам. Благодаря наличию внешнего момента, ротобризера не разрушаются и неограниченно набирают энергию.

При наличии диссипации $\lambda > 0$, во-первых, сама возможность возбужде-

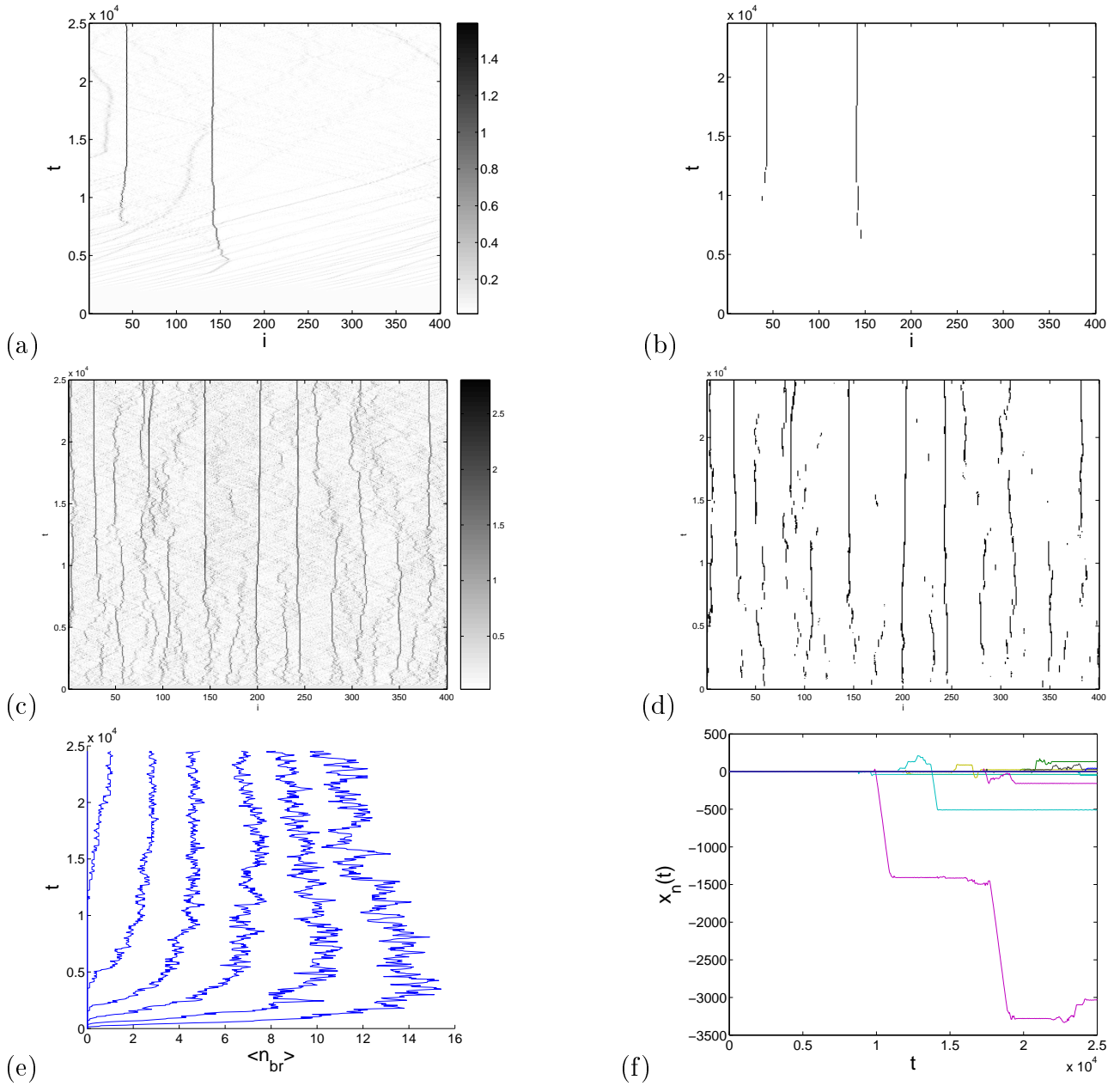


Рис. 1.6: Эволюция плотности энергии (a,c) и выделенные локализованные возбуждения (b,d) в одномерной модели Такено-Пейрара для $A = 0.25$ ($\bar{\varepsilon} = 0.032$) (a,b) и $A = 0.7$ ($\bar{\varepsilon} = 0.23$) (c,d). Зависимость среднего по ансамблю из 10 реализаций количества локализованных возбуждений от времени для $A = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ ($\bar{\varepsilon} = 0.021, 0.047, 0.081, 0.12, 0.17, 0.23$) – кривые слева направо (e). Эволюция координат всех частиц для $A = 0.7$ ($\bar{\varepsilon} = 0.23$) (f), видны локализованные вращательные возбуждения.

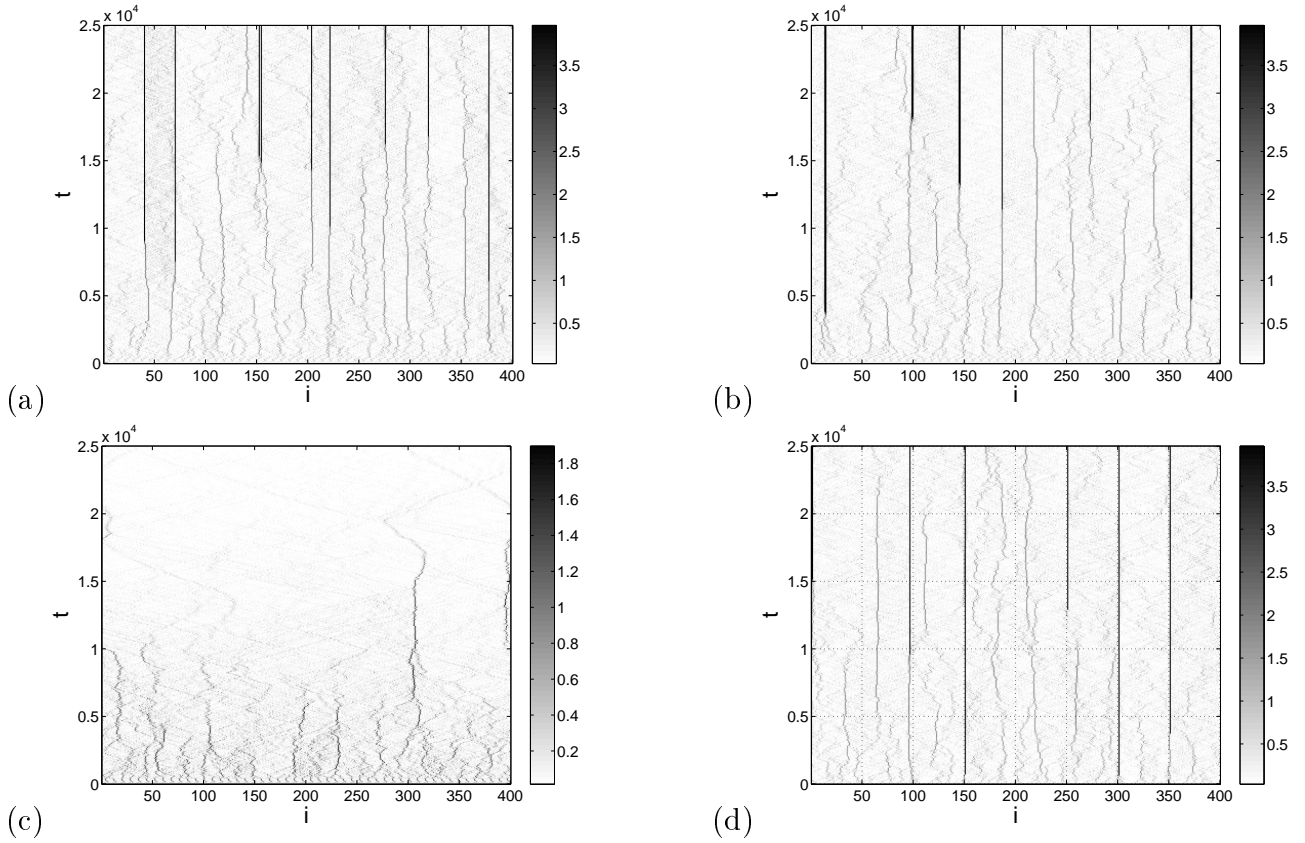


Рис. 1.7: Эволюция плотности энергии в одномерной модели Такено-Пейрара с внешним моментом и диссипацией при $A = 0.7$ ($\bar{\varepsilon}=0.23$). (a-c): $\gamma = 0.01$, $\lambda = 0$, $1 \cdot 10^{-5}$, $1 \cdot 10^{-4}$, соответственно. (d): управление формированием роторбрызгов с помощью неоднородного внешнего момента, $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_{1,51,101,\dots,351} = 0.21$, на остальных элементах $\gamma_n = 0.01$.

ния роторизера в системе зависит от соотношения двух антагонистических факторов: нарастание плотности энергии в некоторых элементах вследствие локализации энергии – с одной стороны, и спадание полной энергии системы вследствие диссипации – с другой стороны. Во-вторых, роторизер в диссипативной системе представляет собой вращательный предельный цикл. Если вращательное движение возникает, то нарастание его энергии ограничивается диссипацией, и в установившемся режиме имеет место баланс диссипации и подкачки энергии за счет внешнего момента.

Существенная особенность динамики коллективной системы по сравнению с парциальным элементом – круговым маятником – заключается в возможности выхода на режим вращения при существенно меньшей средней плотности энергии за счет процессов локализации энергии.

Приведенные соображения иллюстрируются рисунками 1.7(b,c), где изображена эволюция плотности энергии в системе (1.21) при $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$ (b) и $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ (c), значения остальных параметров те же, что и для рис. 1.7(a). При $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$ локализация энергии, преобладавая над диссипацией, приводит к повышению локальной плотности энергии до величины, достаточной для перехода на режим вращения, и возникают роторизеры (рис. 1.7(b)). При $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ локализованные колебательные возбуждения возникают, однако, вследствие диссипации, их энергия оказывается недостаточной для перехода на режим вращения (рис. 1.7(c)), и система эволюционирует к устойчивому состоянию равновесия.

Представляет интерес вопрос о возможности управления процессом генерации роторизеров с помощью внешнего воздействия. Было проведено моделирование системы (1.21) при $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$, $A = 0.7$ ($\bar{\varepsilon}=0.23$), с неоднородным распределением внешнего момента: $\gamma_n = 0.21$ для $n = 1, 51, 101, \dots, 351$, на остальных элементах $\gamma_n = 0.01$ (рис. 1.7(d)). Как видно из рисунка, роторизеры формируются предпочтительно на элементах с повышенным значением внешнего момента, что подтверждает возможность управления их формированием.

Глава 2

Механизмы локализации энергии в нелинейных решетках

2.1 Нелинейность и пространственная дискретность

Проанализируем характер совместного влияния нелинейности и дискретности на пространственную локализацию дискретного бризера, используя простые оценки. Для этого рассмотрим модель в виде цепочки связанных нелинейных осцилляторов, каждый с одной степенью свободы, которая описывается гамильтонианом

$$H = \sum_n \left[\frac{1}{2} p_n^2 + V(x_n) + W(x_n - x_{n-1}) \right]. \quad (2.1)$$

Здесь целочисленный индекс n — это номер узла решетки (возможно, бесконечной), а x_n и p_n — это канонически сопряженные координата и импульс для степени свободы, связанной с узлом n . Потенциал осциллятора V и потенциал взаимодействия W удовлетворяют условию $V'(0) = W'(0) = 0$, $V''(0), W''(0) \geq 0$. Тогда точка $x_n = p_n = 0$ — это состояние равновесия типа центр. Уравнения движения системы имеют вид

$$\dot{x}_n = p_n, \quad \dot{p}_n = -V'(x_n) - W'(x_n - x_{n-1}) + W'(x_{n+1} - x_n). \quad (2.2)$$

Линеаризуя уравнения движения в окрестности состояния равновесия, получим систему связанных линейных дифференциальных уравнений, решения которой имеют вид бегущих гармонических волн малой амплитуды:

$$x_n(t) \sim e^{i(\omega_q t - qn)}, \quad \omega_q^2 = V''(0) + 4W''(0) \sin^2\left(\frac{q}{2}\right). \quad (2.3)$$

Эти волны характеризуются волновым числом q и соответствующей частотой ω_q . Всевозможные частоты распространяющихся волн заполняют область действительных значений, называемую линейным спектром (иначе говоря,

фононной зоной — в физике твердого тела, или полосой пропускания — в радиотехнике). В силу решеточной структуры системы, частота ω_q зависит периодически от q и всегда *ограничена сверху* по абсолютной величине. Наибольшая (дебаева) частота гармонических волн малой амплитуды равна

$$\omega_\pi = \sqrt{V''(0) + 4W''(0)} .$$

Примеры вида дисперсионных кривых ω_q приведены на рис. 2.1. В зависимости от вида потенциала $V(x)$, они могут иметь характер акустических или оптических (при $V''(0) = 0$ или $V''(0) \neq 0$, соответственно). В первом случае линейный спектр покрывает интервал $-\omega_\pi \leq \omega \leq \omega_\pi$, включающий $\omega_{q=0} = 0$. Во втором случае имеется запрещенная зона $|\omega_q| < \omega_0 = \sqrt{V''(0)}$. Линейные волны характеризуются групповой скоростью v_g и фазовой скоростью v_{ph} . Групповая скорость

$$v_g(q) = d\omega_q/dq$$

— это периодическая функция волнового числа q , определяющая скорость распространения узкополосного волнового пакета с центральным волновым числом q . На краю линейного спектра $v_g = 0$. Групповая скорость ограничена по модулю. Фазовая скорость

$$v_{ph} = \omega/q$$

— это непериодическая колеблющаяся функция q . В случае оптического спектра область значений фазовой скорости занимает всю действительную ось, поскольку $\omega_{q=0} \neq 0$. Для акустического спектра она ограничена по модулю $|v_{ph}| \leq v_g(q = 0)$.

Линеаризованные уравнения движения не описывают возмущений большой амплитуды. Подобно случаю одиночного нелинейного осциллятора, частота периодических во времени решений зависит от их амплитуды и, таким образом, может располагаться вне пределов линейного спектра. Допустим, что существует периодическое во времени и локализованное в пространстве решение уравнений (2.2) — *дискретный бризер* $\hat{x}_n(t + T_b) = \hat{x}_n(t)$, период которого равен $T_b = 2\pi/\Omega_b$. В силу периодичности решения, его можно разложить в ряд Фурье

$$x_n(t) = \sum_k A_{kn} e^{ik\Omega_b t} . \quad (2.4)$$

Коэффициенты разложения, вследствие предположения, также локализованы по пространственному индексу.

$$A_{k,|n| \rightarrow \infty} \rightarrow 0 . \quad (2.5)$$

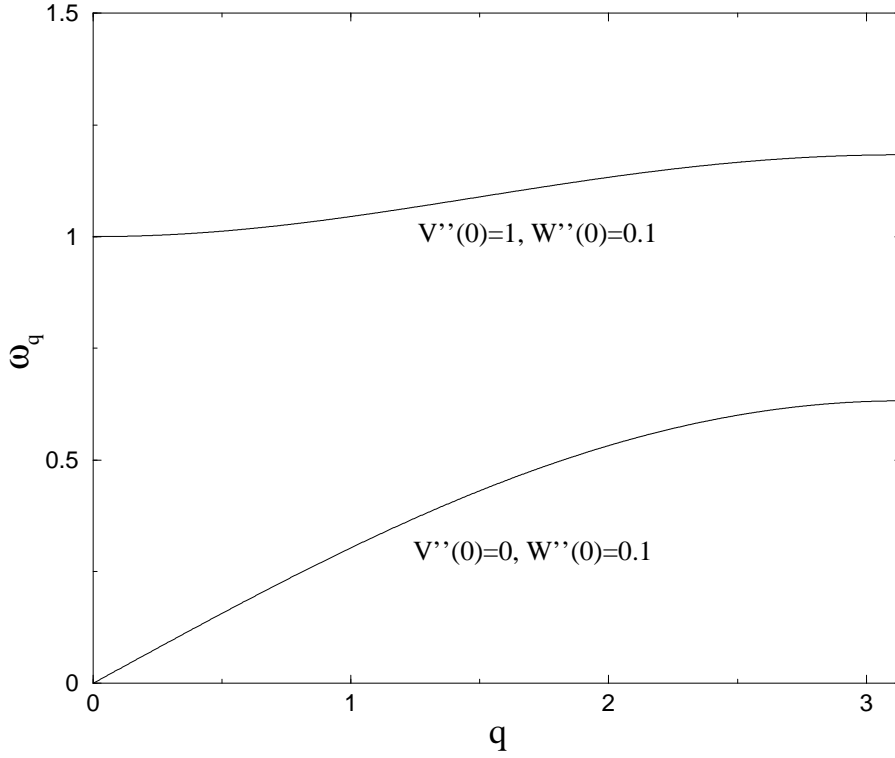


Рис. 2.1: Дисперсионные кривые гармонических волн малой амплитуды для модели (2.1).

Исследуем асимптотику хвостов дискретного бризера, где амплитуда решения мала. Для этого подставим разложение (2.4) в уравнения движения (2.2) и линеаризуем полученные алгебраические уравнения для коэффициентов разложения. Получим тогда следующие линейные алгебраические уравнения:

$$k^2 \Omega_b^2 A_{kn} = V''(0) A_{kn} + W''(0) (2A_{kn} - A_{k,n-1} - A_{k,n+1}) . \quad (2.6)$$

Если $k\Omega_b = \omega_q$, то решения уравнений (2.6) имеют вид

$$A_{k,n} = c_1 e^{iqn} + c_2 e^{-iqn} .$$

Ненулевые коэффициенты $A_{k,n}$ будут тогда осциллировать по пространственному индексу без спадания, что противоречит изначальному предположению. Если, однако,

$$k^2 \Omega_b^2 \neq \omega_q^2 \quad (2.7)$$

для любого целого k , то общее решение уравнений (2.6) дается выражением

$$A_{k,n} = c_1 \kappa_n + c_2 \kappa_{-n} ,$$

где κ — это действительное число, зависящее от q , Ω_b и k . Такие решения спадают в пространстве по экспоненте в том или другом направлении, в зависимости от того, какой из коэффициентов $c_{1,2}$ отличен от нуля. Чтобы условие

(2.7) могло быть выполнено при любом целом k хотя бы для одного значения частоты Ω_b , необходимо потребовать ограниченности частотного спектра ω_q по модулю. Именно в силу этого требования необходима пространственная дискретность системы. Линейные спектры непрерывных полевых уравнений, как правило, не ограничены. В этом случае неизбежны резонансы высоких гармоник решения с линейным спектром системы. Условие нерезонансности (2.7) является необходимым условием существования пространственно-локализованных, периодических во времени решений в гамильтоновых решетках [4, 40].

Приведенный анализ может быть обобщен на другие типы решеточных систем, например, с нелокальными связями, с двумя и более степенями свободы на узел решетки, двумерные и трехмерные решетки и т. д. Условие нерезонансности (2.7) носит, таким образом, характер универсального, отражая ключевую роль дискретности и нелинейности для существования дискретных бризеров.

Как и любое правило, условие нерезонансности имеет исключения. В случае непрерывных гамильтоновых систем это возможно, если система или решение обладает дополнительными свойствами симметрии. Хотя это и может представлять интерес для определенных приложений, как правило, требование дополнительных симметрий ограничивает круг возможных решений. В этом случае потеря симметрии приводит к потере локализации, в отличие от нелинейных решеточных систем, где никакие дополнительные требования симметрии не накладываются.

Хотя в нелинейной решетке резонансы решения с линейными волнами устраняются наиболее естественным образом, возможны также и другие варианты. Например, можно рассмотреть уравнения, не содержащие линейных членов, или хотя бы взаимодействие без линейных членов, что приводит к вырожденному линейному спектру — неважно, для решетки или непрерывной системы. В диссипативных системах получение локализованного решения вообще не составляет проблемы, однако при этом необходима подкачка энергии в систему.

2.2 Периодичность локализованных решений

В предыдущем разделе было показано, как совместное действие дискретности и нелинейности приводит к периодическим пространственно-локализованным решениям — дискретным бризерам. Что можно сказать о существовании других видов локализованных решений с динамикой, отличной от периодической во времени? Для квазипериодического решения с N несоизме-

римыми частотами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ нерезонансное условие (2.7) переходит в [40]

$$\{k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 + \dots + k_N\Omega_N\}^2 \neq \omega_q^2 \quad (2.8)$$

где k_i — произвольные целые числа. Другими словами, ни какая-либо из основных частот $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, ни какая-либо из их (в том числе, перекрестных) гармоник не должны резонировать с линейным спектром. Однако, любая пара несоизмеримых частот Ω_1 и Ω_2 , что подразумевает иррациональное отношение между ними, породит бесконечное число пар k_1, k_2 , для которых нерезонансное условие (2.8) будет нарушено [40]. Таким образом, в общем случае пространственно-локализованных квазипериодических решений в безграничных решеточных системах не существует.

Другой вопрос заключается в возможности существования движущихся дискретных бризеров. Достаточно общее определение движущегося дискретного бризера подразумевает локализованное решение, перемещающееся на n пространственных периодов решетки в какую-либо сторону за μ периодов внутренних колебаний, причем μ в общем случае иррационально. В одномерной цепочке такой движущийся дискретный бризер представляет собой решение вида

$$x_n(t) = \phi(\xi, t), \quad \xi = n - Vt \quad (2.9)$$

$$\phi(\xi, t + T_b) = \phi(\xi, t), \quad \phi(\xi \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Детальный анализ возможных резонансов для таких решений был проведен в [45, 46]. Анализ показал, что необходимо избежать резонансов скорости V с фазовыми скоростями v_{ph} гармонических возмущений малой амплитуды (спектр которых иногда может отличаться от спектра системы, линеаризованной в окрестности состояния равновесия). Основной результат заключается в том, что таких резонансов нельзя избежать, а значит, движущихся дискретных бризеров не должно существовать в нелинейных решетках общего вида. Таким образом, существованию движущихся дискретных бризеров препятствуют резонансы с фазовыми скоростями гармонических волн. В случае диссипативных систем соображения о резонансах теряют силу, а значит, можно говорить о квазипериодических и даже движущихся дискретных бризерах.

2.3 Примеры дискретных бризеров

Приведем примеры дискретных бризеров для различных решеточных систем. Рассмотрим цепочку (2.1) с потенциалами

$$V(x) = x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4, \quad W(x) = 0.1x^2. \quad (2.11)$$

Спектр ω_q носит характер оптического и приведен на рис. 2.2. Дискретные бризеры могут иметь частоты Ω_b , лежащие как выше, так и ниже линейного спектра. В силу симметрии уравнений (2.2) относительно обращения времени, будем искать дискретный бризер в классе решений, также обратимых во времени. Это означает, что существует момент времени, когда все скорости обращаются в нуль. Примем этот момент за начало отсчета времени. Будем тогда искать координаты частиц $x_n(t=0)$, полагая $\dot{x}_n(t=0) = 0$. Эти значения координат могут быть найдены численно с высокой точностью с использованием метода точечных отображений Пуанкаре (периодическая орбита соответствует неподвижной точке отображения) для заданной наперед частоты решения Ω_b .

Примеры найденных профилей $x_n(0)$ для двух различных частот Ω_b (одна из которых выше, другая — ниже линейного спектра) приведены на врезках на рис. 2.2. Значения частот отмечены стрелками. Для каждой из частот были найдены два различных решения из бесконечного их количества. Высокочастотные дискретные бризеры ($\Omega_b \approx 1.66$) имеют большую энергию. Соседние частицы в таких решениях двигаются в противофазе. Низкочастотные дискретные бризеры ($\Omega_b \approx 1.26$) имеют меньшую энергию, все частицы двигаются в фазе.

На рис. 2.3 показаны два дискретных бризера в системе Ферми-Паста-Улама, представляющей из себя цепочку равных масс, связанных нелинейными пружинами: $V(x) = 0$, $W(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$, спектр которой носит характер акустического. Частота обоих найденных решений $\Omega_b = 4.5$. Снова приводятся значения x_n в момент, когда все скорости обращаются в нуль. На врезке построены графики растяжений пружин $u_n = x_n - x_{n-1}$ в логарифмическом масштабе. Как и предсказывалось, решения локализованы в пространстве экспоненциально.

Наконец, приведем примеры дискретные бризеры в *двумерной* квадратной решетке локально связанных нелинейных осцилляторов. Уравнения движения этой системы имеют вид

$$\ddot{x}_{i,j} = k(x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2x_{i,j}) + k(x_{i,j+1} + x_{i,j-1} - 2x_{i,j}) - x_{i,j} - x_{i,j}^3 \quad (2.12)$$

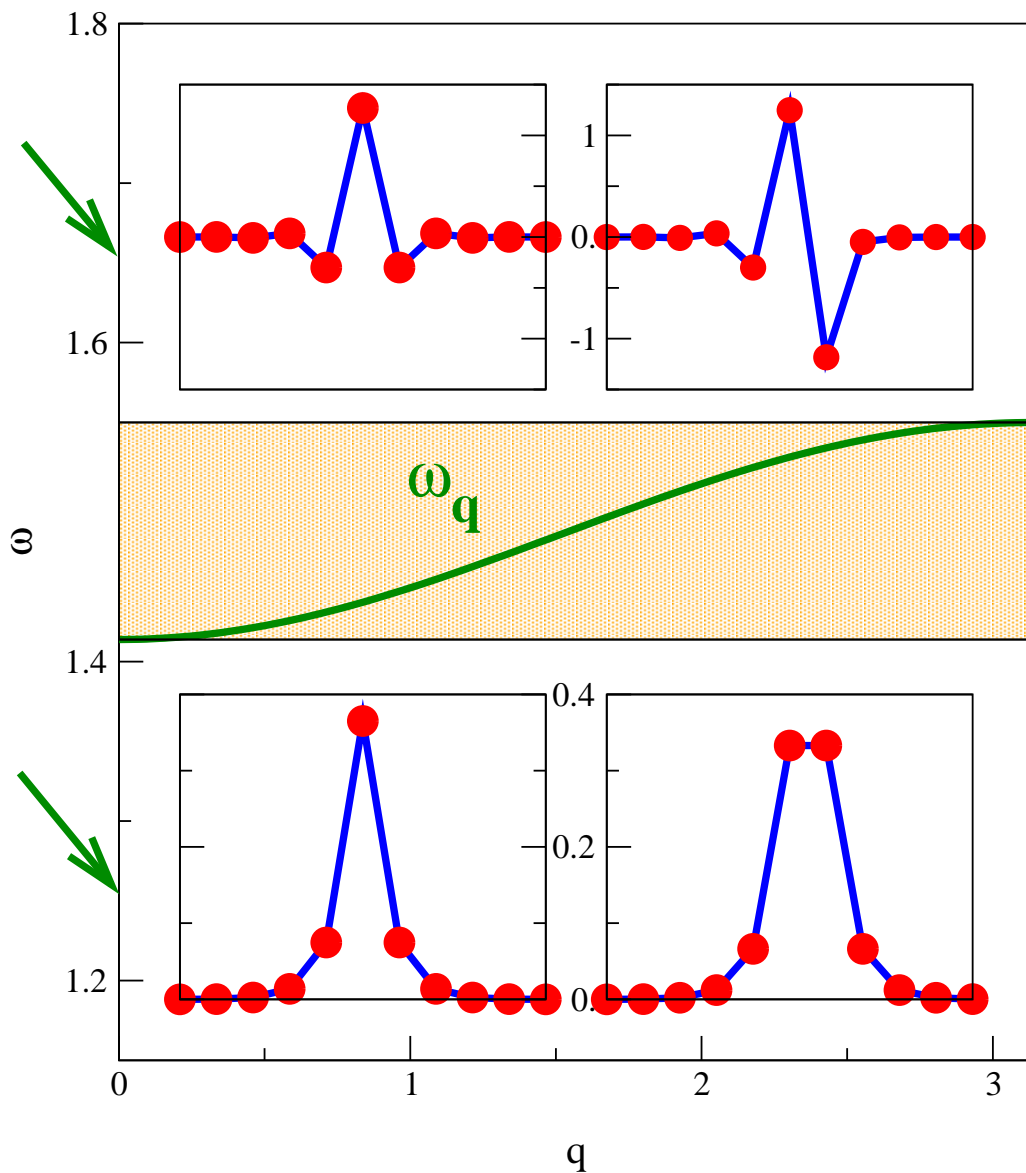


Рис. 2.2: Дисперсионная кривая линейризованной цепочки осцилляторов с потенциалом (2.11). Отмечена зона линейного спектра. Частоты найденных дискретных бризеров указаны стрелками и лежат за пределами линейного спектра. На врезках — снимки координат частиц цепочки для найденных дискретных бризеров в момент, когда все скорости обращаются в нуль [47].

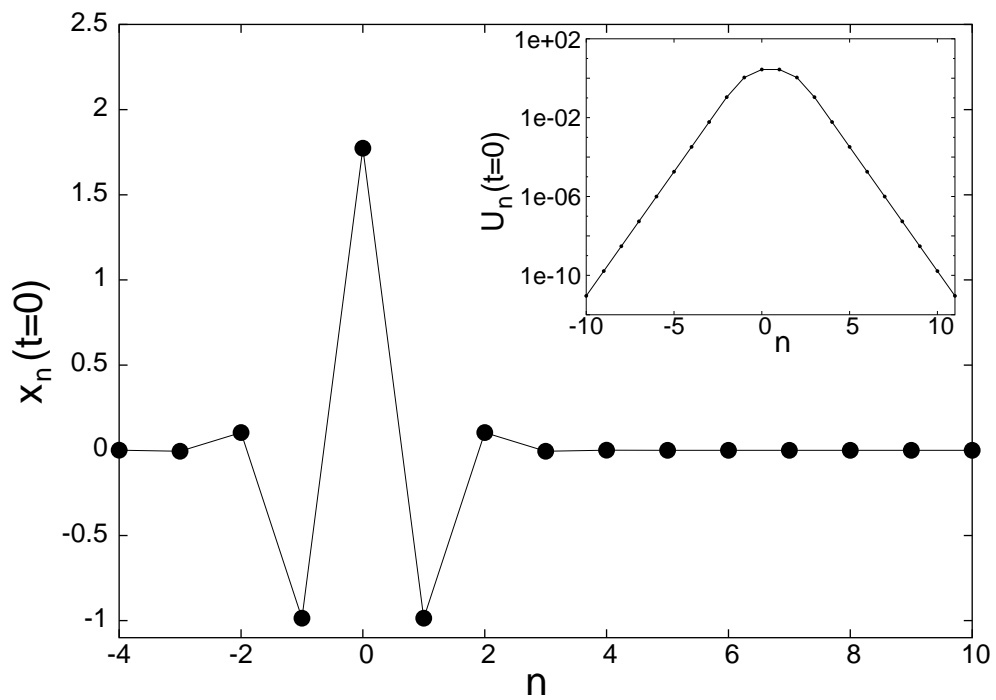
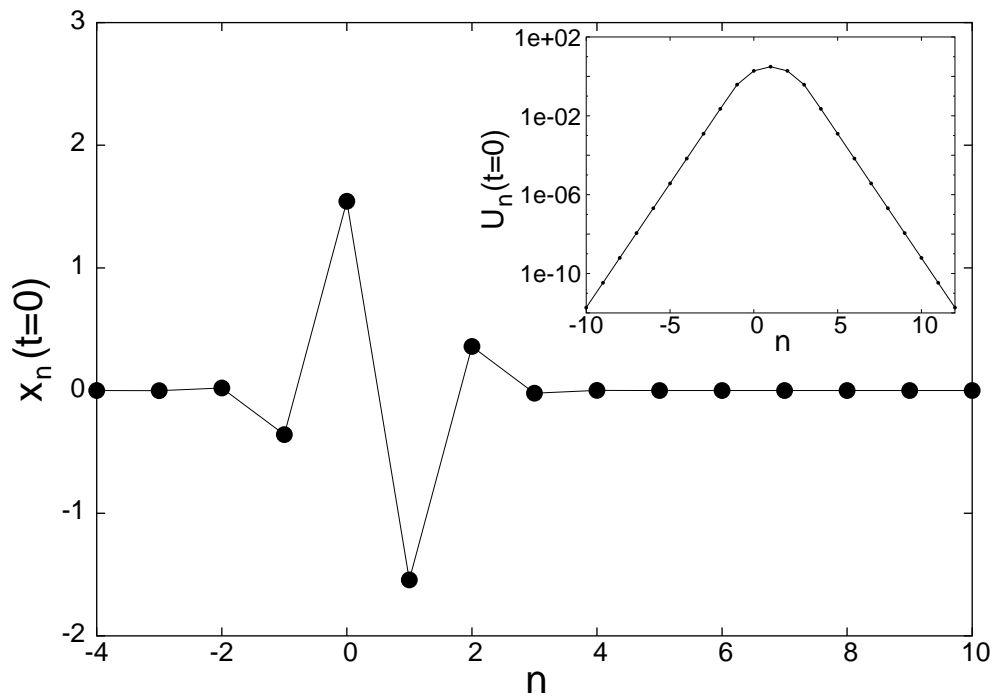


Рис. 2.3: Дискретные бризеры в цепочке Ферми-Паста-Улама (см. текст) [48].

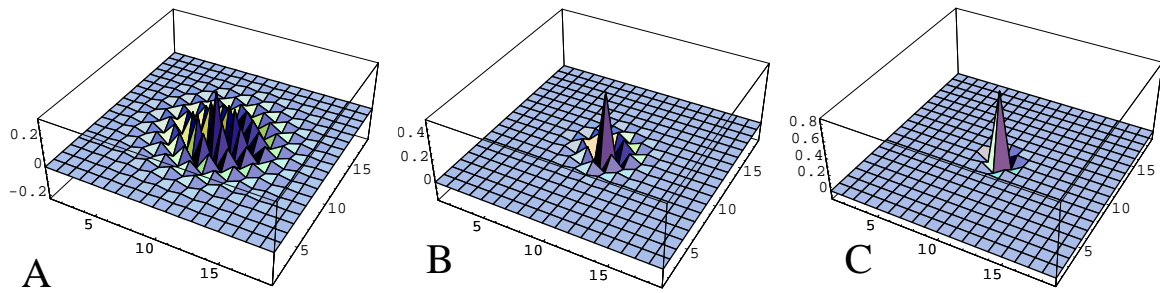


Рис. 2.4: Снимки координат частиц для дискретных бризеров в двумерной решетке (2.12) при $k = 0.05$ в момент, когда все скорости обращаются в нуль [49]. (А) $\Omega_b = 1.188$; (В) $\Omega_b = 1.207$; (С) $\Omega_b = 1.319$.

что соответствует потенциалу осциллятора $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$. На рис. 2.4 приведены координаты осцилляторов в момент, когда все скорости обращаются в нуль, для трех различных частот решения Ω_b при $k = 0.05$ [49]. Во всех трех случаях соседние осцилляторы двигаются в противофазе.

Глава 3

Свойства дискретных бризеров в различных системах

3.1 Пространственная локализация

Дискретные бризеры — типичный класс решений в нелинейных решетках. Вопрос о свойствах их локализации в пространстве разделяется на две проблемы: профиль решения в окрестности его центра и асимптотика спадаания его хвостов. Первая проблема весьма сложна, поскольку требует исследования исходных нелинейных уравнений. Решение второй проблемы облегчается тем обстоятельством, что амплитуды колебаний в хвостах дискретного бризера малы. Следовательно, асимптотика хвостов должна корректно описываться линейным приближением. Возможен, однако, учет и нелинейных поправок.

Рассмотрим для определенности модель с одной степенью свободы на узел (легко получить и обобщение на более сложные случаи). Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sum_l \left[\frac{1}{2} P_l^2 + V(X_l) + \sum_{l'} W_{l,l'} (X_l - X_{l'}) \right] . \quad (3.1)$$

Система представляет собой гиперкубическую решетку размерности d . Индекс решетки l — это вектор, состоящий из d целочисленных компонент. Потенциал взаимодействия обладает свойством $W_{l,l'} = W_{l+m,l'+m}$, то есть, модель инвариантна относительно пространственного сдвига. Потенциальные функции вместе со своими первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Благодаря дискретности, спектр частот линеаризованной системы ω_q ограничен по абсолютной величине.

Рассмотрим решение в виде

$$X_l(t) = \sum_k A_{kl} e^{ik\Omega_b t} . \quad (3.2)$$

Здесь номер Фурье-компоненты k - целочисленный скаляр независимо от размерности решетки d . Дискретный бризер локализован в пространстве, что подразумевает

$$A_{k,|l|\rightarrow\infty} \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Допустим, что потенциальные функции имеют ненулевые вторые производные в начале координат, то есть, $V''(0) = v_2 \neq 0$ и $W_{0,l} = w_{0,l} \neq 0$ для некоторого l . Тогда можно линеаризовать алгебраические уравнения для коэффициентов A_{kl} :

$$k^2\Omega_b^2 A_{kl} = v_2 A_{kl} + \sum_{l'} w_{l,l'} (A_{kl} - A_{kl'}). \quad (3.4)$$

Поскольку уравнения для коэффициентов разных гармоник после линеаризации оказываются несвязанными, их можно решать по отдельности. Необходимым условием пространственной локализации k -й Фурье-компоненты является отсутствие резонанса: $k\Omega_b \neq \omega_q$. Спадание k -й компоненты в пространстве задается тогда функцией Грина решетки [50]:

$$G_\lambda(l) = \int_{1.BZ} \frac{\cos(ql)}{\omega_q^2 - \lambda} d^d q, \quad \lambda = k^2\Omega_b^2. \quad (3.5)$$

Здесь интеграл берется по первой зоне Бриллюэна во взаимном пространстве волновых векторов q . Напомним, что дисперсионное соотношение ω_q периодически по q , и первая зона Бриллюэна как раз охватывает один его период в многомерном пространстве. Если зафиксировать направление вектора l и менять его абсолютное значение, то уравнение (3.5) даст коэффициенты Фурье для периодической функции $(\omega_q^2 - \lambda)^{-1}$. Значит, спадание амплитуды k -й гармоники в пространстве характеризуется асимптотикой коэффициентов соответствующего ряда Фурье, а они, в свою очередь, зависят от аналитичности разлагаемой в ряд функции.

Будем называть взаимодействие элементов решетки близкодействующим, если соответствующая дисперсионная характеристика ω_q^2 — аналитическая функция в расширенном пространстве волновых векторов q , то есть, если функция и все ее производные в любой точке q существуют и конечны. Таким свойством обладает, в частности, локальное взаимодействие, а также любое взаимодействие, действующее на конечном расстоянии: $w_{0,l} = 0$ при $|l| > r$, где $r > 0$. Кроме того, к близкодействующим относятся потенциалы взаимодействия, сила которых экспоненциально спадает с расстоянием [51]: $w_{0,l} \sim e^{-|l|/r}$ при $|l| \gg r$. Во всех этих случаях выражение $(\omega_q^2 - \lambda)^{-1}$, входящее в уравнение (3.5) — аналитическая периодическая функция q . Значит, коэффициенты ее ряда Фурье, а следовательно, и хвосты дискретного

бризера имеют экспоненциально спадающую асимптотику [52]. Показатель экспоненты зависит от $\lambda = k^2\Omega_b^2$. Длина локализации будет тем больше, чем ближе частота гармоника $k\Omega_b$ окажется к краю линейного спектра ω_q .

На врезках на рис. 2.3 продемонстрирован экспоненциальный характер локализации для двух дискретных бризеров в одномерной цепочке Ферми-Паста-Улама с локальным взаимодействием. Сравнение численно найденной длины локализации с теоретическим предсказанием, полученным из (3.5), было проведено для различных одномерных моделей в [40, 43] и обсуждалось также в [1].

Приведем пример дискретного бризера в кубической трехмерной решетке типа дискретного нелинейного уравнения Шредингера с локальным взаимодействием

$$\dot{\Psi}_l = i(\Psi_l + |\Psi_l|^2\Psi_l + 0.1 \sum_{m \in N_l} \Psi_m), \quad (3.6)$$

где N_l обозначает множество ближайших соседей узла l . Будем искать решение вида $\Psi_l = A_l e^{i\Omega_b t}$. Полученная система алгебраических уравнений может быть решена относительно амплитуд A_l , причем, в силу обратимости искомого решения во времени, можно ограничиться действительными значениями амплитуд [36]. На рис. 3.1) приведено рассчитанное пространственное распределение амплитуд A_l для дискретного бризера с центром в узле с координатами $l = (16, 16, 16)$ в решетке размера $31 \times 31 \times 31$ (построена зависимость амплитуд от координат x, y в плоскости $z = 16$, содержащей центр бризера).

Отметим, что дискретный бризер сильно локализован на нескольких узлах решетки (рис. 3.1), слева). То же решение, представленное в логарифмическом масштабе (рис. 3.1), справа) дает на графике коническую поверхность, как и следовало ожидать, исходя из предсказанной экспоненциальной локализации в пространстве.

Будем называть взаимодействие дальнедействующим, если соответствующая дисперсионная характеристика ω_q^2 — это неаналитическая функция в расширенном пространстве волновых векторов q , то есть, какие-либо из ее производных в какой-либо точке q не существуют или обращаются в бесконечность. Этот случай имеет место, например, если сила взаимодействия спадает с расстоянием по алгебраическому закону: $w_{0,l} \sim |l|^{-s}$, где s — положительная величина. В системах с таким взаимодействием дискретные бризеры также могут существовать, но не могут быть локализованы в пространстве по экспоненте. Неаналитичность функции ω_q^2 непосредственно приводит к степенной асимптотике коэффициентов Фурье (3.5) и к такой же асимптотике для хвостов дискретного бризера. Как показано в [53], в этом случае имеет место сложный закон спада амплитуд в пространстве, характеризующийся на-

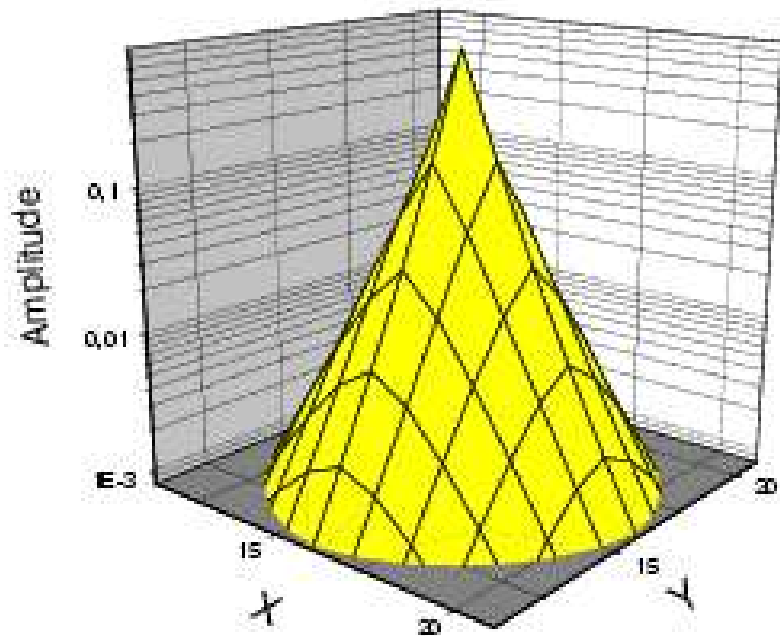
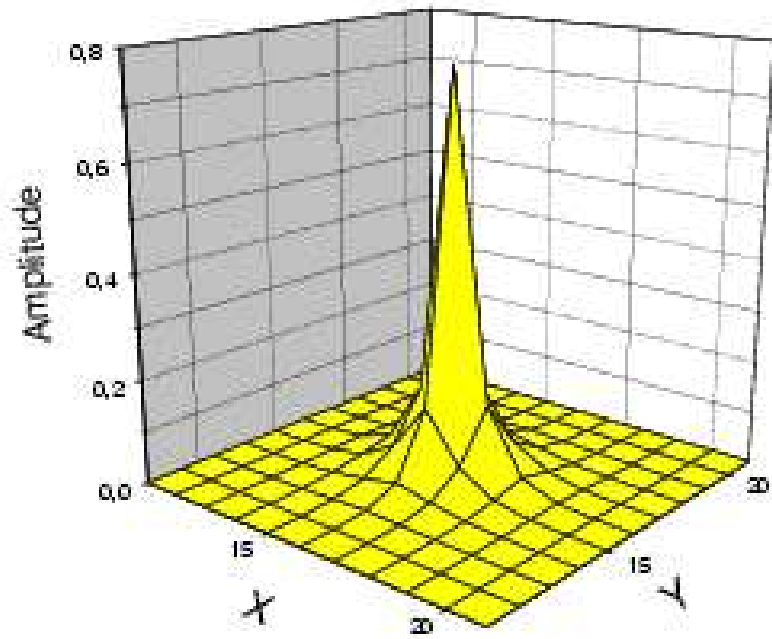


Рис. 3.1: Пространственное распределение амплитуд для дискретного бризера в трехмерной решетке типа дискретного нелинейного уравнения Шредингера (3.6) размера $N = 31 \times 31 \times 31$. Представлено распределение амплитуд на секущей плоскости $(x; y)$, проходящей через центр бризера. Слева — амплитуды в линейном масштабе, справа — то же решение в логарифмическом масштабе [36].

личием выраженного перехода от экспоненциального спада к степенному на некотором удалении от центра бризера.

В случае чисто нелинейного взаимодействия [42, 44, 40, 41, 11, 54, 55, 56] асимптотика хвостов дискретного бризера является суперэкспоненциальной, то есть,

$$\ln |\ln |A_n|| \approx n \ln(2m - 1) . \quad (3.7)$$

Такие решения иногда называют квазикompактными.

В литературе также имеются исследования, посвященные резонансам с голдстоуновскими модами [57] и нелинейным поправкам [43].

3.2 Устойчивость дискретных бризеров

Когда найдено решение, соответствующее дискретному бризеру, возникает важный вопрос о его устойчивости. Проблема заключается в характере эволюции малых возмущений $\epsilon_n(t)$ в окрестности решения $\hat{x}_n(t)$. Вообще говоря, следует ожидать, что динамика возмущения будет носить сложный характер, типичный для неинтегрируемых систем, что означает принципиальную трудность аналитического исследования. Однако, представление о характере эволюции достаточно малых возмущений можно получить, линеаризуя уравнения движения по $\epsilon_n(t)$ в окрестности решения $\hat{x}_n(t)$ [12, 59]:

$$\ddot{\epsilon}_n = - \sum_m \frac{\partial^2 H}{\partial x_m \partial x_n} \Big|_{\{\hat{x}_l(t)\}} \epsilon_m , \quad (3.8)$$

где H — гамильтониан системы.

Отметим, что устойчивость решения в линейном приближении не означает его устойчивости в исходной системе, а предполагает лишь отсутствие экспоненциального роста малых возмущений.

В рамках линейного приближения по возмущению $\epsilon_n(t)$, само решение входит в систему как параметрическое воздействие, периодическое во времени, и линеаризованная задача (3.8) соответствует нестационарному гамильтониану $\tilde{H}(t)$:

$$\tilde{H}(t) = \sum_n \left[\frac{\pi_n^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_m \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_m} \Big|_{\{\hat{x}_l(t)\}} \epsilon_n \epsilon_m \right] , \quad (3.9)$$

$$\dot{\epsilon}_n = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \pi_n} , \quad \dot{\pi}_n = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \epsilon_n} . \quad (3.10)$$

Специфическая структура гамильтониана \tilde{H} приводит к закону сохранения $\dot{I} = 0$ [12, 60] для симплектического произведения

$$I = \sum_n [\epsilon_n(t) \pi'_n(t) - \epsilon'_n(t) \pi_n(t)] \quad (3.11)$$

любых двух решений $y = \{\epsilon_n, \pi_n\}$ и $y' = \{\epsilon'_n, \pi'_n\}$. Выражение для \dot{I} может быть записано в виде скалярного произведения

$$I = (Jy, y'), \quad (3.12)$$

где J — матрица размера $2N \times 2N$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

а I — единичная матрица размера $N \times N$. Сохранение симплектического произведения I означает, что матрица эволюции $U(t)$, задающая линейное отображение малых возмущений

$$\begin{Bmatrix} \epsilon(t) \\ \pi(t) \end{Bmatrix} = U(t) \begin{Bmatrix} \epsilon(0) \\ \pi(0) \end{Bmatrix}, \quad (3.14)$$

является симплектической:

$$U^T J U = J. \quad (3.15)$$

В силу периодичности во времени всех коэффициентов в правой части уравнения (3.8), характер динамики малого возмущения $\epsilon_n(t)$ определяется матрицей Флоке $\mathcal{F} \equiv U(T_b)$, задающей линейное отображение малых возмущений на одном периоде решения T_b . Таким образом, проблема исследования устойчивости решения в линейном приближении сводится к отысканию собственных чисел и собственных векторов симплектической матрицы Флоке \mathcal{F} .

Условие линейной устойчивости решения предполагает, что все линейные возмущения должны оставаться ограниченными во времени. Это означает, что все собственные числа матрицы Флоке, иначе говоря, мультипликаторы периодической орбиты λ_ν должны располагаться на единичной окружности: $|\lambda_\nu| = 1$ (рис. 3.2, слева).

Все мультипликаторы типичного дискретного бризера могут быть разделены на две группы, соответствующие пространственно-локализованным и пространственно-делокализованным собственным векторам. Так как само решение экспоненциально локализовано, то делокализованные собственные вектора представляют собой локально-деформированные линейные моды решетки (стоячие волны). Их количество пропорционально размеру системы. Наоборот, количество собственных векторов (и собственных чисел), локализованных в пространстве, зависит только от параметров самого дискретного бризера и является конечным даже для бесконечной решетки.

В силу гамильтоновости системы, всегда имеются два мультипликатора, равных $+1$, соответствующих локализованным возмущениям [12, 45]: сдвигу

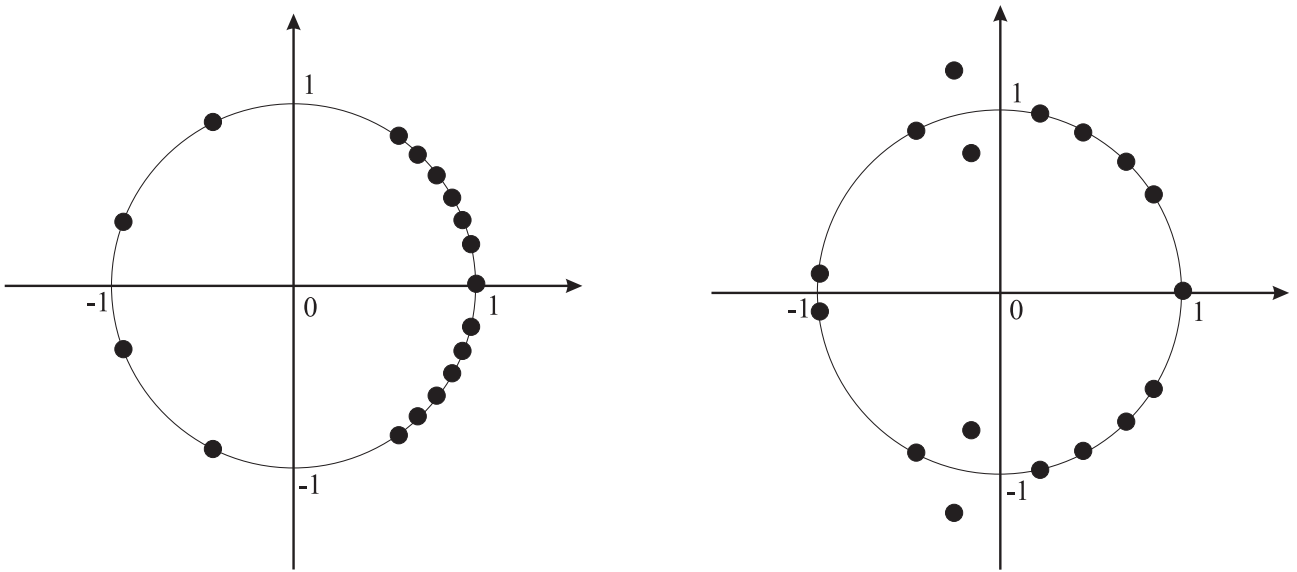


Рис. 3.2: Схема расположения мультипликаторов периодического решения, соответствующего дискретному бризеру в гамильтоновой системе, на комплексной плоскости. Мультипликаторы — закрашенные кружки, сплошная линия — единичная окружность. Слева: бризер, устойчивый в линейном приближении (все мультипликаторы располагаются на единичной окружности). Справа: неустойчивый дискретный бризер (две комплексно сопряженные пары мультипликаторов сошли с единичной окружности, одна из пар больше единицы по модулю). Группа близко расположенных мультипликаторов соответствует спектру возмущений типа гармонических волн (нелокализованных собственных векторов матрицы Флоке), отдельно расположенные мультипликаторы соответствуют локализованным собственным векторам.

вдоль фазовой траектории и изменению энергии решения (то есть, сдвигу вдоль семейства периодических орбит).

При изменении параметров модели или энергии решения, мультипликаторы непрерывно изменяются, перемещаясь по комплексной плоскости. С единичной окружности мультипликатор может сойти только в результате «столкновения» с другим мультипликатором, тогда решение становится неустойчивым (рис. 3.2, справа).

В заключение заметим, что бифуркации фазовых траекторий, имеющие место при переходе от линейно устойчивого дискретного бризера к неустойчивому, могут быть достаточно сложными, что связано с неинтегрируемостью исследуемых систем.

3.3 Пороги энергии дискретных бризеров

Решения, соответствующие дискретным бризерам, существуют в виде однопараметрических семейств. Параметром может быть амплитуда колебаний (например, на том узле, где она максимальна), энергия E или частота решения Ω_b . Для большинства семейств дискретных бризеров в бесконечных решетках, амплитуда может быть сколь угодно малой. В пределе малой амплитуды, частота бризера Ω_b стремится к краю линейного спектра ω_q . Это происходит, поскольку нерезонансное условие $\omega_q/\Omega_b \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ должно выполняться для всех решений семейства. В пределе малой амплитуды, решение должно приближаться к какому-либо решению линеаризованной системы, а значит, частота Ω_b должна приближаться к какой-то из собственных частот ω_q , но в то же время не должна совпадать ни с одной из них. Это возможно только в том случае, если частота бризера стремится к одной из граничных частот ω_E линейного спектра при стремлении амплитуды к нулю.

Для семейства нелинейных бегущих волн, переходящих в граничную моду линейного спектра в пределе малой амплитуды, зависимость частоты ω от амплитуды A имеет вид

$$|\omega - \omega_E| \sim A^z \quad (3.16)$$

для $A \rightarrow 0$, где показатель z зависит от вида нелинейности в гамильтониане (3.1), и может быть вычислен с использованием асимптотических методов [61].

Далее будем следовать ходу рассуждений, предложенному в [36]. Рассмотрим систему с близкодействующим потенциалом взаимодействия и оценим энергию дискретного бризера в пределе малой амплитуды. Определим амплитуду дискретного бризера как наибольшую амплитуду колебаний в решетке.

Обозначим ее A_0 и положим без нарушения общности, что наибольшая амплитуда колебаний имеет место в узле с индексом $l = 0$. Амплитуда колебаний спадает в пространстве с удалением от центра бризера $l = 0$. Асимптотика спада может быть оценена в рамках приближения сплошной среды для линейаризованной системы. Результат имеет вид

$$A_l \sim CF_d(|l|\delta) ,$$

где $|l|$ полагается большим, δ — показатель пространственной локализации, C — константа порядка A_0 , а F_d — функция, определяемая пространственной размерностью решетки

$$F_1(x) = e^{-x} , \quad F_3(x) = \frac{1}{x}e^{-x} , \quad (3.17)$$

$$F_2(x) = \int \frac{e^{-x\sqrt{1+\zeta^2}}}{\sqrt{1+\zeta^2}} d\zeta . \quad (3.18)$$

Чтобы оценить зависимость показателя пространственной локализации δ от частоты периодического решения Ω_b , которая близка к краю линейного спектра, необходимо установить поведение дисперсионной характеристики линейных волн ω_q вблизи края спектра. В типичных случаях дисперсионная характеристика вблизи края спектра аппроксимируется квадратичной зависимостью

$$(\omega_E - \omega_q) \sim |q - q_E|^2 ,$$

где $\omega_E \neq 0$ — граничная частота линейного спектра, а q_E — соответствующий волновой вектор.

Аналитически продолжая эту зависимость на комплексную плоскость и заменяя $(q - q_E)$ на $i(q - q_E)$, придем к квадратичной зависимости для δ от частоты решения, лежащей за пределами линейного спектра:

$$|\Omega_b - \omega_E| \sim \delta^2 .$$

Наконец, учтем зависимость частоты бризера (или расстройки $|\Omega_b - \omega_E|$) от его амплитуды. Так как бризер в пределе малой амплитуды делокализуется, то можно использовать для оценки частоты выражение (3.16), изначально полученное для нелокализованных волн. Тогда получаем $|\Omega_b - \omega_E| \sim A_0^z$, откуда находим

$$\delta \sim A_0^{z/2} .$$

Оценим теперь зависимость энергии дискретного бризера от его (малой) амплитуды, заменяя сумму по решетке интегралом:

$$E_b \sim \frac{1}{2}C^2 \int r^{d-1} F_d^2(\delta r) dr \sim A_0^{(4-zd)/2} . \quad (3.19)$$

Это возможно, если бризер существует вплоть до сколь угодно малых амплитуд, и при этом амплитуды на отдельных узлах медленно меняются в пространстве.

Таким образом приходим к выводу, что если $d > d_c = 4/z$, то энергия бризера стремится к бесконечности с уменьшением амплитуды, если же $d < d_c$, то энергия стремится к нулю. Для $z = 2$ находим $d_c = 2$, что согласуется с известным результатом [62], где было продемонстрировано рождение дискретного бризера в результате бифуркации орбиты, соответствующей линейной моде на краю спектра. Отметим, что в случае $d = d_c$ в выражении (3.19) появится логарифмическая зависимость.

Из вышесказанного непосредственно следует, что для $d \geq d_c$ энергия дискретного бризера ограничена снизу некоторой ненулевой величиной. В самом деле, для любой ненулевой амплитуды решения энергия не может равняться нулю, а с приближением амплитуды к нулю энергия стремится к конечному пределу (при $d = d_c$) или к бесконечности (при $d > d_c$). Таким образом, для $d \geq d_c$ существует порог энергии дискретного бризера. Этот новый масштаб энергии определяется комбинацией коэффициентов разложения нелинейных составляющих потенциалов в (3.1).

Для $z = 2$ имеем $|\Omega - \omega_E| \sim \beta A^2$, и если средняя энергия на осциллятор $E \sim gA^2$, а показатель пространственной локализации δ задается соотношением $|\Omega_b - \omega_E| \sim \kappa \delta^2$, то порог энергии дискретного бризера E_{min} имеет порядок $\kappa g/\beta$. Заметим, что для трехмерной решетки бризер, имеющий минимальную энергию, локализован на пространственном масштабе порядка одного периода решетки, независимо от κ , g и β .

Вышеприведенные оценки подтверждаются большим количеством численных результатов. Для d -мерной модели типа дискретного нелинейного уравнения Шредингера (3.6) зависимость энергии дискретного бризера от амплитуды на центральном узле приведена на рис. 3.3 сверху. Для $d = 2$ и 3 отчетливо наблюдается порог по энергии [36]. Бризер, соответствующий минимуму энергии при $d = 3$, изображен на рис. 3.1, где видна его сильная локализация в решетке.

Было также обнаружено, что пороги по энергии дискретного бризера имеют место и в одномерных системах, если старший нелинейный член в уравнениях движения имеет достаточно высокую степень. Покажем это на примере модифицированного дискретного нелинейного уравнения Шредингера с одним пространственным измерением $d = 1$:

$$\dot{\Psi}_l = i(\Psi_l + |\Psi_l|^{\mu-1}\Psi_l + C \sum_{m \in N_l} \Psi_m). \quad (3.20)$$

При изменении μ происходит переход от нулевого к ненулевому порогу по

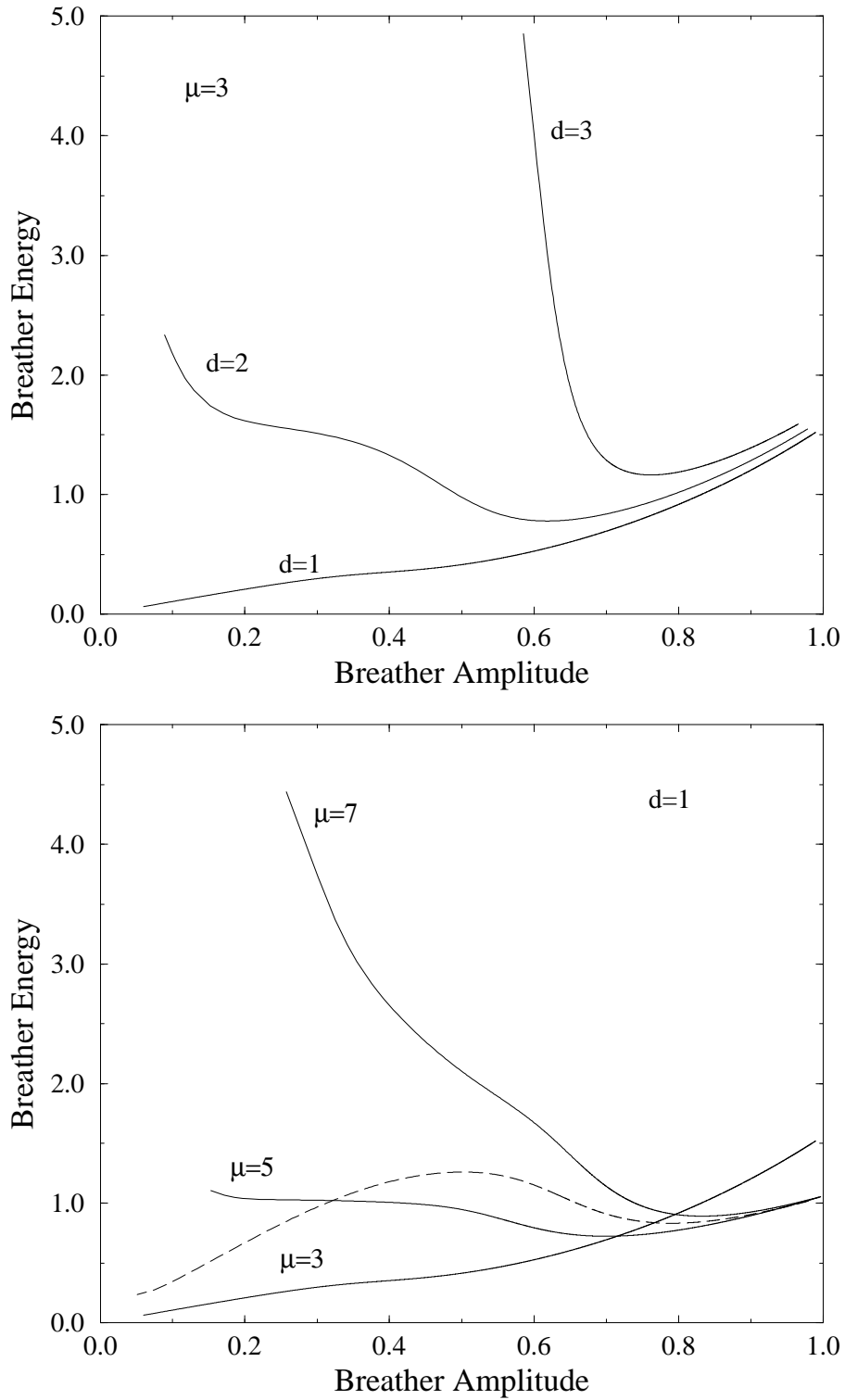


Рис. 3.3: Сверху: энергия дискретного бризера в зависимости от амплитуды для дискретного нелинейного уравнения Шредингера для одно-, двух- и трехмерной решеток. Размер решетки для $d = 1, 2, 3$: $N=100$, $N=25^2$, $N=31^3$, соответственно. Снизу: энергия дискретного бризера в зависимости от амплитуды для одномерного дискретного нелинейного уравнения Шредингера для трех значений показателя $\mu = 3, 5, 7$ (сплошные линии). Размер системы $N = 100$, параметр $C = 0.1$. Штриховая линия — для модифицированной системы (см. текст). См. тж. [36].

энергии. На рис. 3.3 снизу изображены численные результаты для $d = 1$ и $\mu = 3, 5, 7$, полностью согласующиеся с вышеприведенными соображениями. Даже одномерные решетки имеют положительный порог энергии дискретного бризера, если $\mu \geq 5$. Строгое исследование для любого μ было проведено в работе [63].

В модифицированной модели с дополнительным нелинейным членом

$$v_{\mu'} |\Psi_l|^{\mu'-1} \Psi_l$$

могут наблюдаться сложные зависимости $E_b(A_0)$. Например, в случае $d = 1$, $\mu = 7$, $\mu' = 3$ и $v_{\mu'} = 0.1$, зависимость $E_b(A_0)$ (штриховая линия на рис. 3.3, справа) почти не отличается от рассмотренного ранее случая $v_{\mu'} = 0$ в области достаточно больших амплитуд A_0 и имеет локальный минимум при некотором ненулевом значении A_0 . Для малых A_0 , однако, энергия дискретного бризера спадает до нуля, и между нулем и минимумом имеется локальный максимум.

Другой пример — двумерная решеточная система (2.12), размерность которой совпадает с критической $d = d_c = 2$. В работе [49] был проведен расчет порогов энергии дискретного бризера в этой системе. Решения, изображенные на рис. 2.4, представляют дискретные бризеры с малой амплитудой (А), минимальной энергией (В) и большой амплитудой (С).

3.4 Дискретные бризеры в диссипативных системах

До сих пор обсуждались только дискретные бризеры в гамильтоновых решетках. В любом эксперименте, однако, имеет место некоторая диссипация. Вообще говоря, для наиболее корректного моделирования динамики открытой системы, необходим учет взаимодействия с термостатом, что приводит к стохастическим уравнениям. Однако, в некотором приближении динамику таких систем можно описывать детерминистскими (динамическими) уравнениями, что и приводит к моделям в виде диссипативных динамических систем. Рассмотрим некоторые особенности, с которыми приходится сталкиваться при исследовании бризеров и их свойств в диссипативных системах [11, 64, 65].

3.4.1 Отыскание бризеров в диссипативных системах

Рассмотрим следующую систему уравнений движения:

$$\ddot{x}_l = -\frac{\partial H}{\partial x_l} - \gamma \dot{x}_l - I \quad (3.21)$$

где

$$H = \sum_l [1 - \cos x_l - C(1 - \cos(x_l - x_{l-1}))] . \quad (3.22)$$

В случае $\gamma = I = 0$ эта система гамильтонова и совпадает с моделью связанных маятников Такено-Пейрара [11, 66]. В такой модели существуют колебательные дискретные бризеры (подобные рассмотренным в предыдущих разделах), а также вращательные бризеры, называемые *ротобризерами*.

Если для колебательного бризера $x_l(t + T_b) = x_l(t)$ для всех l , то для ротобризера, в простейшем случае, один из маятников совершает вращательное движение

$$x_0(t + T_b) = x_0(t) + 2\pi m . \quad (3.23)$$

Здесь m — это число вращения, характеризующее ротобризер (в простейшем случае $m = 1$). Такое решение является вращательным предельным циклом в цилиндрическом фазовом пространстве системы. Заметим, что, в отличие от колебательного бризера ($m = 0$), ротобризеры не инвариантны по отношению к обращению времени.

Для ненулевого γ и $I = 0$ диссипация приведет к затуханию любого решения до устойчивого состояния равновесия. Однако, при наличии постоянного $I \neq 0$, ротобризеры могут существовать. Система набирает энергию благодаря внешнему моменту I и рассеивает энергию из-за ненулевого трения γ . Предельный цикл соответствует балансу энергии. Для колебательных бризеров с $m = 0$ такой баланс невозможен.

В отличие от бризеров в гамильтоновых системах, образующих семейства периодических орбит, ротобризеры в диссипативных системах (при условии их устойчивости) являются аттракторами в фазовом пространстве. Аттрактор характеризуется некоторым конечным окружающим его бассейном притяжения. Любая полутраектория, начинающаяся внутри этого бассейна, асимптотически стремится к аттрактору. Диссипативные бризеры, таким образом, составляют конечное или счетное множество решений.

Для нахождения диссипативного ротобризера, таким образом, достаточно задать начальные условия в области притяжения искомого решения и проинтегрировать уравнения движения до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность. Этот метод очень прост, но недостатками его являются (возможная) медленная сходимость и неизвестная и сложная структура границ бассейна притяжения.

Метод секущих Пуанкаре также может быть применен для отыскания таких решений. Поскольку период решения заранее не известен, следует рассмотреть отображение Пуанкаре плоскости $\pi_1 = \{x_b = 0\}$ на эквивалентную ей плоскость $\pi_2 = \{x_b = 2\pi m\}$, где b — индекс элемента, совершающего

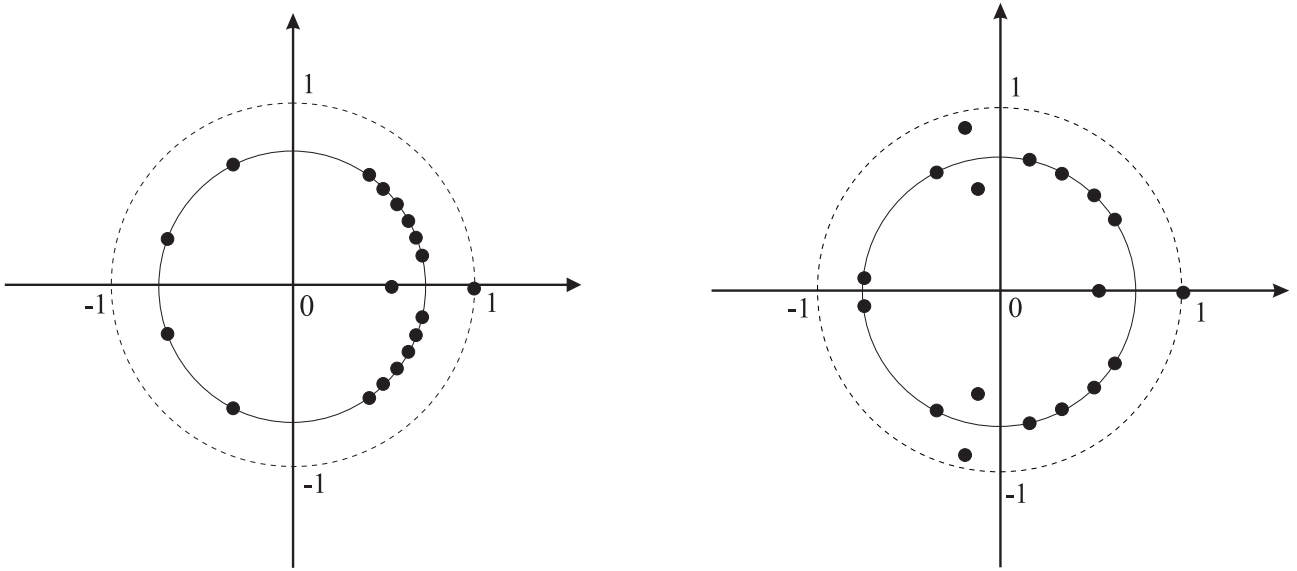


Рис. 3.4: Схема расположения мультипликаторов периодического решения, соответствующего ротобризеру в диссипативной системе, на комплексной плоскости. Мультипликаторы — закрашенные кружки, штриховая линия — единичная окружность, сплошная линия — окружность радиуса R (3.27). Слева: устойчивый ротобризер (все мультипликаторы располагаются на окружности радиуса R). Справа: устойчивый ротобризер вблизи границы устойчивости (пара комплексно сопряженных мультипликаторов приближается к единичной окружности). Группа близко расположенных мультипликаторов соответствует спектру возмущений типа затухающих гармонических волн (нелокализованных собственных векторов матрицы Флоке), отдельно расположенные мультипликаторы соответствуют локализованным собственным векторам.

вращение. Вращательный предельный цикл соответствует неподвижной точке этого отображения, которая может быть найдена, например, с помощью метода Ньютона. Начальное приближение должно быть выбрано в области определения отображения Пуанкаре (то есть, должно отображаться траекторией системы с плоскости π_1 на плоскость π_2).

3.4.2 Устойчивость бризеров в диссипативных системах

Если диссипативный ротобризер устойчив, то он является аттрактором, имеет конечный бассейн притяжения, и любое решение, отклоненное от него на достаточно малую величину, будет стремиться к нему с течением времени. При изменении параметров системы, ротобризер может потерять устойчивость.

Линеаризуем уравнения движения системы (3.21,3.22) в окрестности ротобризера:

$$\ddot{\epsilon}_l = - \sum_m \frac{\partial^2 H}{\partial x_l \partial x_m} \Big|_{\{x_{\nu}(t)\}} \epsilon_m - \gamma \dot{\epsilon}_l. \quad (3.24)$$

По аналогии с тем, как это было сделано в разд. 3.2, можно ввести матрицу \mathcal{R} , отображающую фазовое пространство линеаризованной системы в соответствии с уравнениями (3.24), интегрируемыми на одном периоде брызера [65]. Используя преобразование

$$\epsilon_l(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \kappa_l(t) , \quad (3.25)$$

получим

$$\ddot{\kappa}_l = - \sum_m \frac{\partial^2 H}{\partial x_l \partial x_m} \Big|_{\{x_l(t)\}} \kappa_m - \frac{1}{4} \gamma^2 \kappa_l . \quad (3.26)$$

В этих новых переменных матрица Флоке \mathcal{F} является симплектической и обладает всеми свойствами, обсуждавшимися в разд. 3.2. Делая обратное преобразование, получим, что собственные числа матрицы \mathcal{F} , лежащие на единичной окружности, переходят в собственные числа матрицы \mathcal{R} , лежащие на окружности меньшего радиуса R :

$$R(\gamma) = e^{-\gamma T_b/2} . \quad (3.27)$$

Если μ — собственное число матрицы \mathcal{R} , то также собственными числами являются

$$\mu^* , e^{-\gamma T_b} \frac{1}{\mu} , e^{-\gamma T_b} \frac{1}{\mu^*} . \quad (3.28)$$

Среди собственных чисел по-прежнему имеется число $\mu = 1$, отвечающее сдвигу вдоль траектории. В отличие от гамильтоновых систем, парное ему значение равно $e^{-\gamma T_b}$.

Схема расположения мультипликаторов диссипативного ротобрызера на комплексной плоскости приведена на рис. 3.4. Ротобрызер теряет устойчивость, когда хотя бы один из мультипликаторов выходит за пределы единичной окружности.

Глава 4

Получение и исследование дискретных бризеров в численных экспериментах

4.1 Долгоживущие возбуждения и приближение с сокращенным числом степеней свободы

Представим потенциалы в (2.1) в виде разложений в ряд Тейлора:

$$V(z) = \sum_{\alpha=2,3,\dots} \frac{v_\alpha}{\alpha} z^\alpha, \quad W(z) = \sum_{\alpha=2,3,\dots} \frac{w_\alpha}{\alpha} z^\alpha. \quad (4.1)$$

Рассмотрим случай $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, $v_4 = \frac{1}{4}$, $w_2 = 0.1$, а все остальные коэффициенты разложения равны нулю. Потенциал осциллятора в этом случае имеет две ямы, разделенные барьером, а потенциал взаимодействия — гармонический. Один из простейших способов получить локализованное возбуждение в численном эксперименте — задать нулевые начальные условия на всех осцилляторах, кроме одного (пусть он имеет индекс $l = 0$), который в начальный момент смещен относительно состояния равновесия:

$$p_l(0) = 0, \quad x_{l \neq 0}(0) = 0, \quad x_0(0) = A$$

Проинтегрируем уравнения движения с этими начальными условиями используя, например, метод Верле. Можно ожидать, что по крайней мере часть энергии начального возмущения распространится по решетке в виде волны. Пусть размер решетки $N = 3000$. Максимальная групповая скорость гармонических волн в этой системе порядка 0.1. Тогда эффекты конечного размера решетки, проявляющиеся вследствие возвращения волн, отраженных от края решетки, должны быть несущественны вплоть до времени $t_{max} = 30000$. Другими словами, рассматриваемая конечная система будет адекватно моделировать поведение бесконечной системы вплоть до времени $t = t_{max}$. Для наблюдения процессов в системе определим дискретную плотность энергии

$$e_l = \frac{1}{2} p_l^2 + V(x_l) + \frac{1}{2} (W(x_l - x_{l-1}) + W(x_{l+1} - x_l)). \quad (4.2)$$

Сумма этой величины по всем узлам решетки дает полную энергию системы, сохраняющуюся во времени. Если образуется дискретный бризер, то по крайней мере часть энергии начального возмущения должна остаться в окрестности точки начального возмущения.

Пусть $e_{(2m+1)}$ — суммарная энергия узлов в m -окрестности узла начального возмущения:

$$e_{(2m+1)} = \sum_{-m}^m e_l \quad (4.3)$$

Если для некоторого m эта величина спадает достаточно медленно, то можно говорить о наличии возбуждения, локализованного в пределах выбранных $2m+1$ узлов. Медленность спадания рассматривается в сравнении с характерным масштабом времени, за которое волновой пакет, имеющий максимальную групповую скорость, преодолевает m узлов решетки. Для $m = 2$ этот характерный масштаб составляет величину порядка $t_{min} \approx 20$. Таким образом, в рамках данной постановки численного эксперимента представляют интерес масштабы времени в диапазоне

$$20 \ll t \leq 30000 . \quad (4.4)$$

На рис. 4.1 представлена измеренная зависимость от времени для суммарной энергии пяти смежных узлов $e_{(5)}(t)$ при начальных условиях $x_0(t=0) = 2.3456$ [67]. Отчетливо наблюдается локализация энергии. После короткого переходного процесса длительностью порядка 100 единиц времени достигается практически постоянное значение $e_{(5)}$. Локализованный объект существует в течение продолжительного времени, излучение энергии из него очень мало. Вообще говоря, данное решение не совпадает с точным дискретным бризером и не является строго периодическим, и потому имеет конечное время жизни. Однако, поскольку это время жизни очень велико (по сравнению с указанными выше масштабами), будем называть это локализованное возбуждение и подобные ему дискретными бризерами в физическом смысле. Распределение энергии по цепочке в окрестности центра бризера приведено на врезке на рис. 4.1. Движение существенно затрагивает только три узла решетки, то есть, данное решение локализовано весьма сильно. В то время как центральная частица совершает колебания с большой амплитудой, амплитуда колебаний ее ближайших соседей мала. Все колебания совершаются в окрестности состояния равновесия $x_l = p_l = 0$. Отметим, что вследствие пространственной четности начальных условий, решение также обладает этой симметрией.

Чтобы получить более подробное представление о динамике данного решения, вычислим преобразование Фурье найденных реализаций $x_0(t)$ и $x_{\pm 1}(t)$

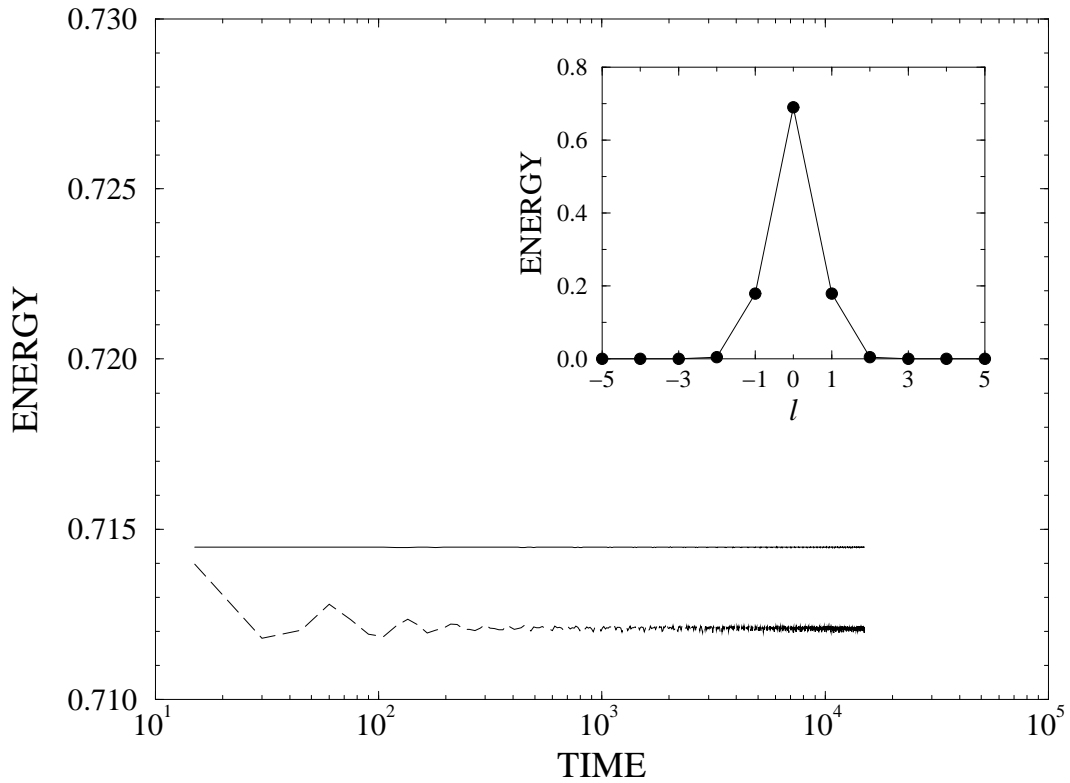


Рис. 4.1: Величина $e_{(5)}$ в зависимости от времени (штриховая линия). Полная энергия системы (сплошная линия). Врезка: распределение плотности энергии e_l по цепочке для того же решения, усредненное по интервалу времени $1000 < t < 1150$.

во временном окне $1000 \leq t \leq 10000$, используя алгоритм Филона [67]. Результат представлен на рис. 4.2.

Как видим, в спектре колебаний центральной частицы преобладают две частоты: $\omega_1 = 0.822$ и $\omega_2 = 1.34$. Все остальные пики, видимые в спектре на рис. 4.2, получаются линейной комбинацией указанных частот. Можно заключить, что наблюдаемое долгоживущее локализованное колебательное решение близко к квазипериодическому. Ближайшие соседи центральной частицы, в силу симметрии решения, двигаются одинаково. Спектр их колебаний (см. врезку на рис. 4.2) также носит характер двухчастотного, причем пик, соответствующий частоте ω_2 , выше пика на частоте ω_1 , в отличие от спектра для центральной частицы. Следуя указанным здесь наблюдениям и пренебрегая движением остальных частиц, будем приближенно описывать динамику рассматриваемого решения в рамках эффективной задачи с двумя степенями свободы.

Полагая нулями координаты и импульсы всех осцилляторов, кроме трех $l = -1, 0, 1$, сведем задачу к трем степеням свободы. Ограничиваясь инвариантным многообразием, состоящим из четных решений $x_{-1} = x_1$, $p_{-1} = p_1$,

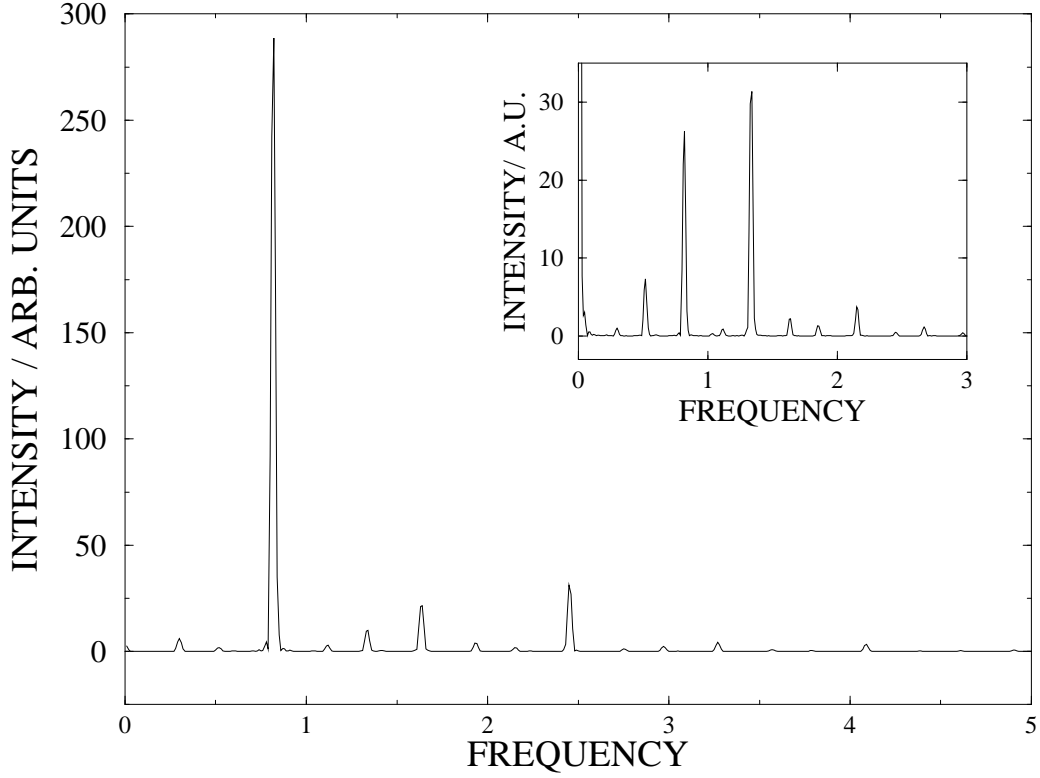


Рис. 4.2: Преобразование Фурье $FT[x_l(t \geq 1000)](\omega)$ решения, показанного на рис. 4.1 для $l = 0$ и $l = \pm 1$ (врезка).

получим сокращенную систему с двумя степенями свободы

$$\ddot{x}_0 = -V'(x_0) - 2w_2(x_0 - x_{\pm 1}) , \quad (4.5)$$

$$\ddot{x}_{\pm 1} = -V'(x_{\pm 1}) - w_2(x_{\pm 1} - x_0) . \quad (4.6)$$

Рассмотрим начальные условия, аналогичные рассмотренным ранее для полной системы. Получаемая траектория в самом деле оказывается близкой к проекции траектории полной системы на рассматриваемое фазовое подпространство. Следуя этому подходу, можно детально проанализировать динамику сокращенной системы (4.5,4.6), исследуя отображение Пуанкаре на сечущей $\{x_0 = 0, \dot{x}_0 > 0\}$ (см., например, [34]). Аналогичное отображение было исследовано и в полной системе. В обоих случаях было показано существование решений, близких к двумерному тору на временах численного счета. Более того, сечения этих торов в полной и сокращенной системах оказываются практически идентичными [67].

Таким образом, можно сделать два заключения: а) наблюдаемый локализованный объект соответствует траектории (в фазовом пространстве полной системы), которая на временах наблюдения практически встроена в двумерный тор, соответствующий квазипериодическому решению; б) это решение может быть воспроизведено в рамках задачи с сокращенным числом степе-

ней свободы, где все осцилляторы, кроме центрального и двух его ближайших соседей, зафиксированы в состоянии равновесия.

Интуитивно понятно, что ни одна из частот, наблюдаемых в спектре локализованного решения, не должна резонировать с линейным спектром (2.3), иначе должно иметь место излучение, что нарушает предположение о локализованности. В действительности, накладываются гораздо более строгие условия, которые обсуждаются ниже. Поскольку сокращенная задача, определенная выше, в общем случае неинтегрируема, можно ожидать, что ее фазовое пространство содержит острова регулярной динамики, заполненные торами, встроенные в «море» хаотических траекторий. Отметим, что эта картина сильно зависит от выбора изоэнергетической гиперповерхности. Хаотические траектории имеют непрерывные частотные Фурье-спектры, которые должны в любом случае пересекаться с линейным спектром бесконечной решетки. Таким образом, хаотические траектории сокращенной задачи не являются кандидатами на роль бризероподобных объектов. Регулярные острова должны быть исследованы на предмет основных частот. Если эти частоты лежат за пределами линейного спектра бесконечной решетки, то можно ожидать, что решение, полученное в бесконечной решетке из тех же начальных условий, будет (на достаточно большом временном масштабе) локализовано в пространстве. Регулярные острова, не удовлетворяющие этому условию, не соответствуют локализованным решениям. Таким образом, исследование динамики сокращенной задачи позволяет сделать оценку множества начальных условий, приводящих к хорошо локализованным решениям в полной решетке. Этот подход был успешно применен в [34].

На рис. 4.3 приведен характерный пример траекторий отображения Пуанкаре для сокращенной системы. На рис. 4.4 показана временная зависимость определенной выше энергии подсистемы из пяти осцилляторов $e_{(5)}(t)$ в цепочке из $N = 3000$ узлов для различных начальных условий, соответствующих различным траекториям сокращенной задачи. Начальные условия, соответствующие регулярным островам 1 и 2 сокращенной задачи приводят к локализованным решениям в цепочке, в то время как начальные условия в регулярном острове 3 и на хаотической траектории, будучи запущены в цепочке, приводят к быстрому спаду энергии $e_{(5)}(t)$ из-за интенсивного излучения энергии в виде гармонических волн. Интересно отметить, что спад $e_{(5)}(t)$ для этих последних решений останавливается на уровне около $e_{(5)} = 0.35$. Движение системы после этой стабилизации снова хорошо описывается сокращенной задачей (с соответствующей энергией). Как показано в [34], для энергий ниже этого уровня в сокращенной задаче практически исчезают хаотические траектории.

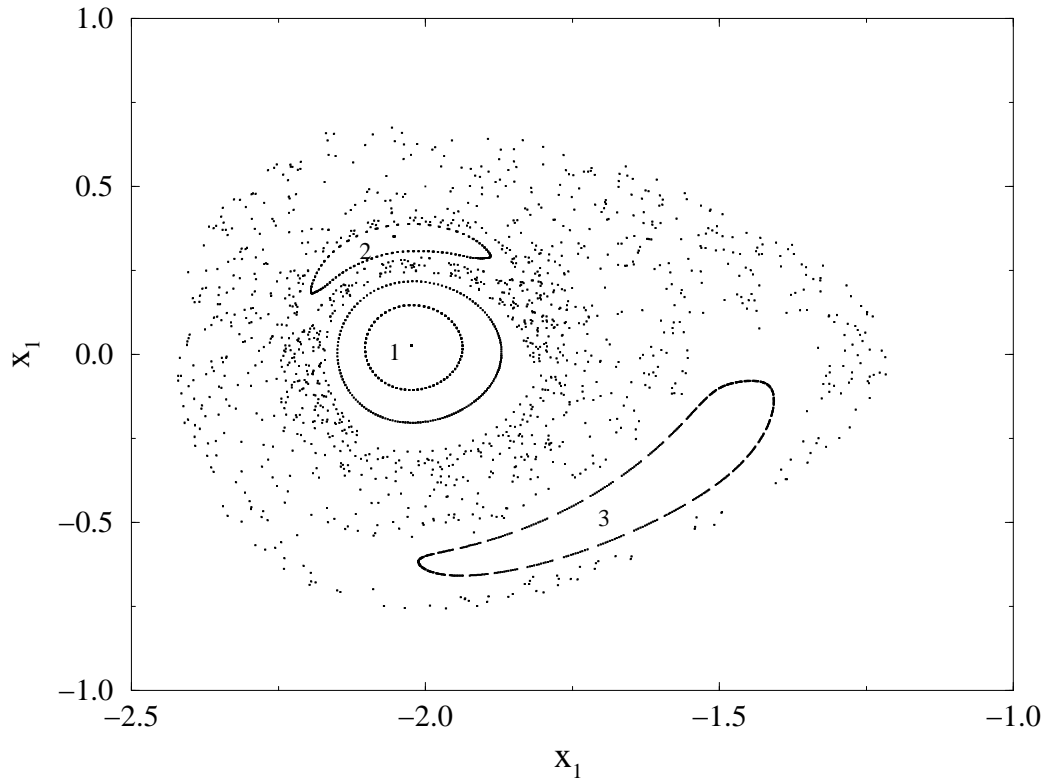


Рис. 4.3: Траектории отображения Пуанкаре на секущей $\{x_0 = 0, \dot{x}_0 > 0\}$ для задачи с сокращенным числом степеней свободы при энергии $E = 0.58$. Проекция на плоскость $\{x_1, \dot{x}_1\}$.

Неподвижные точки отображения Пуанкаре (в центре регулярных островов на рис. 4.3) соответствуют периодическим орбитам. Исследование зависимости $e_{(5)}(t)$ для решений, полученных из этих начальных условий (рис. 4.4), показало, что для каждого из них имеет место излучение энергии, хотя и слабое. Решения, соответствующие периодическим орбитам сокращенной задачи в островах 1 и 2 показали наименьшую скорость спада $e_{(5)}(t)$ [34].

Все приведенные здесь численные наблюдения согласуются с выводами главы 3 о существовании точных периодических локализованных решений — дискретных бризеров в нелинейных решетках.

Модель цепочки, рассмотренная в этом разделе, имеет оптический линейный спектр с отношением ширины спектра к ширине запрещенной зоны порядка $1/10$. Это, однако, не означает, что дискретные бризеры существуют лишь благодаря слабости взаимодействия. Оценка доли энергии дискретного бризера, приходящейся на взаимодействие, составляет величину около 57%. Очевидно, что такое решение никак не может быть адекватно описано, если пренебречь взаимодействием элементов решетки [34].

Поскольку локализованные возбуждения могут быть хорошо описаны в рамках приближенной сокращенной задачи, увеличение размерности решетки

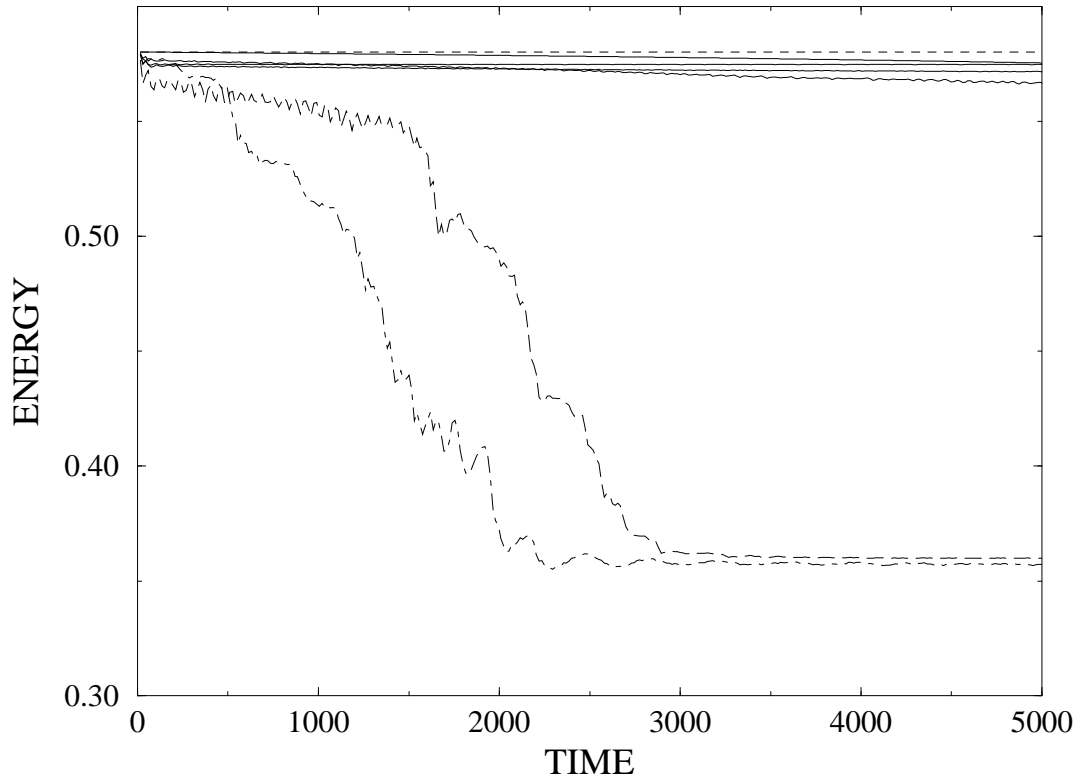


Рис. 4.4: Временная зависимость $e_{(5)}(t)$. Верхняя пунктирная линия — полная энергия. Четыре сплошные линии — для начальных условий, соответствующих неподвижным точкам отображения в островах 1 и 2 (рис. 4.3), большему тору в острове 1 и тору в острове 2 (рис. 4.3). Штриховая линия — для начальных условий, соответствующих тору в острове 3; штрихпунктирная линия — для начальных условий, соответствующих хаотической траектории (рис. 4.3).

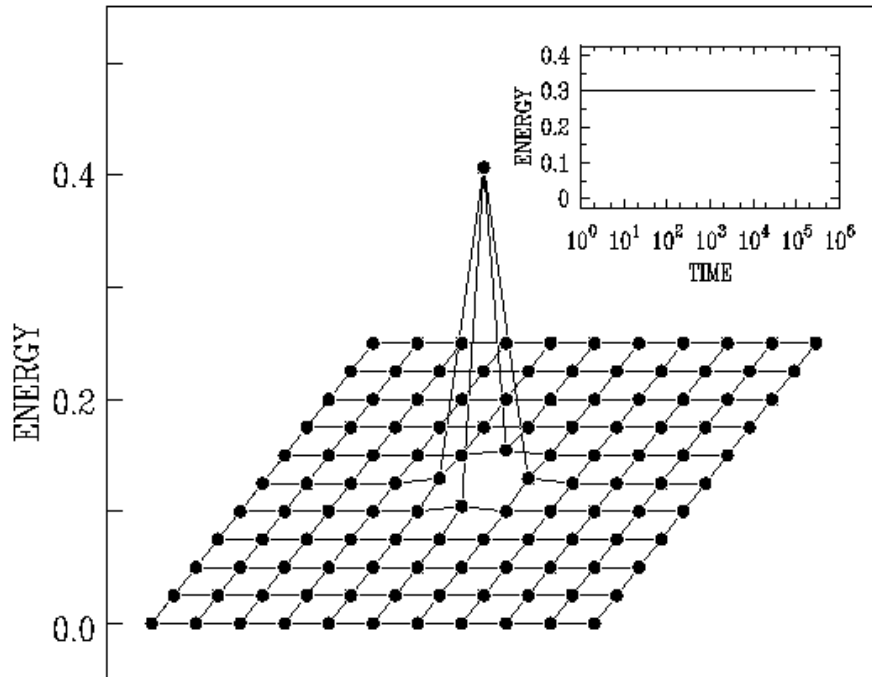


Рис. 4.5: Распределение энергии по решетке для локализованного решения с энергией $E = 0.3$ в момент времени $t = 3000$. Закрашенные кружки отмечают локальную энергию на каждом узле решетки. Врезка: временная зависимость энергии в окрестности центра бризера $e_{(5)}(t)$.

ки не должно оказать на их существование заметного влияния. Это приведет просто к увеличению числа ближайших соседей, то есть, к некоторому изменению параметров сокращенной задачи. В качестве примера, аналогичный подход был применен к двумерному варианту рассмотренной выше системы [35]. Практически все этапы приведенного здесь исследования воспроизводятся и для двумерной решетки. Аналог рис. 4.1 для случая двумерной решетки приводится на рис. 4.5, где показано распределение энергии дискретного бризера по решетке, а на врезке построена зависимость от времени для энергии подсистемы в окрестности центра бризера $e_{(5)}(t)$.

В двумерном случае использовался другой подход к моделированию динамики бесконечной системы с использованием конечной системы, по сравне-

нию с тем, который применялся ранее в одномерном случае. Была рассмотрена модель решетки размером 20×20 элементов (на рис. 4.5 приведена только часть решетки размером 10×10). Характерное время достижения гармонической волной границы этой решетки имеет порядок $t_{max} \approx 100$. Для того, чтобы отраженные волны не сказывались на динамике бризера, добавим к гамильтоновой решетке диссипативную границу шириной в 10 элементов с каждой стороны, что увеличивает полный размер решетки до 40×40 элементов. Коэффициент трения в этих диссипативных границах подбирается таким образом, чтобы обеспечить максимальную диссипацию энергии набегающих волн (поскольку как нулевое, так и бесконечное трение приведет к полному отражению, существует некое промежуточное оптимальное значение). Профиль коэффициента трения в диссипативных границах задается в виде линейного изменения от минимума на внутренней стороне до максимума на внешней стороне. Параметры линейного распределения оптимизируются на максимальное поглощение энергии набегающих волн [35].

4.2 Отыскание дискретных бризеров как строго периодических решений

4.2.1 Метод Фурье

Как обсуждалось выше, локализованные объекты существуют благодаря отсутствию или слабости резонанса со спектром гармонических волн ω_q . В частности, могут существовать периодические локализованные решения, время жизни которых бесконечно. Попробуем отыскать такое периодическое решение с периодом $T_b = \frac{2\pi}{\Omega_b}$, обладающее локализацией в пространстве

$$x_l(t) = x_l(t + T_b), \quad x_{|l| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

В силу предполагаемой периодичности, решение можно разложить в ряд Фурье

$$x_l(t) = \sum_k A_{kl} e^{ik\Omega_b t}. \quad (4.8)$$

Коэффициенты разложения должны быть локализованы в пространстве

$$A_{k, |l| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Подставим разложение в уравнения движения (2.2), которые можно представить в виде

$$\ddot{x}_l = -v_2 x_l - w_2(2x_l - x_{l-1} - x_{l+1}) + F_l^{nl}(x_l). \quad (4.10)$$

Здесь обозначение F_l^{nl} включает в себя все нелинейные члены уравнений движения. В случае потенциалов (4.1), F_l^{nl} имеет вид

$$F_l^{(nl)} = - \sum_{\alpha=3,4,\dots} [v_\alpha x_l^{\alpha-1} + w_\alpha ((x_l - x_{l-1})^{\alpha-1} - (x_{l+1} - x_l)^{\alpha-1})] . \quad (4.11)$$

$F^{nl}(t)$ как функцию времени также можно разложить в ряд Фурье:

$$F_l^{(nl)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_{kl}^{(nl)} e^{ik\Omega_b t} . \quad (4.12)$$

Таким образом, приходим к системе связанных нелинейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье A_{kl} , определяющих искомое решение:

$$k^2 \Omega_b^2 A_{kl} = v_2 A_{kl} + w_2 (2A_{kl} - A_{k,l-1} - A_{k,l+1}) + F_{kl}^{(nl)} . \quad (4.13)$$

По предположению, все амплитуды в хвостах искомого решения малы. Следовательно, в этих хвостах можно пренебречь нелинейными членами в (4.13). Линеаризованные уравнения, аналогично (2.6), имеют вид

$$k^2 \Omega_b^2 A_{kl} = v_2 A_{kl} + w_2 (2A_{kl} - A_{k,l-1} - A_{k,l+1}) . \quad (4.14)$$

Как это уже обсуждалось в разделе 2.1, из (4.14) непосредственно следует необходимое условие существования дискретного бризера — отсутствие резонансов с линейным спектром (2.7) [4],[40]. В том случае, если это условие выполнено, то в рассматриваемой системе дискретный бризер локализован экспоненциально

$$A_{kl} \sim e^{-\xi_k |l|} , \quad k^2 \Omega_b^2 = v_2 + 2w_2 (1 - \cosh \xi_k) . \quad (4.15)$$

Построим итерационную схему для отыскания коэффициентов Фурье бризерного решения с требуемой точностью. Этот метод оказался одним из первых опубликованных методов построения дискретных бризеров как точных решений [40],[41].

Перепишем уравнение (4.13) в виде итерационного отображения двумя различными способами: отображение A

$$A_{kl}^{(i+1)} = \frac{1}{k^2 \Omega_b^2} \left[(v_2 + 2w_2) A_{kl}^{(i)} - w_2 (A_{k,l-1}^{(i)} + A_{k,l+1}^{(i)}) + F_{kl}^{(nl)}(A_{k'l'}^{(i)}) \right] , \quad (4.16)$$

для которого

$$\lambda_{kl} = \frac{v_2}{k^2 \Omega_b^2}$$

и отображение B

$$A_{kl}^{(i+1)} = \frac{1}{v_2} \left[(k^2 \Omega_b^2 - 2w_2) A_{kl}^{(i)} + w_2 (A_{k,l-1}^{(i)} + A_{k,l+1}^{(i)}) - F_{kl}^{(nl)}(A_{k'l'}^{(i)}) \right], \quad (4.17)$$

для которого

$$\lambda_{kl} = \frac{k^2 \Omega_b^2}{v_2}.$$

Отображение для решетки может быть произвольным образом составлено из выражений (4.16), (4.17) для каждого из коэффициентов A_{kl} . Решение уравнений (4.13) всегда является неподвижной точкой такого итерационного отображения. Возникают два вопроса: сходится ли итерационная последовательность к неподвижной точке, и каково должно быть начальное приближение?

Сначала не будем задаваться вопросом о сходимости. Пусть необходимо отыскать дискретный бризер с частотой Ω_b , локализованный на узле $l = 0$. В качестве начального приближения положим все коэффициенты Фурье равными нулю, кроме $A_{\pm 1,0}$, для которых выберем малое ненулевое значение. Для коэффициентов $k = \pm 1, l = 0$ выберем отображение (4.16), (4.17), дающее $\lambda_{\pm 1,0} > 1$, а для всех остальных коэффициентов — дающее $\lambda_{kl} < 1$. Таким образом, в начале итерационного процесса коэффициенты $k = \pm 1, l = 0$ будут нарастать, а остальные коэффициенты будут оставаться в окрестности нуля. В случае, если искомое бризерное решение является устойчивой неподвижной точкой итерационного отображения, такая итерационная последовательность должна сойтись к искомому решению.

Если потенциалы задаются полиномами невысокого порядка, то слагаемое $F_{kl}^{(nl)}$, отвечающее за нелинейность, может эффективно вычисляться на каждом шаге итерации согласно выражению

$$F_{kl}^{(nl)} = \sum_{\alpha=3,4,\dots} v_{\alpha} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{\alpha-1} = -\infty}^{+\infty} A_{k_1 l} A_{k_2 l} \dots A_{k_{\alpha-1} l} \delta_{k, (k_1 + k_2 + \dots + k_{\alpha-1})}. \quad (4.18)$$

В других случаях на каждом шаге необходимо вычислить $x_l(t)$, исходя из текущих значений $A_{kl}^{(i)}$. Тогда слагаемое $F_{kl}^{(nl)}$ находится численным интегрированием

$$F_{kl}^{(nl)} = \frac{1}{T_1} \int_{-T/2}^{T_2} F_l^{(nl)}(t) e^{-ik\omega_1 t} dt. \quad (4.19)$$

В численном расчете, естественно, вводится ограничение по номеру Фурье-гармоники k . По окончании итерационного процесса необходимо убедиться в малости найденных значений коэффициентов A_{kl} в окрестности наивысшей учитываемой гармоники.

В качестве условия окончания итерационного процесса можно выбрать, например,

$$\sum_{k,l} |A_{kl}^{(i)} - A_{kl}^{(i-1)}| < \varepsilon . \quad (4.20)$$

Для приведенных ниже примеров было задано значение $\varepsilon = 10^{-10}$.

Приведенные далее примеры были получены описанным выше способом при $\varepsilon = 10^{-10}$ для частоты $\Omega_b = 1.3$ в цепочках из 100 элементов. На рис. 4.6 показаны найденные решения для коэффициентов Фурье дискретного бризера в двух различных системах. Построены абсолютные значения $|A_{kl}|$ в логарифмическом масштабе в зависимости от номера узла решетки l . Отметки (незакрашенные квадраты), соответствующие одному и тому же номеру Фурье-гармоники k , соединены сплошными линиями. Как и ожидалось, наблюдается экспоненциальный спад коэффициентов Фурье в пространстве, причем показатель спада (угловой коэффициент линии в логарифмическом масштабе) зависит от номера гармоники k . Неожиданный численный результат заключается в том, что найденные значения оказываются верными вплоть до значений порядка 10^{-20} несмотря на то, что для машинного представления вещественных чисел используется тип `double` (16 значащих цифр). Это связано с тем, что амплитуды в хвостах стремятся к нулю с удалением от центра бризера, а ближайшее к нулю значение, допускаемое типом `double`, составляет 10^{-307} .

Сравним показатели локализации найденных решений с оценкой (4.15), полученной в рамках линейной аппроксимации (4.14), для случая, показанного на рис. 4.6(а):

k	числ. результат	оценка
0	-1.3202	-1.3415
1	-0.6904	-0.6898
2	-1.3796	-1.6588
3	-2.0748	-2.1143
4	-2.3957	-2.3951
5	-2.6018	-2.6026
6	-2.7663	-2.7682
\vdots	\vdots	\vdots

Наибольшие отклонения наблюдаются для гармоник $k = 2, 3$. Отметим, что численно найденная локализация оказывается слабее ожидаемой. Причина заключается в том, что для этих гармоник наиболее велики нелинейные поправки, спадающие в пространстве медленнее, чем предсказывает линейное приближение [41]. В рассматриваемом случае эти поправки имеют порядок

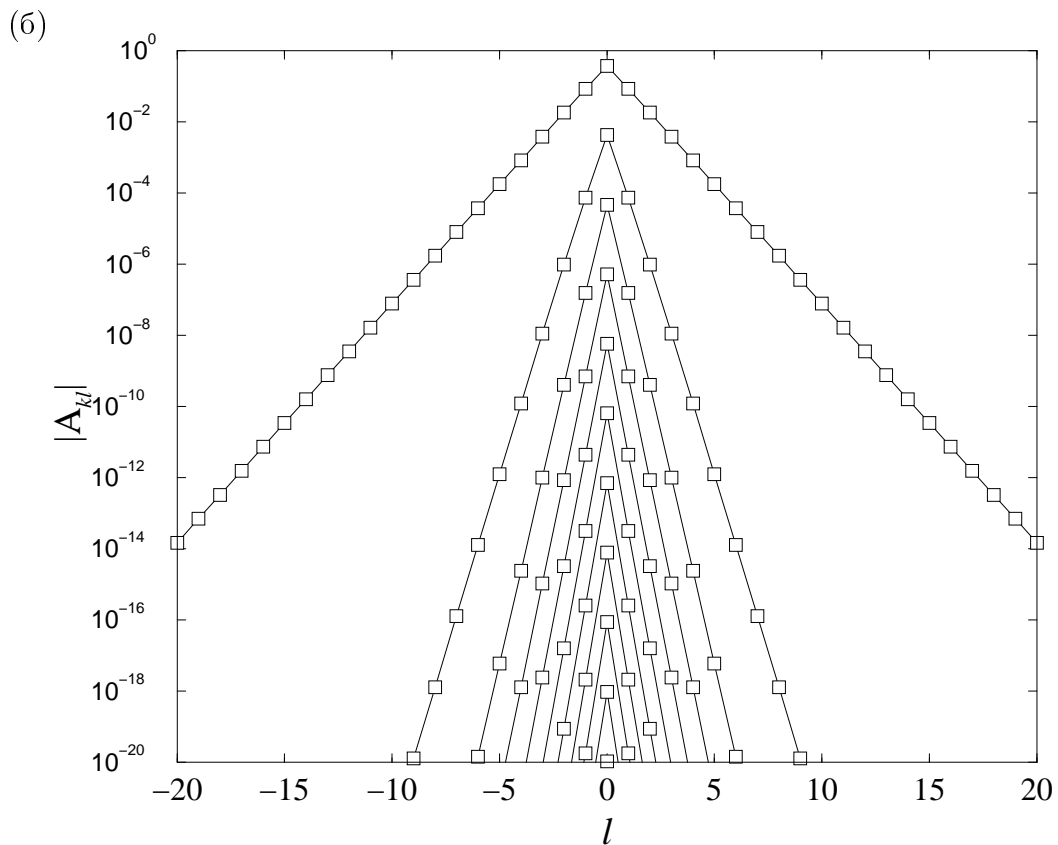
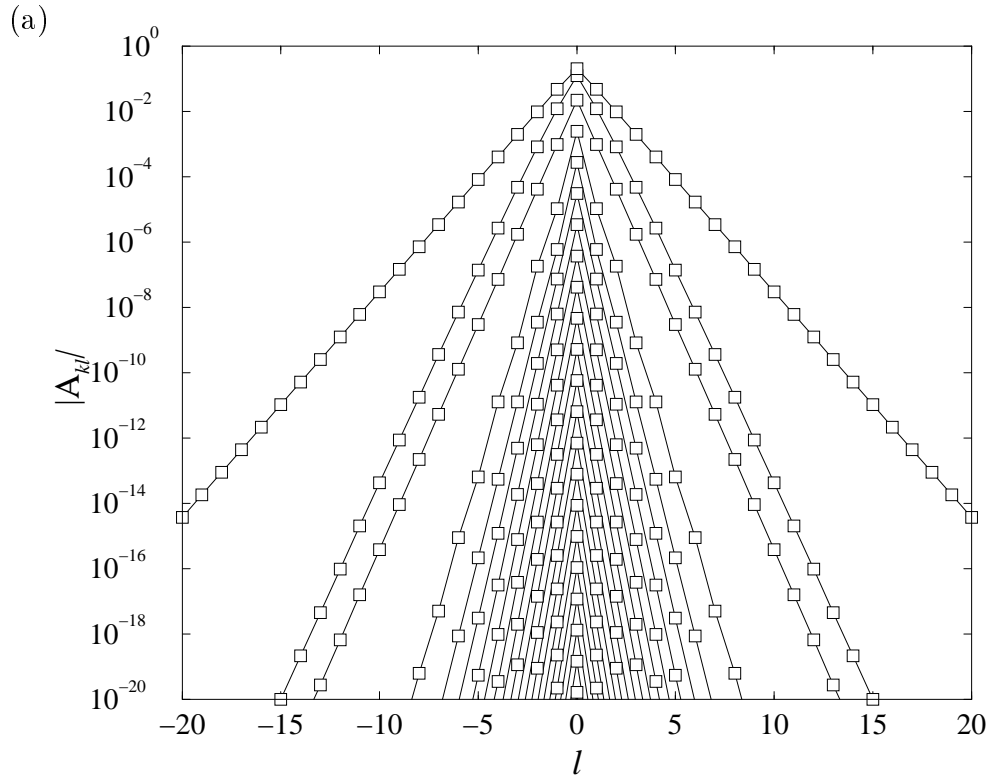


Рис. 4.6: Дискретные бризеры, найденные методом итерации коэффициентов Фурье. (а): $v_2 = 2$, $v_3 = -3$, $v_4 = 1$, $w_2 = 0.1$; (б): $v_2 = 1$, $v_4 = 1$, $w_2 = 0.1$. Показан участок цепочки из 100 элементов.

$\sim A_{1l}^2$ для $k = 2$ и $\sim A_{1l}^3$ для $k = 3$. Оценки показателя локализации с учетом этих поправок были получены в [41] и составляют $2 \cdot 0.6898 = 1.3796$ для $k = 2$ и $3 \cdot 0.6898 = 2.0694$ для $k = 3$.

Отметим, что нерезонансное условие (2.7) не зависит от этих поправок. Существенно также, что коэффициенты Фурье для гармоник, обладающей самой слабой пространственной локализацией, всегда корректно описывается линейным приближением в хвостах бризера с удалением от его центра.

Для случая, изображенного на рис. 4.6(б), находим

k	числ. результат	оценка
1	-0.6722	-0.6709
3	-1.9910	-2.1464
5	-2.6103	-2.6133
7	-2.9114	-2.9117
9	-3.1324	-3.1325
\vdots	\vdots	\vdots

Заметное расхождение имеется только для гармоник $k = 3$, и корректная оценка снова получается при учете поправок $\sim A_{1l}^3$: $3 \cdot 0.6709 = 2.0127$.

4.2.2 Метод Ньютона в фазовом пространстве

В предыдущих разделах были рассмотрены методы отыскания дискретных бризеров, основанные на решении алгебраических уравнений. В качестве неизвестных выступали параметры искомого решения (коэффициенты разложения Фурье или просто амплитуды колебаний на всех узлах решетки).

Вместо решения алгебраических уравнений, можно искать периодическую бризерную орбиту непосредственно в фазовом пространстве системы. Напомним, что периодическая орбита в фазовом пространстве представляет из себя замкнутую кривую. Как правило, периодические орбиты неинтегрируемых гамильтоновых систем изолированы в том смысле, что в малой окрестности такой орбиты не существует других замкнутых траекторий *с тем же значением энергии* (и других интегралов движения, если таковые есть). Это утверждение может быть несправедливо в особом случае периодических орбит на резонансных торах.

В то же время, как правило, в окрестности периодической орбиты гамильтоновой системы существуют другие периодические орбиты, соответствующие *другим значениям* интегралов движения.

Таким образом, типичные периодические орбиты гамильтоновых систем, при наличии только одного интеграла движения — энергии — образуют однопараметрические семейства в фазовом пространстве системы.

При перемещении вдоль такого семейства параметры орбиты изменяются. В частности, орбита может потерять устойчивость. Такая бифуркация сопровождается слиянием двух семейств периодических орбит.

Опишем широко используемый метод отыскания дискретных бризеров — метод Ньютона в фазовом пространстве [11]. Проинтегрируем уравнения движения системы для заданного вектора начальных условий $\tilde{\mathbf{R}}$ с компонентами

$$x_l(t = 0) \equiv X_l, \quad p_l(t = 0) \equiv P_l \quad (4.21)$$

на заданном времени T :

$$x_l(T) \equiv I_l^x(\{X_l, P_l\}, T), \quad (4.22)$$

$$p_l(T) \equiv I_l^p(\{X_l, P_l\}, T). \quad (4.23)$$

Рассмотрим функции невязки

$$F_l^x = I_l^x - X_l, \quad F_l^p = I_l^p - P_l. \quad (4.24)$$

Если $\tilde{\mathbf{R}}$ принадлежит периодической орбите периода T , то

$$F_l^x = F_l^p = 0. \quad (4.25)$$

Применим итерационный метод Ньютона для решения уравнений (4.25) относительно неизвестного вектора $\tilde{\mathbf{R}}$. Поскольку итерационное отображение в методе Ньютона содержит обращение матрицы производных, необходимо, чтобы эта матрица была невырожденной. Однако, если некоторая точка $\tilde{\mathbf{R}}$ принадлежит периодической орбите (а значит, является решением (4.25)), то и все точки в ее окрестности, получаемые сдвигом вдоль орбиты, также являются решениями (4.25). Чтобы обеспечить изолированность решения уравнений (4.25), уменьшим число неизвестных на единицу, введя дополнительное условие, например,

$$P_M = 0. \quad (4.26)$$

Тогда, для системы с N степенями свободы, будем искать решение невырожденной системы из $2N - 1$ уравнений относительно $2N - 1$ неизвестных. Дополняя решение условием (4.26), получим полные начальные условия для $2N$ фазовых переменных. Используя закон сохранения энергии, можно убедиться, что для полученных начальных условий имеем $p_M(T) = 0$, а значит, орбита является замкнутой.

Введем обозначения

$$\mathbf{R} = (X_1, X_2, \dots, X_M, \dots, X_N, P_1, \dots, P_{M-2}, P_{M-1}, P_{M+1}, P_{M+2}, \dots, P_N), \quad (4.27)$$

$$\mathbf{F} = (F_1^x, F_2^x, \dots, F_M^x, \dots, F_N^x, F_1^p, \dots, F_{M-2}^p, F_{M-1}^p, F_{M+1}^p, F_{M+2}^p, \dots, F_N^p), \quad (4.28)$$

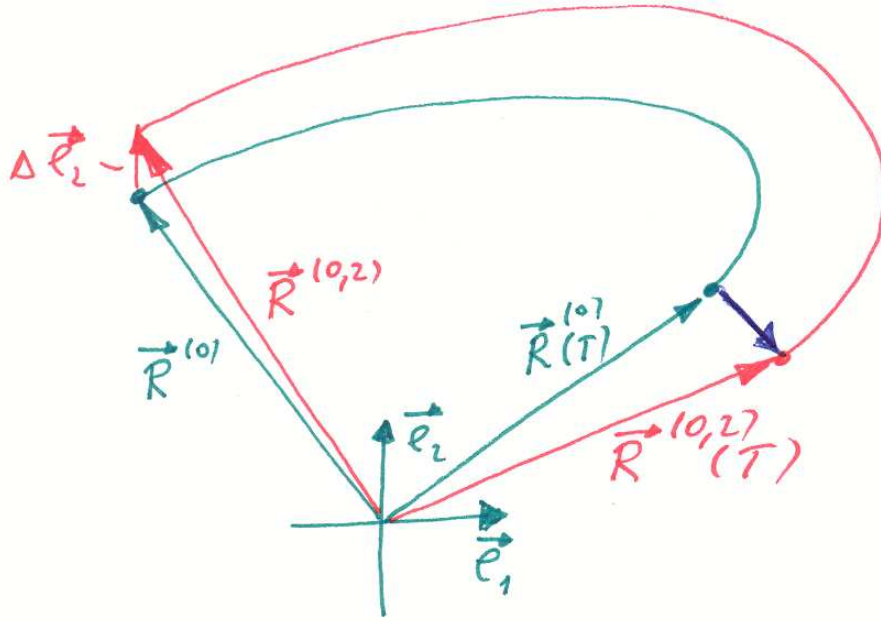


Рис. 4.7: Схема численного расчета матрицы Ньютона для случая двумерного фазового пространства (см. пояснения в тексте).

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(T) - \mathbf{R} . \quad (4.29)$$

Обозначим начальное приближение через $\mathbf{R}^{(0)}$. Разложение в степенной ряд до линейного члена дает

$$F_n(\mathbf{R}) = F_n(\mathbf{R}^{(0)}) + \sum_m \frac{\partial F_n}{\partial R_m} \Big|_{\mathbf{R}^{(0)}} (R_m - R_m^{(0)}) , \quad (4.30)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{R}^{(0)}) + \mathcal{M}(\mathbf{R} - \mathbf{R}^{(0)}) , \quad (4.31)$$

$$\mathcal{M}_{nm} = \frac{\partial F_n}{\partial R_m} \Big|_{\mathbf{R}^{(0)}} = \frac{\partial R_n(T)}{\partial R_m} \Big|_{\mathbf{R}^{(0)}} - \delta_{nm} . \quad (4.32)$$

Один шаг итерационного метода Ньютона дается выражением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(0)} - \mathcal{M}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{R}^{(0)}) . \quad (4.33)$$

Это отображение итерируется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность: $|\mathbf{F}| < \epsilon$ или $\max |F_n| < \epsilon$.

Опишем способ численного отыскания матрицы Ньютона \mathcal{M} . На рис. 4.7 представлена схематическая иллюстрация приведенной ниже процедуры для случая двумерного фазового пространства.

Имея начальное приближение $\mathbf{R}^{(0)}$ и интегрируя уравнения движения на времени T , получим точку $\mathbf{R}^{(0)}(T)$. Если $\mathbf{R}^{(0)}$ не лежит на искомой орбите

периода T , то эти точки будут различаться. Теперь введем отклонение от $\mathbf{R}^{(0)}$ по фазовой переменной m на величину Δ :

$$\mathbf{R}^{(0,m)} = \mathbf{R}^{(0)} + \Delta \mathbf{e}_m . \quad (4.34)$$

Здесь \mathbf{e}_m — единичный вектор, соответствующий фазовой переменной m . Интегрируя уравнения движения с новыми начальными условиями $\mathbf{R}^{(0,m)}$ на времени T , получим точку $\mathbf{R}^{(0,m)}(T)$. Тогда элементы матрицы Ньютона выражаются конечно-разностным приближением

$$\mathcal{M}_{nm} = \frac{1}{\Delta} \left(F_n(\mathbf{R}^{(0,m)}) - F_n(\mathbf{R}^{(0)}) \right) . \quad (4.35)$$

или, с учетом выражения (4.24),

$$\mathcal{M}_{nm} = \frac{1}{\Delta} \left(R_n^{(0,m)}(T) - R_n^{(0)}(T) \right) - \delta_{nm} . \quad (4.36)$$

Преимуществом метода Ньютона является легкость его программирования при наличии подходящего интегратора ОДУ. Метод сходится экспоненциально. Кроме того, можно использовать одну матрицу Ньютона для нескольких итераций, что экономит время в случае больших матриц. Недостатки метода Ньютона связаны с необходимостью обращения матриц, что требует относительно большого вычислительного времени порядка $\sim N^2$. Обращение матрицы Ньютона становится невозможным в точке бифуркации, где возникают дополнительные вырождения, приводящие к появлению нулевых собственных чисел матрицы \mathcal{M} . Иногда требуется применение сложных алгоритмов обращения матриц, использующих разложение по сингулярным числам и т. п.

Метод Ньютона чувствителен к выбору начального приближения. Может быть целесообразно предварительно изменить параметры системы до таких значений, при которых решение известно (или легко находится), а затем доводить малыми шагами до требуемых значений, отслеживая решение на каждом шаге изменения параметра. Для нахождения такого стартового опорного решения иногда можно воспользоваться каким-либо другим численным методом, эффективно работающим при выбранных значениях параметров.

4.2.3 Метод наискорейшего спуска в фазовом пространстве

Вместо метода Ньютона можно использовать метод наискорейшего спуска в фазовом пространстве [36]. Введем в рассмотрение неотрицательную функцию

$$g(\tilde{\mathbf{R}}) = \sum_l [F_l^x F_l^x + F_l^p F_l^p] \quad (4.37)$$

и ее градиент с компонентами

$$(\nabla g)_n = \frac{\partial g}{\partial \tilde{R}_n} . \quad (4.38)$$

Зададим начальное приближение в фазовом пространстве, вычислим в этой точке градиент и сместим точку в противоположном направлении. Эта итерационная процедура повторяется до тех пор, пока функция g не станет достаточно близка к нулю, что соответствует периодической орбите.

Преимущества этого метода обусловлены линейным ростом вычислительного времени с ростом размера системы и нечувствительностью к бифуркациям. Недостатки связаны с относительной сложностью программирования, медленной сходимостью по сравнению с методом Ньютона и возможностью сходимости к ненулевому минимуму функции g .

4.2.4 Симметрии

Часто уравнения движения инвариантны относительно некоторых преобразований симметрии, таких например, как сдвиг во времени

$$t \rightarrow t + \tau ,$$

обращение времени

$$t \rightarrow -t , p_l \rightarrow -p_l ,$$

обращение знака

$$x_l \rightarrow -x_l , p_l \rightarrow -p_l ,$$

дискретный пространственный сдвиг решетки или другие дискретные пространственные преобразования на решетке (пространственное отражение и др.).

Каждая дискретная симметрия подразумевает, что любое заданное решение системы отображается на другое решение системы. Если решение отображается на себя, то оно инвариантно относительно данного преобразования.

Дискретный бризер по определению не инвариантен относительно дискретного пространственного сдвига. Если он, однако, инвариантен по отношению к какому-либо другому преобразованию, это может быть использовано для существенного снижения вычислительной сложности его отыскания [1].

Обратимость искомого решения во времени подразумевает, что начало отсчета времени может быть выбрано таким образом, чтобы выполнялось

$$x_l(t) = x_l(-t) , p_l(t) = -p_l(-t) ,$$

что сохраняет 50% вычислительного времени. При наличии дополнительно инвариантности относительно смены знака, откуда следует

$$x_l(t + T/2) = -x_l(t), \quad p_l(t + T/2) = -p_l(t),$$

может быть сэкономлено 75% вычислительного времени.

Решетки размерности выше единицы могут иметь дополнительные симметрии, например, симметрию относительно перестановки индексов решетки, что также позволяет сократить сложность вычислений.

В то же время, даже при наличии определенной симметрии уравнений, могут существовать бризерные решения, не обладающие такой симметрией. Простейший пример — опять-таки, симметрия относительно дискретного пространственного сдвига. Также может быть нарушена симметрия относительно пространственного отражения (четности). В решетках размерности выше единицы могут существовать бризеры, не инвариантные относительно обращения времени, что означает ненулевой поток энергии [68].

4.3 Дискретные бризеры в переходных процессах и тепловом равновесии

4.3.1 Дискретные бризеры в переходных процессах

Поскольку локализованные состояния легко создать с помощью локального воздействия, можно ожидать, что локализация энергии и формирование дискретных бризеров возможны также в системах с ненулевой плотностью энергии, как-либо распределенной по решетке. Одна из возможностей локализации связана с неустойчивостью равномерного распределения энергии по отношению к малым возмущениям (модуляционная неустойчивость, неустойчивость Бенджамина-Фейра и т. п.). Сценарий формирования дискретных бризеров из бегущей волны вследствие модуляционной неустойчивости был рассмотрен в разделе 1.2.

Рассмотрим другой вариант переходного процесса, в котором также возможно формирование дискретных бризеров. Пусть в начальный момент времени на некотором участке бесконечной решетки заданы ненулевые начальные условия, а все остальные узлы находятся в нулевом состоянии. Тогда можно ожидать, что энергия из возбужденной части будет излучаться в виде волн в окружающую решетку, но при этом в возбужденной части могут остаться долгоживущие дискретные бризеры [69].

Приведем результаты численных экспериментов с решеткой размера 50×50 элементов, по сторонам которой добавлены диссипативные границы (та-

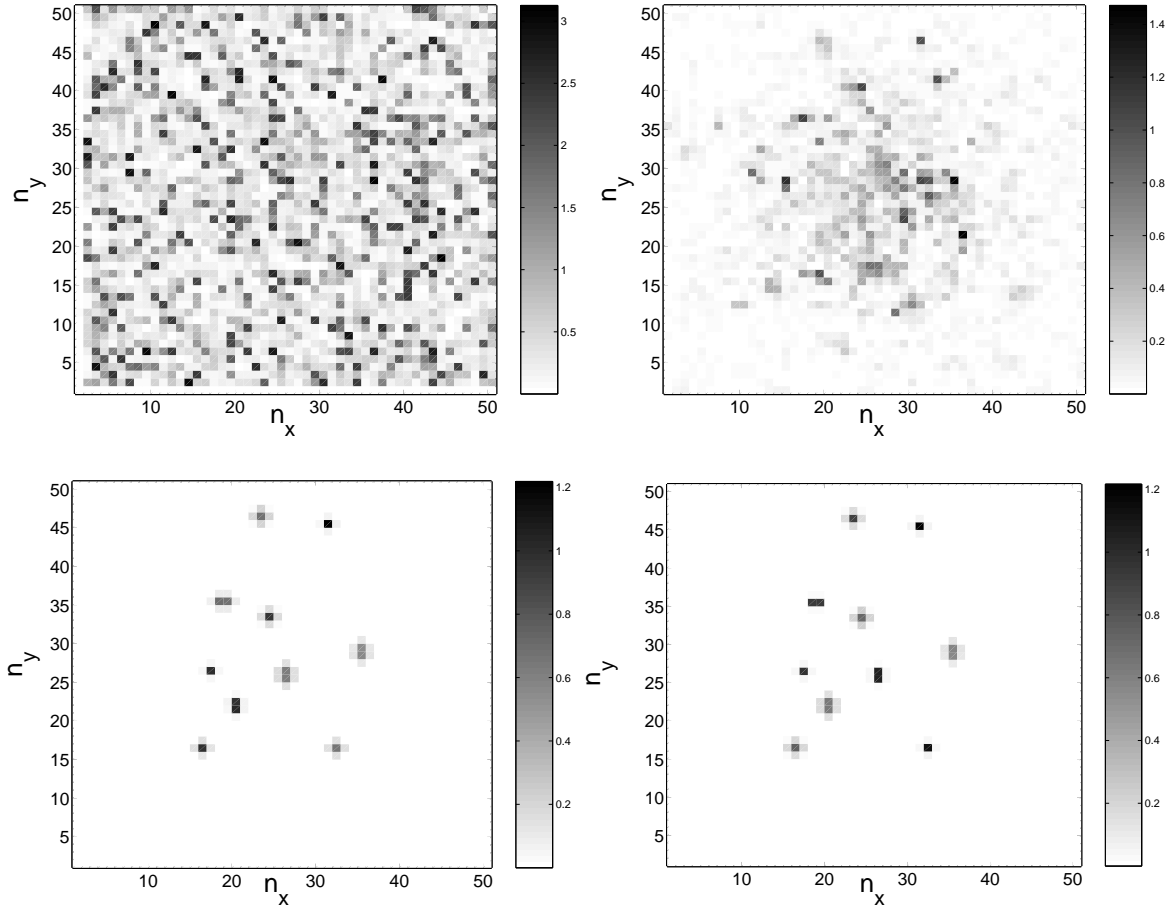


Рис. 4.8: Эволюция плотности энергии в остывающей двумерной решетке (см. пояснения в тексте).

ким образом с помощью конечной системы моделируется охлаждение участка бесконечной решетки) [32]. Параметры модели — те же, что и в экспериментах, описанных выше. Начальные условия для x_{lm} и \dot{x}_{lm} — случайная величина, равномерно распределенная на интервале от $-c/2$ до $c/2$. На рис. 4.8 (а-г) показаны снимки плотности энергии в решетке в моменты времени $t = 0, 4900, 11900, 19900$ для случая $c = 3$. Даже для такой невысокой начальной энергии около 5% полной энергии остается в долгоживущих бризерах — фактически, благодаря флуктуациям в начальных условиях.

Характер процесса охлаждения одномерных цепочек качественно отличается от двумерного случая, описанного выше. Известно [70, 71], что бризеры в одномерных системах эффективно отражают бегущие волны. Следовательно, уже двух бризеров в цепочке достаточно для того, чтобы удерживать заключенную между ними энергию от излучения в цепочку. Кроме того, волны, захваченные на участке между двух бризеров, могут приводить к некоторому взаимодействию между этими бризерами. В то же время, в системах с

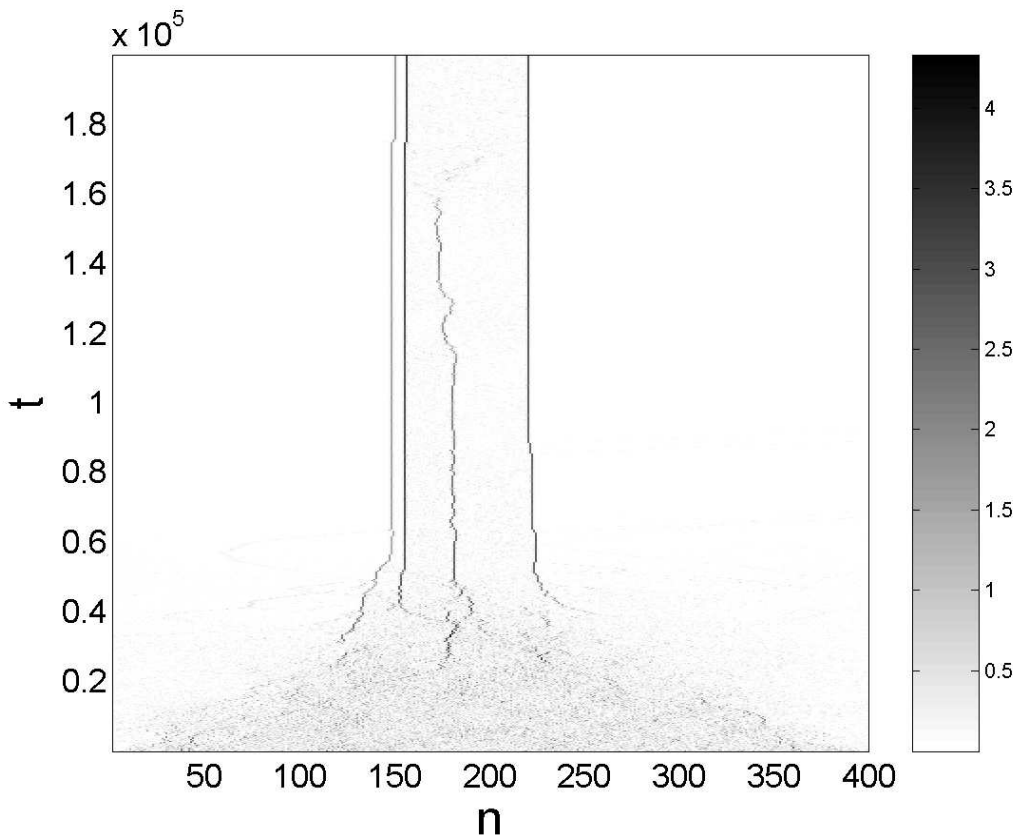


Рис. 4.9: Эволюция плотности энергии в остывающей одномерной решетке (см. пояснения в тексте)

размерностью $d \geq 2$ бризеры, хотя и могут рассеивать бегущие волны, не могут их захватывать. Поэтому распространяющиеся волны свободно выходят из нагретой области при ее остывании, и оставшиеся в системе бризеры практически не взаимодействуют друг с другом (остается возможным только взаимодействие через экспоненциально спадающие пространственные хвосты).

В самом деле, в аналогичном эксперименте с одномерной системой (параметры — те же, но $s = 2$) наблюдается захват энергии между двумя бризерами большой амплитуды (рис. 4.9, см. тж. [72],[73]). Со временем энергия все-таки постепенно излучается, а взаимодействие между бризерами приводит к их медленному сближению.

4.3.2 Бризеры в тепловом равновесии

Наконец, бризеры могут наблюдаться и в тепловом равновесии [31, 74]. На рис. 4.10 (а-г) показана эволюция плотности энергии в одномерной цепочке с теми же параметрами, как и в предыдущем разделе, на некоторых интервалах времени после установления теплового равновесия. Граничные условия — периодические, а начальные условия равномерно распределены на интервале

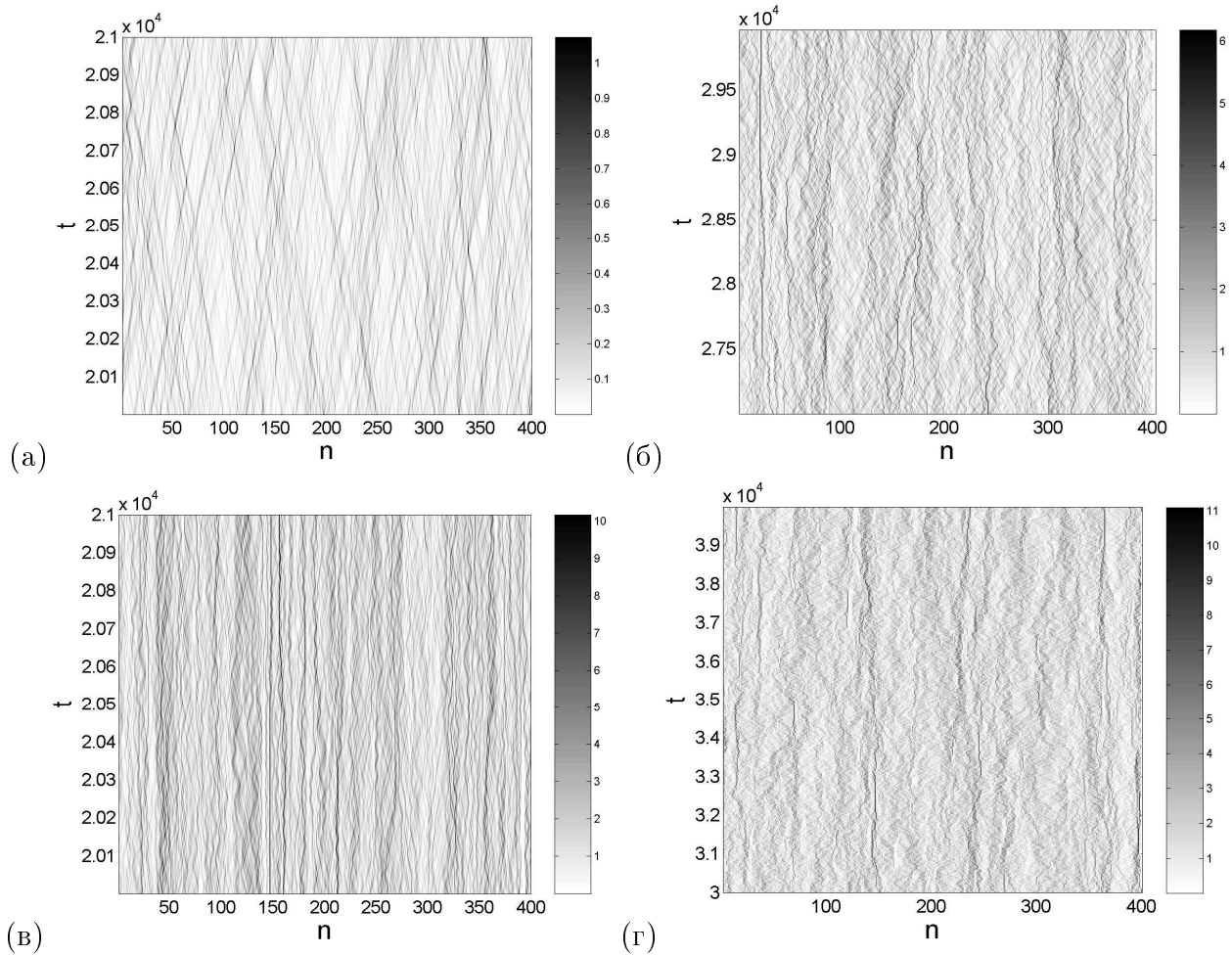


Рис. 4.10: Эволюция плотности энергии в одномерной цепочке после установления теплового равновесия: $c = 1$ (а), $c = 3$ (б), $c = 4$ (в, г).

от $-c/2$ до $c/2$. Отчетливо наблюдаются локализованные возбуждения, причем с увеличением плотности энергии увеличивается их количество и время жизни [32].

Аналогичный эффект наблюдается и в двумерной решетке. Рис. 4.11(а,б) отображает эволюцию плотности энергии в двумерной решетке размера 50×50 на двух различных временных масштабах. Для визуализации используется пороговая обработка: наличие черной точки в проекции трехмерного пространства-времени означает, что на соответствующем узле в соответствующий момент времени плотность энергии превышает установленный порог, в пять раз превышающий величину средней плотности энергии в системе. Вертикальные черные линии, таким образом, соответствуют долгоживущим локализованным возбуждениям — дискретным бризерам.

Вышеперечисленные результаты подтверждают, что дискретные бризеры достаточно легко могут быть получены в нелинейных решеточных системах, не только путем целенаправленного задания начальных условий на точном

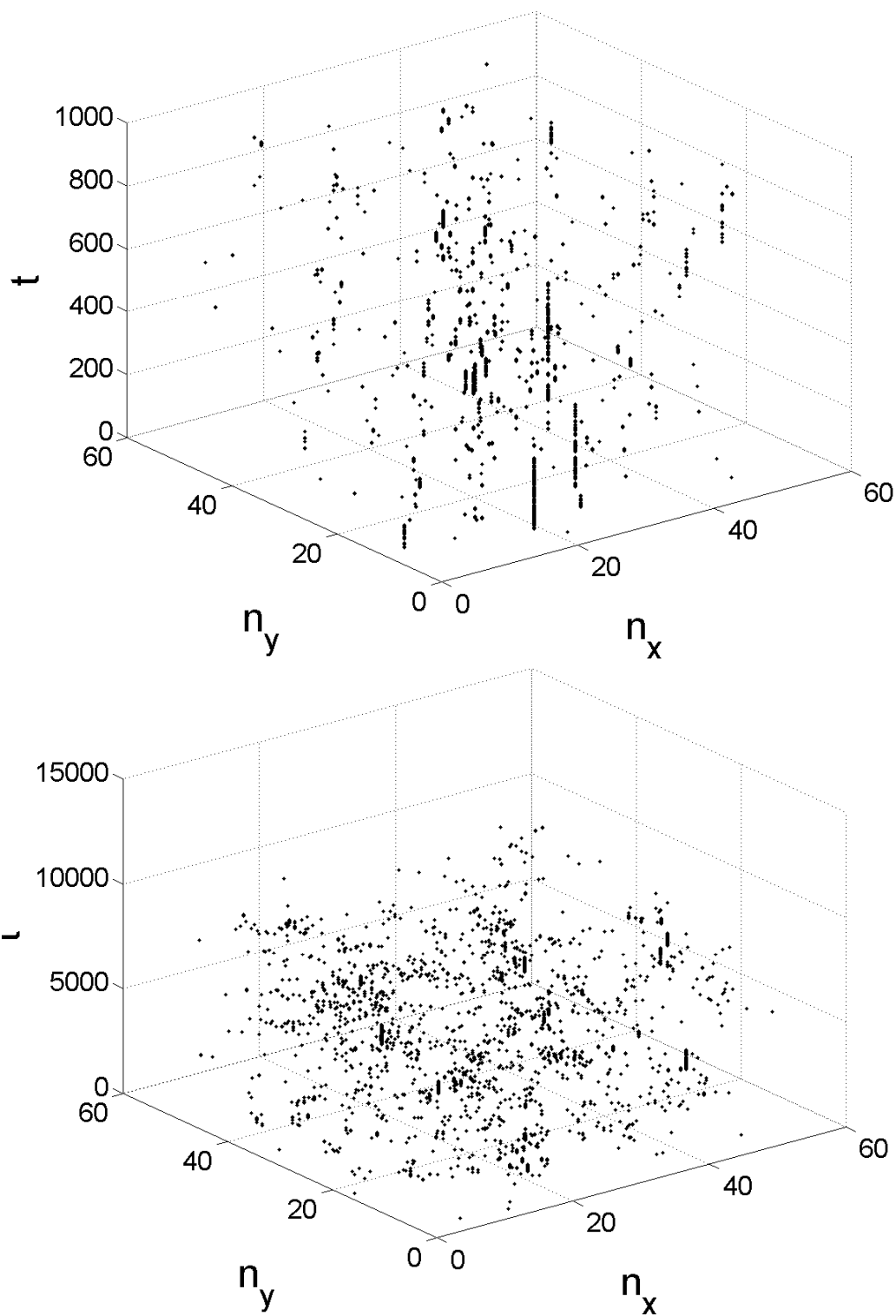


Рис. 4.11: Эволюция энергии в двумерной решетке на двух различных масштабах времени. В обоих случаях $c = 5$.

решении, но и в переходных процессах или тепловом равновесии. Представляет интерес вопрос о статистических свойствах дискретных бризеров в таких процессах; некоторые результаты по этой проблеме представлены в работе [32].

Заключение

В данном учебном пособии рассмотрены основные общие свойства пространственно-локализованных колебательных решений (дискретных бризеров) в различных нелинейных решеточных системах, а также методы их численного и аналитического исследования.

Проведен анализ условий существования дискретных бризеров, описаны методы оценки их пространственного масштаба локализации и исследования на устойчивость. Эти методы обобщены на случай вращательных локализованных решений (ротобризеров) в консервативных и диссипативных системах.

Описаны численные методы отыскания строго периодических бризерных решений (обладающих бесконечным временем жизни) для различных классов систем. Рассмотрены механизмы, приводящие к генерации бризеров с конечным временем жизни в различных физически реализуемых вариантах постановки численного эксперимента (модуляционная неустойчивость бегущей волны, остывание нагретого участка решетки, тепловое равновесие).

Интенсивное развитие теории бризерных структур, имеющее место в последнее десятилетие, обусловлено не только фундаментальным интересом нелинейной физики к этим эффектам, но и потенциальными применениями нелинейных решеточных волновых систем в качестве элементной базы перспективных радиочастотных фильтров, магнетометров и других устройств.

Список литературы

- [1] Flach S., Willis C.R. Discrete breathers //Phys. Reports. 1998. Vol. 295. P. 181-264.
- [2] Flach S., Gorbach A.V. Computational studies of discrete breathers – from basics to competing length scales //International Journal of Bifurcation and Chaos. 2006. Vol. 16. P. 1645.
- [3] Flach S., Gorbach A.V. Discrete Breathers: Advances in Theory and Applications //Physics Reports. 2008. Vol. 467. P. 1.
- [4] MacKay R.S., Aubry S. Proof of existence of breathers for time-reversible or hamiltonian networks of weakly coupled oscillators. //Nonlinearity. 1994. Vol. 7. P. 1623.
- [5] Sato M., Sievers A.J. Direct observation of the discrete character of intrinsic localized modes in an antiferromagnet //Nature. 2004. Vol. 432. P. 486-488.
- [6] Fleischer J.W., Carmon T., Segev M., Efremidis N.K., Christodoulides D.N. Observation of Discrete Solitons in Optically Induced Real TimeWaveguide Arrays //Physical Review Letters. 2003. Vol. 90, No. 2. P. 023902.
- [7] Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplewski D.A., Craighead H.G. Observation of Locked Intrinsic Localized Vibrational Modes in a Micromechanical Oscillator Array //Physical Review Letters. 2003. Vol. 90. No. 4. P. 044102.
- [8] Buks E., Roukes M.L. Electrically Tunable Collective Response in a Coupled Micromechanical Array //J. of Microelectromechanical systems. 2002. Vol. 11, No. 6. P. 802.
- [9] Zhalalutdinov M.K., Baldwin J.W., Marcus M.H., Reichenbach R.B., Parpia J.M., Houston B.H. Two-dimensional array of coupled nanomechanical resonators //Applied Physics Letters. 2006. Vol. 88. P. 143504.
- [10] Овчинников А.А. Локализованные долгоживущие колебательные состояния в молекулярных кристаллах //ЖЭТФ. 1969. Т. 57, № 1. С. 263.

- [11] Marin J.L., Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Numerical calculation from the anticontinuous limit. //Nonlinearity. 1996. Vol. 9. P. 1501.
- [12] Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization //Physica D. 1997. Vol. 103. P. 201.
- [13] Takeno S., Peyrard M. Nonlinear modes in coupled rotator models //Physica D. 1996. Vol. 92. P. 140–163.
- [14] Miroschnichenko A., Flach S., Fistul M., Zolotaryuk Y., Page J.B. Breathers in Josephson junction ladders: resonances and electromagnetic waves spectroscopy //Physical Review E. 2001. Vol. 64. P. 066601.
- [15] Binder P., Abraimov D., Ustinov A.V. Diversity of discrete breathers observed in a Josephson ladder //Physical Review E. 2000. Vol. 62, No. 2. P. 2858.
- [16] Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высшая школа, 1978.
- [17] Афраимович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
- [18] Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I. q -Breathers and the Fermi-Pasta-Ulam problem //Physical Review Letters. 2005. Vol. 95. P. 064102.
- [19] Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Mishagin K.G. Periodic orbits, localization in normal mode space and the Fermi-Pasta-Ulam problem //American Journal of Physics. 2008. Vol. 76, No. 4/5. P. 453.
- [20] Zhao Y., Ma C.C., Wong L.H., Chen G.H., Xu Zh.P., Zheng Q.S., Jiang Q., Chwang A.T. Energy exchanges in carbon nanotube oscillators //Nanotechnology. 2006. Vol. 17. P. 1032–1035.
- [21] Yu P., Tang J., Lin S.-H. Photoinduced Structural Dynamics in Laser-Heated Nanomaterials of Various Shapes and Sizes //J. Phys. Chem. C. 2008. Vol. 112. P. 17133–17137.
- [22] Takeno S., Kisoda K., Sievers A.J. Intrinsic localized vibrational modes in anharmonic crystals //Prog. Theor. Phys. Suppl. 1988. Vol. 94. P. 242-269.
- [23] Campbell D.K., Peyrard M. Chaos and order in nonintegrable model field theories //CHAOS — Soviet-American Perspectives on Nonlinear Science (ed. Campbell D.K.). New York: American Institute of Physics. 1990. P. 305-334.

- [24] Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. //Stud. Appl. Math. 1974. Vol. 53. P. 249.
- [25] Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. С. 359-362.
- [26] Segur H., Kruskal M.D. Nonexistence of small-amplitude breather solutions in ϕ^4 theory //Physical Review Letters. 1987. Vol. 58. P. 747.
- [27] Kitchenassamy S. Breather solutions of nonlinear wave equations //Commun. Pure Appl. Math. 1991. Vol. 44. P. 789–818.
- [28] Denzler J. Nonpersistence of breather families for the perturbed sine Gordon equation //Commun. Math. Phys. 1993. Vol. 158. P. 397–430.
- [29] Kivshar Yu.S., Peyrard M. Modulational Instabilities in Discrete Lattices. //Physical Review A. 1992. Vol. 46. P. 3198.
- [30] Daumont I., Dauxois T., Peyrard M. Modulational instability: first step towards energy localization in nonlinear lattices //Nonlinearity. 1997. Vol. 10. P. 617.
- [31] Peyrard M. The pathway to energy localization in nonlinear lattices. //Physica D. 1998. Vol. 119. P. 184.
- [32] Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Shalfeev V.D., Flach S. Discrete Breathers in Transient Processes and Thermal Equilibrium //Physica D. 2004. Vol. 198. P. 120.
- [33] Канаков О.И., Флах С., Шалфеев В.Д. Введение в теорию дискретных бризеров //Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, №3. С. 112-128.
- [34] Flach S., Willis C.R. and Olbrich E. Integrability and localized excitations in nonlinear discrete systems //Physical Review E. 1994. Vol 49. P. 836.
- [35] Flach S., Kladko K., Willis C.R. Localized excitations in two-dimensional lattices //Physical Review E. 1994. Vol. 50. P. 2293.
- [36] Flach S., Kladko K., MacKay R.S. Energy thresholds of discrete breathers in one-, two- and three-dimensional lattices //Physical Review Letters. 1997. Vol. 78. P. 1207.
- [37] Косевич А.М., Ковалев А.С. Самолокализация колебаний в одномерной ангармонической цепочке //ЖЭТФ. 1974. Т.67, вып. 5(11). С. 1793.

- [38] Cretegy T., Dauxois T., Ruffo S., Torcini A. Localization and equipartition of energy in the beta-FPU chain: Chaotic breathers //Physica D. 1998. Vol. 121. P. 109.
- [39] Johansson M., Morgante A.M., Aubry S., Kopidakis G. Standing wave instabilities, breather formation and thermalization in a Hamiltonian anharmonic lattice. //Eur. Phys. J. B. 2002. Vol. 29. P. 279.
- [40] Flach S. Conditions on the existence of localized excitations in nonlinear discrete systems //Physical Review E. 1994. Vol. 50. P. 3134.
- [41] Flach S. Existence of localized excitations in nonlinear Hamiltonian lattices //Physical Review E. 1995. Vol. 51. P. 1503.
- [42] Kivshar Y.S. Intrinsic localized modes as solitons with a compact support //Physical Review E. 1993. Vol. 48. P. R43.
- [43] Flach S. Obtaining breathers in nonlinear Hamiltonian lattices //Physical Review E. 1995. Vol. 51. P. 3579.
- [44] Fischer F. Self-localized single-anharmonic vibrational modes in two-dimensional lattices //Annalen der Physik. 1993. Vol. 505, issue 3. P. 296.
- [45] Aubry S., Cretegy T. Mobility and reactivity of discrete breathers //Physica D. 1998. Vol. 119, issues 1-2. P. 34.
- [46] Flach S., Kladko K. Moving discrete breathers? //Physica D. 1999. Vol. 127. P. 61.
- [47] Campbell D., Flach S., Kivshar Y. Localizing Energy Through Nonlinearity and Discreteness //Physics Today. 2004. Vol. 57, issue 1. P. 43.
- [48] Flach S., Gorbach A. Discrete breathers in Fermi–Pasta–Ulam lattices //Chaos. 2005. Vol. 15. P. 015112.
- [49] Eleftheriou M., Flach S. Discrete breathers in thermal equilibrium: distributions and energy gaps //Physica D. 2005. Vol. 202, issues 1–2. P. 142.
- [50] Economou E.N. Green's Functions in Quantum Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [51] Baesens C., MacKay R.S. Exponential localization of linear response in networks with exponentially decaying coupling //Nonlinearity. 1997. Vol. 10, No. 4. P. 931.

- [52] Zygmund A. Trigonometric Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.
- [53] Flach S. Breathers on lattices with long range interaction //Physical Review E. 1998. Vol. 58. P. R4116.
- [54] Ovchinnikov A.A., Flach S. Discrete Breathers in Systems with Homogeneous Potentials: Analytic Solutions //Physical Review Letters. 1999. Vol. 83. P. 248.
- [55] Dey B., Eleftheriou M., Flach S., Tsironis G. Shape profile of compactlike discrete breathers in nonlinear dispersive lattice systems //Physical Review E. 2001. Vol. 65. P. 017601.
- [56] Gorbach A., Flach S. Compactlike discrete breathers in systems with nonlinear and nonlocal dispersive terms //Physical Review E. 2005. Vol. 72. P. 056607.
- [57] Flach S., Kladko K., Takeno S. Acoustic Breathers in Two-Dimensional Lattices //Physical Review Letters. 1997. Vol. 79. P. 4838.
- [58] Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization //Physica D. 1997. Vol. 103. P. 201.
- [59] Marin J.L., Aubry S. Finite size effects on instabilities of discrete breathers //Physica D. 1998. Vol. 119. P. 163.
- [60] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2003.
- [61] Nayfeh A.H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley and Sons, 1993.
- [62] Flach S. Tangent bifurcation of band edge plane waves, dynamical symmetry breaking and vibrational localization //Physica D. 1996. Vol. 91, issue 3. P. 223.
- [63] Weinstein M.I. Excitation thresholds for nonlinear localized modes on lattices //Nonlinearity. 1999. Vol. 12, No. 3. P. 673.
- [64] Floria L.M., Marin J.L., Martinez P.J., Falo F., Aubry S. Intrinsic localisation in the dynamics of a Josephson-junction ladder //Europhys. Lett. 1996. Vol. 36, No. 7. P. 539.

- [65] Marín J.L., Falo F., Martínez P.J., Floría L.M. Discrete breathers in dissipative lattices //Physical Review E. 2001. Vol. 63. P. 066603.
- [66] Takeno S., Peyrard M. Nonlinear rotating modes: Green's-function solution //Physical Review E. 1997. Vol. 55. P. 1922.
- [67] Flach S., Willis C.R. Localized excitations in a discrete Klein-Gordon system //Physics Letters A. 1993. Vol. 181, issue 3. P. 232.
- [68] Cretegny T., Aubry S. Patterns of energy flux in periodic solutions of Klein-Gordon lattices //Physica D. 1998. Vol. 113, issues 2–4. P. 162.
- [69] Bikaki A., Voulgarakis N.K., Aubry S., Tsironis G.P. Energy relaxation in discrete nonlinear lattices //Physical Review E. 1999. Vol. 59. P. 1234.
- [70] Cretegny T., Aubry S., Flach S. 1D phonon scattering by discrete breathers //Physica D. 1998. Vol. 119, issues 1–2. P. 73.
- [71] Flach S., Mirochnishenko A.E., Fistul M.V. Wave scattering by discrete breathers //CHAOS. 2003. Vol. 13. P. 596.
- [72] Tsironis G.P., Aubry S. Slow Relaxation Phenomena Induced by Breathers in Nonlinear Lattices //Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, issue 26. P. 5225.
- [73] Reigada R., Sarmiento A., Lindenberg K. Energy relaxation in nonlinear one-dimensional lattices //Physical Review E. 2001. Vol. 64, issue 6. P. 066608.
- [74] Flach S., Mutschke G. Slow relaxation and phase space properties of a conservative system with many degrees of freedom //Physical Review E. 1994. Vol. 49, issue 6. P. 5018.

Олег Игоревич **Канаков**
Sergej **Flach** (Сергей **Флах**)

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ
В РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ:
ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Учебное пособие

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.