МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Н.П. Семерикова
А.А. Дубков
А.А. Харчева

РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 “Радиофизика”, 02.03.02 “Фундаментальная информатика и информационные технологии” и специальности 090302.65 “Информационная безопасности телекоммуникационных систем”

Нижний Новгород
2016

УДК 517.537 (075.8)
ББК В161.3 (я73)
С30

Семерикова, Н.П. Ряды аналитических функций: учебно-метод. пособие/ Н.П. Семерикова, А.А. Дубков, А.А. Харчева. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2016. - 35 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.В. Клюев**

В учебно-методическом пособии рассмотрены примеры разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, приемы вычисления радиусов сходимости степенных рядов с применением формулы Коши-Адамара, способы определения областей сходимости рядов Лорана. Уделено внимание методам определения порядка нулей аналитических функций и классификации изолированных особых точек однозначных функций. В конце каждого раздела приведены задания для самостоятельной работы и ответы к ним.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов радиофизического факультета, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 "Радиофизика", 02.03.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" и специальности 090302.65 "Информационная безопасности телекоммуникационных систем" и изучающих курс "Теория функций комплексного переменного".

Ответственный за выпуск:
зам. председателя методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ,
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 517.537 (075.8)
ББК В161.3 (я73)
С30

© Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение. Степенным рядом с комплексными членами называется ряд вида

$$C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + ... + C_n(z-z_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, \quad (1)$$

где z_0 - фиксированная точка комплексной плоскости, а коэффициенты $C_0, C_1, ..., C_n, ... -$ некоторые комплексные числа. Степенной ряд сходится абсолютно в круге $|z-z_0| < R$ с центром в точке z_0 и радиусом R. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда и вычисляется либо по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}, \quad (2)$$

либо по формуле:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} \quad (3)$$

при условии, что предел (3) существует. Если $R = 0$, то степенной ряд сходится только в одной точке $z = z_0$. Если $R = +\infty$, то областью сходимости степенного ряда является вся комплексная плоскость, и ее записывают в виде $|z-z_0| < +\infty$.

Примеры. Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

***Пример* 1**: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n$.

Решение. Найдем модуль коэффициента $C_n = \frac{1}{(1-i)^n}$.

$|C_n| = \frac{1}{|1-i|^n} = \frac{1}{(\sqrt{1+1})^n} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$. Тогда по формуле (2) $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{(\sqrt{2})^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $R = \sqrt{2}$, т.е. ряд сходится в круге $|z| < \sqrt{2}$.

***Пример* 2**: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n z^n$.

Решение. $|C_n| = \left(3 + (-1)^n\right)^n$. По формуле Коши-Адамара (2) вычисляем верхний частичный предел: $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\left(3+(-1)^n\right)^n} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left(3 + (-1)^n\right) = 4$ и $R = \frac{1}{4}$.

***Пример* 3**: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\ln in}\right)^n$.

Решение. Так как $\ln z=\ln|z|+i\arg z$, то $\ln in=\ln|in|+i\arg(in)=\ln n+i\dfrac{\pi}{2}$ и тогда $|\ln in|=\sqrt{\ln^2 n+\dfrac{\pi^2}{4}}$. По формуле (2) получаем, что $\dfrac{1}{R}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{1}{|\ln in|^n}}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{1}{|\ln in|}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{1}{\sqrt{\ln^2 n+\dfrac{\pi^2}{4}}}=0$. Значит $R=+\infty$ и ряд сходится на всей комплексной плоскости $|z|<+\infty$.

***Пример* 4**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$.

Решение. Здесь $|C_n|=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $|C_{n+1}|=\dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$. Для нахождения радиуса сходимости применим формулу (3):

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2(n+1)^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{4}.$$

Тогда $R=4$.

Рассмотрим теперь случай степенного ряда, у которого не все из коэффициентов C_n отличны от нуля. Такой ряд можно записать в виде: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{N(n)}$, где $N(n)$ - натуральное число, причем $N(n)\geq n$. Для определения радиуса сходимости R такого ряда можно воспользоваться формулой Коши-Адамара (2), но на практике бывает удобнее применить следующий прием, основанный на теории числовых рядов. В самом деле, поскольку мы интересуемся областью абсолютной сходимости степенного ряда (1), то, зафиксировав z, сводим задачу к исследованию сходимости знакопостоянного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n||z-z_0|^{N(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Для ее решения можно применить достаточные признаки Даламбера или Коши и потребовать, чтобы пределы

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|\left|z-z_0\right|^{N(n+1)-N(n)}$ (D) или, соответственно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}\left|z-z_0\right|^{N(n)/n}$ (C) были меньше 1. Продемонстрируем этот прием на следующих двух примерах отыскания радиуса сходимости степенных рядов.

***Пример* 5**: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}(z-i)^{3n+1}$.

Решение. Воспользуемся достаточным признаком Даламбера (D), подставив $b_n=\dfrac{n!}{n^n},\quad N(n)=3n+1.$

Тогда имеем

$$q(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!}\left|z-i\right|^{[3(n+1)+1]-(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)n!}\left|z-i\right|^3=$$

$$=\left|z-i\right|^3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{\left|z-i\right|^3}{e}<1.$$

В результате сразу находим область абсолютной сходимости степенного ряда $\left|z-i\right|<\sqrt[3]{e}$ и радиус сходимости $R=\sqrt[3]{e}$.

***Пример* 6**: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-i)^n(z+2)^{n^2}$.

Решение. Применим радикальный признак Коши (C), положив под пределом $b_n=(3-i)^n,\quad N(n)=n^2$.

В результате придем к

$$q(z)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|3-i\right|^n\left|z+2\right|^{n^2}}=\left|3-i\right|\lim_{n\to\infty}\left|z+2\right|^n=\sqrt{10}\lim_{n\to\infty}\left|z+2\right|^n=\begin{cases}0, & \left|z+2\right|<1\\ \sqrt{10}, & \left|z+2\right|=1.\\ +\infty, & \left|z+2\right|>1\end{cases}$$

Нам подходит только первый вариант, поэтому областью абсолютной сходимости степенного ряда является круг единичного радиуса с центром в точке z_0= -2, т.е. $\left|z+2\right|<1$ и $R=1$.

Пусть дан ряд вида

$$\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}. \qquad (4)$$

Ряд (4) не является степенным, но после замены $\xi = \dfrac{1}{z - z_0}$ он принимает вид степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{-n}\xi^n$, который сходится в круге $|\xi| < R_1$, а радиус R_1 находится по формулам (2) или (3). Возвращаясь к переменной z, определяем область сходимости ряда (4): $\dfrac{1}{|z - z_0|} < R_1$ или $|z - z_0| > \dfrac{1}{R_1} = r$. Таким образом, областью сходимости ряда (4) является внешность круга $|z - z_0| > r$ с центром в точке z_0 и радиуса r.

Замечание. Для нахождения области сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$ можно запомнить формулы: если существует конечный предел $r = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|C_{-n}|}$ (2') или $r = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|C_{-n-1}|}{|C_{-n}|}$ (3') , то ряд (4) сходится в области $|z - z_0| > r$.

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{5}$$

называется рядом Лорана. Ряд Лорана представляется в виде суммы двух рядов, один из которых - обычный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, который называют правильной частью ряда Лорана. Он сходится внутри круга $|z - z_0| < R$. Второе слагаемое представляет собой ряд (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$, который называется главной частью ряда Лорана и сходится во внешности круга $|z - z_0| > r$. Областью сходимости ряда Лорана является общая часть областей сходимости каждого из слагаемых. Если $r < R$, то ряд Лорана (5) сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$. Если $r > R$, то ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$ не имеют общей области сходимости и ряд Лорана (5) расходится всюду на комплексной плоскости.

Примеры: Найти области сходимости следующих рядов Лорана.

Пример 1: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z - 2i}{6}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3 + 4i)^n}{(z - 2i)^n}$.

Решение. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{6}\right)^n$: $C_n=\frac{1}{6^n}, C_{n+1}=\frac{1}{6^{n+1}}$. Радиус сходимости вычисляем по формуле: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{6^n}{6^{n+1}}=\frac{1}{6}$. Тогда $R=6$ и ряд сходится в круге $|z-2i|<6$.

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z-2i)^n}$ имеем $C_{-n}=(3+4i)^n$, $C_{-n-1}=(3+4i)^{n+1}$. Следовательно, по формуле (3') $r=\lim_{n\to+\infty}\frac{|C_{-n-1}|}{|C_{-n}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|3+4i|^{n+1}}{|3+4i|^n}=|3+4i|=\sqrt{9+16}=5$, и данный ряд сходится при $|z-2i|>5$. Общая область сходимости двух рядов – кольцо $5<|z-2i|<6$.

***Пример* 2**: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{e^{in^2}(3-2i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z+i)^n}$.

Решение. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{e^{in^2}(3-2i)^n}$ радиус сходимости находим по формуле (2). В силу того, что $|C_n|=\frac{1}{\left|e^{in^2}(3-2i)^n\right|}=\frac{1}{\left|e^{in^2}\right||3-2i|^n}=\frac{1}{|3-2i|^n}$, получаем: $\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|C_n|}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{|3-2i|^n}}=\frac{1}{|3-2i|}=\frac{1}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$. Тогда $R=\sqrt{13}$, значит, ряд сходится в круге $|z+i|<\sqrt{13}$.

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z+i)^n}$: $C_{-n}=\sin in,\ C_{-n-1}=\sin i(n+1)$, тогда по формуле (3') радиус сходимости равен

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|\sin i(n+1)|}{|\sin in|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|i\sinh(n+1)|}{|i\sinh n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sinh(n+1)}{\sinh n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}-e^{-(n+1)}}{e^n-e^{-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}(1-e^{-2(n+1)})}{e^n(1-e^{-2n})}=e.$$

и данный ряд сходится во внешности круга $|z+i|>e$.

Общая область сходимости двух рядов – кольцо $e<|z+i|<\sqrt{13}$.

***Пример* 3**: $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}-\frac{i}{2(z-i)}$.

Решение. Для степенного ряда: $\left|C_n\right| = \left|\frac{(-1)^n}{(2i)^n}\right| = \frac{1}{\left|2i\right|^n} = \frac{1}{2^n}$ и $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$.
Значит, $R = 2$ ряд сходится при $\left|z-i\right| < 2$. Главная часть ряда Лорана состоит из одного слагаемого $-\frac{i}{2(z-i)}$, которое определено при $\left|z-i\right| > 0$. Поэтому ряд Лорана сходится в кольце $0 < \left|z-i\right| < 2$, которое, по сути, является кругом с выколотым центром в точке *i*.

Задачи для самостоятельного решения:

Найти область сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(3i)^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)(z+1)^n}$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n(z-i)^n}{4^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+2i)^n(z-i)^n}$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{e^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{6^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+2}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}$

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n}$

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n+i)^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n}$

8) $-\frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$

9) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}4^{-n^2}z^{n^4}$

10) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n^2+1}$

Ответы: **1)** $1 < \left|z+1\right| < 3$; **2)** $\sqrt{5} < \left|z-i\right| < 4$; **3)** $1 < \left|z\right| < e$; **4)** $5 < \left|z+2i\right| < 6$; **5)** ряд расходится; **6)** $0 < \left|z-2+i\right| < 1$; **7)** $2 < \left|z+1\right| < +\infty$; **8)** $0 < \left|z-i\right| < 2$; **9)** ряд расходится; **10)** ряд расходится.

РЯД ТЕЙЛОРА

Теорема Тейлора. Если *f*(*z*) - аналитическая функция в круге $\left|z-z_0\right| < R$, то она в этом круге единственным образом раскладывается в степенной ряд Тейлора $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$, коэффициенты которого C_n вычисляются по формулам:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (6)$$

где Г – произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в круге $|z - z_0| < R$.

Определение. Точки на комплексной плоскости, в которых функция $f(z)$ является аналитической, будем называть правильными точками. Точки, в которых $f(z)$ перестает быть аналитической, называются особыми точками. В особых точках функция $f(z)$ либо не определена, либо определена, но не дифференцируема.

Для ряда Тейлора важно запомнить следующее:

1. *Разложение в ряд Тейлора ведется в окрестности правильной точки* z_0 *по степеням* $(z - z_0)$.

2. *Окрестностью правильной точки является круг с центром в точке* z_0 *и радиуса* R *, т.е.* $|z - z_0| < R$*, где* $f(z)$ *является аналитической.*

3. *Радиус круга сходимости R вычисляется по формулам* (2) *или* (3) *и равен расстоянию от правильной точки* z_0 *(центра круга) до ближайшей особой точки функции* $f(z)$.

4. *Если* $f(z)$ *не имеет особых точек, то ряд Тейлора сходится на всей комплексной плоскости, т.е. в области* $|z - z_0| < +\infty$.

При разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора стараются не вычислять коэффициенты ряда C_n по формулам (6), а пользуются стандартными разложениями элементарных функций комплексного переменного. Стандартные разложения получены в окрестности правильной точки $z_0 = 0$.

Стандартные разложения

I. $e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ – ряд сходится на всей комплексной плоскости $|z| < +\infty$.

II. $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ – ряд сходится на всей комплексной плоскости $|z| < +\infty$.

III. $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ – ряд сходится на всей комплексной плоскости $|z| < +\infty$.

IV. $(1+z)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!} z + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots =$

$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$ – ряд сходится в круге $|z| < 1$.

V. $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$ – ряд сходится в круге $|z|<1$.

Добавим к этим разложениям еще два полезных разложения, соответствующих формулам суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Они могут быть получены из стандартного разложения (IV) при $\alpha = -1$.

VI. $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + .. + z^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ – ряд сходится в круге $|z|<1$.

VII. $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ – ряд сходится в круге $|z|<1$.

Примеры:

***Пример* 1:** Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$ в окрестности точки $z_0 = 0$ и найти область сходимости.

Решение. Функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, кроме точек $z=2$ и $z=3$, в которых знаменатель дроби обращается в нуль. Точка $z_0 = 0$ является правильной точкой, и разложение в окрестности этой точки ведем по степеням z. Для этого $f(z)$, как правильную рациональную дробь, разложим на сумму простейших дробей: $f(z) = \dfrac{2z-5}{z^2-5z+6} = \dfrac{2z-5}{(z-2)(z-3)} = \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{z-3}$ и каждую из полученных дробей разложим в ряд, пользуясь разложением (VI):

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Данный ряд сходится, если $\left|-\dfrac{z}{2}\right|<1$, откуда получаем $|z|<2$.

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-3\left(1-\frac{z}{3}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Ряд сходится, если $\left|-\dfrac{z}{3}\right|<1$, т.е. $|z|<3$.

Тогда разложение для $f(z)$ принимает вид: $f(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot z^n$. Полученный ряд сходится в общей области сходимости каждого из рядов. Это будет круг $|z| < 2$, а радиус которого равен расстоянию от центра круга $z_0 = 0$ до ближайшей особой точки z=2.

***Пример* 2:** Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + i}$ и найти область сходимости.

Решение. Применим разложение (VII) и учтем при этом, что числитель дроби уже является степенью z:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + i} = \frac{z}{i\left(1 + \frac{z^2}{i}\right)} = \frac{z}{i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z^2}{i}} = \frac{z}{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^2}{i}\right)^n = \frac{z}{i} \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{z^{2n}}{i^n} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} z^{2n+1}.$$

Полученный ряд сходится, если $\left|\dfrac{z^2}{i}\right| < 1$, откуда находим, что $|z^2| < |i| = 1$ или $|z| < 1$. Заметим, что рассматриваемая функция $f(z)$ является аналитической во всех точках комплексной плоскости, кроме точек, в которых знаменатель дроби обращается в нуль, т.е. $z^2 + i = 0$. Найдем эти точки, пользуясь правилом извлечения корней из комплексных чисел: $z_{1,2} = \pm\sqrt{-i} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)/2}$ (k=0, 1). В результате получаем $z_1 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, $z_1 = -\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. Очевидно, что эти точки лежат на единичной окружности $|z| = 1$, и поэтому радиус сходимости ряда получился равным единице.

***Пример* 3:** Разложить функцию $f(z) = e^z \sin z$ по степеням z и найти область сходимости ряда.

Решение. Пользуясь формулой Эйлера, представим исходную функцию в виде: $f(z) = e^z \sin z = e^z \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left[e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}\right]$ и воспользуемся стандартным разложением (I):

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left[e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}\right] = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} z^n\right) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n!} z^n =$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}]^n - [\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}]^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!} \frac{e^{in\frac{\pi}{4}} - e^{-in\frac{\pi}{4}}}{2i} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}}{n!} z^n.$$

Полученный ряд сходится на всей комплексной плоскости $|z| < +\infty$, как и использовалось стандартное разложение (I).

***Пример* 4:** Разложить функцию $f(z) = \sin(2z - z^2)$ по степеням (z-1) и найти область сходимости ряда.

Решение. Разложение по степеням (z-1) ведется в окрестности правильной точки $z_0 = 1$. Чтобы воспользоваться стандартными разложениями, изменим аргумент функции на (z-1): $2z - z^2 = 1 - (1 - 2z + z^2) = 1 - (z-1)^2$. Тогда $f(z) = \sin(2z - z^2) = \sin\left(1 - (z-1)^2\right) = \sin 1 \cos(z-1)^2 - \cos 1 \sin(z-1)^2$.

Теперь применяем стандартные разложения (II) и (III):

$$f(z) = \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left((z-1)^2\right)^{2n}}{(2n)!} - \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left((z-1)^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{4n}}{(2n)!} -$$

$$- \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Полученный ряд сходится на всей комплексной плоскости $|z-1| < +\infty$, т.к. здесь сходятся оба стандартных разложения (II) и (III).

Задачи для самостоятельного решения:

1) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 3}$.

2) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 3$ функцию $f(z) = \dfrac{1}{3 - 2z}$.

3) Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ по степеням z.

4) Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \ln(2 + z - z^2)$ по степеням z.

5) Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \sin(2z + 1)$ по степеням (z+1).

Во всех задачах найти область сходимости рядов.

Ответы:

1) $\dfrac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-3)^n - 1}{3^n} z^n, |z| < 1;$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^n}{3^{n+1}} (z-3)^n, |z-3| < \dfrac{3}{2};$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n, |z| < 1;$

4) $-\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-2)^n + 1}{n 2^n} z^n, |z| < 1;$

5). $\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^{n+1}}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} - \sin 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^{2n}}{(2n)!}(z+1)^{2n}, |z|<+\infty$.

РЯД ЛОРАНА

Теорема Лорана. Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в круговом кольце $r<|z-z_0|<R$, представляется в этом кольце рядом Лорана (5) $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$, где коэффициенты C_n находятся по формулам:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,...). \tag{7}$$

Здесь Γ – произвольный замкнутый контур, содержащий внутри себя малый круг $|z-z_0|\le r$ и целиком лежащий в кольце $r<|z-z_0|<R$.

Как уже говорилось ранее, правильная часть ряда Лорана (т.е. ряд Тейлора) $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ сходится внутри круга $|z-z_0|<R$, а главная часть ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$ сходится во внешности круга $|z-z_0|>r$. При этом не исключаются случаи, когда $r=0$ и $R=+\infty$.

На практике при нахождении коэффициентов C_n стараются избегать применения формул (7), так как они приводят к громоздким выкладкам. Обычно, если это возможно, используют стандартные разложения (I) - (VII) в ряд Тейлора элементарных функций.

При разложении в ряд Лорана нужно запомнить следующие правила:

1) *Чтобы получить разложение внутри круга* $|z-z_0|<R$, *функцию* $f(z)$ *необходимо раскладывать по положительным степеням разности* $(z-z_0)$.

2) *Чтобы получить разложение во внешности круга* $|z-z_0|>r$, *функцию* $f(z)$ *раскладывают по отрицательным степеням разности* $(z-z_0)$.

3) *Радиусы кольца сходимости ряда Лорана r и R равны расстоянию от точки* z_0 *до соседних* (*по расстоянию до нее*) *особых точек функции* $f(z)$.

4) *Чтобы получить разложение во внешности круга* $r<|z|<+\infty$, *где f(z) аналитическая, разложение в ряд Лорана нужно вести по степеням* $\dfrac{1}{z}$. *Данную область называют окрестностью бесконечно удаленной точки* $z=\infty$.

Примеры:

***Пример* 1:** Написать различные разложения функции $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ в ряд Лорана.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы простейших дробей: $f(z)=\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{1}{z-1}$. Функция $f(z)$ имеет две особые точки z=-2 и z=1, поэтому рассмотрим разные виды колец, где функция будет аналитической.

Вначале рассмотрим разложения в окрестности правильной точки $z_0=0$. Здесь возможны варианты:

1) *Разложение в круге* $|z|<1$. В этом круге $f(z)$ является аналитической функцией, поэтому ее разложение является рядом Тейлора. Раскладывать в окрестности правильной точки $z_0=0$ будем по положительным степеням z. Для этого воспользуемся стандартными разложениями (VI), (VII):

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n.$$

Первый ряд сходится при $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, т.е. в круге $|z|<2$, а второй ряд сходится при $|z|<1$. Общая область сходимости – круг $|z|<1$. При этом помним, что радиус круга сходимости определяется расстоянием от центра круга до ближайшей особой точки, в данном случае это точка z=1.

2) *Разложение в кольце* $1<|z|<2$. Функция $\dfrac{1}{z+2}$ является аналитической в круге $|z|<2$, поэтому внутри круга раскладываем ее по степеням z. Функция $\dfrac{1}{z-1}$ – аналитическая во внешности круга $|z|>1$, поэтому во внешности круга разложение ведем по степеням $\dfrac{1}{z}$. Применяя стандартные разложения (VI), (VII), получаем:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Первый ряд сходится при $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, т.е. в круге $|z|<2$. Второй ряд сходится при $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$, т.е. во внешности круга $|z|>1$. В результате общая область сходимости –

кольцо $1<|z|<2$. Заметим, что особые точки z=-2 и z=1 попадают на границы данного кольца, а внутри функция является аналитической.

3) *Разложение во внешности круга* $2<|z|<+\infty$. Чтобы получить разложение во внешности круга, каждую из дробей раскладываем по степеням $\frac{1}{z}$ и снова пользуемся разложениями (VI) и (VII):

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n+1}{z^{n+1}}.$$

Первый ряд сходится при $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, т.е. во внешности круга $|z|>2$. Второй ряд сходится при $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т.е. во внешности круга $|z|>1$. В результате общая область сходимости – внешность круга $|z|>2$ или кольцо $2<|z|<+\infty$. Заметим, что особые точки z=-2 и z=1 попадают на границу или внутрь круга $|z|<2$. Во внешности круга $|z|>2$ функция $f(z)$ является аналитической. Полученное разложение является рядом Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки z=∞, не содержащим главной части.

Теперь рассмотрим разложения в окрестности особых точек z=-2 и z=1. Здесь также возможны различные варианты.

4) *Разложение в кольце* $0<|z-1|<3$. Функцию $\frac{1}{z+2}$, которая аналитична в точке z=1, раскладываем по степеням (z-1) в круге $|z-1|<3$. Функция $\frac{1}{z-1}$ не является аналитической в точке z=1 и ее рассматриваем как нужное нам разложение, которое справедливо при $|z-1|>0$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{3+(z-1)}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Итак, общая область сходимости полученного ряда Лорана – кольцо $0<|z-1|<3$. Эту область можно рассматривать как круг, из которого “выкололи” его центр, так как в центре круга $f(z)$ не является аналитической.

5) *Разложение в кольце* $3<|z-1|<+\infty$. Чтобы получить разложение во внешности круга $|z-1|>3$, функцию $\frac{1}{z+2}$ раскладываем по степеням $\frac{1}{z-1}$. Дробь $\frac{1}{z-1}$ это нужное нам разложение, которое определено при $|z-1|>0$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{3+(z-1)}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3}{z-1}}+\frac{1}{z-1}=$$

$$=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(z-1)^n}=\frac{2}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}}.$$

Особые точки z=-2 и z=1 находятся в круге $|z-1|<3$ и на его границе, а во внешности круга $|z-1|>3$ $f(z)$ является аналитической.

6) *Разложение в кольце* $0<|z+2|<3$. Функцию $\frac{1}{z-1}$, аналитическую при z=-2, раскладываем по степеням (z+2), а дробь $\frac{1}{z+2}$ – нужное нам разложение, которое справедливо при $|z+2|>0$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{(z+2)-3}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+2}{3}}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^n}.$$

Общей областью сходимости является кольцо $0<|z+2|<3$ или круг в “выколотым” центром в особой точке z=-2.

7) *Разложение в кольце* $3<|z+2|<+\infty$. Чтобы получить разложение во внешности круга $|z+2|>3$, функцию $\frac{1}{z+1}$ раскладываем по степеням $\frac{1}{z+2}$, а дробь $\frac{1}{z+2}$ - нужное нам разложение, которое определено при $|z+2|>0$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{(z+2)-3}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{z+2}}=$$

$$=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z+2)^n}=\frac{2}{z+2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(z+2)^{n+1}}.$$

Особые точки z=-2 и z=1 находятся в круге $|z+2|<3$ и на его границе, а во внешности круга $|z+2|>3$ $f(z)$ является аналитической. Ряд Лорана не содержит главной части.

***Пример* 2:** Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точек z=0, z=1, z=∞.

Решение. Функция $f(z)$ имеет две особые точки z=0 и z=1. Представим ее в виде суммы дробей: $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}$, чтобы каждая из дробей имела только одну особую точку.

1) *Разложение в окрестности особой точки* z=0. Для функции $\frac{1}{1-z}$ точка z=0 является правильной, эту функцию раскладываем по степеням z*,* и разложение будет являться рядом Тейлора. Дробь $\frac{1}{z}$ – уже нужное нам разложение. Тогда:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Степенной ряд (VI) сходится в круге $|z|<1$, а дробь $\frac{1}{z}$ имеет смысл при $|z|>0$. Поэтому ряд Лорана сходится в круге $0<|z|<1$ с “выколотым” центром в особой точке z=0.

2) *Разложение в окрестности особой точки* z=1. Точка z=1 является правильной для функции $\frac{1}{z}$, поэтому ее раскладываем по положительным степеням разности (z-1), а функция $\frac{1}{1-z}$ - уже нужный член разложения. В итоге:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1+(z-1)}=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Степенной ряд сходится в круге $|z-1|<1$, а дробь $\frac{1}{1-z}$ имеет смысл при $|z-1|>0$. Поэтому полученное разложение сходится в круге $0<|z-1|<1$ с “выколотым” центром в особой точке z=1.

3) *Разложение в окрестности точки* z=∞*.* В окрестности бесконечно удаленной точки разложение ведется по степеням $\frac{1}{z}$:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Первое слагаемое имеет смысл при $|z|>0$, а правильная часть ряда Лорана сходится во внешности круга $|z|>1$. Таким образом, получаем область $1<|z|<+\infty$, которую называют окрестностью бесконечно удаленной точки.

***Пример* 3:** Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}$ в окрестности точки z=0.

Решение. Согласно стандартному разложению (III), для любого комплексного w имеем ряд $\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \ldots$, который сходится на всей комплексной плоскости. Полагая $w = \frac{1}{z}$, запишем разложение для $f(z)$:

$$f(z) = z^3 \cos\frac{1}{z} = z^3\left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \cdots\right) = z^3 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n-3}}.$$

Данное разложение справедливо для любой точки комплексной плоскости, не совпадающей с $z=0$, так как $z=0$ является особой точкой для $f(z)$. Поэтому область сходимости можно записать в виде $0 < |z| < +\infty$ и рассматривать ее как круг бесконечной радиуса с «выколотым» центром. Этот ряд Лорана соответствует разложению в окрестности особой точки $z=0$. С другой стороны, в области $0 < |z| < +\infty$ $f(z)$ аналитическая, и эта область является окрестностью бесконечно удаленной точки. Поэтому полученный ряд соответствует также разложению в окрестности точки $z=\infty$.

Рассмотрим теперь сложный пример на разложение, связанный с перемножением рядов Лорана. Прежде всего, выведем формулу

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad C_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

В самом деле,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (z-z_0)^m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (z-z_0)^{k+m} = \{m = n-k\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}\right)(z-z_0)^n.$$

***Пример* 4:** Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z=0$ и найти область его сходимости.

Решение. Применяем дважды стандартное разложение (I) по аргументам z и $1/z$:

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{z^m m!}.$$

У первого ряда Лорана отличны от нуля лишь коэффициенты с неотрицательными индексами: $a_k = \frac{1}{k!}, \quad k \ge 0; \quad a_k = 0, \quad k < 0$, а у второго, наоборот, с неположительными: $b_{-m} = \frac{1}{m!}, \quad m \ge 0; \quad b_m = 0, \quad m > 0$. Подставляя коэффициенты a_k и b_m в формулу перемножения, находим коэффициенты искомого разложения, стоящие при отрицательных степенях z:

$$C_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{-(n+k)}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} = I_n(2), \quad n > 0,$$

где $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя. Для вычисления коэффициентов ряда Лорана с неотрицательными индексами учтем, что $b_{n-k}=0$ при $n-k>0$, т.е. $k<n$. Поэтому суммирование должно начинаться с $k=n$, и тогда

$$C_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_{-(k-n)}}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!(k-n)!} = \{k-n=m\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+n)!} = I_n(2), \quad n \geq 0.$$

Объединяя полученные соотношения для коэффициентов, приходим окончательно к

$$e^{z+\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{|n|}(2) z^n.$$

В соответствии с (I), разложение для e^z справедливо в области $|z| < +\infty$, а для $e^{1/z}$ – в области $|z| > 0$. Таким образом, область сходимости найденного ряда Лорана - $0 < |z| < +\infty$. Интересно отметить, что исходная функция $f(z)$ не меняется при замене z на $1/z$. Поэтому коэффициенты ряда Лорана должны удовлетворять соотношению $C_{-n}=C_n$, что и доказывает полученное разложение.

Задачи для самостоятельного решения.

Разложить в ряд Лорана следующие функции:

1) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ в кольце $0 < |z-1| < 2$.

2) $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-2i)^2}$ в кольце $2 < |z| < 3$.

3) $f(z) = \dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ в кольце $0 < |z+1| < 3$.

4) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ в кольце с центром в точке $z=0$, содержащем внутри точку $z=-3/2$.

5) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$ в кольце $|z| > 2$.

6) $f(z) = \dfrac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$ в кольце **а)** $|z| < 1$; **б)** $1 < |z| < 2$; **в)** $2 < |z| < +\infty$.

7) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z-8}$ в кольце $2 < |z+2| < 4$.

8) $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)(z+2)}$ в кольце **а)** $1<|z|<2$; **б)** $2<|z|<+\infty$.

9) $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$ в окрестности точки z=0 и z=∞.

10) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$ в окрестности точки z=0 и z=∞.

Ответы:

1) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(z-1)^2}-\dfrac{1}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)z^{n-2}}{2^n}\right)$;

2) $\dfrac{1}{(3-2i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}-\dfrac{1}{(3-2i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2i)^n}{z^{n+1}}+\dfrac{1}{3+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)(2i)^n}{z^{n+2}}$;

3) $\left(\dfrac{1}{z+1}-3+3(z+1)-(z+1)^3\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$;

4) $\dfrac{1}{2z}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}-\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n},\quad 1<|z|<2$;

5) $\dfrac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 4^n}{z^{2n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{2n+2}}\right)$;

6) а) $1+3\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\dfrac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n}$; **б)** $1-3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}-\dfrac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n}$; **в)** $1-3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}-5\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}$;

7) $\dfrac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{(z+2)^{n+1}}-\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{4^n}\right)$;

8) **а)** $\dfrac{1}{5}\left(\left(\dfrac{2}{z^2}-\dfrac{1}{z}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{2n}}+\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{2^n}\right)$;

б) $\dfrac{1}{5}\left(\left(\dfrac{2}{z^2}-\dfrac{1}{z}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{z^{n+1}}\right)$;

9) $\dfrac{1}{2z}-\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^{2n}}{(2n)!\,z^{2n+1}},\quad 0<|z|<+\infty$;

10) $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2!\,z}+\dfrac{1}{3!}+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^{n-3}}{n!},\quad 0<|z|<+\infty$.

НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Определение. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0. Точка z_0 называется нулем функции $f(z)$ порядка (или кратности) m, если выполняются условия:

$$f(z_0)=0,\quad f'(z_0)=0,....,\quad f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0. \qquad (8)$$

Если $m=1$, то точка z_0 называется простым нулем. Если точка z_0 является нулем m-го порядка, то в некоторой окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z), \qquad (9)$$

где функция $\varphi(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Примеры:

***Пример* 1:** Найти нули функции $f(z)=1+\cos z$ и определить их порядок.

Решение. Приравнивая $f(z)$ нулю, получаем уравнение $\cos z=-1$ и находим его решения. Решениями будут точки $z_k=(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$ – нули функции $f(z)$. Для определения порядка нулей находим производные функции $f(z)$ в этих точках до тех пор, пока не получим производную, отличную от нуля:

$$f'(z)=-\sin z\big|_{z_n=(2n+1)\pi}=-\sin(2k+1)\pi=0,$$

$$f''(z)=-\cos z\big|_{z_n=(2n+1)\pi}=-\cos(2k+1)\pi=1\neq 0.$$

Следовательно, согласно (8), точки $z_k=(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$ являются нулями второго порядка функции $f(z)=1+\cos z$.

***Пример* 2:** Найти нули функции $f(z)=1-e^z$ и определить их порядок.

Решение. Из $f(z)=0$ приходим к уравнению $e^z=1$. Его решения - $z_k=\mathrm{Ln}1=2\pi ki$, где $k=0,\pm 1,\pm 2,...$. Далее вычисляем производную $f'(z)=e^z\big|_{z_k=2\pi ki}=e^{2\pi ki}=1\neq 0$. Итак, получили, что $f(2\pi ki)=0,\ f'(2\pi ki)\neq 0$. Это означает, что точки $z_k=2\pi ki$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$ – нули первого порядка или простые нули функции $f(z)=1-e^z$.

***Пример* 3:** Найти нули функции $f(z)=(z^2+1)^5z^2\sinh z$ и определить их порядок.

Решение. Из уравнения $f(z)=0$ получаем совокупность уравнений: $z^2+1=0$ или $z=0$ или $\sinh z=0$. Первое уравнение $z^2=-1$ имеет два решения: $z=-i$ и $z=i$.

Для нахождения решений уравнения $\sinh z = 0$ представим гиперболический синус через показательные функции: $\dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = 0$, откуда получаем уравнение $e^z = e^{-z}$. Умножая обе части уравнения на e^z, находим все решения уравнения $e^{2z} = 1$: $2z_k = \mathrm{Ln}1 = 2\pi ki$ или $z_k = \pi ki$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Очевидно, что при $k=0$, получаем точку $z=0$, которая является решением одного из совокупности уравнений.

Определим порядок нуля в точке $z = i$, для чего функцию $f(z)$ представим в виде: $f(z) = (z-i)^5 \varphi(z)$, где функция $\varphi(z) = (z+i)^5 z^2 \sinh z$ является аналитической в точке i, причем

$$\varphi(i) = (2i)^5 i^2 \sinh i = -32i \sinh i = -32i \frac{e^i - e^{-i}}{2} = -32i^2 \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = 32 \sin 1 \neq 0.$$

Тогда из формулы (9) следует, что $z = i$ является нулем пятого порядка.

Аналогично поступаем с точкой $z = -i$. Здесь $f(z) = (z+i)^5 \varphi(z)$, где функция $\varphi(z) = (z-i)^5 z^2 \sinh z$ является аналитической в точке $-i$, причем

$$\varphi(-i) = (-2i)^5 (-i)^2 \sinh(-i) = 32i \sinh(-i) = 32i \frac{e^{-i} - e^{i}}{2} = -32i^2 \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = 32 \sin 1 \neq 0.$$

Следовательно, точка $z = -i$ является нулем пятого порядка.

Рассмотрим теперь точку $z=0$. Поскольку $\left(z^2+1\right)^5\Big|_{z=0} = 1 \neq 0$, то для простоты вычислений представим $f(z)$ в виде $f(z) = \left(z^2+1\right)^5 f_1(z)$, где $f_1(z) = z^2 \sinh z$. Очевидно, что $f_1(0) = 0$ и порядок нуля $z=0$ функции $f_1(z)$ совпадет с порядком нуля $f(z)$. Воспользуемся условиями (8):

$$f_1'(z) = (2z \sinh z + z^2 \cosh z)_{z=0} = 0,$$

$$f_1''(z) = (2\sinh z + 2z\cosh z + 2z\cosh z + z^2 \sinh z = 2\sinh z + 4z\cosh z + z^2 \sinh z)_{z=0} = 0,$$

$$f_1'''(z) = (2\cosh z + 4\cosh z + 4z\sinh z + 2z\sinh z + z^2 \cosh z)_{z=0} =$$

$$= (6\cosh z + 6z\sinh z + z^2 \cosh z)_{z=0} = 6 \neq 0.$$

Согласно условиям (8) точка $z=0$ является нулем третьего порядка функции $f_1(z) = z^2 \sinh z$, а значит и функции $f(z) = \left(z^2+1\right)^5 z^2 \sinh z$.

Исследуем, наконец, нули $z_k = \pi ki, (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Для этого достаточно определить порядок нуля для функции $f_2(z) = \sinh z$, так как $f(z) = \left(z^2+1\right)^5 z^2 f_2(z)$ и $\left(z^2+1\right)^5 z^2\Big|_{z_k = \pi ki} = -k^2\pi^2\left(-k^2\pi^2+1\right)^5 \neq 0$.

Итак, $f_2(k\pi i) = \sinh(k\pi i) = 0$, $f_2'(z) = \cosh z\Big|_{z_k = \pi ki} = \dfrac{e^{\pi ki} + e^{-\pi ki}}{2} = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$.

Тогда точки $z_k = \pi k i, (k = \pm 1, \pm 2, ...)$ - простые нули функции $f_2(z) = \sinh z$ и исходной функции $f(z) = \left(z^2 + 1\right)^5 z^2 \sinh z$.

***Пример* 4:** Найти порядок нуля z_0=0 функции $f(z) = \dfrac{z^{12}}{z - \dfrac{z^3}{6} - \sin z}$.

Решение. Используя разложение (II) для функции $\sin z$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0=0, получим:

$$f(z) = \frac{z^{12}}{z - \dfrac{z^3}{6} - \sin z} = \frac{z^{12}}{z - \dfrac{z^3}{6} - \left(z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \ldots\right)} = \frac{z^{12}}{-\dfrac{z^5}{5!} + \dfrac{z^7}{7!} - \ldots} =$$

$$= \frac{z^{12}}{z^5\left(-\dfrac{1}{5!} + \dfrac{z^2}{7!} + \ldots\right)} = z^7 \cdot \frac{1}{-\dfrac{1}{5!} + \dfrac{z^2}{7!} + \ldots}.$$

Положим $\varphi(z) = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{5!} + \dfrac{z^2}{7!} + \ldots}$, тогда $f(z) = z^7 \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$– аналитическая функция в точке z_0=0, причем $\varphi(0) = -5! = -120 \neq 0$. Согласно (9), точка z_0=0 является нулем седьмого порядка.

Задачи для самостоятельного решения.

У следующих функций найти нули и определить их порядки:

1) $f(z) = z^3 \sin z$;

2) $f(z) = 1 + \cosh z$;

3) $f(z) = (z^2 + \pi^2)\left(1 + e^{-z}\right)$;

4) $f(z) = \dfrac{\sinh^2 z}{z}$;

5) $f(z) = \dfrac{(1 - \cos z)^2}{z^2}$.

Ответы:

1) $z = 0$ – нуль третьего порядка, $z = \pi k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ – простые нули;

2) $z = \pi i + 2\pi k i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$- нули второго порядка;

3) $z = \pm \pi i$ – нули второго порядка, $z = \pi i + 2\pi k i, \quad k = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ – простые нули;

4) $z = 0$ – простой нуль, $z = \pi k i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули второго порядка;

5) $z = 0$ – нуль второго порядка, $z = 2\pi k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули четвертого порядка.

КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Ранее мы уже определили особую точку как точку, в которой функция $f(z)$ не является аналитической. Пусть в некоторой окрестности особой точки z_0 функция $f(z)$ не имеет других особых точек, тогда точка z_0 называется изолированной особой точкой. В основу классификации изолированных особых точек положено разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этих точек.

Определение:

I. Точка z_0 называется *устранимой особой точкой*, если разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержит отрицательных степеней разности $(z-z_0)$, т.е. имеет вид обычного степенного ряда: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$.

II. Точка z_0 называется *полюсом*, если разложение в ряд Лорана содержит конечное число отрицательных степеней $(z-z_0)$, т.е. имеет вид:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}, \quad c_{-m}\neq 0.$$

Если $m=1$, полюс называется простым, а если $m>1$ – то полюсом m-го порядка.

III. Точка z_0 называется *существенно особой точкой*, если ряд Лорана содержит бесконечно число отрицательных степеней $(z-z_0)$, т.е.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Примеры:

***Пример* 1:** Установить характер особой точки $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$.

Решение. Используя разложение в ряд Тейлора e^{-z} в окрестности точки $z_0=0$, получаем следующее лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля:

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-e^{-z}\right)=\frac{1}{z}\left(1-\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\right)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\ldots\right)=$$

$$=1-\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}-..$$

Полученное разложение не содержит отрицательных степеней z, поэтому точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой. Если функцию $f(z)$ доопределить в точке $z=0$ единицей, т.е. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-z}}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$, то полученная функция будет аналитической и при $z_0=0$.

***Пример* 2:** Определить характер особой точки z_0=0 функции $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}$.

Решение. Раскладывая $\cos z$ в ряд Тейлора (III) по степеням z, получим разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности нуля:

$$f(z)=\frac{1}{z^7}(1-\cos z)=\frac{1}{z^7}\left(1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\frac{z^{10}}{10!}.....\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{z^7}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{10}}{10!}-...\right)=\frac{1}{2!z^5}-\frac{1}{4!z^3}+\frac{1}{6!z}-\frac{z}{8!}+\frac{z^3}{10!}-...$$

Разложение в ряд Лорана содержит конечное число отрицательных степеней z, поэтому точка z_0=0 является полюсом пятого порядка, так как наибольший показатель степени z в знаменателе равен пяти.

***Пример* 3:** Определить характер особой точки z_0=1 функции $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.

Решение. Используя стандартное разложение $e^w=1+\frac{w}{1!}+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+...$ и полагая $w=\frac{1}{z-1}$, получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0=1:

$$f(z)=(z-1)\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{4!(z-1)^4}+...\right)=$$

$$=(z-1)+1+\frac{1}{2!(z-1)}+\frac{1}{3!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^3}+...$$

Это разложение содержит бесконечное число отрицательных степеней (z-1), поэтому точка z_0=1 является существенно особой точкой функции $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.

Предельные свойства особых точек

Для определения характера особой точки можно также пользоваться предельными свойствами особых точек:

1. Если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0, т.е. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=C_0, |C_0|<+\infty$, то z_0 – *устранимая особая точка*.

2. Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то особая точка z_0 является *полюсом.* Порядок полюса можно определить либо по разложению функции в ряд Лорана в окрестности этой точки, либо пользуясь связью между нулем и полюсом:

Связь между нулем и полюсом:

Пусть z_0 - нуль порядка m функции $f(z)$, т.е. $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, где функция $\varphi(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$. Тогда z_0 – полюс порядка m для функции

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)} \tag{10}$$

Замечание: Условие (10) можно также записать в другом виде. Если $f(z)$ представима в виде дроби $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$, то z_0 – полюс порядка m функции $f(z)$.

3. Если z_0 *существенно особая точка*, то в ее окрестности при $z\to z_0$ функция $f(z)$ не стремится ни к какому конечному или бесконечному пределу, т.е. не существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Примеры:

***Пример* 1:** Определить характер особых точек z=-1 и z=1 функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$.

Решение. Очевидно, что $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}=\infty$ и $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}=\infty$, т.е. особые точки z=-1 и z=1 являются полюсами.

Для определения порядка полюсов преобразуем исследуемую функцию следующим образом:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}=\frac{\sin z}{z(z^2-1)+(z^2-1)}=\frac{\sin z}{(z^2-1)(z+1)}=\frac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Представим $f(z)$ в виде: $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2\dfrac{z-1}{\sin z}}=\dfrac{1}{(z+1)^2\varphi(z)}$, где $\varphi(z)=\dfrac{z-1}{\sin z}$ – аналитическая функция при z=-1, причем $\varphi(-1)=\dfrac{-2}{\sin(-1)}=\dfrac{2}{\sin 1}\neq 0$. Тогда по формуле (10) находим, что z=-1 – полюс второго порядка. Аналогично, записав $f(z)$ в виде: $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)\dfrac{(z+1)^2}{\sin z}}=\dfrac{1}{(z-1)\varphi(z)}$, где $\varphi(z)=\dfrac{(z+1)^2}{\sin z}$ –

аналитическая при $z=1$, и $\varphi(1)=\dfrac{4}{\sin 1}\neq 0$, получаем, что $z=1$ – простой полюс или полюс первого порядка.

***Пример* 2:** Определить характер особой точки $z_0=0$ функции $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$.

Решение. Рассмотрим поведение функции $f(z)$ на действительной и мнимой осях. На действительной оси $z=x$: $f(z)=f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$, тогда $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$. На мнимой оси $z=iy$: $f(z)=f(iy)=e^{-\frac{1}{y^2}}$, и $\lim\limits_{y\to 0} e^{-\frac{1}{y^2}}=0$. Следовательно, не существует $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$, поэтому точка $z_0=0$ является существенно особой точкой.

***Пример* 3:** Определить характер особой точки $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$.

Решение. Рассмотрим предел $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}=\infty$, значит $z_0=0$ – полюс. Для отыскания порядка полюса рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(z)=\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}$ и определим порядок нуля в точке $z_0=0$:

$$\varphi'(z)=(-\sin z+z)_{z=0}=0,\qquad \varphi''(z)=(-\cos z+1)_{z=0}=0,$$

$$\varphi'''(z)=\sin z\big|_{z=0}=0,\qquad \varphi^{(IV)}(z)=\cos z\big|_{z=0}=1\neq 0.$$

Значит $z_0=0$ – нуль четвертого порядка функции $\varphi(z)$ и, соответственно, полюс четвертого порядка функции $f(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}=\dfrac{1}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$.

***Пример* 4:** Определить характер особой точки $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{\sinh z}{z-\sinh z}$.

Решение. При $z_0=0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, поэтому для определения характера этой особой точки представим функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z)=\frac{\sinh z}{z-\sinh z}=\frac{e^z-e^{-z}}{2z-e^z+e^{-z}}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots-\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)}{2z-\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)+1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots}=$$

$$=\frac{2z\left(1+\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)}{-2z^3\left(\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}\ldots\right)}=-\frac{\varphi(z)}{z^2}.$$

Здесь $\varphi(z)=\dfrac{1+\frac{z^2}{3!}+\ldots}{\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\ldots}$ – аналитическая функция при $z_0=0$, причем $\varphi(0)=3!\neq 0$. Следовательно, точка $z_0=0$ – полюс второго порядка.

Бесконечно удаленная точка $z=\infty$

Окрестностью бесконечно удаленной точки является внешность круга достаточно большого радиуса с центром в начале координат. Если $f(z)$ регулярна, т.е. аналитична и однозначна в окрестности бесконечно удаленной точки, то точка $z=\infty$ называется изолированной точкой.

Аналитическая во внешности круга $R<|z|<+\infty$ (т.е. в окрестности бесконечно удаленной точки) функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана вида:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}, \tag{11}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}}, \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{12}$$

Здесь Γ – произвольный замкнутый контур, охватывающий круг $|z|\le R$.

Бесконечно удаленная точка $z=\infty$ при этом для функции $f(z)$ будет:

1. *Устранимой особой точкой*, если ряд Лорана (11) не содержит положительных степеней z, т.е. имеет вид $f(z)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}$.

В устранимой особой точке $z=\infty$ существует конечный предел $\lim_{z\to\infty}f(z)=C_0$, $|C_0|<+\infty$.

2. *Полюсом порядка m*, если ряд Лорана содержит конечное число положительных степеней, при этом порядок полюса определяется старшей положительной степенью z:

$$f(z) = C_m z^m + C_{m-1} z^{m-1} + \ldots + C_1 z + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}, \quad C_m \neq 0.$$

В полюсе $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

3. *Существенно особой точкой*, если ряд Лорана содержит бесконечное число положительных степеней, т.е. имеет вид (11). В существенно особой точке $z = \infty$ не существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Замечание: Замена $z = \frac{1}{t}$ переводит изолированную особую точку $z = \infty$ функции $f(z)$ в конечную изолированную особую точку $t=0$ функции $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. При этом характер особых точек $z = \infty$ и $t=0$ будет одинаковым.

Примеры:

***Пример* 1:** Исследовать характер бесконечно удаленной точки $z = \infty$ функции $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$.

Решение. Раскладываем $\cos z$ в ряд Тейлора по степеням z (см. разложение (III)):

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \ldots.$$

Получаем ряд Лорана, который сходится в кольце $0 < |z| < +\infty$, т.е. в окрестности бесконечно удаленной точки. Ряд содержит бесконечное число положительных степеней, значит, $z = \infty$ является существенно особой точкой.

***Пример* 2:** Исследовать характер особых точек $z_0=0$ и $z = \infty$ функции $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}$.

Решение. Раскладываем функцию в ряд, используя стандартное разложение (II) для синуса:

$$f(z) = z^4 \sin\frac{1}{z} = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \ldots\right) = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} - \frac{1}{7!z^3} + \ldots$$

Ряд Лорана сходится в кольце $0 < |z| < +\infty$, поэтому полученное разложение есть одновременно разложение в окрестности точки $z_0=0$ и в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Так как разложение содержит бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями, то точка $z_0=0$ является существенно особой точкой. С другой стороны, поскольку разложение содержит максимальную положительную степень z^3, то точка $z=\infty$ является полюсом третьего порядка.

***Пример* 3:** Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{z^7}{\left(z^2-4\right)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$, включая $z=\infty$.

Решение. Особыми точками будут z=-2, z=2 и $z=\infty$. Для определения их характера воспользуемся предельными свойствами особых точек:

1) $\lim\limits_{z\to-2}\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}=\infty$, значит z=-2 – полюс. Для определения порядка полюса представим функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z)=\frac{z^7}{(z+2)^2(z-2)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}=\frac{1}{(z+2)^2\varphi(z)},$$

где $\varphi(z)=\dfrac{1}{z^7}(z-2)^2\cos\dfrac{1}{z-2}$ – аналитическая функция в точке z=-2 и $\varphi(-2)=\dfrac{1}{(-2)^7}(-4)^2\cos\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{8}\cos\dfrac{1}{4}\neq 0$. Следовательно, z=-2 – полюс второго порядка.

2) $\lim\limits_{z\to2}\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$ не существует, так как не существует $\lim\limits_{z\to2}\cos\dfrac{1}{z-2}$, поэтому z=2 – существенно особая точка.

3)

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}\left|\begin{array}{l}\text{Замена}:\\ z=\dfrac{1}{t},\ t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^7\left(\dfrac{1}{t^2}-4\right)^2\cos\dfrac{t}{1-2t}}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^3\left(1-4t^2\right)^2\cos\dfrac{t}{1-2t}}=\infty.$$

Тогда $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^3\left(1-4t^2\right)^2\cos\dfrac{t}{1-2t}}=\frac{1}{t^3\varphi(t)},$$

где функция $\varphi(t)=\left(1-4t^2\right)^2\cos\dfrac{t}{1-2t}$, $\varphi(0)=1\neq 0$ – аналитическая при t=0. Следовательно, t=0, а значит и $z=\infty$ является полюсом третьего порядка.

***Пример* 4:** Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^3+z^2-z-1\right)tg^2 z}$, включая $z=\infty$.

Решение. Находим особые точки, приравнивая знаменатель к нулю: $\left(z^3+z^2-z-1\right)\cdot tg^2 z=0$.

1) Пусть $z^3+z^2-z-1=0$, т.е. $z(z^2-1)+(z^2-1)=0$ или $(z^2-1)(z+1)=0$.

В результате получаем: $(z-1)(z+1)^2=0$, т.е. точка z=1 является нулем 1-го порядка, z=-1 – нулем 2-го порядка.

Очевидно: $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\varphi(z)}{z-1}=\infty$, где $\varphi(z)=\left.\dfrac{z^2}{(z+1)^2 tg^2 z}\right|_{z=1}=\dfrac{1}{4tg^2 1}\neq 0$,

т.е. z=1 – простой полюс.

Аналогично имеем: $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{\varphi(z)}{(z+1)^2}=\infty$, где $\varphi(z)=\left.\dfrac{z^2}{(z-1)tg^2 z}\right|_{z=-1}=\dfrac{1}{-2tg^2 1}\neq 0$,

т.е. z=-1 – полюс второго порядка.

2) Из уравнения $tg^2 z=\dfrac{\sin^2 z}{\cos^2 z}=0$ следует, что $\sin^2 z=0$. Отсюда находим точки $z=\pi k\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$, являющиеся нулями 2-го порядка функции $tg^2 z$, т.к. $(\sin^2 z)'=2\sin z\cos z=\sin 2z\big|_{z=\pi k}=0$, $(\sin^2 z)''=2\cos 2z\big|_{z=\pi k}=2\neq 0$.

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{(z-1)(z+1)^2 tg^2 z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{\sin^2 z}\dfrac{\cos^2 z}{(z-1)(z+1)^2}=-1$, т.е. z=0 – устранимая особая точка.

$\lim\limits_{z\to \pi k}\dfrac{z^2}{(z-1)(z+1)^2 tg^2 z}=\lim\limits_{z\to \pi k}\dfrac{\varphi(z)}{\sin^2 z}=\infty$, $(k=\pm 1,\pm 2,\ldots)$, т.к.

$\lim\limits_{z\to \pi k}\varphi(z)=\lim\limits_{z\to \pi k}\dfrac{z^2\cos^2 z}{(z-1)(z+1)^2}\neq 0$.

Поэтому точки $z=\pi k,\ (k=\pm 1,\pm 2,\ldots)$ – полюса второго порядка.

3) Точку $z=\infty$ можно получить как $\lim\limits_{k\to\infty}\pi k=\infty$, поэтому бесконечно удаленная точка является неизолированной и не подлежит классификации. Она является предельной точкой для полюсов второго порядка.

Практическая рекомендация для определения порядка нуля и полюса

Пусть функция $f(z)$ представима в виде дроби $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и $\varphi(z_0)=0,\quad \psi(z_0)=0$. Пусть точка z_0 является нулем порядка m функции $\varphi(z)$ $\left(\text{т.е. } \varphi(z_0)=0,\ \varphi'(z_0)=0,\ldots,\varphi^{(m-1)}(z_0)=0,\ \varphi^{(m)}(z_0)\neq 0\right)$ и нулем порядка n функции $\psi(z)$ $\left(\text{т.е. } \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)=0,\ldots,\psi^{(n-1)}(z_0)=0,\ \psi^{(n)}(z_0)\neq 0\right)$.

1.Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=0$, то точка z_0 является устранимой особой точкой или нулем порядка $(m\text{-}n)$ функции $f(z)$.

2.Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\infty$, то точка z_0 является полюсом порядка $(n\text{-}m)$ функции $f(z)$.

Задачи для самостоятельного решения.

Найти особые точки и исследовать их характер, включая точку $z=\infty$:

1) $\dfrac{1}{1-\sin z}$; **2)** $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$; **3)** $e^{\frac{1}{z+2}}$; **4)** $\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$; **5)** $\dfrac{1}{e^z-1}+\dfrac{1}{z^2}$; **6)** $\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{tgz-1}$;

7) $\dfrac{1}{z^3(1-\cos z)^2}$; **8)** $\dfrac{\sin^3 z}{z^5}$; **9)** $z\sinh\dfrac{1}{z}$; **10)** $\dfrac{z\cos\frac{1}{z}}{\cos z-1}$; **11)** $\dfrac{e^{\sin\frac{i\pi}{z}}-1}{\cosh^4\pi z}$; **12)** $\tanh z$;

13) $\dfrac{z^2}{\sin z(\cos z-2)}$.

Определить характер указанных особых точек:

14) *Точка* $z_0=0$: **а)** $\dfrac{1}{z-\sin z}$; **б)** $\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$; **в)** $\cos\dfrac{1}{z}+\sin\dfrac{2-\pi z}{2z}$.

15) *Точка* $z_0=\pi$: **а)** $\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$; **б)** $\dfrac{(z-\pi)^2}{\sin^3 z}$; **в)** $\cos\dfrac{1}{z-\pi}$.

Ответы:

1) $z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ – полюса второго порядка, $z=\infty$ – предельная точка для полюсов;
2) $z=0$ – полюс первого порядка, $z=\infty$ – существенно особая точка;
3) $z=-2$ – существенно особая точка, $z=\infty$ – устранимая особая точка;
4) $z=0,\ z=-1$ – полюса второго порядка, $z=\infty$ – устранимая особая точка;

5) $z=0$ – полюс второго порядка, $z=2\pi ki, k=\pm1,\pm2,...$ – полюса первого порядка, $z=\infty$ – предельная точка для полюсов;

6) $z=\dfrac{\pi}{4}$ – устранимая особая точка, $z=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k=\pm1,\pm2,...$- полюса первого порядка, $z=\infty$ – предельная точка для полюсов;

7) $z=0$ – полюс седьмого порядка, $z=2\pi k, k=\pm1,\pm2,...$ – полюса четвертого порядка, $z=\infty$ – предельная точка для полюсов четвертого порядка;

8) $z=0$– полюс второго порядка, $z=\infty$ – существенно особая точка;

9) $z=0$ – существенно особая точка, $z=\infty$– устранимая особая точка;

10) $z=0$ – существенно особая точка, $z=2\pi k, k=\pm1,\pm2,...$ – полюса второго порядка, $z=\infty$ – предельная точка для полюсов;

11) $z=0$ – существенно особая точка, $z=\dfrac{\pi}{2}i+2\pi ki, k=0,\pm1,\pm2,...$ – полюса четвертого порядка, $z=\infty$ – предельная точка для полюсов;

12) $z=\dfrac{\pi}{2}i+2\pi ki, k=0,\pm1,\pm2,...$ – полюса первого порядка, $z=\infty$ – предельная точка для полюсов;

13) $z=0$ – устранимая особая точка, $z=2\pi k-\ln(2\pm\sqrt{3}),\quad k=0,\pm1,\pm2,...$ – полюса первого порядка, $z=\infty$ – предельная точка для полюсов;

14) **а**) полюс третьего порядка, **б**) простой полюс, **в**) существенно особая точка;

15) **а**) устранимая особая точка, **б**) простой полюс, **в**) существенно особая точка.

Надежда Петровна **Семерикова**
Александр Александрович **Дубков**
Анна Александровна **Харчева**

РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”.
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.