Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
"Модели, методы и программные средства"

Основная образовательная программа
010400.62 „Прикладная математика и информатика", профиль „Математическое моделирование и вычислительная математика", квалификация(степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
„Комплексный анализ"

Основная образовательная программа
010100.62 „Математика", профили „Алгебра, теория чисел, математическая логика", „Геометрия и топология", „Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление", квалификация(степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
„Комплексный анализ"

Основная образовательная программа
010200.62 „Математика и компьютерные науки", профили „Математический анализ и приложения", „Алгебра, теория чисел и дискретный анализ", „Математическое и компьютерное моделирование", квалификация(степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
„Комплексный анализ"

Основная образовательная программа
010800.62 „Механика и математическое моделирование", профиль „Механика деформируемых тел и сред", квалификация(степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
„Комплексный анализ"

Митрякова Т.М., Солдатов М.А.

ИНТЕГРАЛ. ВЫЧЕТЫ.

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород
2012

ИНТЕГРАЛ. ВЫЧЕТЫ. Митрякова Т.М., Солдатов М.А. Электронное учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. — 44 с.

Цель данной разработки — помочь студентам по курсу "Комплексный анализ" закрепить основные положения теории интеграла, в частности, теории вычетов, и глубже усвоить приемы решения примеров. Разработка состоит из 6 разделов. В начале каждого приводятся необходимые понятия, формулы и теоремы, на основе которых решается ряд примеров и дается несколько задач для самостоятельного решения. Приводятся некоторые приложения теории вычетов в различных вопросах, и в конце — большое число примеров, которые могут быть использованы при проведении практических занятий, самостоятельных и контрольных работ, зачетов и экзаменов. Предназначено для студентов механико-математического факультета и других факультетов ННГУ, изучающих соответствующую дисциплину.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010400.62 „Прикладная математика и информатика“, 010100.62 „Математика“, 010200.62 „Математика и компьютерные науки“, 010800.62 „Механика и математическое моделирование“, изучающих курс „Комплексный анализ“.

Введение

Теория интеграла и, в частности, ее раздел — теория вычетов, является центральной частью курса „Комплексный анализ“. Иллюстрация приемов решения примеров по этой теме и составляет содержание данной разработки. Она состоит из 6 разделов. В начале каждого из них предлагаются (без доказательства) необходимые теоретические сведения (понятия, теоремы, формулы), на их основе решается и предлагается для самостоятельного решения ряд примеров.

На интегралы от неаналитических, от многозначных аналитических функций и на закрепление теоремы и формулы Коши рассматривается лишь небольшое количество примеров. Основное внимание — теории вычетов и ее приложениям. В связи с этим, дается понятие ряда Лорана и классификация изолированных особых точек регулярных функций.

Указываются, с пояснениями, по возможности различные приемы решения примеров, качественно ожидаемый результат. В конце приводится большое количество разнообразных примеров, которые могут быть использованы при проведении практических занятий, для домашних заданий, самостоятельных и контрольных работ, зачетов и экзаменов.

Иногда используем условные обозначения: $\triangleright$ — начало, $\triangleleft$ — конец решения или доказательства.

Некоторые факты и формулы

1. Формула Эйлера: $z = x + iy$, тогда $e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy}$, откуда $|e^z| = e^x \neq 0$, $Arg\; e^z = y$.
2. $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$.
3. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = argz$ — угол наклона вектора $\vec{Oz}$ к оси Ox (см. рис. 0.1).
4. Формула Муавра: $\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$.
5. Корень: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{re^{i(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$; $k = 0, 1, \dots, n-1$.
6. *Степенным рядом* (*рядом Тейлора*) $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$, $|z-a| < R$, представимы (разлагаются в ряд) те и только те функции, которые регулярны в точке a: $f(z) \in H(a)$. При этом коэффициенты $c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ и радиус сходимости равен расстоянию от центра a до ближайшей особой точки z' суммы ряда $f(z)$: $R = |z'-a|$.
7. Разложение в ряд некоторых функций:

- $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $|z| < \infty$;
- $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$ (функция нечетная);
- $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$ (функция четная);
- $\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$;
- $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$.
  Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ — целые.

- $\frac{a}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} az^n$, $|z| < 1$ (ряд бесконечной геометрической прогрессии);
- $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $|z| < 1$ (логарифмический ряд);
- $(1+z)^\mu = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1))}{n!} z^n$, $|z| < 1$ (биномиальный ряд).

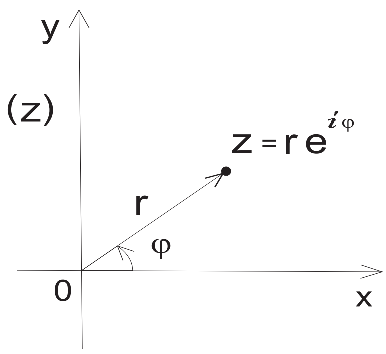

Рис. 0.1

1. Интеграл

Пусть C — спрямляемая ориентированная кривая: на ней установлено направление движения — от начальной точки a к конечной b. (Та же кривая, но с противоположным направлением обхода, обозначается C^-). Пусть в точках $z = x + iy \in C$ задана некоторая функция комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Интеграл по C от нее сводится к четырем вещественным криволинейным интегралам второго рода по формуле

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy \tag{1.1}$$

(формально получается умножением $f(z) = u + iv$ на символ $dz = d(x + iy) = dx + idy$). C называется *контуром* или *путем интегрирования*. Для существования интеграла достаточно, в частности, чтобы функция $f(z)$ была непрерывной на C.

Если кривая C задана комплексным уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, параметр $t \in [\alpha, \beta]$, где функции $x = x(t), y = y(t)$ непрерывно дифференцирумы на промежутке $[\alpha, \beta]$ и $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, то

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt, \tag{1.2}$$

причем $z(\alpha) = a, z(\beta) = b$. Из свойств интегралов 1.1 отметим два: $\int\limits_{C^-} f(z)dz = -\int\limits_C f(z)dz$ и $\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \leq M\cdot$дл.$C$, если $|f(z)| \leq M = const$, $\forall z \in C$.

Если $C = L$ — замкнутый контур (то есть простая замкнутая гладкая или кусочно-гладкая кривая), то знак интеграла обозначают иногда символом $\oint$. Пусть $f(z) \in H(\overline{I}(L))$, то $\oint\limits_L f(z)dz = 0$ (это интегральная теорема Коши, частный случай) и $\forall z \in I(L)$ справедливо интегральное представление (формула Коши):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi. \tag{1.3}$$

Здесь функция $f(z)$ однозначна на L, поэтому указанные интегралы не зависят от выбора

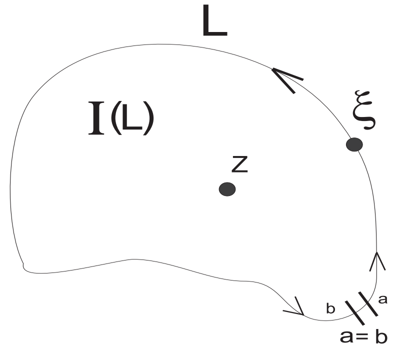

Рис. 1.1

начала и конца пути интегрирования L, $a = b$; контур L обходится так, что внутренность $I(L)$ остается слева (см. рис. 1.1).

Примеры.

Пример 1.1. Пусть замкнутый контур C ограничивает площадь S. Доказать: $\oint\limits_C \overline{z}dz = 2iS$.

$\triangleright \oint\limits_C \overline{z}dz = \oint\limits_C (x-iy)(dx+idy) = \oint\limits_C xdx + ydy + i\oint\limits_C -ydx + xdy = \int\int\limits_{\overline{I}(C)} 0\cdot dxdy + i\int\int\limits_{\overline{I}(C)} (1+1)dxdy = i2S.$ $\triangleleft$

Использована формула Грина сведения криволинейного интеграла к двойному:

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy = \int\int\limits_{\overline{I}(C)} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

Пример 1.2. Найти интеграл $\oint\limits_C |z|\,\overline{z}dz$, где $C = \ell\cup\Gamma$, $\ell = [-3;3]$ — прямолинейный отрезок и $\Gamma = \{z : |z| = 3, 0 \le argz \le \pi$ — полуокружность (см. рис. 1.2).

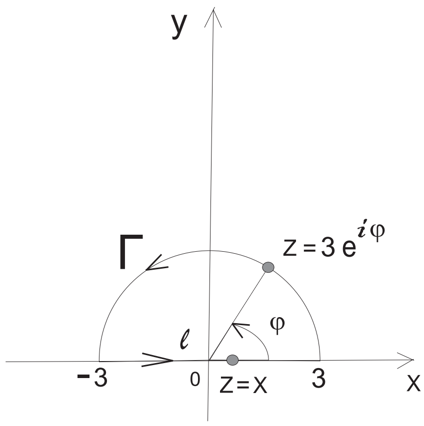

Рис. 1.2

$\triangleright$ Параметризуем пути ℓ и Γ: возьмем их комплексные уравнения, то есть укажем какой вид имеют точки z этих путей в зависимости от выбранного параметра. Имеем: $\ell : z = x + i0$, x — параметр; $\Gamma : z = 3e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi = argz \le \pi$. Тогда $\oint\limits_C |z|\,\overline{z}dz = \int\limits_\ell |z|\,\overline{z}dz + \int\limits_\Gamma |z|\,\overline{z}dz = \int\limits_{-3}^{3} |x|\,xdx + \int\limits_0^\pi 3\cdot 3e^{-i\varphi}\cdot 3ie^{i\varphi}d\varphi = 0 + 27i\pi.$ $\triangleleft$

Пример 1.3. Доказать: $\int\limits_0^\infty cos(x^2)dx = \int\limits_0^\infty sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ (это интегралы Френеля или диффракции).

$\triangleright$ Рассмотрим вспомогательную целую функцию $f(z) = e^{iz^2}$. Пусть $\ell = [0,+\infty)$ и $\lambda = \left[0, +\infty e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ — луч, выходящий из начала под углом $\frac{\pi}{4}$ к действительной оси. Сначала докажем, что $\int\limits_\ell e^{iz^2}dz = \int\limits_\lambda e^{iz^2}dz$. Для этого возьмем замкнутый контур L_R — граница сектора $\{0 \le |z| \le R, 0 \le argz \equiv \varphi \le \frac{\pi}{4}\}$ (между лучами ℓ и λ провели "перемычку" $C_R = \{|z| = R, 0 \le argz \le \frac{\pi}{4}\}$). По теореме Коши $\oint\limits_{L_R} e^{iz^2}dz = 0$, откуда (параметризацию всех трех участков контура L_R см. на рис. 1.3)

$$\int\limits_0^R e^{ix^2}dx + \int\limits_{C_R} e^{iz^2}dz + \int\limits_R^0 e^{ir^2e^{i\frac{\pi}{2}}}e^{i\frac{\pi}{4}}dr = 0. \tag{1.4}$$

Докажем, что интеграл по дуге C_R стремится к нулю при $R\to\infty$; при оценке используем неравенство Жордана $sin\psi \ge \frac{2}{\pi}\psi$, если $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, и равенства $|e^z| = e^{Rez}$, $e^{i\psi} = cos\psi + isin\psi$. $\left|\int\limits_{C_R} e^{iz^2}dz\right| = \left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{i2\varphi}}Rie^{i\varphi}d\varphi\right| \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 sin2\varphi}Rd\varphi \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{2}{\pi}2\varphi}Rd\varphi = -\frac{1}{R}\frac{\pi}{4}e^{-R^2\frac{4}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$

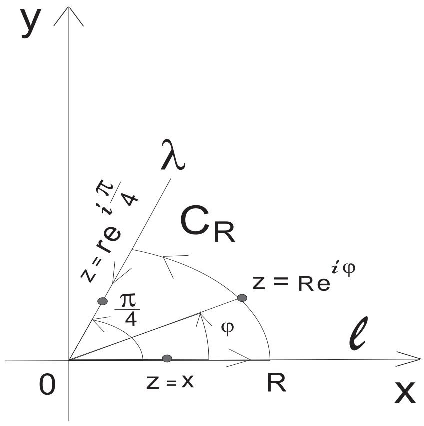

Рис. 1.3

$\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}) \to 0$ при $R \to \infty$. Поэтому из (1.4) в пределе при $R \to \infty$ получим $\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}dx - \int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2}e^{i\frac{\pi}{4}}dr = 0$. (Первое слагаемое — это интеграл по пути ℓ, второе — по λ). Отсюда, учтя интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, имеем $\int\limits_0^{\infty}(cosx^2 + isinx^2)dx = (cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Приравнивая действительные и мнимые части, получим искомые равенства. $\triangleleft$

Подобная процедура: образование замкнутого контура с помощью удачно подобранных “перемычек” и использование теоремы Коши с последующим предельным переходом, нередко применяется для доказательства равенства интегралов по разным путям (обычно это лучи, прямые и т.п.)

Пример 1.4. Формулу Коши 1.3 перепишем в виде

$$\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0), z_0 \in I(L), f(z) \in H(\overline{I}(L)). \tag{1.5}$$

В такой форме она удобна для вычисления некоторых интегралов по замкнутым контурам. Найдем $A(L) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$, когда контур $L = L_1$ огибает только одну особую точку $z_0 = 0$, например, окружность $|z| = 1$, и $L = L_2$ огибает только особую точку $z = 2i$, а $L = L_3$ содержит обе точки 0 и $2i$ вне себя. Чтобы подогнать под возможность применения формулы 1.5, запишем $A(L_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1} \frac{\frac{e^z}{z-2i}}{z}dz = \frac{e^z}{z-2i}|_{z=0} = -\frac{1}{2i}$; $A(L_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{z-2i}dz = \frac{e^z}{z}|_{z=2i} = \frac{e^{2i}}{2i}$; $A(L_3) = 0$ — по теореме Коши. В *примерах 1.1.* и *1.2.* интегралы по замкнутым контурам были отличны от нуля, хотя в них подынтегральные функции непрерывны всюду, однако не являются аналитическими. Интегралы $A(L_1)$ и $A(L_2)$ от регулярной функции оказались тоже отличными от нуля — это не противоречит теореме Коши, ибо эта функция не регулярна внутри L_1 и L_2. (Подобные интегралы лучше вычислять с помощью вычетов — см. раздел 3).

Пример 1.5. Вычислить интеграл $A(C) = \oint\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по замкнутым путям $C = C_1 = \{|z| = 9, \sqrt{9} = +3\}$, $C = C_2 = \{|z| = 9, \sqrt{-9} = 3i\}$ и $C = C_3 = \{|z| = 9, \sqrt{9} = -3\}$.

Начальной (и, соответственно, конечной) точкой пути интегрирования считается та, в которой указано значение функции $\sqrt{z}$, и по нему определяется непрерывная (она же регулярная) вдоль пути C ветвь многозначной подынтегральной функции.

$\triangleright$ Пусть $z = re^{i\varphi}$ (r и φ — полярные координаты точки z). Рассмотрение двузначной функции $\sqrt{z}$ равносильно рассмотрению однозначной функции $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ двух переменных r и φ, непрерывной на множестве $\{0 \le r < \infty, \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 + 4\pi\}$, φ_0 — какой-либо угол: его определяем по значению функции в начальной точке и по нему — нужную ветвь. Все три пути C_1, C_2, C_3 имеют своим носителем окружность $|z| = 9$; на ней $z = 9e^{i\varphi}$ ($dz = 9ie^{i\varphi}d\varphi$) и значения подынтегральной функции суть $f(z)|_C = \frac{1}{\sqrt{z}}|_C = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\varphi}{2}}$, причем, на C_1: $0 \le \varphi \le 2\pi$, на C_2: $\pi \le \varphi \le 3\pi$, на C_3: $2\pi \le \varphi \le 4\pi$. Вычисляем: $A(C_1) = \int\limits_{C_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{3}e^{-i\frac{\varphi}{2}}9ie^{i\varphi}d\varphi = 3i\int\limits_0^{2\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 3i\frac{2}{i}e^{i\frac{\varphi}{2}}|_0^{2\pi} = 6(e^{i\pi} - e^0) = -12$; $A(C_2) = 6e^{i\frac{\varphi}{2}}|_\pi^{3\pi} = 6(e^{i\frac{3\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{2}}) = -12i$; $A(C_3) = 6e^{i\frac{\varphi}{2}}|_{2\pi}^{4\pi} = 6(e^{i2\pi} - e^{i\pi}) = 12$.

Данный интеграл $A(C)$ по окружности C, как видим, зависит от выбора начала пути интегрирования и соответственно от выбора регулярной ветви многозначной функции: $A(C_k) \ne A(C_j)$, $k \ne j$. Все эти три интеграла отличны от нуля — это тоже не противоречит теореме Коши. $\triangleleft$

2. Нули и особые точки регулярных функций

Далее будем рассматривать интегралы только от регулярных (то есть однозначных аналитических) функций (или регулярных ветвей многозначных функций).

Определение 2.1. *Точка a называется нулем (корнем) кратности (порядка) m функции $f(z) \in H(a)$, если*

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0, \tag{2.1}$$

что равносильно справедливости представления

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \varphi(z) \in H(a), \varphi(a) \neq 0. \tag{2.2}$$

(При $m = 0$, то есть если $f(a) \neq 0$, точку a иногда удобно называть корнем нулевой кратности.)

Определение 2.2. *Точка a называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, если эта функция регулярна в некоторой проколотой окрестности точки a: регулярна в кольце $0 < |z-a| < R$, то есть в круге с центром a некоторого радиуса R, кроме точки a.*

В указанном кольце функция представима рядом Лорана (разлагается в ряд Лорана)

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \tag{2.3}$$

$0 < |z-a| < R$.

Формула 2.3 — ряд Лорана в *окрестности* точки a. Радиус R находится из условия: 1) если z' — ближайшая к a особая точка функции $f(z)$, то $R = |z'-a|$; 2) (так что на границе $|z-a| = R$ имеется хотя бы одна особая точка суммы ряда $f(z)$). Ряд по отрицательным степеням $(z-a)$ называется *главной частью* (он сходится при $|z-a| > 0$, то есть $\forall z \neq a$), а ряд по положительным степеням со свободным членом — *правильной частью* ряда (он сходится в круге $|z-a| < R$).

Определение 2.3. *1) Точка a называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если в ряде 2.3 отсутствует главная часть: $c_n = 0$, $\forall n = -1, -2, \ldots$. Особенность устранится ("сотрется") и функцию $f(z)$ можно считать регулярной в точке a, если положить (доопределить функцию в точке a) $f(a) = \lim_{z\to a} f(z) = c_0$, и 2.3 становится рядом Тейлора функции $f(z)$. Далее не делаем различия между устранимой особой точкой и правильной.*

2) Точка a называется полюсом функции $f(z)$ порядка $m \geq 1$, если ряд (2.3) содержит конечное число членов с отрицательными степенями $(z-a)$, точнее: если верно представление

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \xi(z), \tag{2.4}$$

$c_{-m} \neq 0, \xi(z) \in H\{|z-a| < R\}$,

или, иначе, если

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \varphi(z), \varphi(z) \in H(a), \varphi(a) \neq 0. \tag{2.4$'$}$$

Критерием этого является асимптотическое равенство

$$f(z) \sim \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$$

при $z \to z_0$ (вблизи точки z_0).

3) Точка a называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если главная часть ряда (2.3) содержит бесконечное число слагаемых.

Наряду с (2.2) возьмем еще функцию $g(z) = (z-a)^k \psi(z)$, $\psi(z) \in H(a)$, $\psi(a) \neq 0$. Тогда $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^m}{(z-a)^k} p(z)$, $p(z) \in H(a)$, $p(a) \neq 0$. Отсюда: для дроби $\frac{f(z)}{g(z)}$ точка a будет корнем кратности $m-k \geq 0$ или полюсом кратности $k-m > 0$. В частности, если $f(z)$ имеет в точке a нуль порядка m, то $\frac{1}{f(z)}$ имеет в ней полюс порядка m, и наоборот.

Определение 2.4. *Точка $z=\infty$ называется изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, если эта функция регулярна в некотором кольце $\rho < |z| < \infty$ (оно называется окрестностью точки ∞). В этом кольце функция представима рядом Лорана по степеням z*

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z + \dots, \qquad \rho < |z| < \infty. \tag{2.5}$$

Для функции $f(z)$ делается замена $z = \frac{1}{t}$ и характер точки $z=\infty$ определяется по характеру точки $t=0$ для функции $f(\frac{1}{t})$ — ее ряд Лорана сходится в кольце $0 < |t| < \frac{1}{\rho}$, то есть в окрестности точки $t=0$. Таким образом: точка $z=\infty$ есть устранимая особая точка (правильная) для функции $f(z)$, если в ряде 2.5 нет положительных степеней z; ∞ — полюс, если в 2.5 конечное число положительных степеней; ∞ — существенно особая точка, если положительных степеней бесконечно много.

Пусть a — конечное число или $a=\infty$. По поведению функции $f(z)$ вблизи точки a (говорят: при $z \to a$) характер этой точки определится так: 1) a — устранимая особая точка (правильная), если $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0 \neq \infty$, 2) a — полюс, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ (полагают: $f(a) = \infty$, однако кратность полюса так не определится), 3) a — существенно особая точка, если ни конечный, ни бесконечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует. Понятно, что эти предложения обратимы.

Примеры. Найти нули и особые точки следующих функций.

Пример 2.1. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$.

Числитель: $1-\cos z = 0$ в точках $z = 2k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$; в этих точках $(1-\cos z)' = \sin z = 0$, $(1-\cos z)'' = \cos z = 1 \neq 0$, так что для числителя они, равно как и для $f(z)$, кроме случая $k=0$, суть нули кратности 2. Точка $z=0$ и для знаменателя корень кратности 2, и потому для $f(z)$ — устранимая особая точка. Последнее хорошо видно из разложения в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(1 - (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots)\right) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots, \qquad |z| < \infty.$$

Естественно полагаем $f(0) = \frac{1}{2!}$. А $z=\infty$ — существенно особая точка.

Пример 2.2. $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}$. Особые точки — только нули знаменателей:

a) $e^z - 1 = 0$, $z = Ln1 = i2k\pi \equiv z_k$ $(k = 0, \pm1, \dots)$ — нули простые, ибо $(e^z-1)' = e^z \neq 0$.

b) $\sin z = 0$, $z = n\pi \equiv \xi_n$ $(n = 0, \pm1, \dots)$ — нули тоже простые: $(\sin z)'|_{\xi_n} = \cos\xi_n = (-1)^n \neq 0$.

Среди совокупностей z_k и ξ_n есть только одна общая точка $z_0 = \xi_0 = 0$. Поэтому: для $f(z)$ точки $z = i2k\pi$ при $k \neq 0$ и $z = n\pi$ при $n \neq 0$ суть простые полюсы. Исследовать точку $z=0$ можно так: $f(z) = \frac{\sin z - e^z + 1}{(e^z-1)\sin z} \equiv \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Для знаменателя точка $z=0$ — корень кратности 2. Для числителя: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = (\cos z - e^z)_{z=0} = 0$, $\varphi''(0) = (-\sin z - e^z)_{z=0} = -1 \neq 0$. то есть $z=0$ тоже корень кратности 2. Поэтому для $f(z)$ точка $z=0$ — устранимая особая (правильная). Найти $f(0)$ можно по правилу Лопиталя, но прозрачнее — используя разложения в ряды:

$$f(z) = \frac{(z - \frac{z^3}{3!} + \dots) - (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots) + 1}{(z + \frac{z^2}{2!} + \dots)(z - \frac{z^3}{3!} + \dots)} = \frac{\frac{z^2}{2!} - 2\frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \dots}{z^2(1 + \frac{z}{2!} + \dots)(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots)}.$$

Отсюда $f(0) = \lim\limits_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{2!}$. Точка $z = \infty$ не изолированная особая точка (предельная для полюсов). Вопрос о нулях $f(z)$ открыт (известно только, что их бесконечно много и ∞ — точка сгущения для них.)

Пример 2.3. $f(z) = \frac{z^2-1}{z^3+1}$. Запишем $f(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{z-1}{z^2-z+1}$; при $z \neq -1$ сократить имеем право. Отсюда: для $f(z)$ точка $z = 1$ простой нуль, а оба корня уравнения $z^2-z+1 = 0$ — простые полюсы; $z = -1$ — устранимая особая точка (правильная, $f(-1) = -\frac{2}{3}$). Вблизи бесконечности (при $z \to \infty$) функция ведет себя примерно (асимптотически) так: $f(z) \sim \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z}$, так что ∞ — устранимая особая точка, причем, простой нуль, $f(\infty) = 0$.

3. Вычеты

Пусть a ($a \neq \infty$) — изолированная особая точка однозначного характера для функции $f(z)$ (то есть устранимая особая (правильная), полюс или существенно особая), так что в ее окрестности функция представима рядом Лорана 2.3.

Определение 3.1. *Вычетом функции $f(z)$ в точке a называется число*

$$res f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} f(z) dz \equiv c_{-1}, \tag{3.1}$$

где C — окружность $|z-a| = r < R$ (внутри ее содержится только одна особая точка a), проходимая против часовой стрелки; указанный интеграл. то есть вычет, равен коэффициенту $c_{-1} \equiv c_{-1}^{(a)}$ при $\frac{1}{z-a}$ в лорановском разложении 2.3.

Если a — правильная точка (или устранимая особая), то $res f(a) = 0$ — так как $c_{-1} = 0$ (или: по теореме Коши).

Используются и другие обозначения вычета: $res f(a) = res_{z=a} f(z) =$выч.$f(z)|_{z=a} = \ldots$.

Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $\rho < |z| < \infty$, то вводится понятие вычета в бесконечности — это число

$$res f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^-} f(z) dz \equiv -c_{-1}, \tag{3.2}$$

где C^- — окружность $|z| = r > \rho$, проходимая по часовой стрелке, и $c_{-1} \equiv c_{-1}^{(\infty)}$ — коэффициент при $\frac{1}{z}$ в ряде 2.5. В отличие от конечной точки a, даже если функция регулярна в бесконечности (∞ — устранимая особая точка), вычет в ней может быть не равен нулю: например, для функций $\frac{1}{z}$, $e^{\frac{1}{z}}$ имеем $res f(\infty) = -1 \neq 0$.

Как находить вычеты? Если a — полюс кратности m для функции $f(z)$ (см. представление (2.4')), то

$$c_{-1} \equiv res f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m f(z)\right) = \frac{1}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(a). \tag{3.3}$$

Для простого полюса ($m = 1$):

$$res f(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \tag{3.4}$$

Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в точке a, и a есть простой нуль для $\psi(z)$, то есть $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ (так что для $f(z)$ точка a — правильная или простой полюс). Тогда

$$res f(a) \equiv res_{z=a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{3.5}$$

Вычет функции в существенно особой точке $a \neq \infty$, а также вычеты в бесконечности, обычно находят как коэффициент $c_{-1}^{(a)}$ или $-c_{-1}^{(\infty)}$.

Теорема 3.1. *(Основная теорема (Коши) о вычетах.) Если функция $f(z)$ регулярна на замкнутом контуре Γ и регулярна внутри его, кроме конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res f(z_k) \equiv 2\pi i \sum_{z_k \in I(\Gamma)} res f(z_k). \tag{3.6}$$

(При $n = 1$ это даёт определение 3.1).

Теорема 3.2. *(Теорема о сумме всех вычетов) Если функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости, кроме конечного числа точек $z_1, \dots, z_n$, то сумма ее вычетов относительно всех особых точек, включая $z = \infty$, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} resf(z_k) + resf(\infty) = 0. \tag{3.7}$$

Эта теорема позволяет находить вычет в ∞ через вычеты в конечных точках, или наоборот.

Если $f(z)$ — четная функция, то $resf(0) = resf(\infty) = 0$ (т.к. $c_{-1} = 0$) и $resf(a) = -resf(-a)$, а если $f(z)$ функция нечетная, то $resf(a) = resf(-a)$ (в предположении, что написанные вычеты имеют смысл).

Замечание 3.1. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в некотором кольце $\rho < |z| < \infty$ и a — произвольная точка. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-a)$ в кольце $\{R < |z-a| < \infty\} \subset \{\rho < |z| < \infty$. Нетрудно убедиться, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z-a}$ не зависит от a и $resf(\infty) = c_{-1}$. Некоторые авторы предлагают указанные ряды называть также рядами Лорана в окрестности ∞ (как и ряд 2.5).*

Примеры. Для следующих функций найти вычеты во всех особых точках (изолированных однозначного характера) и (или) интегралы по указанным контурам.

Пример 3.1. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-1)}$. Особые точки $z = 0$, $z = 1$ и $z = \infty$. Точка $z = 0$ для числителя простой нуль, а для знаменателя — кратности 2, поэтому для $f(z)$ точка $z = 0$ — простой полюс; $z = 1$ тоже простой полюс; $z = \infty$ существенно особая. Для отыскания вычета в 0 и 1 здесь проще использовать формулу 3.4: $resf(0) = \lim\limits_{z\to 0} zf(z) = -1$; $resf(1) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z) = \sin 1$. Тогда $resf(\infty) = -(resf(0) + resf(1)) = 1 - \sin 1$.

Пример 3.2. $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-i)}$. Особые точки: $z = 0$ — полюс кратности 2, $z = i$ — простой полюс, $z = \infty$ — существенно особая. $resf(0) = \frac{1}{1!}\lim\limits_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{z-i}\right)|_{z=0} = \frac{(z-i)(-\sin z)-\cos z}{(z-i)^2}|_{z=0} = 1$, $resf(i) = \lim\limits_{z\to i}(z-i)f(z) = -\cos i = -\frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = -\operatorname{ch}1$; $resf(\infty) = -(1-\operatorname{ch}1)$.

$\int\limits_{|z-2|=5} f(z)dz = 2\pi i(resf(0) + resf(i)) = 2\pi i(1-\operatorname{ch}1)$; $\int\limits_{|z-2|=1} f(z)dz = 0$.

Пример 3.3. $f(z) = ze^{\frac{1}{z}} = z(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots), 0 < |z| < \infty$; $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — простой полюс (это видно также из асимптотики: $f(z) \sim z$ при $z \to \infty$); $resf(0) = \frac{1}{2!}$, $resf(\infty) = -\frac{1}{2!}$, $\int\limits_{|z|=3} ze^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi i \cdot resf(0) = \pi i$.

Пример 3.4. $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$. Особые точки $z = 1$ и $z = \infty$. $\lim\limits_{z\to 1-0} f(z) = (e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty}) = +\infty$, $\lim\limits_{z\to 1+0} f(z) = (e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty}) = 0$, $\infty \neq 0$, следовательно, $z = 1$ существенно особая точка; $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = e^{-1}$, ∞ — правильная точка. Но для отыскания вычетов это ничего не дает. Разложим в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$: $\frac{z}{1-z} = -\frac{z-1+1}{z-1} = -1 - \frac{1}{z-1}$, $f(z) = e^{-1}e^{-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{e}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{(z-1)^k}$, $|z-1| > 0$.

Отсюда снова: $z = 1$ — существенно особая точка и $resf(1) = -e^{-1}$. Согласно замечанию 3.1, имеем $resf(\infty) = +e^{-1}$. Это соответствует тому, что $resf(1) + resf(\infty) = 0$.

$\int\limits_{|z|=5} e^{\frac{z}{1-z}}dz = 2\pi i resf(1) = -2\pi i e^{-1}$, $\int\limits_{|z-5|=1} e^{\frac{z}{1-z}}dz = 0$.

Пример 3.5. $f(z) = \frac{1}{z(1-e^{2z})}$. Особые точки — это нули знаменателя: $z(1-e^{2z}) = 0$. Отсюда $z = 0$ и $1 - e^{2z} = 0$, $e^{2z} = 1$, $2z = Ln1 = \ln 1 + i2k\pi$, $z = ik\pi \equiv z_k$ $(k = 0, \pm 1, \dots)$, $(1-e^{2z})' =$

$-2e^{2z} \neq 0$. Таким образом, для $f(z)$ точки $z = z_k$ при $k \neq 0$ простые полюсы, а $z = 0$ — полюс кратности 2. Для отыскания вычетов в точках $z_k = k\pi i$, $k \neq 0$, проще применить формулу 3.5, а чтобы ещё более упростить, запишем $f(z) = \frac{\frac{1}{z}}{1-e^{2z}}$, то $resf(z_k) = \frac{\frac{1}{z_k}}{-2e^{2z_k}} = \frac{i}{2k\pi}$, $k \neq 0$.

А $resf(0) = \frac{1}{1!}\lim\limits_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \lim\limits_{z\to 0}\frac{d}{dz}(\frac{z}{1-e^{2z}})$. Можно найти производную и потом применить правило Лопиталя. Однако такие пределы лучше находить, используя разложения в ряд. Имеем $\frac{d}{dz}(\frac{z}{1-e^{2z}}) = \frac{d}{dz}(\frac{z}{1-(1+2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\dots)}) = -\frac{d}{dz}(\frac{1}{2+2z+\frac{8}{3!}z^2+\dots}) = -\frac{-(2+\frac{8}{3!}2z+\dots)}{(2+2z+\frac{8}{3!}z^2+\dots)^2}$. Отсюда $resf(0) = \frac{1}{2}$. $A_n \equiv \int\limits_{|z|=n\pi+\frac{\pi}{2}} f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=-n}^{n} resf(z_k) = \pi i$. Точка $z = \infty$ неизолированная особая точка, понятие вычета для них не вводится (оно лишено смысла).

Пример 3.6. $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}$ (см. пример 2.2). Поскольку $z = 0$ устранимая особая точка, то $resf(0) = 0$. В точках $z_k = i2k\pi$, $k \neq 0$, второе слагаемое является функцией регулярной, следовательно вычеты определяются по первому слагаемому: $resf(z_k) = \frac{1}{(e^z-1)'}|_{z_k} = \frac{1}{e^{z_k}} = 1$. А в точках $\xi_n = n\pi$, $n \neq 0$ — по-второму: $resf(\xi_n) = \frac{-1}{(\sin z)'}|_{\xi_n} = \frac{-1}{\cos\xi_n} = (-1)^{n+1}$.

$\int\limits_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i resf(0) = 0$, $\int\limits_{|z|=9} f(z)dz = 2\pi i(1+1+(1+1-1-1)) = 4\pi i$.

Пример 3.7. $f(z) = \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}$. Особые точки: $z = -1$ — простой полюс, $z = 0$ — существенно особая, $z = \infty$ — полюс порядка 2, так как $f(z) \sim \frac{z^3 \cdot 1}{z} = z^2$ при $z \to \infty$. $resf(-1) = \lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z) = -e^{-1}$. Вычет в точке $z = 0$ находим с помощью ряда Лорана:

$$f(z) = z^3(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n)(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k! z^k}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k!}\frac{1}{z^{k-n-3}}, \qquad 0 < |z| < 1.$$

Нам нужен только коэффициент при $\frac{1}{z}$; для этого надо собрать слагаемые с $k-n-3 = 1$, то есть $k = n+4$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$: $resf(0) \equiv c_{-1}^{(0)} = \sum\limits_{k=4}^{\infty}\frac{(-1)^{k-4}}{k!} = \sum\limits_{k=4}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} - (1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}) = e^{-1} - \frac{1}{3}$.

Таким же образом вычисляем вычет в ∞, но можно немного проще (слагаемых с $\frac{1}{z}$ будет конечное число). Находим ряд Лорана в окрестности ∞ (в кольце $1 < |z| < \infty$):

$f(z) = z^3\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}e^{\frac{1}{z}} = (z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \dots)(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots)$.

Отсюда коэффициент при $\frac{1}{z}$: $c_{-1}^{(\infty)} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} + 1 - 1 = -\frac{1}{3} = -resf(\infty)$. Тогда $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=3} f(z)dz = (resf(-1) + resf(0)) \equiv -resf(\infty) = -\frac{1}{3}$.

Если бы требовалось только найти этот интеграл, то его проще искать именно как $-resf(\infty)$.

Пример 3.8. $f(z) = \frac{1}{(z-5)(z^9+1)}$. $resf(5) = \lim\limits_{z\to 5}(z-5)f(z) = \frac{1}{5^9+1}$. Вблизи точки ∞ (при $z \to \infty$) $f(z) \sim \frac{1}{z^{10}}$, отсюда $c_{-1}^{(\infty)} = 0$. Корни уравнения $z^9 + 1 = 0$ есть $z = \sqrt[9]{-1} = \sqrt[9]{e^{i(\pi+2k\pi)}} = e^{i\pi\frac{1+2k}{9}} \equiv z_k$ $(k = 0, 1, 2, \dots, 8)$, $|z_k| = 1$. Это простые полюсы для $f(z)$, вычеты в них естественнее искать по формуле 3.5, причём, легче использовать запись $f(z) = \frac{\frac{1}{z-5}}{z^9+1}$; имеем $resf(z_k) = \frac{\frac{1}{z_k-5}}{9z_k^8} = \frac{1}{9z_k^8(z_k-5)}$. По свойству 3.7 найдём $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=3} f(z)dz = \sum\limits_{k=0}^{8} resf(z_k) = (-resf(\infty) - resf(5)) = \frac{-1}{5^9+1}$.

Этот результат можно расценить так: мы доказали, что $\sum\limits_{k=0}^{8}\frac{1}{9z_k^8(z_k-5)} = \frac{-1}{5^9+1}$.

Подобное относится и к *примеру 3.7*.

Пример 3.9. $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$. Нули знаменателя: $\sin\frac{1}{z} = 0$, $\frac{1}{z} = k\pi$ ($k \neq 0$, $k = \pm1, \pm2, \dots$), $z = \frac{1}{k\pi} \equiv z_k$; они простые.

$(\sin\frac{1}{z})'|_{z_k} = -\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}|_{z_k} = -(k\pi)^2\cos k\pi = (-1)^{k+1}k^2\pi^2$. Тогда $resf(z_k) = \frac{1}{(\sin\frac{1}{z})'}|_{z_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}$ ($k = \pm1, \pm2, \dots$).

Для функции $\sin\frac{1}{z}$ точка $z = 0$ — существенно особая, а для $f(z)$ — неизолированная особая (предельная для полюсов).

Если $z \to \infty$, то $\frac{1}{z} \to 0$ и $\sin\frac{1}{z} \sim \frac{1}{z}$, поэтому $f(z) \approx z$, так что ∞ — простой полюс. Для нахождения вычета разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ∞ (в кольце $\frac{1}{\pi} < |z| < \infty$); используем метод неопределенных коэффициентов:

$f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}} = z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$ (вообще-то, четных степеней не будет), $(z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots)(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots) \equiv 1$, $c_0 = 0$, $c_{-1} - \frac{1}{3!} = 0$. Итак, $resf(\infty) = -c_{-1} = -\frac{1}{6}$. Тогда $A \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} f(z)dz = -resf(\infty) = \frac{1}{6}$.

Если формально применить Основную теорему (формулу 3.6) для $n = \infty$, то получим $A = \sum\limits_{k=-\infty, k\neq0}^{+\infty} resf(z_k) \equiv \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2} + \frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}) = -resf(\infty) = \frac{1}{6}$. Получили известное равенство $\frac{2}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{6}$. В задачнике **[3]** в ответе к примеру № 639 эта сумма так и фигурирует, как вычет в бесконечности. Обосновать это равенство можно так: возьмем окружности C_n : $|z| = \epsilon_n$ ($n = 1, 2, \dots$), на которых $\left|\sin\frac{1}{z}\right| \geq 1$ — надо положить $\left|\sin\frac{1}{z}\right| = 1$, откуда взять $\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \equiv \epsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда на окружностях C_n будет $|f(z)| \leq 1$ (предлагаем желающим это проверить!), и $\left|\int\limits_{C_n} f(z)dz\right| \leq 2\pi\epsilon_n \to 0$, $n \to \infty$. По теореме Коши для многосвязной области имеем $A = \sum\limits_{k=-n, k\neq0}^{n} resf(z_k) + \int\limits_{C_n} f(z)dz$. Отсюда при $n \to \infty$ получим указанный результат.

Пример 3.10. Пусть $\Phi(z) = \frac{1}{z^k}\frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{\operatorname{sh}\pi z}$; найти интеграл $B_k = \int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \Phi(z)dz$ для $k = 2, 3$.

Находим: $\operatorname{sh}\pi z \equiv -i\sin i\pi z = 0$, $i\pi z = n\pi$ ($n = 0, \pm1, \dots$), нули простые. Надо взять только точку $z = 0$, для знаменателя она есть нуль кратности $k + 1$. $B_k = 2\pi i \cdot res\Phi(0)$.

$\Phi(z) = \frac{1}{z^k}\frac{(1 + 3z + \frac{(3z)^2}{2!} + \frac{(3z)^3}{3!} + \dots) - 1 - (3z - \frac{(3z)^3}{3!} + \dots)}{\pi z + \frac{(\pi z)^3}{3!} + \dots} = \frac{z^2}{z^k \cdot z \cdot \pi}\frac{\frac{9}{2} + 9z + \dots}{1 + \frac{\pi^2}{3!}z^2 + \dots} \equiv \frac{1}{\pi z^{k-1}} \cdot \varphi(z) = \frac{1}{\pi z^{k-1}}(\varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}z + \frac{\varphi''(0)}{2!}z^2 + \dots)$, $0 < |z| < 1$.

a) $k = 2$, то $z = 0$ простой полюс, $res\Phi(0) = \frac{\varphi(0)}{\pi} = \frac{9}{2\pi}$, и $B_2 = 9i$.

b) $k = 3$, то $z = 0$ полюс кратности 2; здесь потребуется знать $\varphi'(0)$: $\varphi'(0) = \frac{(1 + \frac{\pi^2}{3!}z^2 + \dots)(9 + az + \dots) - (\frac{3}{2} + 9z + \dots)(\frac{\pi^2}{3}z + \dots)}{(1 + \frac{\pi^2}{3!}z^2 + \dots)^2}|_{z=0} = 9$. Тогда $res\Phi(0) = \frac{\varphi'(0)}{\pi} = \frac{9}{\pi}$ и $B_3 = 18i$.

К этому же придем, используя формулу 3.3 с $m = 2$ (у нас $k = 3$): $res\Phi(0) = \lim\limits_{z\to0}\frac{d}{dz}(z^2\Phi(z)) = \varphi'(0)\frac{1}{\pi}$.

Пример 3.11. $f(z) = \sin\frac{z}{z+1}$. Ряд Лорана в окрестности точки $z = -1$ (она существенно особая): $f(z) = \sin\frac{(z+1) - 1}{z+1} = \sin(1 - \frac{1}{z+1}) = \sin 1 \cdot \cos\frac{1}{z+1} - \cos 1 \cdot \sin\frac{1}{z+1} = \sin 1 \cdot \cos\frac{1}{z+1} - \cos 1 \cdot (\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \dots)$, $|z + 1| > 0$. Разложение функции $\cos\frac{z}{z+1}$ содержит только четные степени величины $\frac{1}{z+1}$, поэтому вычет определится только по второму слагаемому: $resf(-1) = -\cos 1$. Тогда $resf(\infty) = -resf(-1) = \cos 1$. Найдем это непосредственно; ∞ — правилная точка,

$f(\infty)=\sin 1$. Сделаем замену $z=\frac{1}{t}$ и разложим в ряд по степеням t: $f(\frac{1}{t})=\sin\frac{1}{t+1}\equiv\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\ldots$, $|t|<1$; $\varphi(0)=\sin 1$, $\varphi'(0)=\cos\frac{1}{t+1}\cdot(-\frac{1}{(t+1)^2})|_{t=0}=-\cos 1$.

Поэтому $f(z)=\sin 1-\frac{\cos 1}{1!}\cdot\frac{1}{z}+\ldots$, $|z|>1$, $resf(\infty)=+\cos 1$. Найдем: $\int\limits_{|z|=6}\sin\frac{z}{z+1}dz=2\pi i(-\cos 1)$, $\int\limits_{|z-4|=1}\sin\frac{z}{z+1}dz=0$.

Пример 3.12. С помощью ряда Лорана найти вычет функции $f(z)=\ln\frac{z-3}{z+2}$ в точке $z=-2$.

$f(z)=\ln(1-\frac{5}{z+2})=-\frac{5}{z+2}-\frac{1}{2}\frac{5^2}{(z+2)^2}-\ldots$ (использован ряд для $\ln(1+\zeta)$ — логарифмический ряд). Этот ряд сходится, когда $\left|\frac{5}{z+2}\right|<1$, $|z+2|>5$: не сходится в окрестности точки $z=-2$, вычет, в таком случае, в этой точке не определяется. Дело в том, что данная функция неоднозначна в окрестности точки $z=-2$ (здесь невозможно выделение регулярной ветви). Именно, окрестность $0<|z+2|\le\epsilon$ с помощью дробно-линейной функции $\zeta=\frac{z-3}{z+2}$ отобразится во внешность некоторой окружности C_ϵ, лежащей вне какого-то круга $|z|\le R$. Когда точка z пробежит окружность $|z+2|=\epsilon$, тогда точка ζ пробежит C_ϵ, значит, вокруг $\zeta=0$, и поэтому $\ln\frac{z-3}{z+2}\equiv\ln\zeta$ изменит свое значение. Итак, данную функцию в окрестности точки $z=-2$ рядом Лорана представить нельзя и вычет в точке $z=-2$ не существует (лишен смысла). Мы умышленно включили этот "провокационный" пример, чтобы лишний раз подчеркнуть: 1) при разложении в ряды обязательно определять область сходимости и 2) внимательно следить за тем, будет ли функция однозначной.

Пример 3.13. Найти вычеты каждой из ветвей функции $f(z)=\frac{1}{\sqrt{5-z}+2}$ относительно точки $z=1$ и интеграл по окружности $C:|z-1|=2$.

$\triangleright$ Здесь $z=5$ — точка ветвления (второго порядка): при обходе вокруг нее функция $\sqrt{5-z}$, и вместе с тем $f(z)$, меняет свое значение. В плоскости с разрезом от 5 до ∞ допускается выделение двух непрерывных (вместе с тем — регулярных) ветвей. Здесь проводим разрез, например, по лучу $[5,+\infty)$. Чтобы определить всю ветвь в окрестности точки 1, достаточно задать значение $\sqrt{4}$. Выберем ветвь $f_1(z)$, для которой $\sqrt{5-z}|_{z=1}=\sqrt{4}=+2$; тогда $f_1(1)=\frac{1}{4}$, $z=1$ — правильная точка, $resf_1(1)=0$ и $\oint\limits_C f_1(z)dz=0$. Для другой ветви $f_2(z)$ имеем $\sqrt{5-z}|_{z=1}=\sqrt{4}=-2$, $f_2(1)=\infty$; точка $z=1$ — простой полюс, ибо она простой нуль знаменателя: $(\sqrt{5-z}+2)'|_{z=1}=\frac{-1}{2\sqrt{5-z}}|_{z=1}=\frac{1}{4}\neq 0$. Тогда $resf_2(1)=4$ и $\oint\limits_C f_2(z)dz=8\pi i$. $\triangleleft$

4. Приложения теории вычетов

Теория вычетов дает эффективный аппарат для вычисления многих определенных интегралов, в том числе, "неберущихся", и решения других задач.

I. Интегралы вида $M = \int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ рациональная функция от $u = \sin x$ и $v = \cos x$, непрерывная на отрезке $0 \leq x \leq 2\pi$. Идея для вычисления подобных интегралов: подобрать такую замену переменной $z = \xi(x)$, чтобы новая переменная интегрирования z пробегала замкнутый контур. Здесь полагаем $z = e^{ix}$, то $|z| = 1$, $0 \leq argz = x \leq 2\pi$. Когда x пробегает отрезок $0 \leq x \leq 2\pi$, тогда z пробегает окружность $|z| = 1$ против часовой стрелки один раз (одинаково, если $x_0 \leq x \leq x_0 + 2\pi$, например $-\pi \leq x \leq \pi$). Пересчитываем: $dz = e^{ix}idx$, $dx = \frac{dz}{iz}$,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}. \tag{4.1}$$

Подставляя в M, получим интеграл по окружности $|z| = 1$ от рациональной функции от z; ее особые точки z_k — только полюсы ($|z_k| \neq 1$).

Примеры.

Пример 4.1. $M_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$, a и b — действительные числа, $|a| > |b|$ (зачем нужно это условие?)

$\triangleright$ Достаточно рассмотреть случаи $a > b > 0$ и $a > -b > 0$ (при этом будет $M_1 > 0$; почему?). Полагая $z = e^{i\varphi}$, найдем (учитывая (4.1), $x \equiv \varphi$) $M_1 = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{a+b\frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{2az+bz^2+b}dz$. Пусть $f(z) = \frac{1}{2az+bz^2+b}$. Находим корни знаменателя: $2az + bz^2 + b = 0$, $z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, $z_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. Это — простые полюсы $f(z)$.

1) $a > b > 0$. То $z_1 = -\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}$, $|z_1| < 1$, а $|z_2| > 1$ — не подходит. $M_1 = \frac{2}{i}2\pi i res f(z_1) = 4\pi \frac{1}{2a+2bz}|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} > 0$.

2) $a > 0$, $b < 0$, $a > -b > 0$. Здесь $\sqrt{b^2} = -b > 0$, тогда $z_1 = -\frac{a}{b} - \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}$. Опять $|z_1| < 1$, $|z_2| > 1$ и по-прежнему $M_1 = \frac{2}{i}2\pi i res f(z_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} > 0$.

Рассмотрите случаи: $\{a = \sqrt{3}, b = 1\}$, $\{a = 5, b = 3\}$, $\{a = 13, b = 12\}$, $\{a = \sqrt{3}, b = -1\}$. $\triangleleft$

Пример 4.2. Считая $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ найдем интеграл $M_2 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2} =$ [замена $z = e^{i\varphi}$] $= \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-2a\frac{z^2+1}{2z}+a^2} \frac{1}{iz}dz = \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} f(z)dz$, где $f(z) = \frac{1}{z-az^2-a+a^2z}$; $az^2 - (1+a^2)z + a = 0$, $z_{1,2} = \frac{(1+a^2)\pm\sqrt{1+2a^2+a^4-4a^2}}{2a} = \frac{(1+a^2)\pm(1-a^2)}{2a}$; $z_1 = \frac{1}{a}$, $z_2 = a$.

1) $|a| < 1$, тогда $|z_1| > 1$, $|z_2| < 1$ — берется только z_2; $M_2 = \frac{1}{i}2\pi i res f(z_2) = 2\pi \frac{1}{(1+a^2)-2az}|_{z=z_2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$.

2) $|a| > 1$, тогда $|z_1| < 1$, $|z_2| > 1$; $M_2 = \frac{1}{i}2\pi i res f(z_1) = \frac{2\pi}{a^2-1}$.

Пример 4.3. $M_3 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{3}-\sin x\right)^2} =$ (см. 4.1) $= \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{\left(\sqrt{3}-\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2} \frac{dz}{iz} = -\frac{4}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{z}{\left(2\sqrt{3}iz-z^2+1\right)^2}dz = -\frac{4}{i} \int\limits_{|z|=1} f(z)dz$, $f(z) = \frac{z}{\left(2\sqrt{3}iz-z^2+1\right)^2}$.

$\left(2\sqrt{3}iz - z^2 + 1\right)^2 = 0$, $z_{1,2} = \sqrt{3}i \pm \sqrt{-3+1} = i(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$ — полюсы $f(z)$ кратности $m = 2$; $|z_1| = \sqrt{3} + \sqrt{2} > 1$ — не подходит; $|z_2| = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0,3$, $|z_2| < 1$. Поэтому $M_3 = -\frac{4}{i}2\pi i \cdot$

$resf(z_2)$ =(по ф-ле 3.3)= $-8\pi \lim\limits_{z\to z_2} \frac{d}{dz}\left((z-z_2)^2\frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right) = -8\pi \frac{(z-z_1)^2\cdot 1 - z\cdot 2(z-z_1)}{(z-z_1)^4}|_{z=z_2} = -8\pi\frac{i2\sqrt{3}}{-i2^4\sqrt{2}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 0.$

Интегралы вида M (в частности M_1, M_2, M_3) вычисляются и обычными методами математического анализа, в частности, используя "универсальную подстановку" $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

II. Интегралы вида $N = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$, где $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ — рациональная функция ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены). Для сходимости интеграла требуем: a) $P(x) \neq 0$ ($R(x)$ непрерывна) на действительной оси, $-\infty < x < +\infty$; это надо для существования интеграла по любому конечному промежутку $[A, B]$; b) степень $P(x) \geq 2+$степень$Q(x)$ — это нужно для сходимости интеграла в концах $x = \pm\infty$.

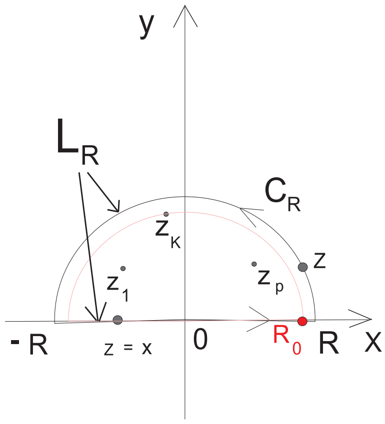

Рис. 4.1

Пусть z_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) — все особые точки функции $R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, лежащие в верхней полуплоскости: $Imz_k > 0$ (это полюсы — нули знаменателя $P(z)$) и $R > \max\limits_k |z_k| = R_0$. Возьмем замкнутый контур $L_R = [-R, R] + C_R$, состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и верхней полуокружности $C_R = \{|z| = R, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ (рис. 4.1). Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = \oint\limits_{L_R} R(z)dz = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} resR(z_k). \tag{4.2}$$

(Так как $R > R_0$, то интеграл по L_R не зависит от R — по теореме Коши, а интеграл по C_R стремится к нулю при $R \to \infty$; отсюда следует равенство 4.2).

Примеры.

Пример 4.4. $N_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+10x^2+9}dx$ (упростили за счет того, что интеграл от нечетной функции равен нулю). Здесь $R(z) = \frac{z^2+2}{z^4+10z^2+9}$. Особые точки — когда $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$, $z^2 = -5 \pm 4$; $z^2 = -1$, $z = \pm i$; $z^2 = -9$, $z = \pm 3i$. Это простые полюсы функции $R(z)$. Следует взять только $z_1 = i$ и $z_2 = 3i$. По формуле 3.5: $resR(z_k) = \frac{z^2+2}{4z^3+20z}|_{z_k} = \frac{z^2+2}{4z(z^2+5)}|_{z_k}$; $R(i) = \frac{-1+2}{4i(-1+5)} = \frac{1}{16i}$, $R(3i) = \frac{-9+2}{4\cdot 3i(-9+5)} = \frac{7}{48i}$.

Пусть $R > \max\{|i|, |3i|\} = 3$, то по формуле 4.2: $N_1 = \oint\limits_{L_R} R(z)dz = 2\pi i(resR(i) + resR(3i)) = \frac{5\pi}{12} > 0$.

Пример 4.5. $N_2 = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

$R(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ (это четная функция); $(z^2+a^2)^2=0$, $z=z_{1,2}=\pm ia$ — полюсы $R(z)$ кратности 2. Надо взять только $z_1=ia$. По формуле 3.3 с $m=2$ найдем $resR(z_1)=\lim\limits_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left((z-z_1)^2\cdot\frac{z^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-z_2)^2}\right)|_{z=z_1}=\frac{(z-z_2)^2 2z-z^2 2(z-z_2)}{(z-z_2)^4}|_{z=z_1}=\frac{1}{i4a}$.

Пусть $R>\max|ia|=a$, тогда $N_2=\frac{1}{2}\oint\limits_{L_R}R(z)dz=\frac{1}{2}2\pi i resR(z_1)=\frac{\pi}{a}>0$. (Если $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, то $a^2=|a|^2$, $|a|>0$, поэтому $N_2=\frac{\pi}{|a|}>0$.)

Пример 4.6. $N_3=\int\limits_0^\infty\frac{x^2}{x^4+1}dx\equiv\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx$.

$R(z)=\frac{z^2}{z^4+1}$; $z^4+1=0$, $z=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{e^{i(\pi+2\pi k)}}=e^{i\pi\frac{2k+1}{4}}\equiv z_k$; $k=0,1,2,3$. Это — простые полюсы для $R(z)$. Надо взять только $z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}$ и $z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}}=-e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$resR(z_k)=\frac{z^2}{4z^3}|_{z_k}=\frac{1}{4z_k}$; $resR(z_0)=\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $resR(z_1)=\frac{1}{4}(-e^{i\frac{\pi}{4}})$. По формуле 4.2, где $R>1$: $N_3=\frac{1}{2}\oint\limits_{L_R}\frac{z^2}{z^4+1}dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i(resR(z_0)+resR(z_1))=\pi i\cdot\frac{1}{4}(e^{-i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{4}})=\frac{\pi i}{4}(-2i\sin\frac{\pi}{4})=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}>0$.

Пример 4.7. $N_4=\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}\equiv\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}2\pi i resR(i)$; $R(z)=\frac{1}{(z^2+1)^n}$, $z=\pm i$ — полюсы кратности n. $N_4=\pi i\frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-i)^n\frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n}\right)=\frac{\pi i}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right)|_{z=i}=\pi i\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)...(2n-2)}{(z+i)^{2n-1}}|_{z=i}=\pi i\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)...(2n-2)}{(2i)^{2n-1}}=\pi i\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{n(n+1)...(2n-2)}{2^{2n-1}i^{2n-1}}=\pi i\frac{(-1)^{n-1}}{(-1)^n i^{-1}}\frac{n(n+1)...(2n-2)}{(n-1)!2^{2n-1}}=-\pi i\frac{in(n+1)...(2n-2)(n-1)!}{(n-1)!(n-1)!2^{2n-1}}=\pi\frac{2^{n-1}(n-1)!\cdot 1\cdot 3...(2n-3)}{(n-1)!(n-1)!2^{2n-1}}=\pi\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-3)}{2\cdot 2^{n-1}\cdot(n-1)!}=\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6...(2n-2)}\frac{\pi}{2}$ $(n>1)$.

При $n=1$: $N_4=\pi i\frac{1}{2i}=\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, при $n=1$: $N_4=\frac{\pi}{2}$; при $n\geq 2$: $N_4=\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6...(2n-2)}\frac{\pi}{2}$

III. Вычисление интегралов $A=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\beta x dx$, $B=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\beta x dx$, $\beta>0$.

Предполагаем: a) Функция $f(z)$ регулярна в верхней полуплоскости $Rez\geq 0$, кроме конечного числа особых точек z_k $(k=1,2,\dots,p)$, причем $Imz_k>0$; b) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$ равномерно относительно $argz\in[0,\pi]$. Этим условиям удовлетворяет, например, функция $f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}$ (обычно она и присутствует в интегралах A и B), где $P(z)\neq 0$ на действительной оси и степень$P(z)\geq 1+$степень$Q(z)$ (сравни с интегралами вида N).

Даже если надо найти только один из интегралов A и B, рекомендуем рассматривать ему в пару и другой (хотя он может быть равен нулю), после чего образуем вспомогательный интеграл

$$\mathcal{I}=A+iB=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\beta x}dx \tag{4.3}$$

(учли формулу Эйлера $\cos\beta x+i\sin\beta x=e^{i\beta x}$). Пусть $R>\max\limits_k|z_k|=R_0$ и L_R — замкнутый контур из п. **II** (см. рис. 4.1).

Теорема 4.1. *При условиях a) и b) интеграл (4.3) сходится и его можно вычислить по формуле*

$$\mathcal{I}\equiv A+iB=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\beta x}dx=\oint\limits_{L_R}f(z)e^{i\beta z}dz=2\pi i\sum_{Imz_k>0}res(f(z)e^{i\beta z}),\quad(\beta>0). \tag{4.4}$$

(При доказательстве используется тот факт, что интеграл по L_R не зависит от R, $R>R_0$, и что в силу леммы Жордана интеграл по дугам C_R стремится к нулю при $R\to\infty$.)

Пусть $f(x)$ — вещественная функция; тогда

$$A = Re\mathcal{I}, B = Im\mathcal{I}. \tag{4.5}$$

Это и есть формулы для нахождения интегралов A и B с помощью вычетов. Если $f(x)$ — четная функция, то $P \equiv \int\limits_0^\infty f(x)\cos\beta x dx = \frac{1}{2}\mathcal{I}$, а если $f(x)$ функция нечетная, то $Q \equiv \int\limits_0^\infty f(x)\sin\beta x dx = \frac{1}{2i}\mathcal{I}$.

Примеры.

Пример 4.8. Покажем, что $P(a) \equiv \int\limits_0^\infty \frac{\cos\beta x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\beta a}$, $Q(a) \equiv \int\limits_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-\beta a}$; $a > 0$, $\beta > 0$. (Это интегралы Лапласа-Дирихле.)

$\triangleright$Функция $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ — четная, а $f(z) = \frac{z}{z^2+a^2}$ — нечетная, у обеих точки $z_{1,2} = \pm ia$ — простые полюсы. Следует взять только $z_1 = ia$. Находим

$2P(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta x}}{x^2+a^2}dx = 2\pi i \cdot res\frac{e^{i\beta z}}{z^2+a^2}|_{z=ia} = 2\pi i\frac{e^{i\beta z}}{2z}|_{z=ia} = \pi\frac{e^{-\beta a}}{a}$.

$2Q(a) = \frac{1}{i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\beta x}}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{i}2\pi i \cdot res\frac{ze^{i\beta z}}{z^2+a^2}|_{z=ia} = 2\pi\frac{ze^{i\beta z}}{2z}|_{z=ia} = \pi e^{-\beta a}$.$\triangleleft$

В курсе математического анализа эти интегралы находились с помощью косинус- и синус-преобразования Фурье. Заметим, что интеграл $Q(a)$ сходится и при $a = 0$, и определяет функцию непрерывную при $a \geq 0$. Тогда $Q(0) \equiv \int\limits_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx = \lim\limits_{a\to+0} Q(a) = \frac{\pi}{2}$, ($\forall\beta > 0$, в частности, $\beta = 1$). Это тоже известный факт.

Рассмотренные интегралы, в отличие от интегралов вида M и N (п. I и II), относятся к разряду "неберущихся" (соответствующие первообразные не являются функциями элементарными).

Пример 4.9. $K(a) \equiv \int\limits_0^\infty \frac{x^3\sin x}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{2i}\mathcal{I}$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$). Функция $f(z) = \frac{z^3}{(z^2+a^2)^2}$ — нечетная; $z_{1,2} = \pm ia$ — полюсы кратности $m = 2$. Пусть $a > 0$, то берется $z_1 = ia$.

$\frac{1}{2\pi i}\mathcal{I} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3e^{ix}}{(x^2+a^2)^2}dx = res_{z=ia}\frac{z^3e^{iz}}{(z^2+a^2)^2} = \lim\limits_{z\to ia}\frac{d}{dz}\left((z-ai)^2\frac{z^3e^{iz}}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right) = \frac{(z+ai)^2(3z^2e^{iz}+z^3ie^{iz})-z^3e^{iz}2(z+ia)}{(z+ai)^4}|_{z=ia} = e^{iz}\cdot\frac{(z+ai)(3z^2+iz^3)-2z^3}{(z+ai)^3}|_{z=ia} = e^{-a}\frac{2ia(-3a^2+a^3)+2ia^3}{-i8a^3} = e^{-a}\frac{2-a}{4}$,

$\mathcal{I} = 2\pi i\frac{e^{-a}(2-a)}{4}$, $K(a) = \frac{\pi}{4}e^{-a}(2-a)$. Так как $a^2 = |a|^2$ и $|a| > 0$, то $K(a) = \frac{\pi}{4}e^{-|a|}(2-|a|)$. Это получено при $a \neq 0$. Однако, как и в примере 4.8, $K(0) \equiv \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim\limits_{a\to 0} K(a) = \frac{\pi}{2}$.

Пример 4.10. Найдем интеграл $A_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-6x+10}dx$. Рассмотрим ему в пару интеграл $B_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-6x+10}dx$. Составим и вычислим вспомогательный интеграл $\mathcal{I} = A_1 + iB_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-6x+10}dx$. Здесь $f(z) = \frac{z}{z^2-6z+10}$. Особые точки — когда $z^2 - 6z + 10 = 0$, $z_{1,2} = 3 \pm i$. Это простые полюсы; берется только точка $z_1 = 3 + i$. Пусть $R > |z_1| = \sqrt{10}$. Тогда $\mathcal{I} = \oint\limits_{L_R} f(z)e^{iz}dz = 2\pi i\cdot res_{z=z_1}\frac{ze^{iz}}{z^2-6z+10} = 2\pi i\frac{ze^{iz}}{2z-6}|_{z=z_1} = \pi(3+i)e^{3i-1} = \pi(3+i)e^{-1}(\cos 3+i\sin 3)$.
$A_1 = Re\mathcal{I} = \pi e^{-1}(3\cos 3 - \sin 3)$. Параллельно нашли и $B_1 = Im\mathcal{I} = \pi e^{-1}(3\sin 3 + \cos 3)$.

Пример 4.11. $B_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx =$? Составим интеграл $A_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \cos x}{x^4+5x^2+4} dx$ (хотя он равен нулю) и вспомогательный интеграл $\mathcal{I} = A_2 + iB_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+5x^2+4} e^{ix} dx$. Особые точки функции $f(z) = \frac{z^3}{z^4+5z^2+4}$ (она нечетная) находятся из условия $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$; $z^2 = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5\pm 3}{2}$; $z^2 = -1$, $z = \pm i$; $z^2 = -4$, $z = \pm 2i$. Берутся только точки $z_1 = i$ и $z_2 = 2i$. При $R > max\{|i|, |2i|\} = 2$ имеем $\mathcal{I} = \oint\limits_{L_R} f(z)e^{iz}dz = 2\pi i(res_{z_1}(f(z)e^{iz}) + res_{z_2}(f(z)e^{iz})) = 2\pi i \left(\frac{z^3 e^{iz}}{4z^3+10z}|_{z=z_1} + \frac{z^3 e^{iz}}{4z^3+10z}|_{z=z_2} \right) = \pi i \frac{4-e}{3e^2}$; $B_2 = Im\mathcal{I} = \pi \frac{4-e}{3e^2}$.

IV. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \le x \le b$, за исключением точки $d \in (a, b)$, то главным значением интеграла (по Коши) от нее по отрезку $[a, b]$ называется предел

$v.p. \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\epsilon \to +0} (\int\limits_a^{\alpha-\epsilon} f(x)dx + \int\limits_{\alpha+\epsilon}^b f(x)dx)$.

Если функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке $[A, B]$, то главным значением интеграла от нее по всей оси $(-\infty, +\infty)$ называется предел

$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B \to +\infty} \int\limits_{-B}^{B} f(x)dx$.

Если указанные интегралы существуют (сходятся) в обычном смысле, то главные значения с ними совпадают. Однако главные значения могут существовать и когда понимаемые в обычном смысле интегралы расходятся (v.p. — от фр. valeur principal).

Теорема 4.2. *Пусть $F(z) = f(z)e^{i\beta z}$, $\beta > 0$, и функция $f(z)$ удовлетворяет условиям: 1) регулярна в полуплоскости $Imz > 0$ кроме конечного числа особых точек $z_1, \dots, z_n$; 2) регулярна на действительной оси, кроме точек $x_1, \dots, x_m$, являющихся простыми полюсами; 3) $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ и $Imz \ge 0$. Тогда*

$$\mathcal{I} \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\beta x}dx = 2\pi i(\sum_{p=1}^{n} res \left(f(z)e^{i\beta z}\right)|_{z=z_p} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} res \left(f(z)e^{i\beta z}\right)|_{z=x_k}), \tag{4.6}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения (относительно всех точек x_k и ∞).

$\triangleright$Для доказательства рассмотрим интеграл от $F(z)$ по границе $\partial D \equiv \Gamma(R, \epsilon)$ области $D = \{Imz > 0, |z| < R, |z - x_1| > \epsilon, \dots, |z - x_m| > \epsilon\}$, где $R > \max\limits_{p,k}\{|z_p|, |x_k|\} \equiv R_0$ и число ϵ достаточно мало, именно, $\epsilon \le r/2$, где $r < q$, а q — наименьшее из расстояний между всеми точками x_k и z_p (см. рис. 4.2). Пусть $C_R = \{|z| = R > R_0, 0 \le argz \le \pi\}$ и $\ell_k = \{|z - x_k| = \epsilon, 0 \le argz \le \pi\}$ — полуокружности, а $L(R, \epsilon)$ — отрезок $[-R, R]$ с удаленными из него интервалами $x_k - \epsilon < x < x_k + \epsilon$, $(k = 1, \dots, m)$. По основной теореме о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma(R,\epsilon)} F(z)dz \equiv \int\limits_{C_R} F(z)dz + \int\limits_{L(R,\epsilon)} F(z)dz + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\ell_k} F(z)dz = 2\pi i \sum_{p=1}^{m} resF(z_p). \tag{4.7}$$

В этом равенстве (оно не зависит от R и от ϵ — по теореме Коши) перейдем к пределу при $R \to \infty$ и $\epsilon \to 0$. При этом интеграл по C_R стремится к нулю — по лемме Жордана. Чтобы найти предел интеграла по дуге ℓ_k, выделим из $F(z)$ главную часть в окрестности точки x_k (временно обозначим $x_k \equiv a$). По условию эта точка есть простой полюс для $f(z)$, то $F(z) \equiv f(z)e^{i\beta z} = \frac{c}{z-a} + \psi(z)$, где $c = resF(x_k)$, а функция $\psi(z)$ регулярна в точке a и поэтому в некоторой ее окрестности, именно, в круге $|z - a| \le r$, ограничена: $|\psi(z)| \le M = const$.

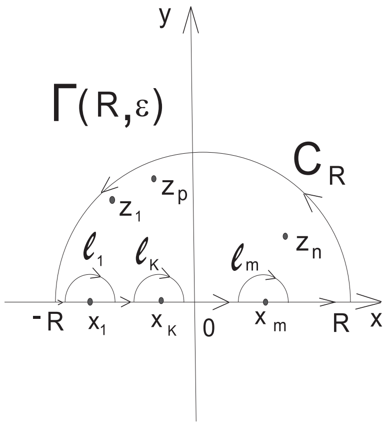

Рис. 4.2

Имеем

$$\int\limits_{\ell_k} F(z)dz = \int\limits_{\ell_k} \frac{c}{z-a}dz + \int\limits_{\ell_k} \psi(z)dz. \tag{4.8}$$

Параметрическое уравнение дуги ℓ_k есть $z - a = \epsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$, то $\int\limits_{\ell_k} \frac{1}{z-a}dz = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{\epsilon i e^{i\varphi} d\varphi}{\epsilon e^{i\varphi}} = -i\pi$. А $\left|\int\limits_{\ell_k} \psi(z)dz\right| \leq M \cdot$дл.$\cdot \ell_k = M \cdot \pi\epsilon \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Тогда из 4.7 при $R \to \infty$ и $\epsilon \to 0$ получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx - \sum\limits_{k=1}^{m} c \cdot i\pi = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{m} resF(z_k)$. Отсюда следует 4.6. (Иногда число c называют "полувычет ...". Вместо ℓ_k можно было брать дуги $\overline{\ell_k} = \{|z - x_k| = \epsilon, \pi \leq argz \leq 2\pi\}$, но тогда в (4.7) справа пришлось бы добавить сумму вычетов в точках $z = x_k$, а c заменить на $-c = i\pi$.)◁

Теорема 4.1 есть частный случай теоремы 4.2, и интегралы A и B из п. III, понимаемые теперь и в смысле главного значения, могут быть вычислены (когда $f(x)$ — вещественная функция) по тем же формулам 4.5.

Примеры.

Пример 4.12. Найдем $E = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. Составляем вспомогательный интеграл $\mathcal{I} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx$; для функции $f(z) = \frac{1}{z}$ точка $z = 0$ есть простой полюс. По формуле (4.6): $\mathcal{I} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} res_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} = \pi i \frac{e^{iz}}{1}|_{z=0} = \pi i$. Тогда $2E \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = Im\mathcal{I} = \pi$, откуда $E = \frac{\pi}{2}$. Это интеграл Лапласа-Дирихле-Эйлера. Он встречался и выше.

Пример 4.13. Вычислим интеграл $\mathcal{U} = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}dx$, $a > 0$, $b > 0$. В пару ему возьмем интеграл $\mathcal{V} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x^2}dx$ (он равен нулю) и образуем вспомогательный интеграл $\mathcal{I} = \mathcal{U} + i\mathcal{V} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$, где $F(z) = \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} = \frac{\left(1 + iaz + \frac{(iaz)^2}{2!} + \ldots\right) - \left(1 + ibz + \frac{(ibz)^2}{2!} + \ldots\right)}{z^2} = \frac{c}{z} + \psi(z)$, $c = i(a - b)$, $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ ($z = 0$ — простой полюс при $a \neq b$). Используя обозначения из доказательства теоремы 4.2, где все ℓ_k заменить одной дугой $\ell_\epsilon = \{|z| = \epsilon, \arg z \in [\pi, 0]\}$, по теореме Коши будем иметь $\oint\limits_{\Gamma(R,\epsilon)} F(z)dz = 0$, или $\int\limits_{C_R} F(z)dz + \left(\int\limits_{-R}^{-\epsilon} F(x)dx + \int\limits_{\epsilon}^{R} F(x)dx\right) + \int\limits_{\ell_\epsilon} F(z)dz = 0$. Отсюда, как и в ситуации с (4.8), при $R \to \infty$, $\epsilon \to +0$ получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx - ci\pi = 0$, $\mathcal{I} = \pi(b-a)$, $\mathcal{U} = Re\mathcal{I} = \pi(b-a)$.

V. С помощью вычетов можно находить "неопределенные коэффициенты" при разложении правильной рациональной дроби на простейшие. Именно, пусть $\frac{Q(z)}{P(z)}$ — правильная рациональная дробь, z_k — нули знаменателя $P(z)$, m_k — их кратности ($k = 1, 2, \ldots, s$). Тогда $R(z) \equiv \frac{Q(z)}{P(z)} = \sum\limits_{k=1}^{s} \left(\frac{c_{1,k}}{z-z_k} + \frac{c_{2,k}}{(z-z_k)^2} + \cdots + \frac{c_{m_k,k}}{(z-z_k)^{m_k}}\right)$.

Умножив на $(z-z_k)^{\nu-1}$, обнаружим, что

$c_{\nu,k} = res_{z=z_k}\left[(z-z_k)^{\nu-1}R(z)\right] = \frac{1}{(m_k-\nu)!}\lim\limits_{z\to z_k}\frac{d^{m_k-\nu}}{dz^{m_k-\nu}}\left[(z-z_k)^{m_k}R(z)\right]$ ($\nu = 1, \ldots, m_k$; $k = 1, \ldots, s$).

Примеры.

Пример 4.14. $R(z) \equiv \frac{5z-3}{(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z+i} + \frac{D}{z-i}$ (C и D — комплексно-сопряженные числа: $D = \overline{C}$).

$A = resR(1) = \lim\limits_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{5z-3}{z^2+1}\right) = \frac{(z^2+1)5-(5z-3)2z}{(z^2+1)^2}|_{z=1} = \frac{3}{2}$. $B = res_{z=1}(R(z)(z-1)) = \lim\limits_{z\to 1}\left[(z-1)R(z)(z-1)\right] = 1$; $C = resR(-i) = \lim\limits_{z\to -i}\frac{5z-3}{(z-i)(z-1)^2} = -\frac{3}{4} - i\frac{5}{4}$, $D = resR(i) = \lim\limits_{z\to i}\frac{5z-3}{(z+i)(z-1)^2} = -\frac{3}{4} + i\frac{5}{4} = \overline{C}$.

"Обычным" методом: $R(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{Ez+F}{z^2+1}$ (A, B, E, F — действительные числа),

$$A(z-1)(z^2+1) + B(z^2+1) + (Ez+F)(z-1)^2 \equiv 5z-3. \tag{4.9}$$

Полагаем ("способ подстановки" или "метод пробных чисел") $z = 1$, то $B \cdot 2 = 2$, $B = 1$. Остальные коэффициенты находим из системы — приравниваем коэффициенты при z^3, z^2, z^1 (приравнивание свободных членов уже излишне): $A + E = 0$, $-A + B + F - 2E = 0$, $A - 2F + E = 5$. Отсюда $F = -\frac{5}{2}$, $E = -\frac{3}{2}$, $A = \frac{3}{2}$. Можно и так: в (4.9) полагаем $z = i$, то $(Ei + F)(i-1)^2 = 5i - 3$, откуда $E = -\frac{3}{2}$, $F = -\frac{5}{2}$.

VI. Пусть дана функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n \tag{4.10}$$

с условием $\sigma \equiv \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ (тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = 0$, так что по теореме Коши-Адамара ряд сходится в круге $|z| < \infty$ и потому $F(z)$ — целая функция). Поставим ей в соответствие ряд Лорана

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{t^{n+1}}; \tag{4.11}$$

по теореме Коши-Адамара этот ряд сходится когда $\left|\frac{1}{t}\right| < \frac{1}{\sigma}$, то есть $|t| > \sigma$, причем $\gamma(\infty) = 0$.

Справедливо интегральное представление (Бореля)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\gamma(t)e^{zt}dt, \tag{4.12}$$

где замкнутый контур C содержит внутри себя все особые точки функции $\gamma(t)$ (в частности, содержит круг $|t| \le \sigma$; хотя бы одна особая точка имеет вид $\sigma e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$).

▷Для доказательства контур C заменим окружностью $|t| = q > \sigma$ (это можно по теореме Коши), затем проинтегрируем почленно(имея в виду 4.11) и учтем, что $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=q} \frac{1}{t^{n+1}}e^{zt}dt = res_{t=0}\frac{e^{zt}}{t^{n+1}} = \frac{1}{n!}\lim\limits_{t\to 0}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n+1}\frac{e^{zt}}{t^{n+1}}\right) = \frac{1}{n!}z^n e^{zt}|_{t=0} = \frac{z^n}{n!}$. Или, с помощью ряда Лорана: $\frac{1}{t^{n+1}}e^{zt} = \frac{1}{t^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k t^k}{k!}$ — коэффициент при $\frac{1}{t}$ есть $\frac{z^n}{n!}$. Итак, получится ряд 4.10.◁

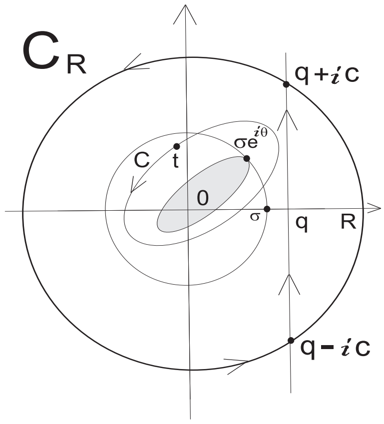

Рис. 4.3

В интеграле 4.12 в качестве C возьмем замкнутый контур $\Gamma_R = C_R + [q - ic, q + ic]$, где $C_R = \{|t| = R > q, Ret \le q\}$ и $[q - ic, q + ic]$ $(c > 0)$ — вертикальный отрезок (см. рис. 4.3). Имеем $2\pi i \cdot F(z) = \oint\limits_{\Gamma_R}\gamma(t)e^{zt}dt = \int\limits_{C_R}\gamma(t)e^{zt}dt + \int\limits_{q-ic}^{q+ic}\gamma(t)e^{zt}dt, \forall R > q$.

Переходим к пределу при $R \to \infty$, считая $z > 0$. В силу леммы Жордана интеграл по C_R стремится к нулю, и получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{q-i\infty}^{q+i\infty}\gamma(t)e^{zt}dt, z > 0. \tag{4.13}$$

Функция $F(z)$ называется *целой функцией экспоненциального типа* σ, $\gamma(t)$ — *ассоциированной с ней (по Борелю)*, а 4.13 называется *интеграл (формула) Меллина* (она справедлива и при более общих предположениях). Факт взаимосвязи функций $F(z)$ и $\gamma(t)$ отметим символом $F(z)_{\bullet}\!\!\Longrightarrow^{\bullet}\gamma(t)$. С точки зрения "Операционного исчисления" функция $F(z)$ называется *оригиналом*, а $\gamma(t)$ — ее *изображением* (по Лапласу); формула 4.10 определяет *первую теорему разложения*: по ней отыскивается оригинал $F(z)$, когда дано изображение $\gamma(t)$ в форме 4.11.

Отметим из "Операционного исчисления" следующий факт, связанный с вычетами. Если изображение $Y(p)$регулярно во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, кроме конечного числа особых точек $p = a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ (это полюсы или существенно особые точки), то оригинал $y(t)$ можно восстановить с помощью *2-ой теоремы разложения*, именно по формуле $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} res_{p=a_k}(Y(p)e^{pt})$, $t > 0$.

5. Логарифмический вычет

Определение 5.1. *Логарифмическим вычетом регулярной функции $f(z)$ в точке a называется вычет ее логарифмической производной* $(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$ *в этой точке.*

Пусть функция $f(z)$ имеет представление $f(z) = (z-a)^q \varphi(z)$, $\varphi(z) \in H(a)$, $\varphi(a) \neq 0$, $q \in \mathbb{Z}$. Тогда $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{q}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \in H(a)$, то есть логарифмическая производная в точке a будет иметь простой полюс и $res_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = q$. Таким образом, логарифмический вычет функции $f(z)$ в ее нуле a равен кратности нуля: случай $q = m \geq 1$, а в полюсе — кратности полюса, взятому с обратным знаком: случай $q = -p$, $p \geq 1$.

Введем условие $A(C)$: функция $f(z)$ регулярна на замкнутом контуре C, не имеет на нем нулей, а внутри C в качестве особых точек может иметь только полюсы. (Тогда, согласно *внутренней теореме единственности* и *определению полюса*, внутри C функция $f(z)$ может иметь лишь конечное число нулей и полюсов.)

Из установленного выше и *Основной теоремы Коши о вычетах* непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 5.1. *При условии $A(C)$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum res \frac{f'(z)}{f(z)} = \mathcal{N} - \mathcal{P}, \qquad (*)$$

где $\mathcal{N}$ — число нулей, $\mathcal{P}$ — число полюсов функции $f(z)$ внутри C, с учетом их кратностей.

Интеграл, стоящий в левой части равенства $(*)$, называется *логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура C.*

Примеры.

Пример 5.1. $\int\limits_{|z|=9} \operatorname{tg} z dz = -2\pi i \cdot 6$, так как $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -\frac{(\cos z)'}{\cos z}$. Функция $f(z) = \cos z$ полюсов (и вообще конечных особых точек) не имеет, так что $\mathcal{P} = 0$, и имеет нули $z = z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ — они простые, так как $f'(z_k) = -\sin z_k \neq 0$; внутрь окружности $|z| = 9$ попадают нули с $k = 0, \pm 1, \pm 2, 3$ — их всего $\mathcal{N} = 6$.

Пример 5.2. Найдем логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов и относительно контура $C : |z| = 10$ для функции $f(z) = \frac{(e^{\pi z}+1)^2}{(1-\cos z)^3}$. Находим нули: $e^{\pi z} + 1 = 0$, $e^{\pi z} = -1$, $\pi z = Ln(-1) = \ln(-1) + i2k\pi = (\ln 1 + i\pi) + i2k\pi$, $z = z_k = i(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$; у функции $e^{\pi z} + 1$ нули простые, поскольку $(e^{\pi z} + 1)' = \pi e^{\pi z} \neq 0$. Тогда у функции $f(z)$ все нули z_k кратности $m = 2$ (знаменатель в этих точках в нуль не обращается). Полюсы функции $f(z)$ найдутся как нули знаменателя. Имеем: $1 - \cos z = 0$, $\cos z = 1$, $z = 2\pi n = \zeta_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $(1 - \cos z)' = \sin z|_{z=\zeta_n} = 0$, $(1 - \cos z)'' = \cos z|_{z=\zeta_n} = 1 \neq 0$. У функции $1 - \cos z$ все нули кратности 2. то у функции $(1 - \cos z)^3$ они кратности $2 \cdot 3 = 6$, и соответственно у $f(z)$ это полюсы кратности $\mathcal{P} = 6$. Тогда по формуле $(*)$ получим $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=10} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N} - \mathcal{P} = 10 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = 2$, так как следует взять $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 5$ и $n = 0, \pm 1$.

6. Упражнения для самостоятельной работы

Упражнения к разделу 1

Упражнение 6.1. *Вычислить* $\int\limits_C Imz dz$ *по путям: 1)* C *— радиус-вектор точки* $z = 2+i$*, 2)* C *— ломаная, состоящая из прямолинейного отрезка, соединяющего точку* 0 *с точкой* i*, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку* i *с точкой* $2+i$*, 3)* C *— полуокружность* $\{|z| = 2, 0 \le arg z \equiv \varphi \le \pi\}$ *(начало в точке* $z = 2$*).*

Указание: полезно применить формулу $sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$*.*

Упражнение 6.2. *Вычислить интегралы* $I_1 = \int xdz$*,* $I_2 = \int ydz$ *по следующим путям:*
1) по полуокружности $|z| = 1$*,* $0 \le arg z \le \pi$ *(начало пути в точке* $z = 1$*);*
2) по окружности $|z - a| = R$*.*

(Ответы: 1) $I_1 = \frac{i\pi}{2}$*,* $I_2 = -\frac{i\pi}{2}$*; 2)* $I_1 = i\pi R^2$*,* $I_2 = -i\pi R^2$*.)*

Упражнение 6.3. *Вычислить интеграл* $\int |z|\, dz$ *по следующим путям:*
1) по радиусу-вектору точки $z = 2 - i$*;*
2) по полуокружности $|z| = 1$*,* $0 \le arg z \le \pi$ *(начало пути в точке* $z = 1$*);*
3) по полуокружности $|z| = 1$*,* $-\frac{\pi}{2} \le arg z \le \frac{\pi}{2}$ *(начало пути в точке* $z = -i$*);*
4) по окружности $|z| = R$*.*

(Ответы: 1) $\sqrt{5}(1 - \frac{i}{2})$*; 2)* 2*; 3)* $2i$*; 4)* 0*.)*

Упражнение 6.4. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C |z|^2\, dz$*, где* C *— единичная окружность* $|z| = 1$.

(Ответ: 0*.)*

Упражнение 6.5. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C |z|\, \overline{z} dz$*, где* C *— замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности* $|z| = 1$ *и отрезка* $-1 \le x \le 1$*,* $y = 0$*.*

(Ответ: πi*.)*

Упражнение 6.6. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C e^{\overline{z}}dz$, *где:*

1) C *— ломаная, соединяющая точки* 0, 1 *и* $1+i$*;*

2) C *— ломаная, соединяющая точки* 0, i *и* $1+i$.

(Ответы: 1) $e(2-e^{-i}-1)$*; 2)* $1+e^{-i}(e-2)$.*)*

Упражнение 6.7. *Вычислить интегралы вдоль отрезка прямой с началом в точке* $z_1 = 0$ *и концом* $z_2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ *от следующих функций:*

1) $f(z) = e^{|z|^2 Rez}$*;*

2) $f(z) = e^{z^2 Rez}$*;*

3) $f(z) = \frac{|z|}{1+|z|}$.

(Ответы: 1) $\frac{e-1}{8}(1+i\sqrt{3})$*; 2)* $\frac{1}{8}(1-i\sqrt{3})(\exp(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{3})-1)$.*)*

Упражнение 6.8. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C \operatorname{tg} z dz$, *где* C *— дуга параболы* $y = x^2$, *соединяющая точки* $z_1 = 0$ *и* $z_2 = 1+i$.

(Ответ: $-\ln\sqrt{\operatorname{sh}^2 1+\operatorname{ch}^2 1}+i\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}1\cdot\operatorname{th}1)$.*)*

Упражнение 6.9. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C \frac{z}{\overline{z}}dz$, *где* C *— граница полукольца:* $|z| \leq 2$, $|z| \geq 1$, $y \geq 0$.

(Ответ: $\frac{4}{3}$.*)*

Упражнение 6.10. *Вычислить интеграл* $\int(z-a)^n dz$ *(*n *— целое число):*

1) по полуокружности $|z-a| = R$, $0 \leq arg(z-a) \leq \pi$ *(начало пути в точке* $z = a+R$*);*

2) по окружности $|z-a| = R$*;*

3) по периметру квадрата с центром в точке a *и сторонами, параллельными осям координат.*

(Ответы: 1) $\frac{R^{n+1}}{n+1}[(-1)^{n+1}-1]$, *если* $n \neq -1$*;* πi, *если* $n = -1$*; 2) и 3)* 0, *если* $n \neq -1$*;* $2\pi i$, *если* $n = -1$.*)*

Упражнение 6.11. *Вычислить интеграл* $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ *по следующим контурам:*
1) по полуокружности $|z| = 1$, $y \geq 0$, $\sqrt{1} = 1$;
2) по полуокружности $|z| = 1$, $y \geq 0$, $\sqrt{1} = -1$;
3) по полуокружности $|z| = 1$, $y \leq 0$, $\sqrt{1} = 1$;
4) по окружности $|z| = 1$, $\sqrt{1} = 1$;
5) по окружности $|z| = 1$, $\sqrt{-1} = i$.

(Стоящая под знаком интеграла ветвь многозначной функции выделяется заданием ее значения в некоторой точке контура интегрирования. Если контур замкнут, то начальной точкой пути интегрирования всегда считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции. Следует иметь в виду, что величина интеграла может зависеть от выбора этой начальной точки.)

(Ответы: 1) $-2(1-i)$; *2)* $2(1-i)$; *3)* $-2(1+i)$; *4)* -4; *5)* $4i$.*)*

Упражнение 6.12. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C Lnz dz$, *где:*
1) C *— единичная окружность и* $Ln1 = 0$;
2) C *— единичная окружность и* $Lni = \frac{\pi i}{2}$;
3) C *— окружность* $|z| = R$ *и* $LnR = \ln R$;
4) C *— окружность* $|z| = R$ *и* $LnR = \ln R + 2\pi i$.

(Стоящая под знаком интеграла ветвь многозначной функции выделяется заданием ее значения в некоторой точке контура интегрирования. Если контур замкнут, то начальной точкой пути интегрирования всегда считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции. Следует иметь в виду, что величина интеграла может зависеть от выбора этой начальной точки.)

(Ответы: 1) $2\pi i$; *2)* $-2\pi i$; *3)* $2\pi Ri$; *4)* $2\pi Ri$.*)*

Упражнение 6.13. *Вычислить* $\int\limits_c Lnz dz$ *по путям: 1)* $C = \{|z| = e, Lne = 1\}$; *2)* $C = \{|z| = e, Ln(ie) = 1 + \frac{\pi i}{2}\}$.

(Стоящая под знаком интеграла ветвь многозначной функции выделяется заданием ее значения в некоторой точке контура интегрирования. Если контур замкнут, то начальной точкой пути интегрирования всегда считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции. Следует иметь в виду, что величина интеграла может зависеть от выбора этой начальной точки.)

Упражнение 6.14. *Вычислить интегралы для всех ветвей многозначных аналитических функций, стоящих под знаком интеграла:*
1) $\int\limits_{|z|=2,9} \frac{dz}{2+\ln(z+3)}$;

2) $\int\limits_{|z|=0,5} \frac{\ln(z+1)}{\sin \pi z} dz.$

(Ответы: 1) $2\pi i \cdot e^{-2}$*, если* $\ln(z+3)|_{z=0} = \ln 3$*;* 0*, если* $\ln(z+3)|_{z=0} = \ln 3 + 2k\pi i$*, где* $k \neq 0$*; 2)* $-4k\pi$*, если* $\ln(1+z)|_{z=0} = 2\pi i \cdot k$*.)*

Упражнение 6.15. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{|z|=5} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{z-3} dz$ *двумя способами.*

(Ответ: $4 \cdot 2\pi i$*.)*

Упражнение 6.16. *Вычислить интеграл* $\mathcal{B}_k = \int\limits_{|z|=0,1} \frac{e^{5z}-1-5z}{z^k \sin^2 z} dz$ *для* $k = 1, 2$*.*

(Ответ: $\mathcal{B}_1 = 25\pi i$*,* $\mathcal{B}_2 = 2\pi i \frac{5^3}{3!}$*.)*

Упражнение 6.17. *Какое число различных значений может принимать интеграл* $\int\limits_C \frac{dz}{\omega_n(z)}$*, где* $\omega_n(z) = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$*,* $(z_i \neq z_j$ *при* $i \neq j)$ *и контур* C *не проходит через точки* z_i $(i = \overline{1,n})$*?*

(Ответ: $2^n - 1$*, если* $n \geq 2$*;* 2*, если* $n = 1$*.)*

Вычислить интегралы по контурам $C = C_\nu = |z - z_\nu| = \epsilon$*,* $\epsilon < \min|z_i - z_j|$*.*

Упражнение 6.18. *Показать, что если путь интегрирования не проходит через начало координат, то* $\int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi ik$*, где* k *— целое число, указывающее, сколько раз путь интегрирования обходит начало координат* $(z = re^{i\varphi})$*.*

Упражнение 6.19. *Показать, что если путь не проходит через точки* $\pm i$*, то* $\int\limits_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + \pi k$*, где* k *— целое число.*

Упражнение 6.20. *Показать, что если* C *— произвольный простой замкнутый контур, не проодящий через точку* a*, и* n *— целое число, то* $\int\limits_C (z-a)^n dz = 2\pi i$*, если* $n = -1$ *и* a *— внутри* C*;* $\int\limits_C (z-a)^n dz = 0$*, если* $n = -1$ *и* a *— вне* C *и* $\int\limits_C (z-a)^n dz = 0$*, если* $n \neq -1$*.*

Упражнение 6.21. *Вычислить интеграл* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} z^n e^{\frac{2}{z}}dz$, $n\in\mathbb{Z}$.

(Ответ: $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, *если* $n\geq -1$; 0, *если* $n\leq -2$.*)*

Упражнение 6.22. *Доказать:* $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}cos2bxdx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$.

Указание: интегрировать функцию $f(z)=e^{-z^2}$ *по границе прямоугольника* $\{|x|\leq R, 0\leq y\leq b\}$, *затем перейти к пределу при* $R\to\infty$ *(будет доказано равенство интегралов от* e^{-z^2} *по прямым* $(-\infty,+\infty)$ *и* $(-\infty+ib,+\infty+ib)$*).*

Упражнение 6.23. *Используя формулу Коши, вычислить* $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z(z-2i)}$ *по окружностям* $|z|=1$ *и* $|z-3i|=2$.

Упражнение 6.24. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9}$, *если:*

1) точка $3i$ *лежит внутри контура* C, *а точка* $-3i$ *вне его;*

2) точка $-3i$ *лежит внутри контура* C, *а точка* $3i$ *вне его;*

3) точки $\pm 3i$ *лежат внутри контура* C.

(C *— простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура* C *— против часовой стрелки.)*

(Ответы: 1) $\frac{\pi}{3}$; *2)* $-\frac{\pi}{3}$; *3)* 0.*)*

Упражнение 6.25. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C \frac{z^2dz}{z-2i}$, *если:*

1) C *— окружность радиуса* 3 *с центром в начале координат;*

2) C *— окружность радиуса* 1 *с центром в начале координат.*

(C *— простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура* C *— против часовой стрелки.)*

(Ответы: 1) $-8\pi i$; *2)* 0.*)*

Упражнение 6.26. *Вычислить все возможные значения интеграла* $\int\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ *при различных положениях контура* C. *Предполагается, что контур* C *не проходит ни через одну из точек* 0, 1 *и* -1. *(*C *— простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура* C *— против часовой стрелки.)*

(Ответы: Если контур C содержит внутри себя точку 0 и не содержит 1 и -1, то $I = -2\pi i$; если содержит только одну из точек -1 или 1 и не содержит точку 0, то $I = \pi i$. Отсюда ясно, что интеграл может принимать пять различных значений ($-2\pi i$; $-\pi i$; 0; πi; $2\pi i$).)

Упражнение 6.27. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1}$, $a > 1$. *(C — простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура C — против часовой стрелки.)*
(Ответ: $\frac{\pi i}{2}$*.)*

Упражнение 6.28. *Вычислить интеграл* $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, *если контур C содержит внутри себя круг $|z-a| \leq a$. (C — простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура C — против часовой стрелки.)*
(Ответ: $\frac{\sin a}{a}$*.)*

Упражнение 6.29. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{C} \frac{\sin z dz}{z+i}$, *если C — окружность с центром в точке $-i$. (C — простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура C — против часовой стрелки.)*
(Ответ: $\pi\left(e - \frac{1}{e}\right) = 2\pi \operatorname{sh} 1$*.)*

Упражнение 6.30. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{|z|=5} \frac{zdz}{\sin z \cdot (1-\cos z)}$.
(Ответ: 0; это можно определить, не вычисляя интеграл. Почему?)

Упражнение 6.31. *Вычислить интеграл* $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, *если точка a лежит внутри контура C. (C — простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура C — против часовой стрелки.)*
Указание: Воспользоваться формулами для производных интеграла Коши.
(Ответ: $e^a\left(1 + \frac{a}{2}\right)$*.)*

Упражнение 6.32. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{C} \frac{dz}{(z^2+9)^2}$, *если:*
1) C — окружность радиуса 2 с центром в точке $2i$;
2) C — окружность радиуса 2 с центром в точке $-2i$.

(C — простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура C — против часовой стрелки.)

(Ответы: 1) $\frac{\pi}{54}$*; 2)* $-\frac{\pi}{54}$*.)*

Упражнение 6.33. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C \frac{e^z dz}{(z+2)^4}$, *если точка* $z=-2$ *лежит внутри замкнутого контура* C. *(C — простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура C — против часовой стрелки.)*

(Ответ: $\frac{\pi i}{3e^2}$*.)*

Упражнение 6.34. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, *если:*

1) C *— окружность радиуса* $R<2$ *с центром в точке* $z=1$*;*

2) C *— окружность радиуса* $R<2$ *с центром в точке* $z=-1$*;*

3) C *— окружность радиуса* $R>1$ *с центром в точке* $z=0$*.*

(C — простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура C — против часовой стрелки.)

(Ответы: 1) $\frac{3\pi i}{8}$*; 2)* $-\frac{3\pi i}{8}$*; 3)* 0*.)*

Упражнение 6.35. *Вычислить интеграл* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, *если:*

1) точка 0 *лежит внутри, а точка* 1 *вне контура* C*;*

2) точка 1 *лежит внутри, а точка* 0 *вне контура* C*;*

3) точки 0 *и* 1 *обе лежат внутри контура* C*.*

(C — простой замкнутый спрямляемый контур, направление вдоль контура C — против часовой стрелки.)

(Ответы: 1) 1*; 2)* e*; 3)* $1+e$*.)*

Упражнения к разделу 2

Упражнение 6.36. *Найти особые точки следующих функций:*

a) $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$*; b)* $\frac{1}{\sin z+\cos z}$*; c)* $\frac{1-e^z}{1+e^z}$*.*

Упражнение 6.37. *Определить характер точки $z = 0$ для следующих функций:*
a) $\frac{e^z}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$; *b)* $(e^z - 1 - z)\operatorname{ctg}^3 z$; *c)* $e^{\frac{1}{z^2 - z}}$.

Упражнение 6.38. *Найти порядок нуля $z = 0$ для функций:*
1) $z^2(e^{z^2} - 1)$; *2)* $6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$; *3)* $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

(Ответы: 1) 4; 2) 15; 3) 3.)

Упражнение 6.39. *Найти порядки всех нулей данных функций:*

1) $z^2 + 9$; *2)* $\frac{z^2+9}{z^4}$; *3)* $z\sin z$; *4)* $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$; *5)* $1 - \cos z$; *6)* $\frac{(z^2-\pi^2)^2 \sin z}{z^7}$; *7)* $\frac{1-\operatorname{ctg} z}{z}$; *8)* $e^{\operatorname{tg} z}$; *9)* $\sin^3 z$; *10)* $\frac{\sin^3 z}{z}$; *11)* $\sin z^3$; *12)* $\cos^3 z$; *13)* $\cos z^3$; *14)* $(\sqrt{z} - 2)^3$; *15)* $\left(1 - \sqrt{2 - 2\cos z}\right)^2$.

(Ответы: 1) точки $z = \pm 3i$ — нули 1-го порядка;
2) точки $z = \pm 3i$ — нули 1-го порядка, $z = \infty$ — нуль 2-го порядка;
3) $z = 0$ — нуль 2-го порядка, $z = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ — нули 1-го порядка;
4) $z = \pm 2$ — нули 3-го порядка, $z = 2k\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ — нули 1-го порядка;
5) $z = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ — нули 2-го порядка;
6) $z = \pm\pi$ — нули 3-го порядка, все остальные точки вида $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 2, \pm 3, \dots)$ — нули 1-го порядка;
7) $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ — нули 1-го порядка;
8) нулей нет;
9) $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ — нули 3-го порядка;
10) $z = 0$ — нуль 2-го порядка, $z = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ — нули 3-го порядка;
11) $z = 0$ — нуль 3-го порядка, $z = \sqrt[3]{k\pi}$ и $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{k\pi}(1 \pm i\sqrt{3})$ $(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ — нули 1-го порядка;
12) $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ — нули 3-го порядка;
13) $z = \sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ и $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}(1 \pm i\sqrt{3})$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ — нули 1-го порядка;
14) $z = 4$ — нуль 3-го порядка для одной из ветвей;
15) Здесь заданы две функции: одна из них имеет нули 2-го порядка в точках $z = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ другая — нули 2-го порядка в точках $z = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.)

Упражнения к разделу 3

Упражнение 6.40. *Найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удаленной точки (если она не является предельной для особых точек).*

1) $\frac{1}{z^3 - z^5}$; *2)* $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$; *3)* $\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ *(n — натуральное число)*; *4)* $\frac{1}{z(1-z^2)}$; *5)* $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$; *6)* $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; *7)* $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; *8)* $\operatorname{tg} z$; *9)* $\frac{1}{\sin z}$; *10)* $\operatorname{ctg}^2 z$; *11)* $\operatorname{ctg}^3 z$; *12)* $\cos\frac{1}{z-2}$; *13)* $z^3\cos\frac{1}{z-2}$; *14)* $e^{z+\frac{1}{z}}$;

15) $\sin z\sin\frac{1}{z}$; *16)* $\sin\frac{z}{z+1}$; *17)* $\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3}$; *18)* $\frac{1}{z(1-e^{-hz})}$ $(h\neq 0)$; *19)* $z^n\sin\frac{1}{z}$ *(n — целое число)*; *20)* $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$; *21)* $\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

(Ответы: 1) $res[f(z)]_{z=\pm1}=-\frac{1}{2}$; $res[f(z)]_{z=0}=1$; $res[f(z)]_{z=\infty}=0$;

2) $res[f(z)]_{z=i}=-\frac{i}{4}$; $res[f(z)]_{z=-i}=\frac{i}{4}$; $res[f(z)]_{z=\infty}=0$;

3) $res[f(z)]_{z=-1}=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$; $res[f(z)]_{z=\infty}=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$;

4) $res[f(z)]_{z=0}=1$; $res[f(z)]_{z=\pm1}=-\frac{1}{2}$; $res[f(z)]_{z=\infty}=0$;

5) $res[f(z)]_{z=0}=0$; $res[f(z)]_{z=1}=1$; $res[f(z)]_{z=\infty}=-1$;

6) $res[f(z)]_{z=-1}=2\sin 2$; $res[f(z)]_{z=\infty}=-2\sin 2$;

7) $res[f(z)]_{z=0}=\frac{1}{9}$; $res[f(z)]_{z=3i}=-\frac{1}{54}(\sin 3-i\cos 3)$; $res[f(z)]_{z=-3i}=-\frac{1}{54}(\sin 3+i\cos 3)$; $res[f(z)]_{z=\infty}=\frac{1}{27}(\sin 3-3)$;

8) $res[f(z)]_{z=\frac{2k+1}{2}\pi}=-1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$;

9) $res[f(z)]_{z=k\pi}=(-1)^k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$;

10) $res[f(z)]_{z=k\pi}=0$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$;

11) $res[f(z)]_{z=k\pi}=-1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$;

12) $res[f(z)]_{z=2}=res[f(z)]_{z=\infty}=0$;

13) $res[f(z)]_{z=2}=-res[f(z)]_{z=\infty}=-\frac{143}{24}$;

14) $res[f(z)]_{z=0}=-res[f(z)]_{z=\infty}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$;

15) $res[f(z)]_{z=0}=res[f(z)]_{z=\infty}=0$;

16) $res[f(z)]_{z=-1}=-res[f(z)]_{z=\infty}=-\cos 1$;

17) $res[f(z)]_{z=-3}=-res[f(z)]_{z=\infty}=-\sin 2\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\right]$;

18) $res[f(z)]_{z=0}=\frac{1}{2}$; $res[f(z)]_{z=\frac{2k\pi i}{h}}=\frac{1}{2k\pi i}$ $(k=\pm1,\pm2,\dots)$;

19) $res[f(z)]_{z=0}=0$, *если* $n<0$, *а также если* $n>0$ *— нечетное;* $res[f(z)]_{z=0}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$, *если* $n=0$ *или* $n>0$ *— четное;* $res[f(z)]_{z=\infty}=-res[f(z)]_{z=0}$;

20) $res[f(z)]_{z=\frac{1}{k\pi}}=(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2\pi^2}$ $(k=\pm1,\pm2,\dots)$; $res[f(z)]_{z=\infty}=\frac{2}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{1}{6}$;

21) $res[f(z)]_{z=k^2\pi^2}=(-1)^k 2k^2\pi^2$ $(k=1,2,\dots)$.*)*

Упражнение 6.41. *Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.*

$\int\limits_C\frac{dz}{z^4+1}$, *где* C *— окружность* $x^2+y^2=2x$.

(Ответ: $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$.*)*

Упражнение 6.42. *Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.*

$\int\limits_C\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, *где* C *— окружность* $|z-2|=\frac{1}{2}$.

(Ответ: $-2\pi i$.*)*

Упражнение 6.43. *Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.*
$\int\limits_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, *где* C *— окружность* $|z| = 2$.
(Ответ: $-\frac{\pi i}{121}$*.)*

Упражнение 6.44. *Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.*
$\int\limits_C \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$, *где* C *— окружность* $|z| = 1$.
(Ответ: πi*.)*

Упражнение 6.45. *Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.*
$\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$, *где* C *— окружность* $|z| = 1$.
(Ответ: $-\frac{2\pi i}{9}$*.)*

Упражнение 6.46. *Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.*
$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \sin \frac{1}{z} dz$, *где* C *— окружность* $|z| = r$.
(Ответ: 1*.)*

Упражнение 6.47. *Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.*
$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \sin^2 \frac{1}{z} dz$, *где* C *— окружность* $|z| = r$.
(Ответ: 0*.)*

Упражнение 6.48. *Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.*
$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C z^n e^{\frac{2}{z}} dz$, *где* n *— целое число, а* C *— окружность* $|z| = r$.
(Ответ: $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, *если* $n \geq -1$, *и* 0, *если* $n < -1$*.)*

Упражнение 6.49. *Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.*

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(z)dz}{zg(z)}$, *если простой контур* C *ограничивает область* G, *содержащую точку* $z=0$, *функция* $f(z)$ *аналитична в замкнутой области* $\overline{G}$, *функция* $\frac{1}{g(z)}$ *аналитична на* C, *а в области* G *не имеет других особых точек, кроме простых полюсов* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($a_k \neq 0$ *при любом* k).

(Ответ: $\frac{f(0)}{g(0)} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)}{a_k g'(a_k)}$*.)*

Упражнение 6.50. *Вычислить интегралы для всех ветвей многозначных аналитических функций, стоящих под интеграла (при вычислении контурных интегралов от однозначных ветвей многозначных аналитических функций необходимо следить за тем, чтобы вычеты брались от нужной ветви):*

1) $\int\limits_{\partial D}\frac{dz}{2+\ln(z+3)}$, $D: |z| < 2,9$;

2) $\int\limits_{\partial D}\frac{\cos z dz}{\ln z + \pi i}$, $D: |z+1| < \frac{1}{2}$;

3) $\int\limits_{\partial D}\frac{\operatorname{arctg} z}{z}dz$, $D: |z| > 2$;

4) $\int\limits_{\partial D}\frac{dz}{\sqrt{4z^2+4z+3}}$, $D: |z| > 1$.

(Ответы:

1) $2\pi i e^{-2}$, *если* $\ln(z+3)|_{z=0} = \ln 3$, *и* 0, *если* $\ln(z+3)|_{z=0} = \ln 3 + 2k\pi i$, $k \neq 0$;

2) $-2\pi i \cos 1$, *если* $\ln z|_{z=-1} = \pi i$, *и* 0 *для остальных ветвей;*

3) $-\pi^2 i(2k+1)$, *если* $\operatorname{arctg} z|_{z=\infty} = \pi(k+\frac{1}{2})$;

4) $-\pi i$, *если* $\sqrt{4z^2+4z+3} > 0$ *при* $z > 1$, *и* πi, *если* $\sqrt{4z^2+4z+3} < 0$ *при* $z > 1$.*)*

Упражнение 6.51. *Вычислить интеграл* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$, *где* C *— окружность* $|z| = r \neq 1$.

(Ответ: 0, *если* $r < 1$; ± 1, *если* $r > 1$ *(знак зависит от выбора ветви подынтегральной функции).)*

Упражнения к разделу 4

Упражнение 6.52. *Используя представление функций* $F(z) = e^{az}, \sin\omega z, \cos\omega z$ *в виде 4.10, найти соответствующие функции* $\gamma(t)$ *по формуле 4.11. (Ответ:* $\gamma(t) = \frac{1}{t-a}, \frac{\omega}{t^2+\omega^2}, \frac{t}{t^2+\omega^2}$*.)*

Упражнение 6.53. *Найти определенный интеграл* $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ $(a > 1)$.

(Ответ: $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$*.)*

Упражнение 6.54. *Найти определенный интеграл* $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$ $(a > b > 0)$.

(Ответ: $\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$*.)*

Упражнение 6.55. *Найти определенный интеграл* $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

(Ответ: $\frac{(2a+b)\pi}{[a(a+b)]^{\frac{3}{2}}}$*.)*

Упражнение 6.56. *Найти определенный интеграл* $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ *(a — комплексное число и $a \neq \pm 1$).*

(Ответ: $\frac{2\pi}{1-a^2}$*, если* $|a| < 1$*;* $\frac{2\pi}{a^2-1}$*, если* $|a| > 1$*; 0 (главное значение), если* $|a| = 1$*,* $a \neq \pm 1$ *(при* $a = \pm 1$ *главное значение не существует).)*

Упражнение 6.57. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$.

(Ответ: $-\frac{\pi}{27}$*.)*

Упражнение 6.58. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

(Ответ: $\frac{\pi}{ab(a+b)}$*.)*

Упражнение 6.59. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

(Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$*.)*

Упражнение 6.60. *Пользуясь леммой Жордана, вычислить интегралы:*

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x dx}{x^2-2x+10}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2-2x+10}$.

(Ответы: 1) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1)$*; 2)* $\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1)$*.)*

Упражнение 6.61. *Пользуясь леммой Жордана, вычислить интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2+4x+20}$.

(Ответ: $\frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2 + \sin 2)$*.)*

Упражнение 6.62. *Пользуясь леммой Жордана, вычислить интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx$ *(a и b — действительные числа).*
(Ответ: $\frac{\pi e^{-|ab|}}{2|b|}$*.)*

Упражнение 6.63. *Пользуясь леммой Жордана, вычислить интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx$ *(a и b — действительные числа).*
(Ответ: $\frac{\pi}{2} e^{-|ab|} signa$*.)*

Упражнения к разделу 5

Упражнение 6.64. *Убедиться в справедливости равенства:* $\int\limits_{|z|=5} \frac{\sin \pi z}{1-\cos \pi z} dz = 2i\pi^2(5 \cdot 2)$

Упражнение 6.65. *Найти логарифмический вычет функции* $f(z)$ *относительно указанного контура* C*:*
1) $f(z) = \frac{z}{1+z^3}$; $C : |z| = 2$;
2) $f(z) = (e^z - 2)^2$; $C : |z| = 8$;
3) $f(z) = \mathrm{tg}^3\, z$; $C : |z| = 6$;
4) $f(z) = \cos z + \sin z$; $C : |z| = 4$;
5) $f(z) = \mathrm{th}\, z$; $C : |z| = 8$;
6) $f(z) = 1 - \mathrm{th}^2\, z$; $C : |z| = 2$.
(Ответы: 1) -2; 2) 6; 3) -3; 4) 3; 5) -3; 6) -4.)

Практикум

I. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.

1. $\int\limits_{AB} \overline{z}^2 dz$; $AB : \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.
2. $\int\limits_{L} (z+1)e^z dz$; $L : \{|z| = 1, Rez \geq 0\}$.
3. $\int\limits_{AB} Imz^3 dz$; AB — отрезок прямой, $z_A = 0, z_B = 2 + 2i$.
4. $\int\limits_{AB} (z^2 + 7z + 1)dz$; AB — отрезок прямой, $z_A = 1, z_B = 1 - i$.
5. $\int\limits_{ABC} |z|\, dz$; ABC — ломаная, $z_A = 0, z_B = -1 + i, z_C = 1 + i$.
6. $\int\limits_{AB} (12z^5 + 4z^3 + 1)dz$; AB — отрезок прямой, $z_A = 1, z_B = i$.
7. $\int\limits_{AB} \overline{z}^2 dz$; AB — отрезок прямой, $z_A = 0, z_B = 1 + i$.
8. $\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4} dz$; ABC — ломаная, $z_A = i, z_B = 1, z_C = 0$.
9. $\int\limits_{ABC} Re\frac{\overline{z}}{z} dz$; $AB : \{|z| = 1, Imz \geq 0\}$, BC — отрезок, $z_B = 1, z_C = 2$.
10. $\int\limits_{ABC} (z^2 + \cos z)dz$; ABC — ломаная, $z_A = 0, z_B = 1, z_C = i$.
11. $\int\limits_{L} \frac{\overline{z}}{z} dz$; L — граница области: $\{1 < |z| < 2, Rez > 0\}$.
12. $\int\limits_{ABC} (\operatorname{ch} z + \cos iz)dz$; ABC — ломаная, $z_A = 0, z_B = -1, z_C = i$.
13. $\int\limits_{L} |z|\, \overline{z} dz$; $L : \{|z| = 4, Rez \geq 0\}$.
14. $\int\limits_{L} (\operatorname{ch} z + z)dz$; $L : \{|z| = 1, Imz \leq 0\}$.
15. $\int\limits_{L} |z|\, Rez^2 dz$; $L : \{|z| = R, Imz \geq 0\}$.
16. $\int\limits_{AB} (3z^2 + 2z)dz$; $AB : \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.
17. $\int\limits_{L} zRez^2 dz$; $L : \{|z| = R, Imz \geq 0\}$.
18. $\int\limits_{ABC} (z^2 + 1)dz$; ABC — ломаная, $z_A = 0, z_B = -1 + i, z_C = i$.
19. $\int\limits_{AB} e^{|z|^2} Imzdz$; AB — отрезок прямой, $z_A = 1 + i, z_B = 0$.
20. $\int\limits_{L} (\sin iz + z)dz$; $L : \{|z| = 1, Rez \geq 0\}$.
21. $\int\limits_{AB} zRez^2 dz$; AB — отрезок прямой, $z_A = 0, z_B = 1 + 2i$.
22. $\int\limits_{AB} (2z + 1)dz$; $AB : \{y = x^3; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.
23. $\int\limits_{ABC} z\overline{z} dz$; $AB : \{|z| = 1, Rez \geq 0, Imz \geq 0\}$, BC — отрезок, $z_B = 1, z_C = 0$.
24. $\int\limits_{L} (\cos iz + 3z^2)dz$; $L : \{|z| = 1, Imz \geq 0\}$.
25. $\int\limits_{L} |z|\, dz$; $L : \{|z| = \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \leq argz \leq \frac{5\pi}{4}\}$.
26. $\int\limits_{ABC} (z^9 + 1)dz$; ABC — ломаная, $z_A = 0, z_B = 1 + i, z_C = i$.
27. $\frac{1}{2i} \int\limits_{|z|=R} \overline{z} dz$.
28. $\int\limits_{ABC} (\sin z + z^5)dz$; ABC — ломаная, $z_A = 0, z_B = 1, z_C = 2i$.

29. $\int\limits_{AB} zImz^2dz$; AB — отрезок прямой, $z_A=0, z_B=1+i$.
30. $\int\limits_L (z^3+\sin z)dz$; $L:\{|z|=1, Rez\geq 0\}$.
31. $\int\limits_L z\,|z|\,dz$; $L:\{|z|=1, Imz\geq 0\}$.

II. Для данной функции найти изолированные особые точки и определить из тип.

1. $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin\frac{1}{z}}$.
2. $\frac{1}{\cos z}$.
3. $\operatorname{tg}^2 z$.
4. $z\operatorname{tg} ze^{\frac{1}{z}}$.
5. $\frac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$.
6. $\frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.
7. $\frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}$.
8. $\operatorname{tg}\frac{1}{z}$.
9. $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$.
10. $\frac{1}{e^z+1}$.
11. $\operatorname{ctg}\pi z$.
12. $\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$.
13. $\frac{1}{\sin z^2}$.
14. $\frac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}$.
15. $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$.
16. $\frac{e^z-1}{\sin\pi z}$.
17. $\operatorname{th} z$.
18. $\frac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$.
19. $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z-1)(1-z)^3}$.
20. $\frac{1}{z^2}+\sin\frac{1}{z^2}$.
21. $\frac{z^2}{(z^2-4)\cos\frac{1}{z-2}}$.
22. $z^2\sin\frac{1}{z}$.
23. $\frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4-1}$.
24. $\frac{\sin\pi z}{(z^3-1)^2}$.
25. $\frac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$.
26. $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$.
27. $\frac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}e^{\frac{1}{z}}$.
28. $\frac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$.
29. $\frac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.
30. $\frac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}$.

III. Вычислить интеграл.

1. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z(z^2+1)}$.
2. $\oint\limits_{|z-1-i|=\frac{5}{4}}\frac{2dz}{z^2(z-1)}$.
3. $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{z(z^2+4)}$.
4. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$.
5. $\oint\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}}\frac{e^z dz}{\sin z}$.
6. $\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2}\frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$.
7. $\oint\limits_{|z-1|=3}\frac{ze^z}{\sin z}dz$.
8. $\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2}\frac{2z|z-1|}{\sin z}dz$.
9. $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{3}}\frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}dz$.
10. $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\frac{iz(z-i)}{\sin\pi z}dz$.
11. $\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$.
12. $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\frac{e^z+1}{z(z-1)}dz$.
13. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi}dz$.
14. $\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz$.
15. $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{\ln(z+2)}{\sin z}dz$.
16. $\oint\limits_{|z-6|=1}\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$.
17. $\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}dz$.
18. $\oint\limits_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1}\frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$.
19. $\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$.
20. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}}\frac{\ln(e+z)}{z\sin(z+\frac{\pi}{4})}dz$.
21. $\oint\limits_{|z|=\frac{\pi}{2}}\frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}dz$.

22. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}dz.$

23. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(\pi+z)}{\sin 2z}dz.$

24. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z}dz.$

25. $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)}dz.$

26. $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \frac{\sin z}{z(z-\pi)(z+\frac{\pi}{3})}dz.$

27. $\displaystyle\oint\limits_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z}dz.$

28. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz.$

29. $\displaystyle\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}dz.$

30. $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \frac{z^3+\sin 2z}{\sin\frac{z}{2}(z-\pi)}dz.$

31. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz.$

32. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5}dz.$

IV. Вычислить интеграл.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}.$

2. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t}.$

3. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}.$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}.$

5. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}.$

6. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35}\sin t-6}.$

7. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t+5}.$

8. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t+8}.$

9. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{21}\sin t+5}.$

10. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\cos t)^2}.$

11. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t)^2}.$

12. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\cos t)^2}.$

13. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2}.$

14. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}.$

15. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2}.$

16. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx.$

17. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx.$

18. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}.$

19. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$

20. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx.$

21. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx.$

22. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2}dx.$

23. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}.$

24. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx.$

25. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx.$

26. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx.$

27. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx.$

28. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x_x^2)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx.$

29. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx.$

30. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx.$

Литература

[1] Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1965.

[2] Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Том 4. Функции комплексного переменного (теория и практика). — М.: Изд-во „УРСС“, 1997.

[3] Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1975.

[4] Евграфов М.А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1991.

[5] Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. — М.: Наука, 1969.

[6] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.

[7] Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитическиз функций. — М.: Наука, 1978.

[8] Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977.

[9] Свешников А.Г., Тихонов А.М. Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1999.

[10] Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1989.

[11] Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. — М.: Высшая школа, 1999.

Содержание

Татьяна Михайловна **Митрякова**
Михаил Александрович **Солдатов**

Интеграл. Вычеты

Электронное учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.