МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

Е.Л. Панкратов
Е.А. Булаева

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие
по курсу «Математический анализ»

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент»

Нижний Новгород
2015

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 РЯДЫ: Автор: Панкратов Е.Л., Булаева Е.А. учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. - 24 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **М.И. Сумин.**

Учебно-методическое пособие «Ряды» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.03.02 «Менеджмент», с соответствующим разделом курса «Математический анализ». Оно содержит основные понятия теории рядов, методы их исследования и некоторые приложения. Для закрепления теоретических знаний по обыкновенным рядам в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, **Е.Н. Летягина**.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

Введение

В настоящее время для анализа экономических процессов используются различные ряды. В данном пособии приведен обзор методов анализа числовых и функциональных рядов, а также рассматриваются некоторые приложения рядов. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОК-15 и ОК-16 образовательного стандарта специальности 38.03.02 «Менеджмент». В результате изучения раздела математики “Ряды” курса “Математический анализ” студенты должны знать основные понятия теории рядов; методы исследования сходимости рядов, а также основные приложения теории рядов.

1. ***Числовые ряды***

Определение 1

Рассмотрим произвольную числовую последовательность a_1, a_2, …, a_n, … и формально образуем из её элементов бесконечную сумму вида

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Такая формально составленная сумма называется числовым рядом. Часто используется более короткое название “ряд”.

Определение 2

Отдельные слагаемые a_n рассмотренного ряда называются его членами.

Определение 3

Сумма первых N слагаемых называется N-ой частичной суммой ряда и обозначается S_N, т.е.

$$S_N = a_1 + a_2 + ... + a_k + ...a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n .$$

Определение 4

Рассмотренный ряд называется сходящимся, если сходится последовательность $\{S_N\}$ частичных сумм этого ряда.

Из определения сходимости произвольного ряда следуют следующие его свойства:

1) отбрасывание (добавление к ряду) конечного числа членов ряда не влияет ни на сходимость, ни на расходимость данного ряда;

2) если c – отличная от нуля постоянная и $b_n = c \cdot a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 5

Предел S данной последовательности $\{S_N\}$ называется суммой ряда.

Таким образом, для сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, имеющего сумму S, можно формально записать

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Определение 6

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ предела последовательности $\{S_N\}$ частичных сумм не существует, то ряд называется расходящимся.

Таким образом, понятие суммы определено только для сходящегося ряда. При этом (в отличае от понятия суммы конечного числа слагаемых) понятие суммы ряда вводится как операция предельного перехода.

Пример 1

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

N-ая частичная сумма ряда S_N при $q\neq 1$ имеет вид

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots=\left(1-q^n\right)/\left(1-q\right).$$

При $|q|<1$ последовательность частичных сумм $\{S_N\}$ имеет предел, равный $1/(1-q)$. Таким образом, данный ряд сходится и имеет сумму, равную $S=1/(1-q)$. При $|q|>1$ последовательность частичных сумм $\{S_N\}$ предела не имеет, т.е. при $|q|>1$ геометрическая прогрессия расходится.

Рассмотрим случай, когда $|q|=1$. При $q=+1$ частичная сумма S_N равна N, что приводит к расходимости рассматриваемого ряда. При $q=-1$ частичная сумма S_N равна +1 и -1, что приводит к совпадению с заведомо расходящейся последовательности 1, 0, 1, 0, … и, как следствие, к расходимости рассматриваемого ряда.

Пример 2

Фиксировав любую точку x числовой прямой, проведём анализ сходимости следующих рядов

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

Обозначая N-ые частичные суммы данных рядов как $S_N^{(1)}$, $S_N^{(2)}$ и $S_N^{(3)}$, получаем

$$S_N^{(1)}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{N-1}}{(N-1)!},\ S_N^{(2)}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{N-1}x^{2N-1}}{(2N-1)!},$$

$$S_N^{(3)} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^{N-1} x^{2N-2}}{(2N-2)!}.$$

Может быть показано, что

$$e^x = S_N^{(1)} + R_N^{(1)},\ \sin(x) = S_N^{(2)} + R_N^{(2)},\ \cos(x) = S_N^{(3)} + R_N^{(3)},$$

где $R_N^{(1)}$, $R_N^{(2)}$ и $R_N^{(3)}$ - N-ые остаточные члены соответствующих рядов. Данные остаточные члены стремятся к нулю при $N \to \infty$.

Признаки сходимости рядов

1. Необходимый признак сходимости

Если ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, т.е. общий член сходящегося ряда стремится к нулю.

2. Признак (теорема, критерий) сходимости Коши

Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер n_ε, что при любом $n \geq n_\varepsilon$ и любом целом $p \geq 0$ выполнялось неравенство

$$|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

Из критерия Коши можно получить необходимое условие сходимости ряда. Рассмотренное неравенство выполняется для любого $p \geq 0$, в том числе и для $p=0$. Поэтому для всех $n \geq n_\varepsilon$ получаем $|a_n|<\varepsilon$, а это из-за произвольности $\varepsilon>0$ соответствует $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

<u>Замечание 1</u>

Следует заметить, что данный признак может быть использован и для анализа сходимости знакопеременных рядов.

<u>Пример 3</u>

Рассмотрим гармонический ряд

$$1+(1/2)+(1/3)+\ldots+(1/n)+\ldots$$

n-ый член ряда $a_n=1/n$ стремится к нулю при $n \to \infty$, но рассматриваемый ряд расходится, т.к. для любого $n=1, 2, \ldots$ выполняется соотношение

$$u_n + u_{n+1} + ... + u_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для любого n при $\varepsilon=1/2$ и $p=n-1$ неравенство

$$|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

не выполняется.

3. Признак сравнения сходимости рядов

Пусть даны два ряда с положительными членами одного порядка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда, ($i$) если один из данных рядов сходится, то сходится и другой ряд; (ii) если один из данных рядов расходится, то расходится и другой из ряд.

4. Признак (теорема, критерий) сходимости рядов Даламбера

Пусть дан ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n>0,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

Тогда

1) если существует такое число q, $0<q<1$, и такой номер n_0, что для всех $n\geq n_0$ выполняется неравенство $a_{n+1}/a_n\leq q$, то данный ряд сходится;

2) если существует такое число q, $0<q<1$, и такой номер n_0, что для всех $n\geq n_0$ выполняется неравенство $a_{n+1}/a_n\geq 1$, то данный ряд расходится.

<u>Замечание 2</u>

Данный признак может быть использован и для анализа сходимости знакопеременных рядов.

<u>Пример 4</u>

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$. В данном случае

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Поэтому рассмотренный ряд сходится. Его сходимость можно установить, сравнив со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

5. Интегральный признак (интегральная теорема) сходимости рядов с неотрицательными членами (Коши, Маклорен)

Если функция $f(x)$, определённая при всех $x\geq 1$, неотрицательна и убывает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

<u>Пример 5</u>

Рассмотрим ряд $1+(1/2^{\alpha})+(1/3^{\alpha})+\ldots+(1/n^{\alpha})+\ldots$ с n-ым членом $a_n=1/n^{\alpha}$, $n=1,2,\ldots$ в данном случае функцией $f(x)$ является функция $f(x)=1/x^{\alpha}$, $x\geq 1$. Интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$

сходится при $x>1$ и расходится при $x\le 1$. Поэтому и исходный ряд сходится при $x>1$ и расходится при $x\le 1$.

Определение 7

Ряд с действительными членами, знаки которых изменяются при изменении номера, называются знакопеременными.

Определение 8

Ряд с действительными членами, знаки которых поочерёдно то положительные, то отрицательные, называются знакочередующимися.

Определение 9

Знакочередующийся ряд, модули членов которого образуют невозрастающую сходящуюся к нулю последовательность, называется рядом Лейбница.

6. Достаточный признак (теорема) сходимости рядов Лейбница

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и

$$a_n \ge a_{n+1} > 0,\ n=1,2,\ldots,$$

то знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

сходится. При этом любая частичная сумма S_n исходного знакочередующегося ряда отличается от его суммы S на величину, меньшую следующего члена a_{n+1}, т.е. абсолютная величина остатка ряда R_n в этом случае не превышает абсолютной величины его первого члена

$$|R_n|=|S-S_n|\le a_{n+1}.$$

Пример 6

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \big/ n .$$

Его члены удовлетворяют условиям рассмотренного признака, что подтверждает его сходимость. Заметим, что $S_1=1$ и $S_2=1/2$. Для его суммы получаем оценку: $1/2\le S\le 1$.

7. Абсолютная сходимость ряда

Определение 10

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|$, т.к. из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда.

Определение 11

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, но соответствующий ряд из модулей расходится.

Пример 7

Рассмотрим пример условно сходящегося ряда. Покажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad (1)$$

Так как соответствующий ряд из модулей (гармонический ряд) расходится, то для сходимости рассмотренного ряда достаточно показать, что рассмотренный ряд сходится (сходится к числу $ln(2)$). Рассмотрим следующее разложение в ряд Маклорена

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

Может быть показано, что сумма данного ряда равна $ln(1+x)$. При $0 \le x \le 1$ можно получить следующую оценку остаточного члена

$$|R_{N+1}(x)| < 1/(N+1).$$

Полагая в двух последних соотношениях $x=1$, получаем

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1),$$

где

$$|R_{N+1}(x)| < 1/(N+1) \text{ или } \left| \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right] - \ln(2) \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Обозначая через S_n n-ую частичную сумму ряда (15.1) можно переписать последнее неравенство в следующем виде

$$|S_n - ln(2)| < 1/(n+1).$$

Из данного соотношения следует, что разность $S_n - ln(2)$ представляет собой последовательность бесконечно малых величин, уменьшающихся по модулю с ростом n. Это и доказывает сходимость ряда (13.1).

2. Функциональные ряды

Определение 12

Пусть на числовой прямой или в m-мерном пространстве задано некоторое множество $\{x\}$. Если каждому натуральному числу n из ряда $1,2,\ldots,n,\ldots$ ставится в соответствие по определённому закону некоторая функция $f_n(x)$, определённая на множестве $\{x\}$, то множество занумерованных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, … называется функциональной последовательностью.

Определение 13

Отдельные функции $f_n(x)$ называются членами (элементами) функциональной последовательности.

Определение 14

Множество $\{x\}$, на котором определены функции $f_n(x)$, называется областью определения функциональной последовательности.

Следует заметить, что если область определения $\{x\}$ является множеством в m-мерном пространстве, то каждая функция $f_n(x)$ является функцией m переменных $f_n(x)=f_n(x_1,x_2,\dots,x_m)$, где $x_1,x_2,\dots,x_m$ – координаты точек x.

Определение 15

Формально записанную сумму

$$f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

бесконечного числа членов функциональной последовательности, которая называется функциональным рядом. При этом отдельные функции $f_n(x)$ называются членами ряда, а множество $\{x\}$, на котором определены эти функции, называется область определения функционального ряда.

Определение 16

Сумма первых n членов функционального ряда называется n-ой частичной суммой этого ряда $S_n(x)$.

Пример 8

Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, каждая из которых определена на сегменте $0\le x\le 1$ и имеет вид

$$f_n(x)=\begin{cases}\cos(\pi n x/2), & 0\le x\le 1/n\\ 0, & 1/n<x\le 1\end{cases}$$

На рис. 1 приведены графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_n(x)$. Областью определения данной последовательности является сегмент $0\le x\le 1$. Следует заметить, что каждая функция $f_n(x)$ непрерывна на сегменте $0\le x\le 1$.

Пример 9

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=1+\frac{x+y}{1}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\dots+\frac{(x+y)^n}{n!}+\dots,$$

областью определения которого является плоскость $\{-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$. Может быть показано, что суммой данного ряда является следующая функция

$$e^{x+y}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

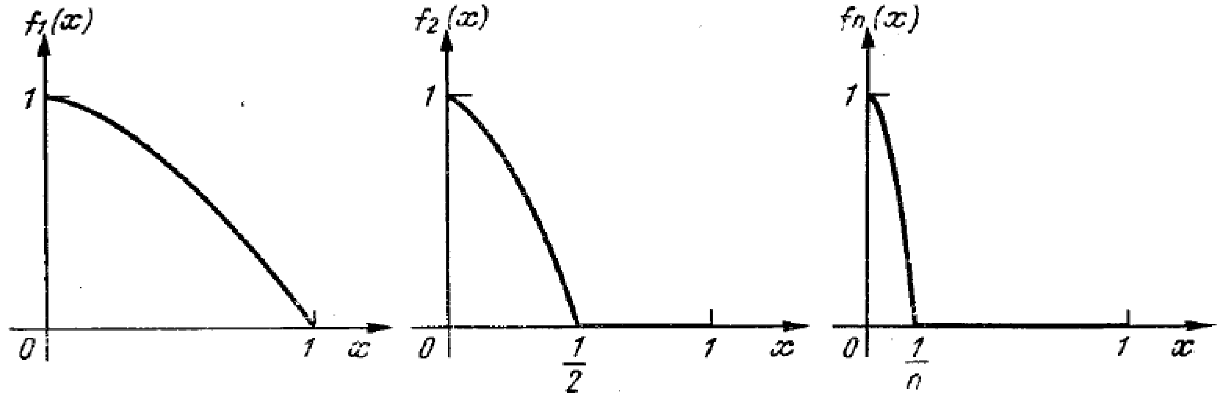

Рис. 1.

Определение 9

Последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, называется ограниченной, если существует такая постоянная M, что для всех x выполняется неравенство $|f_n(x)| \le M$. Иногда такая последовательность называется равномерно ограниченной.

Определение 10

Последовательность действительных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, называется убывающей (возрастающей), если выполняется неравенство $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ ($f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$).

Определение 11

Последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, называется сходящейся в точке x_0, если сходится последовательность $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0)$.

Определение 12

Последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, называется сходящейся на множестве x, если последовательность сходится в каждой точке этого множества.

Определение 13

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Определение 14

Пусть задана последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ и функция $f(x)$. Данная последовательность сходится равномерно к функции $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что если $n \ge n_\varepsilon$, то для всех x выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Свойства функциональных рядов

1) Степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

абсолютно сходится для всех значений x, по модулю меньших некоторого числа R ($|x|<R$, в качестве частного случая возможно $R\to\infty$), называемого радиусом сходимости степенного ряда. При $|x|>R$ ряд расходится. Для ряда

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

абсолютная сходимость имеет место при $|x-x_0|<R$. При $|x-x_0|>R$ ряд расходится. Радиус может быть определён с помощью соотношений

$$R=\lim_{n\to\infty}1\Big/\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}|/|a_n|.$$

Следует заметить, что на концах промежутка сходимости ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

2) Существует только одно число R, которое является пограничным между областями сходимости и расходимости ряда.

3) Есди ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ сходятся равномерно в некоторой области, то для любых чисел λ и μ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)\right]$ также сходится равномерно в рассматриваемой области.

4) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ равномерно сходится в некоторой области, а функция $g(x)$ ограничена, то ряд $g(x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ также сходится равномерно в рассматриваемой области.

<u>Пример 10</u>

Рассмотрим степенной ряд

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Радиус сходимости такого ряда равен $R=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)/n=1$. Таким образом, ряд сходится абсолютно при $-1<x<1$. Рассмотрим точку $x=-1$. Полученный числовой ряд сходится условно. Рассмотрим точку $x=1$. Полученный числовой ряд расходится.

Теорема Абеля

Если степенной ряд при $x_0=0$ сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно внутри промежутка $x\in(-x_1,x_1)$. При этом его сумма $S(x)$ является непрерывной в точке x_1.

3. *Ряд Тейлора*

Определение 15

Пусть имеется функция $f(x)$, дифференцируемая необходимое число раз на интервале её рассмотрения. Функция $f(x)$ может быть представлена рядом Тейлора в окрестности точки $x=a$ с помощью соотношения

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Такой ряд может быть представлен в следующей форме

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_{N+1}(x).$$

Выделенная в отдельное слагаемое функция имеет вид

$$R_{N+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\frac{(x-\xi)^{N+1}}{n!\,p}f^{(N+1)}(\xi)$$

и называется остаточным членом в общем виде. Возможны также и другие формы представления остаточного члена.

Определение 16

Частный случай ряда Тейлора, соответствующего разложению функции $f(x)$ в окрестности точки $x=0$, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

называется рядом Маклорена.

Некоторые разложения функций в ряд Маклорена

Пример 11

Разложим функцию $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена. Такое разложение имеет следующий вид

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Функции $f(x)=e^x$, $f(x)=1$, $f(x)=1+x$, $f(x)=1+x+x^2/2$, $f(x)=1+x+x^2/2+x^3/6$ представлены на рис. 2 соответственно линиями 1, 2, 3, 4, 5.

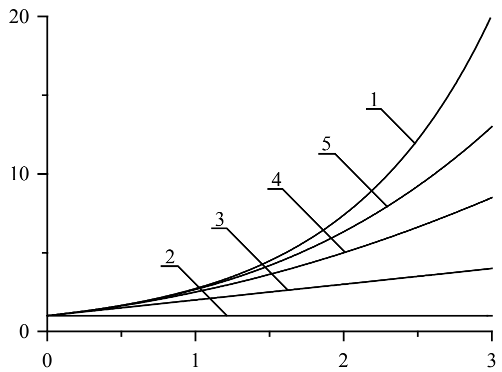

Рис. 2.

Пример 12

Разложим функцию $f(x)=sin(x)$ в ряд Маклорена. Искомое разложение имеет следующий вид

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Применение разложения функций в степенной ряд

Применение разложения функций в ряд Тейлора для вычисления пределов

Для раскрытия неопределённостей, возникающих при вычислении пределов, может быть использовано разложение функций в ряд Тейлора.

Пример 13

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$. Для его вычисления воспользуемся разложением функции в ряд Маклорена. После подстановки рассмотренного в предыдущем примере разложения синуса в данный предел получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\lim_{x\to 0}x^{2n-2}=1.$$

Пример 14

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$. Для его вычисления воспользуемся разложением функции в ряд Тейлора в окрестности точки x=1, которое имеет следующий вид

$$e^x=e+e\frac{x-1}{1!}+e\frac{(x-1)^2}{2!}+e\frac{(x-1)^3}{3!}+\ldots+e\frac{(x-1)^n}{n!}+\ldots=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}.$$

После подстановки такого разложения экспоненты в предел получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e}{x-1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}-1\right]=e\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{n-1}}{n!}=e.$$

Применение разложения функций в ряд Тейлора для вычисления интегралов

Для вычисления интегралов, не вычисляемых в элементарных функциях, также возможно использование разложения подынтегральной функции или её части в ряд Тейлора.

Пример 15

Вычислим интеграл $\int \frac{\sin(x)}{x} d\,x$. Для его вычисления воспользуемся разложением функции в ряд Маклорена. После подстановки рассмотренного ранее разложения синуса в интеграл получаем

$$\int \frac{\sin(x)}{x} d\,x = \int \left[\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] d\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \int x^{2n-2} d\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}$$

.

Пример 16

Вычислим интеграл $\int \frac{\exp(x)}{x} d\,x$. Для его вычисления воспользуемся разложением функции в ряд Маклорена. Подстановка данного разложения в интеграл получаем

$$\int \frac{\exp(x)}{x} d\,x = \int \left[\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right] d\,x = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right] d\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}.$$

Применение разложения функций в ряд Тейлора для приближённых вычислений

Если необходимо вычислить функцию в заданной точке с заданной точностью, то для этого может быть использование разложения функции в ряд Тейлора. Рассмотрим это на следующем примере.

Пример 17

Вычислить значение функции $sin(18°)$ с точностью до 10^{-4}. Для этого воспользуемся разложением функции в ряд Маклорена. После подстановки в данное ранее разложение синуса значение угла в радианах ($18°=\pi/10$) получаем

$$\sin(18^{\circ}) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \frac{\pi^7}{7!10^7} + \ldots =$$

$$= 0{,}314 - 0{,}0052 + 2{,}628 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-8} + \ldots$$

Из данного соотношения следует, что для вычисления значения функции $sin(18°)$ с точностью до 10^{-4} достаточно первых двух членов разложения, т.к. остальные члены разложения по модулю меньше заданной точности. Таким образом, можно записать

$$sin(18°) \approx 0{,}314-0{,}0052=0{,}3088.$$

Пример 18

Вычислим значение функции $cos(18°)$ с точностью до 10^{-4}. Для этого воспользуемся разложением функции в ряд Маклорена. После подстановки в рассмотренное ранее разложение косинуса значение угла в радианах ($18°=\pi/10$)

$$\cos\left(18^{\circ}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=1-\frac{\pi^{2}}{2!10^{2}}+\frac{\pi^{4}}{4!10^{4}}-\frac{\pi^{6}}{6!10^{6}}+\ldots=$$

$$=1-0{,}0494+4{,}0587\cdot10^{-4}-1{,}3353\cdot10^{-6}+\ldots$$

Из данного соотношения следует, что для вычисления значения функции $cos(18°)$ с точностью до 10^{-4} достаточно первых трёх членов разложения, т.к. остальные члены разложения по модулю меньше заданной точности. Таким образом, можно записать

$$cos(18°)\approx1-0{,}04935+4{,}05871\cdot10^{-4}=0{,}9511.$$

Применение степенных рядов для решения дифференциальных уравнений

Решение дифференциального уравнения $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0$ может быть определено в виде степенного ряда $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. На первом этапе коэффициенты a_n будем считать неизвестными. Для их определения подставим рассмотренный ряда в исходное дифференциальное уравнение и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.

Пример 19

Рассмотрим уравнение

$$y'(x)+2y=4x\,.$$

Подстановка рассмотренного выше ряда в данное дифференциальное уравнение позволяет получить

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\,a_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=4x\,.$$

Далее приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x. В результате такй операции получаем

$$a_1+a_0=0;\ 2a_2+2a_2=4;\ 3a_3+3a_3=0;\ 4a_4+2a_3=0;\ 5a_5+2a_4=0;\ \ldots;\ na_n+2a_{n-1}=0;\ ...$$

Данная система уравнений может быть решена относительно произвольного коэффициента a_0. Тогда

$$a_1=-a_0;\ a_{n\geq2}=(-1)^n2^{n+1}(2+a_0)/n!,\ \ y=a_0-a_0x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{n+1}(2+a_0)\frac{x^n}{n!}.$$

Пример 20

Рассмотрим уравнение

$$y'(x)+y=\cos(x).$$

В данном случае разложим функцию $f(x)=cos(x)$ в ряд Маклорена. Далее подставим разложение косинуса и предполагаемую форму решения уравнения $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ в рассматриваемое дифференциальное уравнение, что позволяет получить

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}.$$

Далее приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x. В результате такой операции получаем

$$a_1+a_0=1;\ 2a_2+a_1=0;\ 3a_3+a_2=-1/2;\ 4a_4+a_3=0;\ 5a_5+a_4=1/24;$$

$$\ldots;\ (n+1)a_{n+1}+a_n=\frac{(-1)^{\sin(\pi n/4)}}{2}\frac{1-(-1)^{n+1}}{(11n-20)!};\ \ldots$$

Полученная система уравнений может быть решена относительно произвольного коэффициента a_0. Тогда

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left[\frac{(-1)^{\sin(\pi n/4)}}{2}\frac{1-(-1)^{n+1}}{(11n-20)!}-a_n\right].$$

4. ***Ряд Фурье***

Тригонометрическим рядом Фурье называется ряд следующего вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(2\frac{\pi n x}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(2\frac{\pi n x}{L}\right),$$

где n – целое число, находящееся в пределах суммирования (в нашем случае $n\in[1,\infty]$), $x\in[a,b]$, $L=b-a$. рассмотренный ряд может иметь следующие эквивалентные формы

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{\pi n x}{L}+\varphi_n\right),\ B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{\pi n x}{L}+\psi_n\right).$$

При приближенной замене функции $f(x)$ тригонометрической суммой

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\left(2\frac{\pi n x}{L}\right)+\sum_{n=1}^{N}b_n\sin\left(2\frac{\pi n x}{L}\right)$$

среднеквадратическая ошибка

$$U=\frac{1}{T}\int_0^T\left[f(x)-s_n(x)\right]^2 d\,x$$

будет наименьшей, если коэффициенты a_n и b_n выбрать следующим образом

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(2\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x,\; b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(2\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x,$$

где L – в данном случае является периодом тригонометрической функции.

Замечание 3

*Функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье по функциям $f_n(x)$, отличным от тригонометрических, если они удовлетворяе*т следующим условиям

1) $\int_0^T f_n(x)f_m(x)\,d\,x=0$ *при* $m\neq n$ *и* $\int_0^T f_n^2(x)\,d\,x\neq 0$*;*

2) *функции $f_n(x)$ позволяют учесть и симметричную компоненту функции $f(x)$, и не симметричную компоненту функции $f(x)$, и постоянную составляющую функции $f(x)$.*

Пример 21

Разложим функцию следующего вида: $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le L/2\\ -1, & L/2\le x\le L\end{cases}$ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям на интервале $x\in[0,L]$ Вычисление коэффициентов a_n приводит к следующему результату

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^{L/2}\cos\left(2\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x+\frac{2}{L}\int_{L/2}^{L}(-1)\cos\left(2\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x=\frac{1}{\pi\,n}\sin(\pi\,n)-$$

$$-\frac{1}{\pi\,n}\left[\sin(2\,\pi\,n)-\sin(\pi\,n)\right]=\frac{2}{\pi\,n}\sin(\pi\,n)-\frac{\sin(2\,\pi\,n)}{\pi\,n}=0.$$

Вычисление коэффициентов b_n позволяет получить

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^{L/2}\sin\left(2\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x+\frac{2}{L}\int_{L/2}^{L}(-1)\sin\left(2\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x=\frac{1}{\pi\,n}\left[1-\cos(\pi\,n)\right]-$$

$$-\frac{1}{\pi\,n}\left[\cos(\pi\,n)-\cos(2\,\pi\,n)\right]=(-1)^n\frac{2}{\pi\,n}.$$

В окончательной форме ряд Фурье имеет следующий вид

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left[2(2n+1)x\right]}{2n+1}.$$

Рассматриваемая функция, её первый член разложения в ряд Фурье и сумма её первых двух членов разложения в ряд Фурье представлены на рис. 3 (соответственно кривые 1, 2 и 3). Пример обратного разложения представлен на рис. 4.

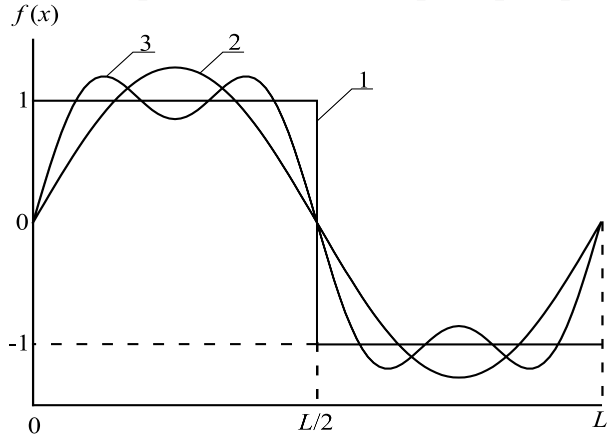

Рис. 3.

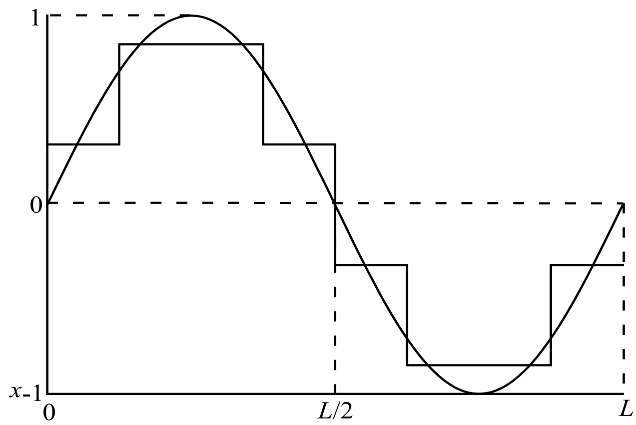

Рис. 4.

Пример 22

Разложим функцию следующего вида: $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ в ряд Фурье на интервале $x\in[-\pi,\pi]$ Вычисление коэффициентов a_n приводит к следующему результату

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)d\,x+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)d\,x=0+\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{4},$$

$$a_{n\ge 1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(n\,x)d\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(n\,x)d\,x=0+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin(n\,x)d\,x=$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[\cos(\pi\,n)-1\right]=\frac{(-1)^n-1}{n^2}.$$

Вычисление коэффициентов b_n позволяет получить

$$b_{n\ge 0}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(n\,x)d\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(n\,x)d\,x=-\frac{\pi}{n}\cos(\pi\,n)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\left[1-(-1)^n\right]\frac{\pi}{n}.$$

В окончательной форме ряд Фурье имеет следующий вид

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi\,n^2}\cos(n\,x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\,n}\left[1-(-1)^n\right]\sin(n\,x).$$

5. *Применение рядов в экономике*

В настоящем разделе мы рассмотрим две задачи, касающиеся последовательностей и рядов, применительно к экономическим задачам. Пусть имеется вклад N (рублей) в банке. По прошествии определенного промежутка времени банк начисляет проценты. Обозначим через p количество процентов, начисляемых за год. Обычно про такую процентную ставку говорят, что она p % годовых. Если промежуток времени, за который начисляются проценты, меньше, чем год, например 1/n от года, то за этот промежуток времени банк начислит p/n %. Например, может быть ежеквартальное начисление процентов, тогда за каждый квартал будет начислено $p/4$ %. Иногда применяют ежемесячное начисление процентов. В этом случае за каждый месяц банк будет начислять $p/12$ %. В принципе, возможна и ситуация с ежедневным начислением $p/365$ %.Возможны различные ситуации начисления процентов:

1) с капитализацией (когда проценты прибавляются к основному вкладу и тоже участвуют в начислении процентов в последующие временные промежутки),

2) без капитализации (проценты переводятся на отдельный беспроцентный счет или выплачиваются вкладчику, так что основной вклад остается неизменным).

Рассмотрим вначале второй случай. Пусть вклад находится n^t временных промежутков, за каждый из которых банк начисляет p/n %, при ставке p % годовых. После первого промежутка банк начислит $Np/100n$ рублей (множитель 100 взялся из-за перевода процентов в доли от единицы, то есть 10% соответствует 0.1 доле), после второго еще $Np/100n$ и так далее. Спустя n^t временных промежутков к основному вкладу N рублей дополнительно можно получить $Npn^t/100n$ рублей. Если вклад хранится Y лет, то $n^t=Yn$ и сумма вклада и процентов за этот срок составит $N(1+Yp/100)$ рублей. Рассмотрим теперь ситуацию с капитализацией процентов к основному вкладу. В этом случае за первый временной промежуток к вкладу будет добавлено $Np/100n$ рублей, что в итоге составит общую сумму $N(1+p/100n)$. Другими словами, вклад увеличится в $(1+p/100n)$ раз. То же самое произойдет после второго, третьего и последующих временных промежутков. Через n^t временных промежутков сумма вклада составит $N(1+p/100n)^n$, а через Y лет $N(1+p/100n)^{Yn}$. Такой способ начисления процентов обычно называют начисление сложных процентов. В качестве n можно брать единицу при ежегодной капитализации, 4 - при ежеквартальной, 12 - при ежемесячной, 365 - при ежедневной. В принципе, можно поставить задачу о непрерывном начислении процентов, то есть когда $n\to\infty$. В этом случае мы приходим к необходимости вычисления предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} N\left(1+\dfrac{p}{100n}\right)^{Yn}$. Заменой $\bar{n}=100\dfrac{n}{p}$ он сводится к пределу: $\lim\limits_{\bar{n}\to\infty} N\left(1+\dfrac{1}{\bar{n}}\right)^{Yp\bar{n}/100} = \lim\limits_{\bar{n}\to\infty} N\left[\left(1+\dfrac{1}{\bar{n}}\right)^{\bar{n}}\right]^{Yp/100} = N e^{\frac{Y p}{100}}$.

И хотя непрерывный способ начисления процентов, как правило, не применяется в банках, тем не менее может оказаться полезным в ряде задач при анализе долгосрочных прогнозов. Возьмем p=10% годовых, срок вклада Y=1 год, начальная сумма N=1 ден.ед. В таблице приведена сумма вклада при различных способах начисления процентов (без капитализации / с капитализацией) и различных периодах выплаты процентов (ежегодно, ежеквартально, ежемесячно, ежедневно и непрерывное начисление).

	n=1	**n=4**	**n=12**	**n=365**	**$N=\infty$**
Без капитализации	1.1 ден. ед.	1.1 ден. ед.	1.1 ден. ед.	1.1 ден. ед.	1.1 ден. ед.
С капитализацией	1.1 ден. ед.	1.10381 ден. ед.	1.10471 ден. ед.	1.10516 ден. ед.	1.10517 ден. ед.

Например, начальный размер вклада под 10% годовых в банке составил 1 млн рублей. Найдем размер вклада через 5 лет: *а*) без капитализации процентов, *б*) с ежегодной капитализацией, *в*) с ежеквартальной капитализацией, *г*) с ежемесячной капитализацией, *д*) с ежедневной капитализацией, *е*) с непрерывной капитализацией. В данном случае:

а) 1 млн рублей (1+5 лет × 10 %/100)=1.5 млн рублей;
б) 1 млн рублей $[1+(10\ \%/100)^{5\ \text{лет}}]$=1.611 млн рублей;
в) 1 млн рублей $[1+(10\ \%/100)^{5\ \text{лет}\times 4}]$=1.639 млн рублей;
г) 1 млн рублей $[1+(10\ \%/12\times 100)^{5\ \text{лет}\times 12}]$=1.645 млн рублей;
д) 1 млн рублей $[1+(10\ \%/12\times 365)^{5\ \text{лет}\times 365}]$=1.649 млн рублей;
е) 1 млн рублей $e^{5\ \text{лет}\times 10\%/100}$=1.649 млн рублей.

Другая задача - это вопрос о рыночной цене бессрочной облигации номиналом, например, 1000 рублей и 5% купоном. Это означает, что каждый год ее владелец будет получать 50 рублей дохода с одной облигации. Здесь используется ситуация начисления процентов без капитализации, рассмотренная выше. Однако пусть имеется инфляция 2% в год, которая обесценивает как саму облигацию, так и доходы от нее с течением времени. Доход 50 рублей, полученный через год, будет эквивалентен 50/(1+0.02) рублей сейчас, полученные еще через год 50 рублей будут эквивалентны $50/(1+0.02)^2$ рублей в современных ценах и так далее. Если считать доход от облигации без учета инфляции, то он будет расти до бесконечности, каждый год увеличиваясь на 50 рублей. С учетом же инфляции мы должны рассчитывать стоимость дохода, привязавшись к какому-то определенному моменту времени. Проведенные выше рассуждения имели привязку к текущему моменту времени и расчет дохода проводился исходя из текущей покупательной способности рубля. В итоге с учетом обесценивания денег бессрочный доход, получаемый с облигации в ценах текущего момента времени, будет даваться бесконечным числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{50}{(1+0.02)^k}$. Запишем его в виде $50\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(0.02)^k}-1\right]$. Здесь постоянный множитель 50 в каждом слагаемом вынесен за знак ряда, а суммирование ряда начато не с k=1, а с k=0 (чтобы привести его к ряду, составленному из членов геометрической прогрессии, начиная с единицы). Добавление члена ряда с k=0 скомпенсировано вычитанием единицы в скобках. Используя известную формулу для суммы геометрической прогрессии, можем записать $50\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1.02}}-1\right)=2500$ рублей. Именно такой доход в ценах сегодняшнего дня за бесконечный промежуток времени мы получим с одной облигации. Подобные задачи возникают при необходимости спрогнозировать и сравнить две стратегии инвестиций на будущее.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Исследовать сходимость рядов и определить, условно сходятся ряды или абсолютно.

01.01. $\dfrac{1}{2\ln^2(2)}+\dfrac{1}{3\ln^2(3)}+\dfrac{1}{4\ln^2(4)}+...;$

01.02. $1+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{10}}+...;$

01.03. $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+...;$

01.04. $\dfrac{1}{1+1^2}+\dfrac{1}{1+2^2}+\dfrac{1}{1+3^2}+...;$

01.05. $\dfrac{1}{3^2-1}+\dfrac{1}{5^2-1}+\dfrac{1}{7^2-1}+...;$

01.06. $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+...;$

01.07. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{6}{27}+\dfrac{8}{81}+...;$

01.08. $1+\dfrac{2}{2!}+\dfrac{4}{3!}+\dfrac{8}{4!}+...;$

01.09. $1+\dfrac{3}{2\cdot 3}+\dfrac{3^2}{2^2\cdot 5}+\dfrac{3^3}{2^3\cdot 7}+...;$

01.10. $1+\dfrac{1\cdot 2}{2!}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{4!}+...;$

01.11. $1+\dfrac{1\cdot 2}{15}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{225}+...;$

01.12. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3!}{4!}+\dfrac{5!}{6!}+\dfrac{7!}{8!}+...;$

01.13. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{5}{\sqrt{2\cdot 3^2}}+\dfrac{9}{\sqrt{3\cdot 3^3}}+\dfrac{13}{\sqrt{4\cdot 3^4}}+...;$

01.14. $1+\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 5^2}+\dfrac{1}{4\cdot 5^3}+...;$

01.15. $\dfrac{1}{\ln(2)}+\dfrac{1}{\ln(3)}+\dfrac{1}{\ln(4)}+\dfrac{1}{\ln(5)}+...;$

01.16. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...;$

01.17. $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+...;$

01.18. $\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{3}{4^3}+...;$

01.19. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+...;$

01.20. $\frac{1}{2\cdot\ln(2)}-\frac{1}{3\cdot\ln(3)}+\frac{1}{4\cdot\ln(4)}-...;$

01.21. $\frac{\sin(\alpha)}{1}+\frac{\sin(2\alpha)}{2^2}+\frac{\sin(3\alpha)}{3^2}+...;$

01.22. $1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+...;$

01.23. $1+\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+\frac{1}{301}+...;$

01.24. $\frac{1}{1+1^4}+\frac{1}{1+2^4}+\frac{1}{1+3^4}+...;$

01.25. $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+...;$

01.26. $1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+...;$

01.27. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+...;$

01.28. $\frac{2}{1}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+...;$

01.29. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-...;$

01.30. $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+...$

II) Определить радиус сходимости рядов.

02.01. $1-3x+9x^2-27x^3+\ldots;$

02.02. $1+3x+5x^2+7x^3+\ldots;$

02.03. $1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+...;$

02.04. $\frac{x}{5^3}+\frac{x^2}{5^4}+\frac{x^3}{5^5}+...;$

02.05. $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...;$

02.06. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$

02.07. $\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{2^4}+...;$

02.08. $x+\frac{x^2}{2\cdot4}+\frac{x^3}{3\cdot4^2}+...;$

02.09. $1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\sqrt{4}}+...;$

02.10. $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+...;$

02.11. $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-...;$

02.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n};$

02.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n(3n-2)};$

02.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{n-1}}{3^n n};$

02.15. $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\ldots;$

02.16. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!};$

02.17. $\frac{x}{1}-\frac{(x)^2}{3}+\frac{(x)^3}{5}+\ldots;$

02.18.

$1-\frac{x^2}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{x^4}{3^2\cdot 3\sqrt{3}}-\frac{x^6}{3^3\cdot 4\sqrt{4}+}+\ldots;$

02.19. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots;$

02.20. $1-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots;$

02.21. $x^3+\frac{x^3}{1+x^3}+\frac{x^3}{(1+x^3)^2}+\ldots;$

02.22. $1+\frac{2x}{\sqrt{5\cdot 5}}+\frac{4x^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}}+\frac{8x^3}{\sqrt{13\cdot 5^3}}+\ldots;$

02.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!};$

02.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{10^n\sqrt{n}};$

02.25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1};$

02.26. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{3\cdot 2^2}+\frac{x^3}{5\cdot 2^3}+\ldots;$

02.27. $\frac{2x+1}{1}+\frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{(2x+1)^3}{7}+\ldots;$

02.28. $1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}-\frac{x^3}{3^3}+\ldots;$

02.29. $1-4x+7x^2-10x^3+\ldots;$

02.30. $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$

III) Разложить в ряд Маклорена следующие функции

03.01. $y=cos(x+4);$

03.02. $y=cos^2(x);$

03.03. $y=exp(-x^2);$

03.04. $y=ln(1+x);$

03.05. $y=cos(x-1);$

03.06. $y=x\cdot exp(x);$

03.07. $y=ln(5-2x);$

03.08. $y=sin(x+3);$

03.09. $y=sin(x+1);$

03.10. $y=cos[(1+x)/2];$

03.11. $y=cos(3+x/2);$

03.12. $y=cos(3+x/2);$

03.13. $y=cos(x)+sin(x);$

03.14. $y=ln(2+x);$

03.15. $y=cos(1+x);$

03.16. $y=cos(x)+ln(x);$

03.17. $y=sin(x)+exp(x);$

03.18. $y=cos(x)+ sin(x);$

03.19. $y=\sqrt{1+x^2};$

20. $y=(1+x^2)^{1,5};$

03.21. $y=\sin(\sqrt{1+x});$

03.22. $y=cos(5x)+sin(x)$; 03.23. $y=sin(x)+cos(3x)$; 03.24. $y=sin(2x)+cos(x)$;

03.25. $y=ln(1-x)$; 03.26. $y=cos(1-x)$; 03.27. $y=sin(x/2)$;

03.28. $y=sin(1+x)$; 03.29. $y=x^2cos(x)$; 03.30. $y=sin(1-x)$.

IV) Найти значения рассмотренных в предыдущем задании функций в точке $x=$ 0,1 с точностью до 10^{-4}.

V) Используя представление функции в виде степенного ряда вычислить предел или интеграл, или найти решение дифференциального уравнения.

05.01. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$;

05.02. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)+\sin(5x)}{6x}$;

05.03. $\int\dfrac{1}{x^2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos(x)\,dx$;

05.04. $\int e^{-x^2}dx$;

05.05. $y''=x+y$;

05.06. $xy''+y'+xy=0$;

05.07. $y''=x^2y$;

05.08. $\int\sqrt{1+x^3}\,dx$;

05.09. $y'=x^2+y^2$;

05.10. $\int[1+\ln(x+1)]dx$;

05.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot tg(x)}{\sin^2(x)}$;

05.12. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

05.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x^2}{1-\cos(x)}$;

05.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$;

05.15. $\int\cos\left(\dfrac{x^2}{4}\right)dx$;

05.16. $\int\dfrac{1}{x^2}\ln(x+1)\,dx$;

05.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-\cos(5x)}{6x^2}$;

05.18. $\int\dfrac{1}{x}\sin(x)\cos(x)\,dx$;

05.19. $\int\dfrac{\cos(x)}{x}dx$;

05.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(6x)}{1-\cos(4x)}$;

05.21. $\int\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$;

05.22. $x^3y'''+x^2y'=1$;

05.23. $\int x^{-3}\ln(x+1)\,dx$;

05.24. $y'(x^2-4)=2xy$;

05.25. 05.26. 05.27.

$\int \frac{1}{x^3} \ln(x+1)\, dx;$ $\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\cos(2x)-4\cos(x)}{x^2}\right];$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x};$

05.28. $y''+4y'=0;$ 05.29. $y'=1+x-y^2;$ 05.30. $y'=y-x.$

VI) Разложить в ряд Фурье следующие функции на интервале $x\in[-a,b]$

06.01. $y=cos(x-\alpha)$, $\alpha=const$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.02. $y=sin(x-\alpha)$, $\alpha=const$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.03. $y=cos(x-\alpha)$, $\alpha=const$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.04. $y=x\cdot cos(x)$, $x\in[\pi/4,3\pi/4]$;

06.05. $y=e^x-1$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.06. $y=sin(x-\alpha)$, $\alpha=const$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.07. $y=sin(x)\cdot exp(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.08. $y=cos(x)\cdot cos(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.09. $y=\begin{cases} x^2, & -\pi\le x\le 0 \\ \pi^2-x^2, & 0\le x\le\pi \end{cases}$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.10. $y=\begin{cases} \sin(x), & 0\le x\le\pi \\ 0, & \pi\le x\le 2\pi \end{cases}$, $x\in[0,2\pi]$;

06.11. $y=x^2cos(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.12. $y=cos(3x+5)$, $x\in[-\pi/4,\pi/4]$;

06.13. $y=x\cdot sin(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.14. $y=x^2$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.15. $y=cos(a\cdot x)$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.16. $y=sin^2(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.17. $y=\begin{cases} \pi, & -\pi\le x\le 0 \\ \pi-x, & 0\le x\le\pi \end{cases}$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.18. $y=\begin{cases} x, & -\pi\le x\le 0 \\ x^2, & 0\le x\le\pi \end{cases}$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.19. $y=\begin{cases} 1+\frac{x}{\pi}, & -\pi\le x\le 0 \\ 1-\frac{x}{\pi}, & 0\le x\le\pi \end{cases}$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.20. $y=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi-x}{2}, & \frac{\pi}{3}\le x\le\pi \end{cases}$, $x\in[0,\pi]$;

06.21. $y=cos^2(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.22. $y=x^3$, $x\in[-\pi,\pi]$;

06.23.

$y=\begin{cases} \cos(x), & 0\le x\le\pi \\ 0, & \pi\le x\le 2\pi \end{cases}$, $x\in[0,2\pi]$;

06.24.

$y=\begin{cases} 0, & 0\le x\le\pi \\ \sin(x), & \pi\le x\le 2\pi \end{cases}$, $x\in[0,2\pi]$;

06.25. $y=\begin{cases}\left(1+\dfrac{x}{\pi}\right)^2, -\pi\le x\le 0\\ \left(1-\dfrac{x}{\pi}\right)^2\ 0\le x\le\pi\end{cases}, x\in[-\pi,\pi];$

06.26. $y=\begin{cases}x^3,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \pi\dfrac{(\pi-x)^2}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}, x\in[0,\pi];$

06.27. $y=x^3 sin(x+7), x\in[-\pi,\pi];$

06.28. $y=|x|^3, x\in[-\pi,\pi];$

06.29. $y=x^2, x\in[-\pi,\pi];$

06.30. $y=x\cdot e^x, x\in[-\pi,\pi].$

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Шилов, Г.Е. Математический анализ / Г.Е. Шилов. - М.: Издательство “Лань”, 2015. 912 с.
2. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа (в двух томах) / Г. М. Фихтенгольц. - М.: Издательство “Лань”, 2015. 912 с.

Дополнительная литература

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. - М.: Юнити, 2008. 480 с.
2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004. 336 с.
3. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2005. 336 с.

Евгений Леонидович **Панкратов**
Елена Алексеевна **Булаева**

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд.л.
Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603000, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01