МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Л.К. Додунова
Т.М. Митрякова

Кривые и поверхности второго порядка

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
механико-математического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
020100 "Химия",
240100 "Химическая технология",
по специальности 020201 "Фундаментальная и прикладная
химия".

Нижний Новгород
2013

УДК 514.123.3(077)
ББК В147(Р30)
D-60

D-60 **Додунова Л.К., Митрякова Т.М.** Кривые и поверхности второго порядка: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 38 с.

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент **Е.Я. Гуревич**

Работа содержит определения и классификацию кривых и поверхностей второго порядка. Рассмотрены уравнения кривых, заданных параметрически, в декартовой и полярной системах координат. Даны задания для самостоятельной работы студентов, содержащие более трехсот задач.

Предназначается студентам для приобретения практических навыков распознавания кривых и поверхностей второго порядка. Кроме того, форма составления заданий позволяет использовать их в качестве контрольных работ преподавателями для проверки знаний в указанной области курса „Математика“.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
механико-математического факультета,
к. ф.-м. н., доцент **Н.А. Денисова**

УДК 514.123.3(077)
ББК В147(Р30)

©Додунова Л.К., Митрякова Т.М., 2013
©Нижегородский госуниверситет
им. Н.И. Лобачевского, 2013

Введение

Настоящее пособие содержит представление кривых и поверхностей в рамках программы химического факультета по курсу „Математика“. Оно преследует цель помочь студентам систематизировать и укрепить свои знания в области представления кривых и поверхностей.

Кривые второго порядка используются при решении задач по аналитической геометрии, кривые других порядков используются при решении задач математического анализа в разделе вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

Знакомство студентов с кривыми происходит в первом семестре при изучении раздела математики „Аналитическая геометрия“, а практика применения кривых и поверхностей происходит в третьем семестре. К этому времени студенты теряют навык обращения с кривыми и поверхностями. Данное пособие преследует цель в третьем семестре послужить справочным материалом для воспроизведения изученных кривых и поверхностей и ознакомления с новыми кривыми, необходимыми для применения в разделах математического анализа.

Известные кривые рассматриваются в разных системах координат, а также с помощью параметрического задания. Для некоторых кривых, которые не были изучены ранее, приводятся выводы их уравнений, избегая громоздких выкладок. А именно, изложение понятия более сложной кривой строилось из логической последовательности действий, позволяющей ее осмыслить студентами химического факультета и представить изучаемую кривую на уровне, достаточном для приложений.

Данное пособие содержит задания для самостоятельного решения, выполнение которых позволят студенту увидеть разнообразие конкретных форм изучаемого объекта и дадут возможность углубить свои знания.

Структура пособия достаточно полно характеризуется содержанием.

1. Кривые второго порядка

1.1. Кривые, заданные в декартовых координатах

Линия первого порядка на плоскости определяется алгебраическим уравнением первой степени относительно декартовых координат x и y:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) определяет прямую на плоскости.

Линия второго порядка на плоскости определяется алгебраическим уравнением второй степени относительно переменных x и y:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (2)$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю.

Уравнение (2) определяет кривую линию, которая называется кривой второго порядка. Это может быть окружность, эллипс, гипербола, парабола и их вырождения.

В аналитической геометрии всякая кривая определяется как геометрическое место точек.

Рассмотрим кривые второго порядка.

Окружность

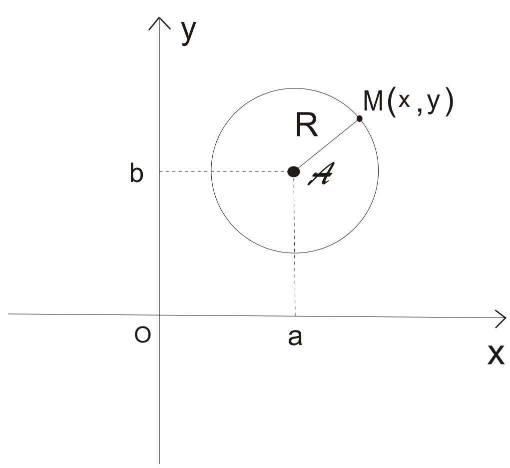

Рис. 1

Определение 1.1. *Окружностью называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, расстояние которых до данной точки $A(a, b)$ этой плоскости (называемой центром этой окружности) есть величина постоянная R (называемая радиусом этой окружности) (рис. 1).*

Уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

При $a = b = 0$ получим уравнение окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$. При $R = 0$ данные окружности вырождаются в точки с координатами соответственно (a, b) и $(0, 0)$.

Эллипс

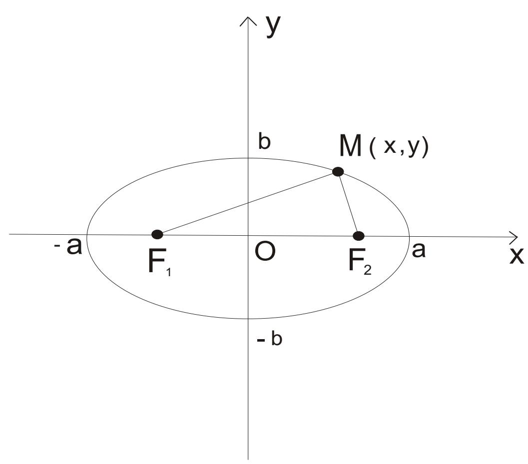

Рис. 2

Определение 1.2. *Эллипсом называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости (называемых фокусами этого эллипса) есть величина постоянная (рис. 2).*

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется каноническим уравнением эллипса, где a — большая полуось, b — малая полуось эллипса.

Вырождения эллипса:

1) уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ определяет мнимый эллипс;

2) уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ представляет точку с координатами $(0, 0)$.

Гипербола

Определение 1.3. *Гиперболой называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости (называемых фокусами этой гиперболы) есть величина постоянная (рис. 3).*

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется каноническим уравнением гиперболы, где a — действительная ось, b — мнимая ось гиперболы.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ представляет сопряжённую с данной гиперболу.

Вырождения гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ или $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$. Имеем пару пересекающихся прямых: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ и $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b}$.

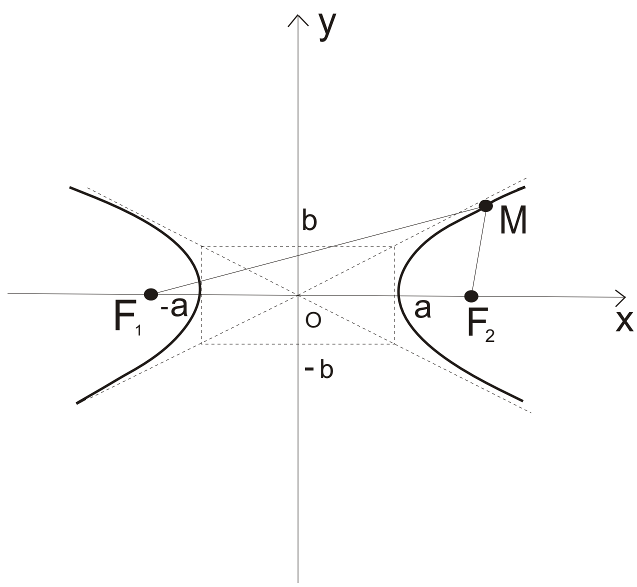

Рис. 3

Парабола

Определение 1.4. *Параболой называется геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, равноотстоящих от данной точки F этой плоскости (называемой фокусом) и данной прямой (называемой директрисой параболы), предполагая, что на ней не лежит эта точка F (рис. 4).*

Уравнение $y^2 = 2px$ называется каноническим уравнением параболы, где p $(p > 0)$ — параметр параболы.

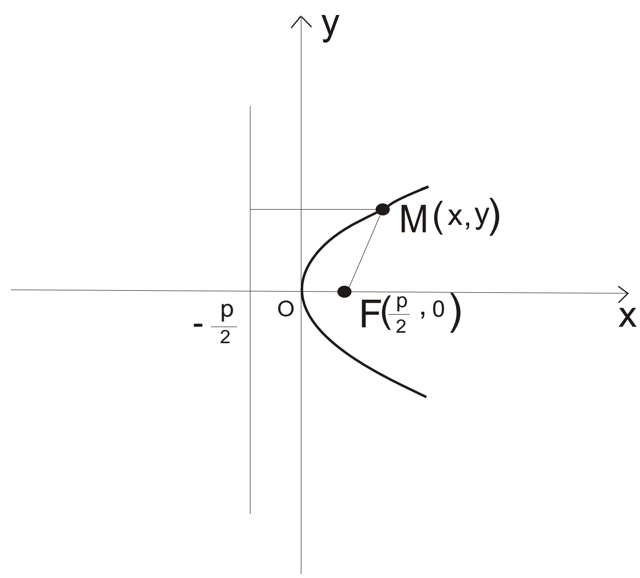

Рис. 4

Уравнение $x^2 = 2py$ определяет параболу, симметричную относительно оси Oy.

Вырождения параболы: при $p = 0$ получим:

1) уравнение $y^2 = 0$, которое определяет дважды совмещённую ось Ox;

2) $x^2 = 0$ есть дважды совмещённая ось Oy.

Задание 1.
Построить кривые следующих уравнений:

1.1.
1. $x^2 - 2x + y^2 - 4x = 4.$
2. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0.$
3. $5x^2 - 10y^2 - 50 = 0.$
4. $6x^2 - 3y = 0.$

1.2.
1. $x^2 - 8x + y^2 - 4y - 7 = 0.$
2. $x^2 + 5y^2 - 20 = 0.$
3. $7x^2 - 2y^2 - 14 = 0.$
4. $3y^2 - 9x = 0.$

1.3.
1. $x^2 + y^2 - 5x = 0.$
2. $2x^2 + 3y^2 + 12 = 0.$
3. $4x^2 - y^2 - 6 = 0.$
4. $5x^2 - 3y = 0.$

1.4.
1. $x^2 + y^2 - 7y = 0.$
2. $x^2 + 5y^2 - 10 = 0.$
3. $5x^2 - 10y^2 + 10 = 0.$
4. $x^2 - 8y = 0.$

1.5.
1. $x^2 - 3x + y^2 - 5y = 0.$
2. $3x^2 + 5y^2 = 60.$
3. $4x^2 - 8y^2 - 32 = 0.$
4. $9y^2 + 5x = 0.$

1.6.
1. $x^2 + 8x + y^2 + 2y - 17 = 0.$
2. $5x^2 + 15y^2 = 3.$
3. $x^2 - 2y^2 + 3 = 0.$
4. $3y - 5x^2 = 0.$

1.7.
1. $x^2 - 7x + y^2 - 8y = 30.$
2. $3x^2 + 7y^2 = 21.$
3. $5x^2 - 6y^2 = 0.$
4. $7x - 9y^2 = 0.$

1.8.
1. $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 13 = 0.$
2. $5x^2 + 7y^2 + 35 = 0.$
3. $2x^2 - 4y^2 - 8 = 0.$
4. $2x^2 - 3y = 0.$

1.9.
1. $x^2 - 5x + y^2 - 6y = 10.$
2. $3x^2 + 4y^2 - 24 = 0.$
3. $4x^2 - 7y^2 - 28 = 0.$
4. $8y - 5x^2 = 0.$

1.10.
1. $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 11.$
2. $2x^2 + 7y^2 - 14 = 0.$
3. $5x^2 - 8y^2 - 40 = 0.$
4. $9x - 5y^2 = 0.$

1.11.
1. $x^2 - 3x + y^2 - 5x = 5.$
2. $4x^2 + 5y^2 - 13 = 0.$
3. $6x^2 - 11y^2 - 60 = 0.$
4. $7x^2 - 4y = 0.$

1.12.
1. $x^2 - 9x + y^2 - 5y - 8 = 0.$
2. $x^2 - 6y^2 - 30 = 0.$
3. $8x^2 - 3y^2 - 23 = 0.$
4. $4y^2 - 8x = 0.$

1.13.
1. $x^2 + y^2 - 6y = 0.$
2. $3x^2 + 5y^2 + 16 = 0.$
3. $5x^2 - y^2 - 7 = 0.$
4. $6x^2 - 4y = 0.$

1.14.
1. $x^2 + y^2 - 8x = 0.$
2. $x^2 + 6y^2 - 15 = 0.$
3. $6x^2 - 12y^2 + 24 = 0.$
4. $x^2 - 9y = 0.$

1.15.
1. $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 0.$
2. $4x^2 + 6y^2 = 48.$
3. $5x^2 - 3y^2 = 30.$
4. $8y^2 + 4x = 0.$

1.16.
1. $x^2 + 7x + y^2 + y - 18 = 0.$
2. $4x^2 + 13y^2 = 2.$
3. $x^2 - 3y^2 + 4 = 0.$
4. $2y - 7x^2 = 0.$

1.17.
1. $x^2 - 6x + y^2 - 6y = 18.$
2. $2x^2 + 6y^2 = 13.$
3. $4x^2 - 3y^2 = 0.$
4. $6x^2 - 7y = 0.$

1.18.
1. $x^2 - 3x + y^2 + 2y + 12 = 0.$
2. $3x^2 + 5y^2 + 20 = 0.$
3. $x^2 - 2y^2 - 6 = 0.$
4. $5x^2 - 4y = 0.$

1.19.
1. $x^2 - 4x + y^2 - 5y = 9.$
2. $2x^2 + 5y^2 - 20 = 0.$
3. $3x^2 - 6y^2 - 24 = 0.$
4. $7y - 3x^2 = 0.$

1.20.
1. $x^2 + 5x + y^2 + 7y = 10.$
2. $x^2 + 6y^2 - 13 = 0.$
3. $4x^2 - 8y^2 - 50 = 0.$
4. $8x - 7y^2 = 0.$

1.21.
1. $x^2 - 4x + y^2 - 6x = 7.$
2. $5x^2 + 3y^2 - 14 = 0.$
3. $7x^2 - 12y^2 - 54 = 0.$
4. $5x^2 - 8y = 0.$

1.22.
1. $x^2 - 7x + y^2 - 3y - 5 = 0.$
2. $x^2 - 3y^2 - 20 = 0.$
3. $6x^2 - 5y^2 - 21 = 0.$
4. $5y^2 - 7x = 0.$

1.23.
1. $x^2 + y^2 - 3x = 0.$
2. $4x^2 + 7y^2 - 15 = 0.$
3. $3x^2 - y^2 - 8 = 0.$
4. $2x^2 - 9y = 0.$

1.24.
1. $x^2 + y^2 - 9x = 0.$
2. $x^2 + 6y^2 + 24 = 0.$
3. $4x^2 - 10y^2 - 30 = 0.$
4. $3x^2 - 8y = 0.$

1.25.
1. $x^2 - 5x + y^2 - 7y = 0.$
2. $5x^2 + 4y^2 = 50.$

1.26.
1. $x^2 + 6x + y^2 + 3y - 16 = 0.$
2. $3x^2 + 12y^2 = 7.$

3. $6x^2 - 7y^2 = 14.$
4. $3y^2 - x = 0.$

3. $x^2 - 4y + 5 = 0.$
4. $2y - 8x^2 = 0.$

1.27.
1. $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 14.$
2. $4x^2 + 5y^2 = 12.$
3. $3x^2 - 2y^2 = 0.$
4. $2x^2 - 3y = 0.$

1.28.
1. $x^2 - 5x + y^2 + 3y + 14 = 0.$
2. $2x^2 + 6y^2 + 30 = 0.$
3. $4x^2 - 5y^2 - 15 = 0.$
4. $3x^2 - 5y = 0.$

1.29.
1. $x^2 - 3x + y^2 - 4y = 12.$
2. $4x^2 + 3y^2 - 21 = 0.$
3. $5x^2 - 2y^2 - 15 = 0.$
4. $7y - 2x^2 = 0.$

1.30.
1. $x^2 + 4x + y^2 + 6y = 0.$
2. $3x^2 + 5y^2 - 10 = 0.$
3. $3x^2 - 2y^2 - 15 = 0.$
4. $4x^2 - 7y^2 = 0.$

1.2. Параметрическое задание кривых на плоскости

Определение 1.5. *Параметром называется переменная величина t, определяющая положение точки на некоторой кривой ℓ.*

Пусть координаты точки, лежащей на кривой ℓ, представляют функции параметра t: $$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

тогда уравнения (1) называются параметрическими уравнениями кривой ℓ.

Чтобы перейти от параметрического задания (1) кривой ℓ к заданию ее в декартовых координатах x и y, нужно исключить параметр t из системы (1).

Рассмотрим параметрические задания некоторых кривых.

Окружность

Положение точки M на окружности радиуса R (рис. 5) определяется величиной угла $\varphi = \angle AOM$. Поэтому φ принимаем за параметр.

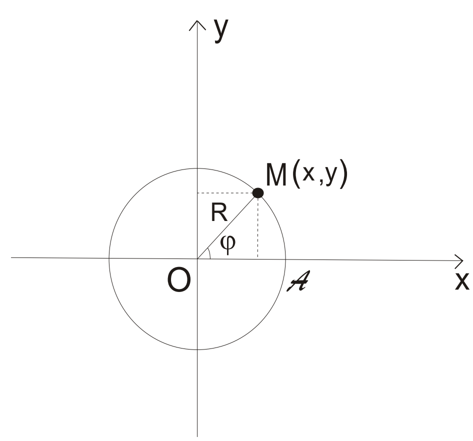

Рис. 5

Выразим $$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\varphi, \\ y &= R\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Это и будут параметрические уравнения окружности (2).

Чтобы перейти к заданию уравнения окружности в декартовых координатах, нужно исключить параметр φ. Для этого возведем оба уравнения (2) в квадрат и сложим, получим $x^2 + y^2 = R^2$.

Эллипс

Параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Меняя параметр t от 0 до 2π, получим все точки этого эллипса.

В частности, при $a = b$, имеем параметрические уравнения окружности: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

Чтобы перейти к заданию уравнения эллипса в декартовых координатах, исключим параметр t. Для этого выразим $\cos t = \frac{x}{a}$, $\sin t = \frac{y}{b}$. Возведем в квадрат получившиеся оба равенства и сложим их. Получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Парабола

Пусть параметрические уравнения параболы имеют вид $x = 4t^2$, $y = t$. Исключая параметр t, получим уравнение параболы: $x = 4y^2$.

Циклоида

Определение 1.6. *Циклоидой называется линия, описываемая фиксированной точкой M, лежащей на окружности, которая катится без скольжения по прямой линии (рис. 6).*

Катящаяся окружность называется производящей.

Зафиксируем ту точку окружности радиуса a, которая совпадает с точкой $O(0,0)$ оси Ox в положении окружности, когда ее диаметр перпендикулярен оси Ox. Пусть данная окружность катится без скольжения вправо по горизонтальной прямой. За параметр t принимается угол поворота радиуса окружности, проходящего через фиксированную точку. При этих

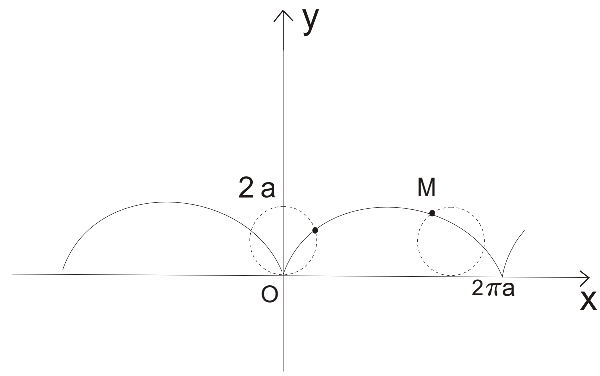

Рис. 6

условиях параметрические уравнения циклоиды имеют вид:
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \end{cases}$$
где a — радиус производящей окружности.

Рассмотрим также некоторые важные для практического применения кривые порядка более второго.

Астроида

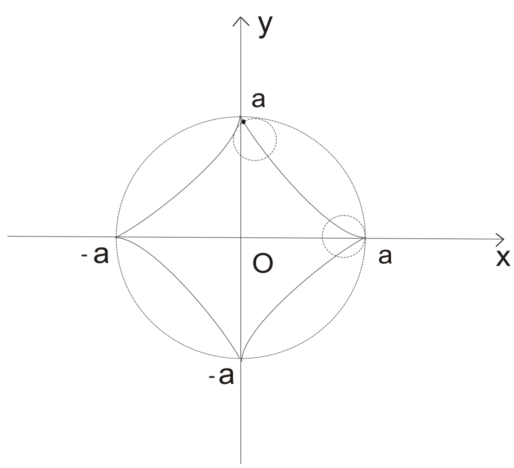

Рис. 7

Определение 1.7. *Пусть по окружности радиуса a внутренним образом катится без скольжения окружность радиуса $\frac{a}{4}$. Траектория, которую совершает фиксированная точка малой окружности, называется астроидой (рис. 7).*

Это плоская алгебраическая кривая шестого порядка. Параметрические уравнения астроиды имеют вид: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

В декартовых координатах уравнение астроиды: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Кардиоида

Определение 1.8. *Пусть по окружности радиуса a внешним образом катится без скольжения окружность того же радиуса a. Траектория, которую совершает фиксированная точка катящейся окружности, называется кардиоидой (рис. 8).*

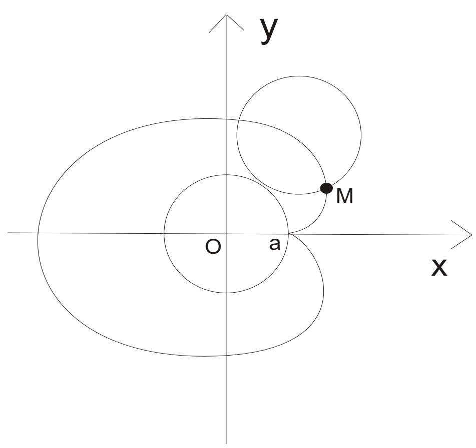

Рис. 8

Это плоская алгебраическая кривая четвертого порядка. Параметрические уравнения кардиоиды имеют вид: $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$

В декартовой системе координат уравнение кардиоиды следующее: $(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2[(x-a)^2 + y^2]$.

Задание 2.

2.1. Построить циклоиды при $a = 2, 3, 4, \ldots, 30$, придавая параметру t значения $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, π, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, 2π.

2.2. Построить астроиду при указанных в задании **2.1.** значениях a и t.

2.3. Построить кардиоиду при тех же значениях a и t, что указаны в задании **2.1.**

1.3. Кривые в полярной системе координат

Положение точки на плоскости можно определить не только с помощью декартовой системы координат, но и другим способом.

Возьмем на плоскости произвольную точку O и проведем луч OX (рис. 9). Положение любой точки M можно задать двумя числами:

1) положительным числом ρ, выражающим расстояние точки M до O;

2) числом φ, выражающим величину угла, образованного отрезком OM с лучом OX.

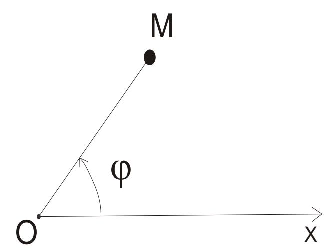

Рис. 9

Числа ρ и φ называются полярными координатами точки M.

Число $\rho = OM$ называется полярным радиусом или полярным радиус-вектором точки M, угол φ — ее полярным углом, точка O — полюсом, а луч OX — полярной осью.

Угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против хода часовой стрелки и находится в границах $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Радиус-вектор ρ всегда считается неотрицательным.

Рассмотрим связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами. Для этого совместим начало прямоугольной системы координат с полюсом, а положительное направление оси Ox — с полярной осью OX (рис. 10).

Из рисунка 10 находим:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi. \tag{4}$$

Полярные координаты через декартовые выражаются следующим образом: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Уравнение $\rho = F(\varphi)$ в полярной системе координат определяет некоторую кривую.

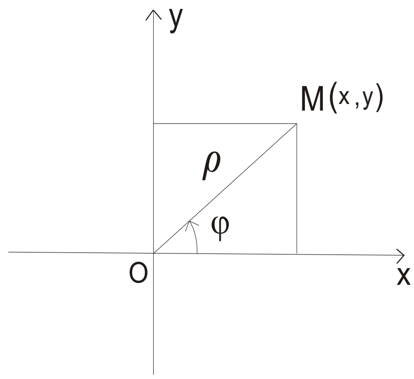

Рис. 10

Рассмотрим некоторые кривые, заданные в полярных координатах.

Окружности

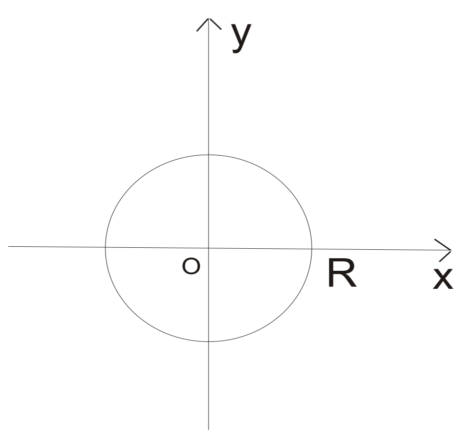

Рис. 11

1. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат $O(0,0)$ в декартовых координатах, как известно, имеет вид

$x^2+y^2=R^2$ (рис. 11). Подставим в это уравнение вместо x и y выражения (4). Получим уравнение окружности в полярной системе координат $\rho = R$, центр которой совпадает с полюсом O. Напомним, что ρ не может быть отрицательным, так как это расстояние.

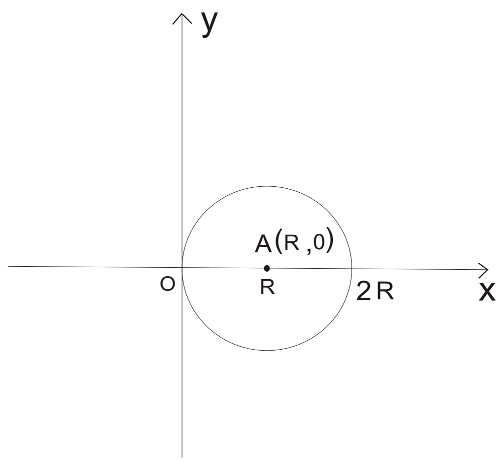

Рис. 12

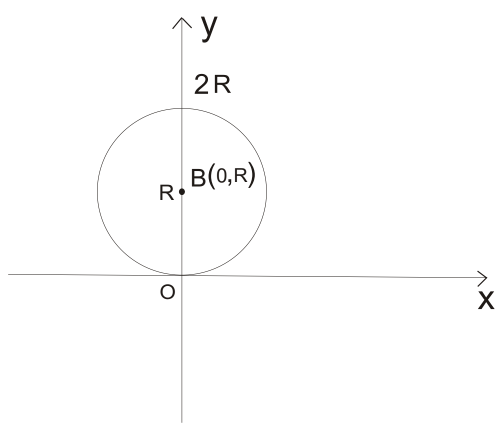

Рис. 13

2. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A(R,0)$ в декартовых координатах имеет такой вид $(x-R)^2+y^2=R^2$

(рис. 12) или, после раскрытия скобок, вид $x^2 + y^2 = 2Rx$. Подставляя в него вместо x и y выражения (4), получим уравнение данной окружности в полярных координатах: $\rho = 2R\cos\varphi$. Здесь получается также уравнение $\rho = 0$, которое представляет полюс при любом значении φ, поэтому его отбросим.

3. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $B(0, R)$ в декартовых координатах имеет такой вид $x^2+(y-R)^2 = R^2$ (рис. 13). Раскрывая скобки, имеем $x^2 + y^2 = 2Ry$. Используя (4) здесь, получим это уравнение в порлярных координатах: $\rho = 2R\sin\varphi$.

Некоторые кривые вида $\rho = a\sin n\varphi$ и $\rho = b\cos n\varphi$, где $a > 0$, $b > 0$ и $n = 2, 3, 4, \dots$

1. Рассмотрим кривую вида $\rho = a\sin 3\varphi$, $a > 0$. Заметим, что правая часть уравнения имеет период, равный $\frac{2}{3}\pi$. Поэтому можно построить кривую для значений полярного угла φ, находящегося в интервале $[0, \frac{2}{3}\pi]$, а далее продолжить кривую периодически. Полярный радиус ρ, как известно, неотрицателен, поэтому $\sin 3\varphi \geq 0$. Отсюда $2\pi k \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2$. Имеем

$$\frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}. \tag{5}$$

Как известно, при $k = 0$ получим $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

Функция $\sin 3\varphi$ монотонно возрастает при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ и при $\frac{\pi}{6} < \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ монотонно убывает. Отсюда также ведет себя полярный радиус ρ. При $\frac{\pi}{3} < \varphi \leq \frac{2}{3}\pi$ правая часть уравнения $\rho = a\sin 3\varphi$ отрицательна, значит через эти значения ρ кривая не проходит (рис. 14). Таким образом, в интервале $[0, \frac{2}{3}\pi]$ получим часть кривой — „лепесток“. В неравенствах (5) при $k = 1, 2$ получим соответствующие интервалы для φ и в них строим соответствующие „лепестки“, проводя аналогичные рассуждения или периодически продолжая.

2. Применяя аналогичные рассуждения, можно построить кривую, имеющую уравнение $\rho = a\cos 3\varphi$, $a > 0$ (рис. 15). Здесь $\cos 3\varphi$ будет положительным в пределах φ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Значит, первый лепесток будет при $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$, то есть он будет симметричен относительно полярной оси OX.

3. Таким же образом, как в предыдущих пунктах строятся кривые, соответствующие уравнениям $\rho = a\sin 2\varphi$, $\rho = a\sin 4\varphi$, $\rho = a\sin 5\varphi$, $\dots$, $\rho = a\sin n\varphi$, $\dots$, $\rho = b\cos 2\varphi$, $\rho = b\cos 4\varphi$, $\rho = b\cos 5\varphi$, $\dots$, $\rho = b\cos n\varphi$, $\dots$.

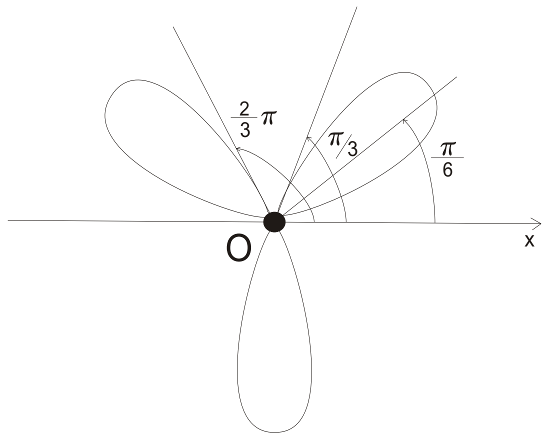

Рис. 14

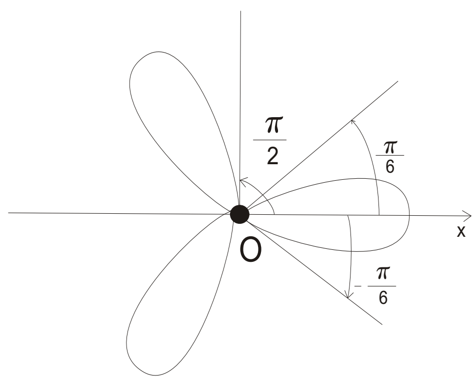

Рис. 15

Рассмотрим некоторые кривые более высокого порядка.

Лемниската

Определение 1.9. *Лемнискатой называется геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух заданных точек (фокусов)* $F_1(a;0)$ *и* $F_2(-a;0)$, *где* $a>0$, *есть величина постоянная, равная* a^2 *(рис. 16).*

Это плоская кривая четвертого порядка. Выведем ее уравнение.

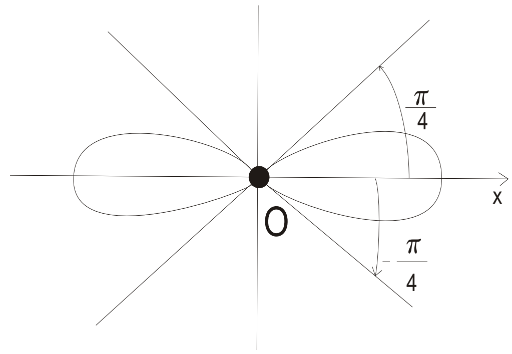

Рис. 16

Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка на данной кривой. Найдем расстояния от этой точки $M(x,y)$ до точек $F_1(a;0)$ и $F_2(-a;0)$. Получим соответственно $r_1 = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x+a)^2+y^2}$. По определению имеем $r_1 \cdot r_2 = a^2$. Поэтому лемниската имеет уравнение $\sqrt{(x-a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2+y^2} = a^2$.

Сделаем некоторые преобразования, получим: $(x^2+a^2+y^2-2ax)(x^2+a^2+y^2+2ax) = a^4$, $(x^2+a^2+y^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$, или, окончательно имеем уравнение лемнискаты $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$. В это уравнение подставим x и y выражения (4), получим $(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = 2a^2(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$, или $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ — это уравнение лемнискаты в полярных координатах.

Лемнискату можно рассматривать и с таким уравнением $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Рассмотренную кривую называют *лемнискатой Бернулли.*

Кардиоида

Уравнение кардиоиды вида $(x^2+y^2-a^2)^2 = 4a^2[(x-a)^2+y^2]$ было рассмотрено в предыдущем пункте 1.2. В полярных координатах оно имеет вид $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$. Рассмотрим теперь кардиоиду в другом положении (рис. 17). А именно, пусть O_1 — центр неподвижной окружности с радиусом $\frac{a}{2}$, O_2 — первоначальное положение центра катящейся окружности с тем же радиусом $\frac{a}{2}$. В

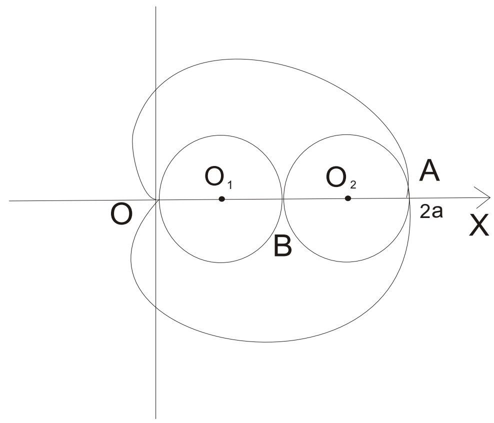

Рис. 17

начальный момент окружности соприкасаются в точке B; A — первоначальное положение точки, описывающей кардиоиду. Точка A диаметрально противоположна точке B. Если окружность с центром O_2 покатим без скольжения по внешней стороне окружности с центром O_1, то траектория движения точки A опишет кардиоиду, имеющую уравнение $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Спираль Архимеда

Пусть луч OX вращается около полюса O с постоянной угловой скоростью ω. Из точки O по этому лучу движется точка M с постоянной скоростью v. Траектория, которую описывает точка M, образует кривую, которая называется *спиралью Архимеда* (рис. 18). Ее уравнение в полярных координатах имеет вид: $\rho = a\varphi$, где $a = \frac{v}{\omega}$. Отрицательным значениям φ соответствует другая ветвь (рис. 19). Расстояние между двумя последовательными витками постоянно и равно $2\pi a$, то есть $OA_1 = A_1A_2 = 2\pi a$.

Кривые в полярных координатах можно строить по точкам. Например, построим кривую, данную уравнением $\rho = 2\varphi$. Для этого составим таблицу значений ρ при некоторых значениях φ:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 1,5$	$\approx 3,1$	$\approx 4,7$	$\approx 6,2$	$\approx 8,4$	$\approx 12,5$	$\approx 18,8$	$\approx 25,1$

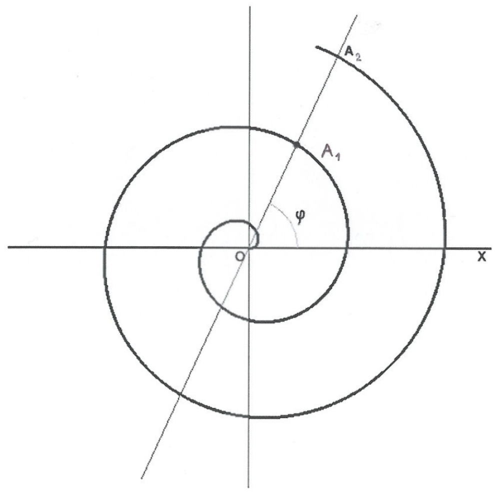

Рис. 18

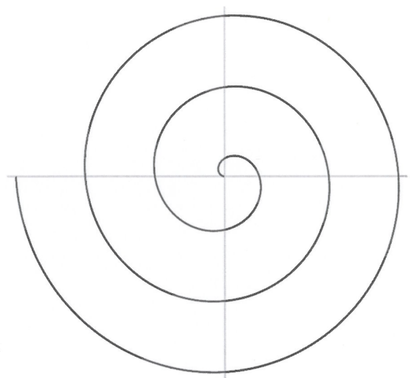

Рис. 19

Найденным точкам соответствует кривая, подобная изображенной на рисунке 18.

Задание 3.

Построить следующие кривые в полярной системе координат при $a = 2, 3, 4, \ldots, 9$ для разных $n = 2, 3, 4, \ldots, 9$.

3.1. $\rho = a\cos\varphi$.

3.2. $\rho = a\sin\varphi$.

3.3. $\rho = a\sin n\varphi$.

3.4. $\rho = a\cos n\varphi$.

3.5. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

3.6. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

3.7. $\rho = a\varphi$.

2. Поверхности второго порядка

2.1. Цилиндрические поверхности

Пусть дано уравнение, не содержащее переменной z: $F(x, y) = 0$. На плоскости координат xOy этому уравнению соответствует кривая L, представляющая геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (рис. 20).

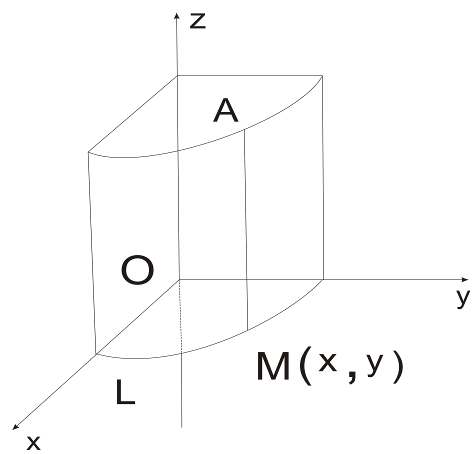

Рис. 20

Через любую точку $M(x, y)$ на этой кривой проведем прямую MA, параллельную оси Oz. Пусть эта прямая перемещается по кривой L, оставаясь параллельной оси Oz. Прямая MA в этом случае опишет поверхность, которая называется цилиндрической. Линия L называется ее направляющей, а движущаяся прямая MA — образующей.

Таким образом, уравнение $F(x, y) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oz.

Если уравнение не содержит переменного x и y ($F(y, z) = 0$ или $F(x, z) = 0$), то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными соответственно оси Ox или Oy.

Рассмотрим цилиндрические поверхности второго порядка.

Круговой цилиндр

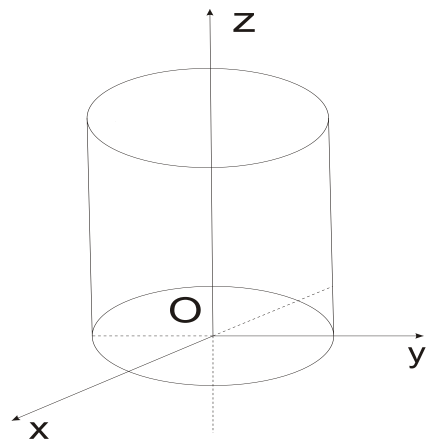

Рис. 21

Уравнение $x^2+y^2 = R^2$ определяет круговой цилиндр (рис. 21), у которого направляющая есть окружность $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 22), лежащая в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz.

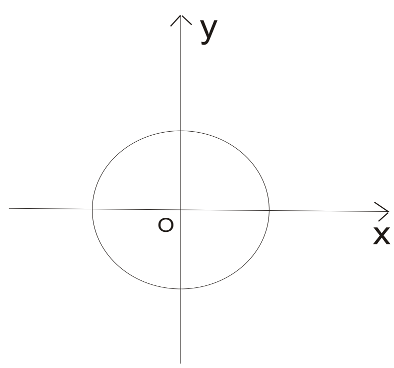

Рис. 22

Эллиптический цилиндр

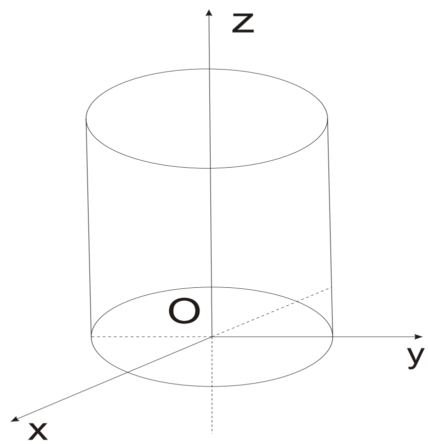

Рис. 23

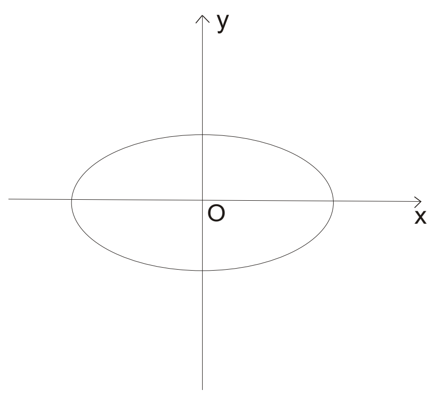

Рис. 24

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ представляет эллиптический цилиндр (рис. 23) (направляющая есть эллипс (рис. 24)). Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллиптический цилиндр. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ представляет пару мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой, другими словами, это прямая.

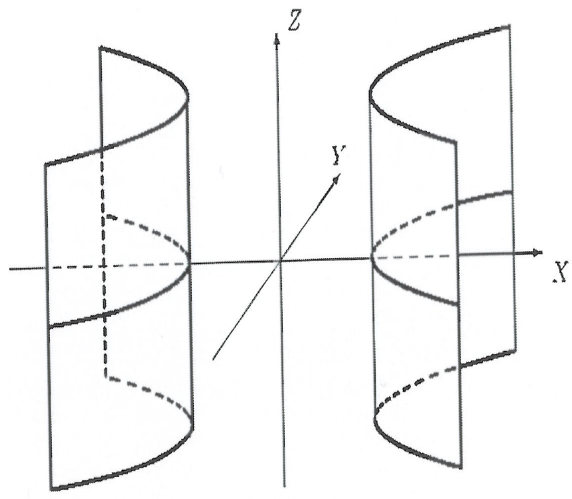

Рис. 25

Гиперболический цилиндр

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяет гиперболический цилиндр (рис. 25). Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ представляет пару пересекающихся плоскостей (рис. 26).

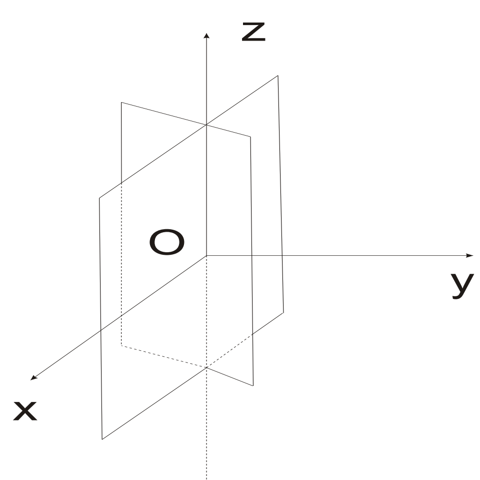

Рис. 26

Параболический цилиндр

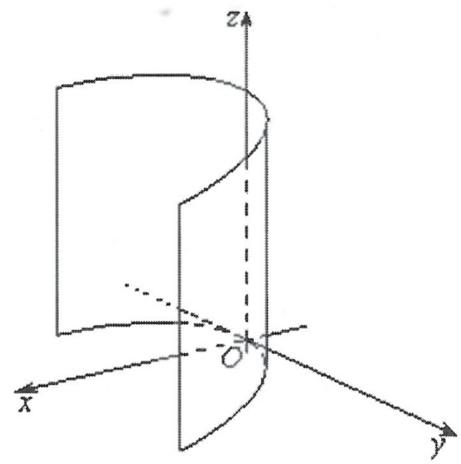

Рис. 27

Параболический цилиндр имеет уравнение $y^2 = 2px$ (рис. 27).

Кроме цилиндрических, рассмотрим также другие поверхности второго порядка, заданные своими каноническими уравнениями.

2.2. Эллипсоид

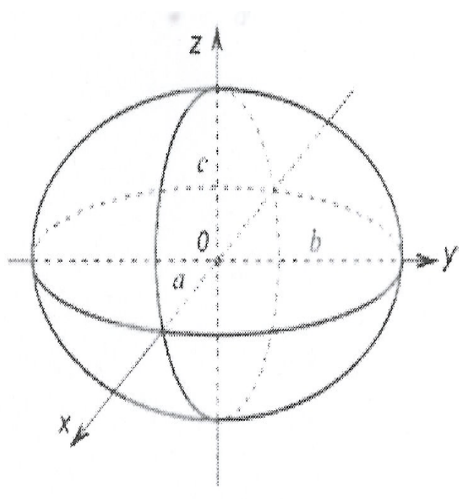

Рис. 28

Эллипсоид (рис. 28) имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. При $a = b = c$ получим частный случай уравнения эллипсоида — уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (рис. 29). Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ представляет мнимый эллипсоид.

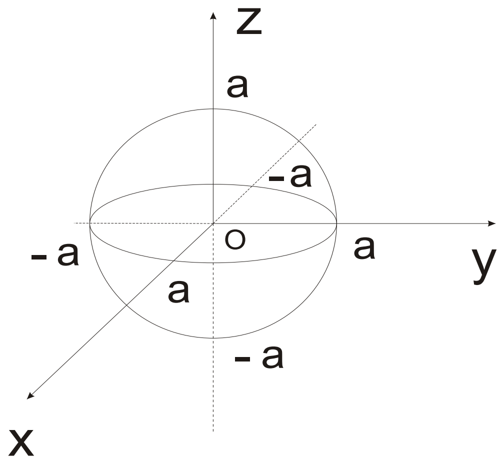

Рис. 29

2.3. Гиперболоиды

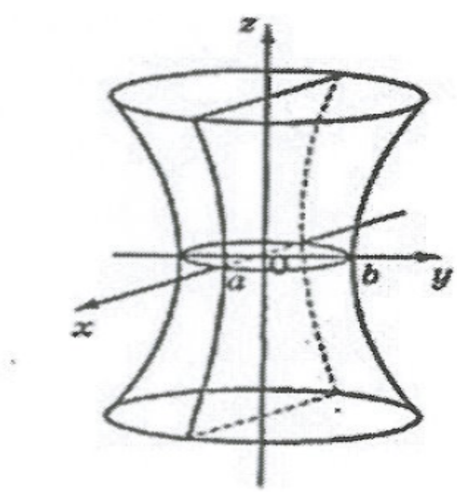

Рис. 30

a) Однополостный гиперболоид имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 30).

b) Двуполостный гиперболоид имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (рис. 31).

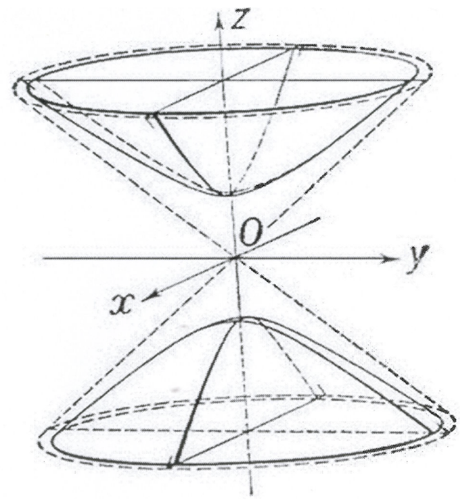

Рис. 31

2.4. Параболоиды

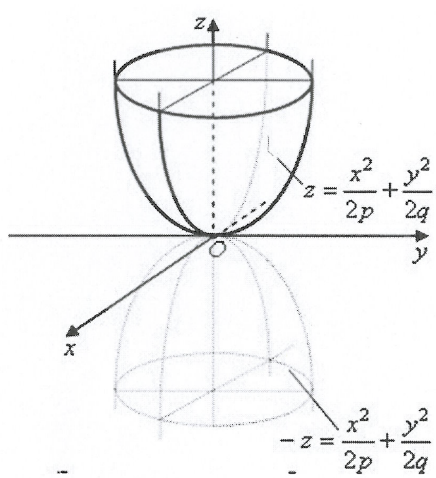

Рис. 32

a) Эллиптический параболоид имеет уравнение $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ ($p > 0$, $q > 0$) (рис. 32).

b) Гиперболический параболоид имеет уравнение $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ ($p > 0$, $q > 0$) (рис. 33).

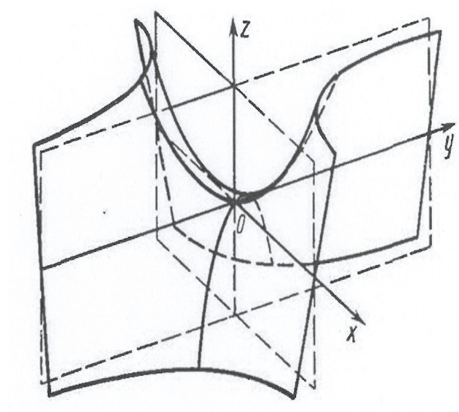

Рис. 33

2.5. Конус

Конус имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ (рис. 34). Конус называется круговым, если $a^2=b^2$. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ представляет мнимый конус с действительной вершиной $O(0,0,0)$, другими словами это уравнение точки.

Рассмотрим еще некоторые распадающиеся вырождающиеся поверхности. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}=1$ представляет пару параллельных плоскостей. Уравнение $x^2=0$ — пару совпадающих плоскостей. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}=-1$ — пару мнимых параллельных плоскостей.

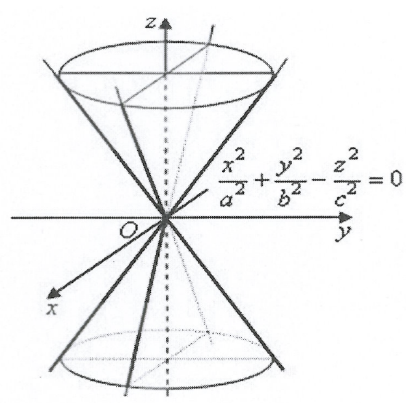

Рис. 34

Задание 4.

Определить виды поверхностей и построить их.

4.1.

1. $9x^2 + 9y^2 = 72.$
2. $5x^2 + 16y^2 = 80.$
3. $4x^2 + 4y^2 = 16.$
4. $3x^2 + 9y^2 = 18.$
5. $7x^2 + 7y^2 = 5.$
6. $3x^2 + 3y^2 = 4.$
7. $6x^2 + 6y^2 = 12.$
8. $x^2 + y^2 = 7.$
9. $x^2 + 4y^2 = 3.$
10. $2x^2 + y^2 = 5.$

4.2.

1. $2x^2 - 3y^2 = 6.$
2. $3x^2 - 5y^2 = 7.$
3. $4x^2 - 4y^2 = 8.$
4. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0.$
5. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 0.$
6. $x^2 - 3y^2 = 3.$
7. $5x^2 - y^2 = 10.$
8. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 2.$
9. $\frac{2x^2}{5} - \frac{3y^2}{4} = 1.$
10. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 3.$

4.3.

1. $y^2 = 4x.$
2. $y^2 = 7x.$
3. $2y^2 = 5x.$
4. $y = 6x^2.$
5. $z = 7x^2.$
6. $3z^2 = 2x.$
7. $x = 10y^2.$
8. $x^2 = 5z.$
9. $z^2 = 4y.$
10. $z = 2y^2.$

4.4.

1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1.$
2. $\frac{x^2}{6} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 2.$
3. $3x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 30.$
4. $x^2 + y^2 + z^2 = 3.$
5. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 2.$
6. $\frac{3x^2}{2} + \frac{2y^2}{5} + \frac{z^2}{3} = 1.$
7. $x^2 + \frac{3y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1.$
8. $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1.$
9. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 6.$
10. $x^2 + y^2 + z^2 = 8.$

4.5.

1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{36} = 1.$
2. $3x^2 + 6y^2 - z^2 = 6.$
3. $2x^2 - y^2 + 5z^2 = 10.$
4. $x^2 - 3y^2 + \frac{z^2}{2} = 6.$
5. $-x^2 + 5y^2 + 2z^2 = 10.$
6. $\frac{x^2}{2} - \frac{2y^2}{3} + z^2 = 1.$
7. $-3x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1.$
8. $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{5} + \frac{2z^2}{3} = 1.$
9. $5x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 2.$
10. $3x^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 2.$

4.6.

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1.$
2. $-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{36} = -1.$
3. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1.$
4. $-3x^2 - 2y^2 + z^2 = 1.$
5. $2x^2 - 3y^2 + z^2 = -1.$
6. $4x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{2z^2}{3} = 1.$
7. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = -1.$
8. $x^2 - y^2 + \frac{z^2}{2} = -1.$
9. $-5x^2 + \frac{y^2}{3} + z^2 = -2.$
10. $x^2 - y^2 + z^2 = -3.$

4.7.
1. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=6z.$
2. $x^2+y^2=2z.$
3. $2x^2+4y^2-z=0.$
4. $3x^2+6y^2=6z.$
5. $\frac{2x^2}{3}+\frac{3y^2}{4}=12z.$
6. $\frac{4x^2}{5}+y^2=2z.$
7. $x^2+\frac{y^2}{7}-3z=0.$
8. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-\frac{z}{20}=0.$
9. $3x^2+2y^2+6=0.$
10. $\frac{x^2}{6}+5y^2+z=0.$

4.8.
1. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=6z.$
2. $\frac{2x^2}{5}-\frac{3y^2}{2}=2z.$
3. $5x^2-4y^2=z.$
4. $3x^2-y^2=3z.$
5. $x^2-y^2=z.$
6. $-x^2+y^2=z.$
7. $-2x^2+3y^2=z.$
8. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=2z.$
9. $\frac{x^2}{5}-\frac{2y^2}{3}=z.$
10. $\frac{2x^2}{7}-\frac{3y^2}{5}=4z.$

4.9.
1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{9}.$
2. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=0.$
3. $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=-\frac{z^2}{4}.$
4. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=0.$
5. $2x^2-3y^2=-5z^2.$
6. $3x^2+4y^2=z^2.$
7. $4x^2-2y^2+3z^2=0.$
8. $-x^2+\frac{y^2}{2}=-5z.$
9. $x^2-y^2-z^2=0.$
10. $-5x^2-3y^2+2z^2=0.$

4.10. Построить фигуры, ограниченные следующими поверхностями.

1. $3z=y^2,\ x=-3,\ x=3,\ z=4.$
2. $z=2x^2+3y^2,\ z=5.$
3. $9x^2+4z^2=36,\ y=2,\ y=6.$
4. $x^2+z^2=4,\ y=-1,\ y=-2.$
5. $x=9y^2+2z^2,\ x=7.$
6. $x^2=y^2+2z^2,\ x=-4,\ x=5.$
7. $x^2+y^2=2x,\ z=x^2+2y^2.$
8. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2-z^2=0.$
9. $x^2+y^2=3y,\ x^2+y^2=6y,\ z=1,\ z=3.$
10. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2-z^2=0.$
11. $x^2-y^2=1,\ y=x+2,\ z=0,\ z=2.$
12. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1,\ 2x^2+y^2=1.$

13. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + 3z^2 = 1$.
14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $z = 0$.
15. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 2z$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.
16. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1$, $x^2 + y^2 = 2y$.
17. $y^2 = 4x$, $z = 0$,$z = 2$, $x = -\frac{1}{4}y^2$.
18. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 0$, $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}$.
19. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} - \frac{z^2}{6} = -1$, $z = 2x^2 + 3y^2$.
20. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} - \frac{z^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} - \frac{2z^2}{3} = 0$.
21. $x^2 + y^2 = 9x$, $x^2 + y^2 = 16y$, $z = -2$, $z = 3$.
22. $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
23. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z = 0$.
24. $y^2 = 8x$, $8x + y^2 = 0$, $z = 0$, $z = 5$.
25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = -1$, $z = 5x^2 + 3y^2$.
26. $z = x^2 - 2y^2$, $z = x^2 + 2y^2$.
27. $3x^2 - y^2 = 2z$, $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.
28. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.
29. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$, $z^2 = 3x^2 + y^2$.
30. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Литература

[1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Физматлит, 2005. — 304с.

[2] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Том 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Дрова, 2004. — 288 с.

[3] Данко П.Е., Попов А.Р., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов ВТУЗов. Ч.1 — 4-е изд., испр. и доп. — М.:Высш. шк. 1986. — 304 с., илл.

[4] Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976. — 226 с.

[5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Учебник для ВУЗов. — Москва: Физматлит, 2007. — 223 с.

[6] Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1978. — 208 с., илл.

[7] Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. — Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. — 294 с.

[8] Математический энциклопедический словарь. Прохоров Ю.В., Адян С.И., Бахвалов Н.С., Битюцков В.И., Ершов А.П., Кудрявцев Л.Д., Онищик А.Л., Юшкевич А.П. — М.: Сов. энциклопедия, 1988. — 847 с., илл.

Содержание

Людмила Кузминична **Додунова**
Татьяна Михайловна **Митрякова**

Кривые и поверхности второго порядка

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования "Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.