

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО**

Радиофизический факультет

**Кафедра теории колебаний и автоматического
регулирования**

**СИНХРОНИЗАЦИЯ ВНЕШНИМ
ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ**

Осипов Г.В., Половинкин А.В.

Учебное пособие

Нижний Новгород, 2005

Содержание

1	Синхронизация регулярной автоколебательной системы внешней периодической силой	7
1.1	Слабое воздействие. Фазовое описание.	7
1.2	Автономный осциллятор Ван дер Поля	12
1.3	Периодически возмущаемый осциллятор Ван дер Поля	15
2	Синхронизация осциллятора Ресслера внешним периодическим сигналом	23
2.1	Автономный осциллятор Ресслера	23
2.2	Фазовая синхронизация хаотического осциллятора Ресслера внешним периодическим воздействием	29
3	Синхронизация система Лоренца внешней периодической силой	35
3.1	Автономная система Лоренца	35
3.2	Периодически управляемая система Лоренца	37
4	Вынужденная фазовая синхронизация хаотических колебаний с перемежаемостью	43
4.1	Система Лоренца	43
4.2	Модельное отображение с хаотической перемежаемостью	47
5	Отображение окружности	55
6	Вынужденная синхронизация активного ротатора	61

7	Синхронный отклик возбудимой системы на внешний периодический сигнал. Модель Луо-Руди	64
8	Синхронизация в системах с шумом	69

Введение

Одна из главных тенденций в живом мире - тенденция к достижению общих ритмов взаимного поведения - тенденция к *синхронизации*. С различными проявлениями синхронизации можно встретиться в физике, биологии, химии, технике, экономике, медицине и т.д. Возможна синхронизация как двух элементов, так и в ансамблях, состоящих из сотен и тысяч элементов. В радиофизике интенсивно исследуется коллективное поведение лазеров, генераторов мощности, сверхпроводящих джозефсоновских контактов. В радиотехнике, радиоизмерениях и радиосвязи синхронизация используется для синтеза и стабилизации частоты генераторов, для демодуляции сигналов в доплеровских системах, в системах точного времени и т.д. В механике эффект синхронизации нашел широкое применение при конструировании различных вибро-технических устройств. Примерами биологических ансамблей, в которых наблюдается синхронизация являются: колонии одновременно вспыхивающих светлячков; клетки, формирующие сердечный ритм; клетки, вырабатывающие инсулин в поджелудочной железе; группы сверчков, щебечущих в унисон; ячейки в тонкой кишке млекопитающих; нейронные ансамбли, демонстрирующие ритмичную деятельность в мозгу и т.д. Явление синхронизации также очень важно при проектировании компьютеров с параллельной архитектурой. Синхронизация наблюдается в химических колебаниях и волнах в реакции Белоусова-Жаботинского.

В настоящем пособии описывается явление синхронизации автоколебательных систем (осцилляторов) внешней периодической силой, т.е. явление *вынужденной синхронизации*. В классической теории синхронизации регуляр-

ный (нехаотический) осциллятор, управляемый периодическим сигналом, - главная и исторически первая изученная модель. Можно считать, что классическая теория синхронизации была в основном построена к 60-м годам прошлого столетия. В настоящее время имеются всесторонние обзоры и книги, где эта теория представлена подробно (см, например, [4]). Поэтому в этом пособии кратко представляются основные положения теории вынужденной синхронизации периодических осцилляторов, а основное внимание уделяется изучению вынужденной *фазовой* синхронизации в *хаотических системах*. При этом особо обсуждаются общие свойства периодической синхронизации и фазовой хаотической синхронизации.

При хаотической фазовой синхронизации имеет место установление *некоторых соотношений между фазами взаимодействующих систем* и как результат *совпадение их характерных частот* или *характерных временных масштабов*. При этом амплитуды колебаний остаются хаотическими и практически некоррелированными. В этом контексте хаотическая фазовая синхронизация имеет сходные черты с синхронизацией периодических колебаний в присутствии слабого шума, которая также рассмотрена в данном пособии.

Важно подчеркнуть, что различные типы хаотических аттракторов требуют различных подходов к проблеме их синхронизации. Но во всех случаях необходимое условие, которое позволяет сформулировать задачу хаотической синхронизации - существование четко выделенного *характерного временного масштаба* в рассматриваемых системах. Тогда проблема вынужденной синхронизации может быть сформулирована для регулярных и хаотических систем следующим общим образом: при каких условиях на-

блюдаемая частота колебаний в подверженном внешнему периодическому воздействию осцилляторе станет совпадать с частотой этого воздействия? Обычно эти условия выписываются через соотношения амплитуды внешней силы и расстройки между частотой внешней силы и собственной частотой осциллятора.

Как для периодической, так и для хаотической вынужденной синхронизации в качестве критериев используются условия *частотного* и (или) *фазового захвата (подстройки)*. Считается, что осциллятор 1:1 синхронизуется внешним периодическим воздействием, если его наблюдаемая частота Ω становится равной частоте внешнего сигнала ω :

$$\Omega = \omega. \quad (1)$$

Для периодических колебаний наблюдаемая частота Ω есть константа. Для хаотических колебаний Ω есть средняя наблюдаемая (характерная) частота хаотических колебаний

Помимо этого критерия *захвата частоты*, другой критерий синхронизации - это *захват фазы*:

(а) точный (строгий) захват фазы (разность фаз внешнего сигнала ψ и осциллятора ϕ постоянна) означает выполнение для любого t условия

$$|\psi(t) - \phi(t)| = Const, \quad (2)$$

и (б) неточный (нестрогий) захват фазы (разность фаз не постоянна, но ограничена) означает выполнение для любого t условия

$$|\psi(t) - \phi(t) - Const| < 2\pi. \quad (3)$$

При этом наличие фазового (как строгого, так и нестрогого) захвата достаточно для существования частотного, но не наоборот.

Заметим, что кроме 1:1 синхронизации возможна $n : m$ синхронизация.

Пособие состоит из 8 разделов.

В разделе 1 рассматривается классическая задача вынужденной синхронизации осциллятора Ван дер Поля. В разделе 2 анализируется метод введения фазы и явление диффузии фазы в системе Ресслера, являющейся одной из классических систем с хаотическим поведением. В разделе 3 исследуется фазовая синхронизация периодическим сигналом в системе Ресслера. Раздел 4 посвящен фазовой синхронизации в другой классической системе с хаотическим аттрактором - системе Лоренца. Особое внимание уделено способам определения наблюдаемых частот и фаз колебаний. Вынужденная синхронизация модельного квадратичного отображения с хаотической перемежаемостью также исследуется в 4-м разделе. В 5-м разделе представлено часто встречающееся в задачах синхронизации отображение окружности и связанная с ним задача синхронизации. В разделе 6 исследуется синхронизация периодическим сигналом вращений активного ротора - простейшей модели маятникового типа. В 7-м разделе описывается синхронизация откликов возбудимой системы на внешнее периодическое воздействие. В разделе 8 рассматривается синхронизация периодического осциллятора слабым внешним сигналом в присутствии слабого шума.

1 Синхронизация регулярной автоколебательной системы внешней периодической силой

В этом разделе мы приведем ранее известные случаи слабого и произвольного периодического воздействия на регулярную автоколебательную систему - осциллятор Ван дер Поля. Данное описание необходимо для понимания механизмов вынужденной синхронизации хаотических систем.

1.1 Слабое воздействие. Фазовое описание.

Начнем с краткого описания явления синхронизации для самого простого примера.

Рассмотрим колебания в периодическом осцилляторе под *слабым* периодическим воздействием:

$$\dot{x} = F(x) + p(t), \quad (4)$$

где x и F - n -мерные векторы, $p(t)$ - периодическая (с периодом T) внешняя сила с амплитудой ε . Предположим, что автономная система ($\varepsilon = 0$) имеет устойчивый предельный цикл периода T_0 , т.е. $x_0(t) = x_0(t + T_0)$: с однородно растущей вдоль цикла фазой φ . Следовательно,

$$\dot{\varphi} = \omega_0, \quad (5)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T_0$ - частота периодических колебаний.

Если амплитуда внешней силы мала ($\varepsilon \ll 1$), то задача о вынужденной синхронизации системы (4) может быть проанализирована в рамках следующей модели:

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon q(\varphi - \omega t), \quad (6)$$

где q - 2π -периодическая функция φ и $\omega = 2\pi/T$ - частота внешней силы [4].

После введения разности между фазой внешней силы ωt и фазой колебаний φ :

$$\theta = \omega t - \varphi \quad (7)$$

и усреднения уравнения (6) за период колебаний внешней силы, получим:

$$\dot{\theta} = \delta - \varepsilon q(\theta), \quad (8)$$

где $\delta = \omega_0 - \omega$ - *частотная расстройка*. В самом простом случае (для квазигармонических колебаний) $q(\theta) = \sin \theta$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\dot{\theta} + \varepsilon \sin \theta = \delta. \quad (9)$$

Введем параметр $\Delta = \delta/\varepsilon$ и новое время $t' = \varepsilon t$. Тогда уравнение (9) переписывается в виде:

$$\dot{\theta} + \sin \theta = \Delta. \quad (10)$$

При $|\Delta| > 1$ модель (10) не имеет состояний равновесия. Имеет место неограниченное нарастание переменной θ . В этом случае систему (10) называют *активный ротатор* или просто *ротатор*. В уравнении (10) при

$$|\Delta| < 1 \quad (11)$$

существует два состояния равновесия: устойчивое - с координатой

$$\bar{\theta}^s = \arcsin \Delta \quad (12)$$

и неустойчивое с координатой

$$\bar{\theta}^u = \pi - \arcsin \Delta. \quad (13)$$

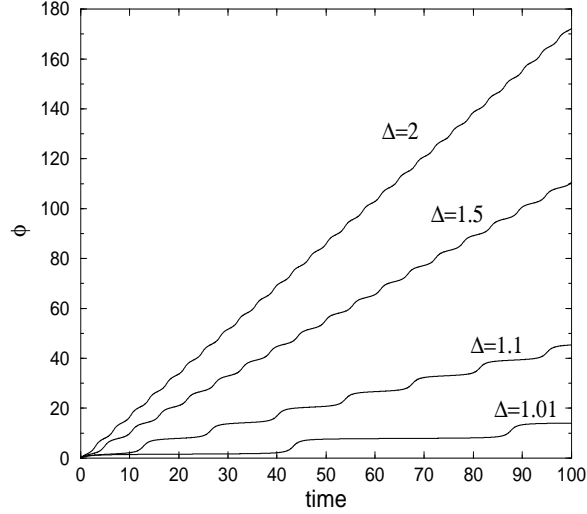


Рис. 1: Равномерный и неравномерный рост разности фаз θ в системе (10) для различных Δ .

Условие (11) определяет *область захвата* - область существования синхронного режима. При этом разность между фазой внешнего сигнала и фазой подверженного воздействию осциллятора - *фазовая ошибка (фазовое рассогласование)* есть постоянная величина и равна $\arcsin \Delta$, т.е. имеет место строгий фазовый захват.

В уравнении (9) при $\Delta = 1$ происходит бифуркация слияния состояний равновесия и имеет место одно состояние равновесия с координатой $\bar{\theta} = \pi/2$. В области $|\Delta| > 1$ состояний равновесия нет, и разность фаз растет неограниченно. Такой режим называется *режимом биений*. Рассмотрим его подробнее. Характер нарастания разности фаз зависит от параметра $\gamma = |\Delta| - 1$. Если γ близко к

нулю ($|\Delta|$ немного больше 1), то эволюция $\theta(t)$ представляет собой чередование сравнительно длинных участков практически не меняющейся разности фаз (соответствующие сохранению синхронного режима в течение некоторого времени) с короткими участками ее быстрого роста - скачками на 2π , которые в дальнейшем в контексте изучения синхронизации будем называть *фазовыми проскоками* ("phase slips") (см. рис. 1 для $\Delta = 1.01$). Т.е. в этом случае рост фазы существенно неравномерен на различных временных интервалах. С ростом γ длина интервалов почти постоянной фазы становится меньше (рис. 1). Если γ достаточно велико, то рост фазы почти линейный, т.е. фаза растет практически равномерно.

Режим биений можно характеризовать также с помощью *частоты биений* Ω_b , которая определяется из (8) для произвольной функции $q(\theta)$ как:

$$\Omega_b = \langle \cdot \rangle_\tau = 2\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\Delta - q(\theta)} \right)^{-1}, \quad (14)$$

где $\langle \cdot \rangle_\tau$ здесь и в дальнейшем означает усреднение по времени в течение интервала $\tau \rightarrow \infty$.

В частности, для $q(\theta) = \sin \theta$ частота биений имеет вид:

$$\Omega_b = \sqrt{\Delta^2 - 1}, \quad (15)$$

представленный на рис. 2.

Вблизи критической частотной расстройки $\Delta_{cr} = \pm 1$ частота биений Ω_b имеет зависимость в виде квадратного корня от Δ , то есть ¹

$$\Omega_b \approx \sqrt{|\Delta - \Delta_{cr}|} \quad (16)$$

¹Следует заметить, что этот закон не зависит от специальной формы функции $q(\theta)$

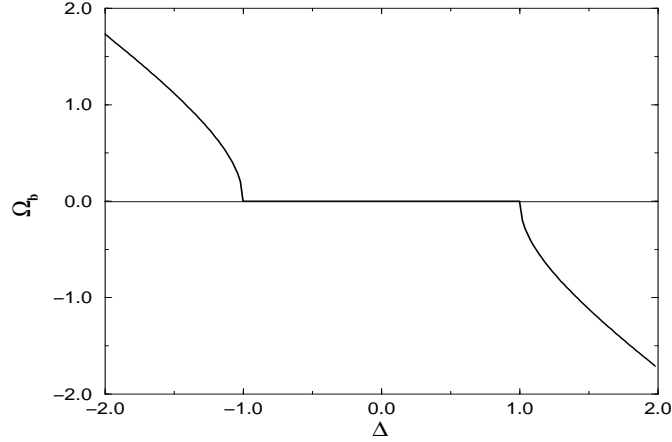


Рис. 2: Частота биений Ω_b в зависимости от частотной расстройки Δ в (10).

Поэтому соответствующий этой частоте период $T_b = 2\pi\Omega_b$, то есть период появления фазовых проскоков в модели (10), пропорционален $|\Delta - \Delta_{cr}|^{-1/2}$. Так как частота биений есть разность между наблюдаемой частотой и частотой внешней силы, то область параметров, где выполняется условие $\Omega_b = 0$, есть область существования синхронного режима (см. рис. 2).

Заметим, что уравнение (10) возникает во многих областях науки и техники: (а) *биология*: колебания в нейроне; светлячок, высвечивающий ритм; (б) *физика*: джозефсоновский контакт; (в) *механика*: маятник в вязкой среде с постоянным вращающим моментом; (г) *электроника*: системы фазовой автоподстройки частоты.

Задание: *Найти зависимость $\theta(t)$ в случае синхронного режима и режима биений.*

Далее перейдем к изучению процессов синхронизации внешним сигналом периодической автоколебательной системы - осциллятора Ван дер Поля. Сначала приведем основные свойства невозмущенной системы.

1.2 Автономный осциллятор Ван дер Поля

Одна из основных моделей в нелинейной динамике - осциллятор Ван дер Поля, описываемый системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x + \mu(1 - x^2)y, \end{aligned} \quad (17)$$

где ω_0 - частота колебаний и параметр нелинейности $\mu \geq 0$, управляющий формой колебаний. На рис. 3(a,b) приведены фазовые портреты для слабой ($\mu \ll 1$) и сильной ($\mu \gg 1$) нелинейности. В обоих случаях единственный аттрактор на фазовой плоскости - предельный цикл. На рис. 4(a,b) приведены спектры колебаний, а на рис. 4(c,d) временные реализации переменной $x(t)$. Обратим внимание на два различия в колебательных свойствах осциллятора:

(а) Колебания слабо-нелинейного осциллятора Ван дер Поля ($\mu \ll 1$) близки к гармоническим, поэтому в его спектре мощности доминирует только одна - собственная - частота осциллятора ω (рис. 4(a)), в то время как колебания сильно нелинейного осциллятора ($\mu \gg 1$) носят релаксационный характер; спектр мощности таких колебаний содержит также комбинационные частоты (рис. 4(b)).

(б) Существует сильное различие в скорости приближения к предельному циклу для слабой и сильной нелиней-

ности. В случае релаксационных колебаний наблюдается быстрая сходимость к предельному циклу (рис. 3(b)).

Эти свойства обуславливают существенные различия при наступлении синхронизации в этих системах.

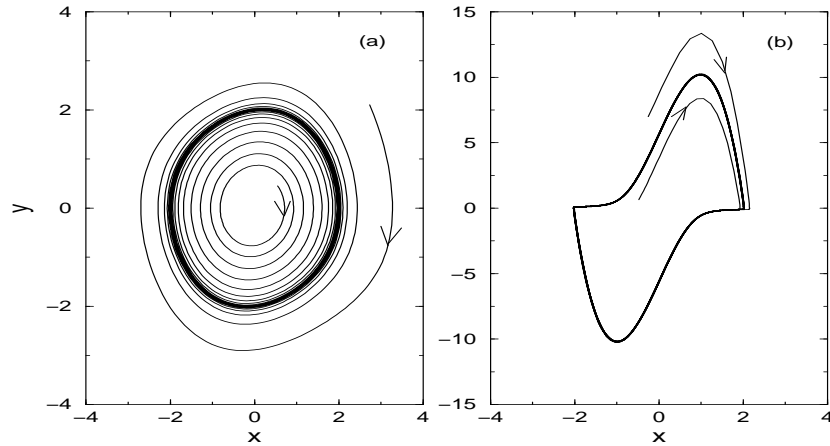


Рис. 3: Фазовый портрет системы (17) для $\omega = 1$, $\mu = 0.12$ (a) и $\mu = 7$ (b).

Для обоих типов предельных циклов фаза колебаний может введена так:

$$\phi = -\arctan \frac{y}{x} + \pi k \quad (18)$$

где k - целое число. (В дальнейшем слагаемое πk при определении фазы будет опускаться.) Это определение обеспечивает выполнение для переменной ϕ двух условий, необходимых для того, чтобы ее называть фазой -

- монотонный рост во времени и
- увеличение на 2π после прохождения изображающей точкой всего предельного цикла.

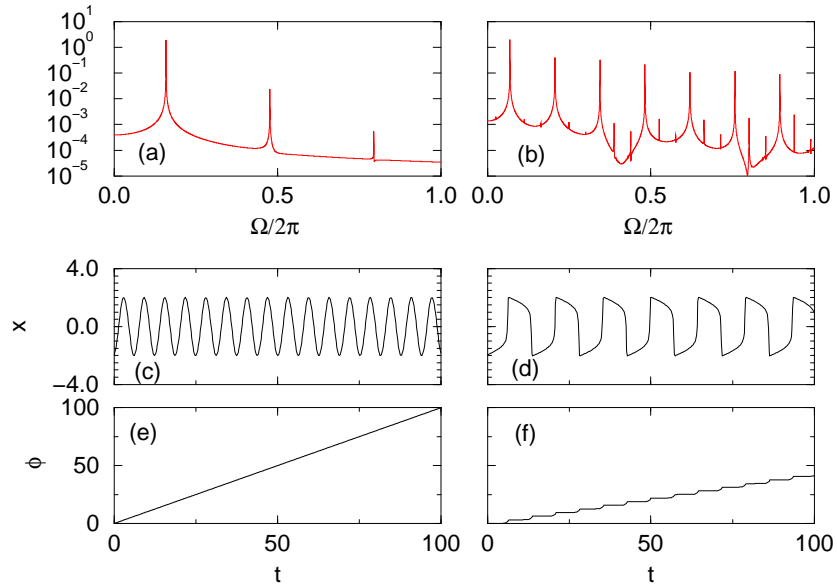


Рис. 4: Спектры (a,b), реализации (c,d) и фазы (e,f) системы (17) для $\omega = 1$, $\mu = 0.12$ (a,c,e) и $\mu = 7$ (b,d,f).

Именно эти условия будут использоваться при введении фазы хаотических колебаний.

Следует также отметить, что как квазигармонический, так и релаксационный предельные циклы, устойчивы в поперечном направлении, так как возмущение амплитуды затухает. При движении в касательном направлении, то есть при изменении фазы, имеет место безразличное равновесие: нет ни устойчивости, ни неустойчивости. Отсюда можно сделать два вывода: (а) фазе колебаний соответствует нулевой ляпуновский показатель, (б) фаза может легко управляться внешним воздействием, что является крайне важным при достижении синхронного режима.

Для квазигармонического случая рост фазы практически линейный (рис. 4(e)), в то время как для релаксационных колебаний эволюция фазы во времени представляет собой чередование сравнительно длительных участков практически не меняющейся фазы с короткими участками ее быстрого роста - скачками на 2π (рис. 4(f)).

Заметим, что модель (17), впервые представленная в [6] для описания эволюции напряжения и тока в электрическом генераторе, является в настоящее время одной из базовых, классических моделей теории колебаний и нелинейной динамики [1, 3, 4].

Задание:

1. *Получить укороченные амплитудно-фазовые уравнения для слабо-нелинейного осциллятора Ван дер Поля.*
2. *Вычислить зависимость периода колебаний релаксационного осциллятора Ван дер Поля от параметра μ .*

1.3 Периодически возмущаемый осциллятор Ван дер Поля

Рассмотрим влияние периодической внешней силы на осциллятор Ван дер Поля. Как было сказано во введении, эта проблема была изучена во многих работах и подробно описана во многих книгах и обзорах. Поэтому кратко представим результаты вынужденной синхронизации *слабо нелинейного* осциллятора Ван дер Поля. Модельная система в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x + \mu[(1 - x^2)y + 2\varepsilon \sin \omega t], \end{aligned} \quad (19)$$

где как и ранее ω_0 - собственная частота осциллятора, μ - малый параметр, ε и ω - амплитуда и частота внешней силы, соответственно. Наличие малого параметра позволяет исследовать поставленную задачу с использованием асимптотических методов ([2], [3]). При этом решение задачи синхронизации может быть сведено к анализу состояний равновесия в уравнении :

$$\dot{a} = -i\Delta a + a - |a|^2 a - \varepsilon, \quad (20)$$

где a - средняя комплексная амплитуда колебаний и $\Delta = (\omega^2 - \omega_0^2)/\omega^2$ - относительная частотная расстройка. Устойчивое состояние равновесия в уравнении (20) соответствует синхронному режиму в исходной системе (19). Устойчивый предельный цикл в (20) соответствует режиму биений, для которого в исходной системе (19) имеет место квазипериодическое движение, характеризуемое двумя рационально несоизмеримыми частотами.

Отметим, что существование в спектре колебаний неавтономного осциллятора второй (в дополнение к ω) частоты не обязательно означает десинхронизацию. Действительно, если представить $a(t) = R(t) \exp[i\theta(t)]$, где $R(t)$ - действительная амплитуда колебаний, а $\theta(t)$ - разность между фазой осциллятора и фазой внешнего сигнала, то наблюдаемая частота колебаний может быть записана как

$$\Omega = \langle \dot{\theta}(t) \rangle_\tau + \omega, \quad (21)$$

Слагаемое $\langle \dot{\theta}(t) \rangle_\tau$ зависит от траектории системы на фазовой плоскости ($\text{Re}(a)$, $\text{Im}(a)$). Если эта траектория вращается вокруг начала координат, то $\langle \dot{\theta}(t) \rangle_\tau \neq 0$, в противном случае изменения θ приводят лишь к модуляции фазы колебаний, но не к ее неограниченному нарастанию. То есть имеет место неточный захват фазы (условие (3)).

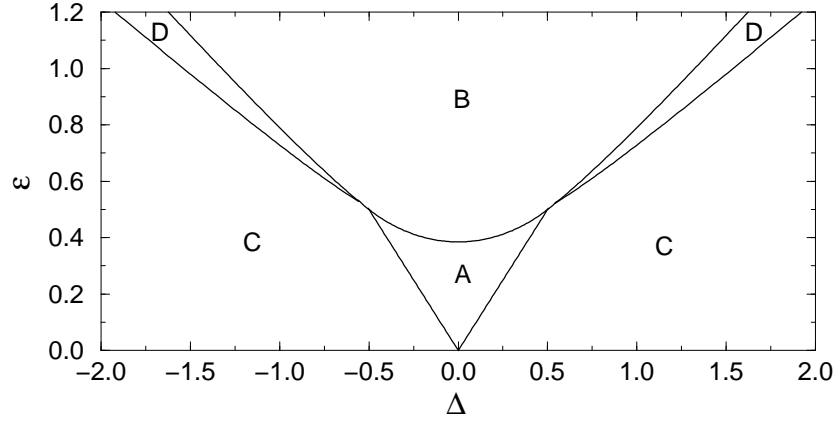


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма для системы (20). (См. текст.)

Опустим здесь довольно простые арифметические вычисления и представим только основные особенности синхронизационных переходов, происходящих при изменении параметров системы (20). Так как рассматривается синхронный режим ($\dot{R} = 0$, $\dot{\theta} = 0$), то можно получить кубическое уравнение для квадрата амплитуды $R^2 = |a|^2$:

$$R^2 (1 - R^2)^2 + \Delta^2 R^2 = \varepsilon^2, \quad (22)$$

В зависимости от значений параметров Δ, ε уравнение (22) имеет либо один (области B, C и D на рис. 5), либо три (область A) корня, соответствующих состояниям равновесия комплексного дифференциального уравнения (20). Для параметров из областей A и B единственным аттрактором является устойчивое состояние равновесия, соответствующее точной синхронизации (условие (2)). В этом слу-

чае колебания слабонелинейного осциллятора Ван дер Поля имеют (в рамках используемых приближений метода усреднения) постоянную амплитуду и постоянный фазовый сдвиг по отношению к внешней силе. Вместе с тем, фазовые портреты в областях А и В различны. На фазовой плоскости для параметров из области А существуют три состояния равновесия: устойчивый фокус (или узел), соответствующий синхронному режиму в исходной системе (19), седло и неустойчивый фокус (или узел). В области В существует только один устойчивый фокус (или узел).

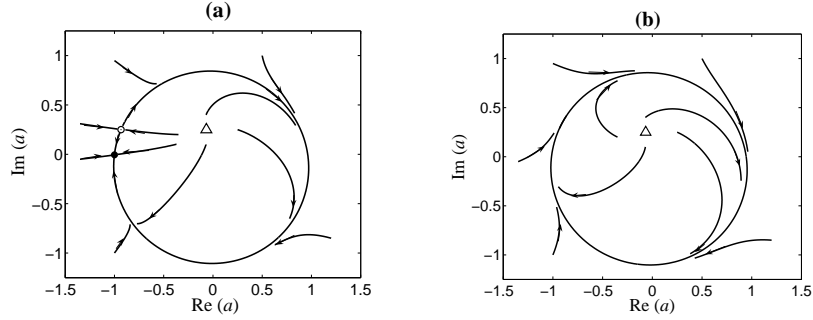


Рис. 6: Потеря синхронизации вследствие бифуркации разрушения петли сепаратрисы седло-узла (переход $A \rightarrow C$ на диаграмме на рис. 5. В области А на фазовой плоскости $(\text{Re}(a), \text{Im}(a))$ существует неустойчивый фокус (узел), изображенный треугольником, устойчивый узел (черный кружочек) и седло (светлый кружочек) (а). В области С (b) существует устойчивый предельный цикл. Он рождается при разрушении петли сепаратрисы седло-узла.

В областях С и D глобальным аттрактором на фазовой плоскости уравнения (20) является устойчивый предельный цикл, т.е. в (18) имеет место квазипериодическое

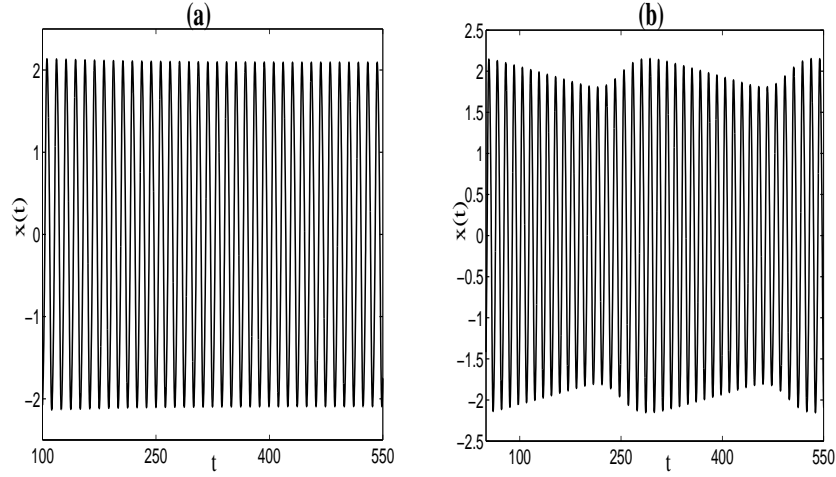


Рис. 7: Колебания слабо-нелинейного осциллятора Ван дер Поля при малых амплитудах вынуждающей силы. В области синхронизации (область A на рисунке 5) амплитуда постоянна (а). Сразу за границей области синхронизации (переход $A \rightarrow C$ на диаграмме на рис. 5 амплитуда выходного сигнала a слабо модулирована (б)).

движение размерности два. Для параметров из области $C(D)$ начало координат ($Re(a) = 0, Im(a) = 0$) находится внутри (вне) этого цикла. Таким образом, для параметров из области D имеет место нестрогий захват фаз. А для параметров из области C в (19) реализуется режим биеений. Переход от захвата частоты к несинхронному режиму имеет место при переходе из области D в область C . Таким образом, синхронный режим наблюдается для значений параметров, принадлежащих одной из областей: A , B или D . Область синхронизации $S = A \cup B \cup D$.

Опишем подробнее бифуркации, происходящие в уравнении (19). На бифуркационной диаграмме для уравнения (20), представленной на рис. 5, можно выделить два качественно различных перехода от синхронизации к биениям. Они зависят от величин параметров внешней силы:

(а) Если амплитуда воздействия *мала*, то синхронное поведение при увеличении расстройки Δ исчезает через бифуркацию разрушения петли сепаратрисы седло-узла. Переход из области A , где существуют три устойчивых состояния равновесия: устойчивый узел, седло и неустойчивый фокус в область C , где существует только один неустойчивый фокус, происходит следующим образом: узел и седло сливаются; образуется петля сепаратрисы седло-узла, при разрушении которой возникает устойчивый предельный цикл (см. рис 6). При переходе из области A в область C модуляция временной зависимости $x(t)$ возникает с очень большим периодом (Рис.7), который в дальнейшем уменьшается.

(б) Если амплитуда воздействия *большая*, то при увеличении расстройки Δ сначала (переход из B в D), происходит бифуркация Андронова - Хопфа (Рис.8). При этом амплитуда родившегося предельного цикла такова, что он не охватывает начало координат (Рис.8b). Это означает, что вынужденная синхронизация все еще существует, но теперь она не строгая, так как разность между фазой осциллятора и фазой внешней силы не постоянна, но ограничена. При переходе из D в C предельный цикл охватывает начало координат (Рис.8с), и разность фаз начинает расти неограниченно и, следовательно, возникает режим биений.

¹

¹Отметим, что указанному переходу $D \rightarrow C$ от синхронного к несинхронному режиму соответствует бифуркационный переход в

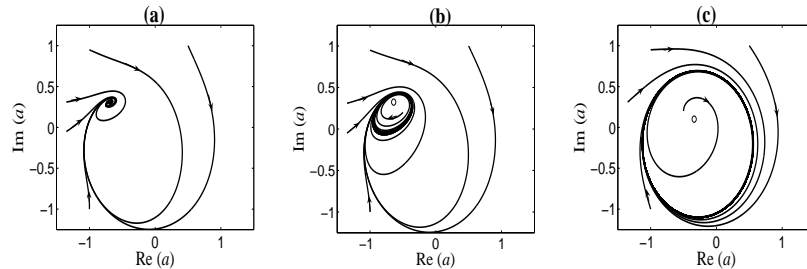


Рис. 8: Потеря синхронизации вследствие бифуркации Андронова-Хопфа (переход $B \rightarrow D \rightarrow C$ на диаграмме на рис. 5. (a) В режиме синхронизации на фазовой плоскости $(Re(a), Im(a))$ все фазовые траектории притягиваются к состоянию равновесия типа устойчивый фокус (узел). Имеет место строгий захват фаз. (b) При переходе через границу $B \rightarrow D$ вследствие бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл, однако при расположении параметров в области D этот предельный цикл не охватывает начало координат, так что наблюдаемая частота все еще совпадает с частотой внешней силы. Имеет место нестрогий захват фаз. (c) С ростом $|\Delta|$ амплитуда периодических колебаний растет и после перехода из D в C предельный цикл охватывает начало координат. Имеет место режим биений.

Существование двух типов перехода к синхронизации (и, соответственно, двух типов десинхронизации) имеет простую физическую интерпретацию. Наличие слабой внешней силы влияет, прежде всего, не на амплитуду, а на фазу сигнала. Поэтому в обоих: синхронном и несинхронном состояниях амплитуда примерно постоянна, и меняется лишь фазовая динамика: в области синхронизации разность фаз фиксирована, а вне этой области наблюдается постоянный набег разности фаз. Поэтому переходы к (от) синхронизации могут быть описаны как переходы к захвату (деблокированию) фазы. Таким образом, как видно из приведенного примера при малой амплитуде внешнего воздействия явление синхронизации можно изучать используя лишь фазовое описание (см. раздел 1.1).

Сильный сигнал влияет как на фазу, так и на амплитуду колебаний. Поэтому в области синхронизации собственные колебания осциллятора (колебания на частоте ω_0) *подавляются*, и наблюдаются только колебания на частоте внешнего сигнала.

При воздействии внешнего периодического сигнала на релаксационный осциллятор Ван дер Поля может наблюдаться $m : n$ синхронизация и возникновение хаотического режима.

Задание:

1. Получить укороченное уравнение (20).
2. В фазовом пространстве (R, θ) построить аттрак-

следующей из (20) системе на цилиндре, записанной в переменных $\{R, \theta\}$, где R и θ - усредненные по периоду внешней силы соответственно амплитуда и фаза колебаний. При таком переходе исчезает колебательный предельный цикл и рождается вращательный (охватывающий цилиндр) предельный цикл.

торы для режима нестроого фазового захвата и режима биений.

3. *Определить частоту режима биений для слабого и сильного внешних сигналов.*
4. *Построить область синхронизации 1 : 1.*
5. *Проанализировать переход к хаотическим колебаниям в релаксационном осцилляторе Ван дер Поля, подверженном внешнему периодическому воздействию.*

2 Синхронизация осциллятора Ресслера внешним периодическим сигналом

2.1 Автономный осциллятор Ресслера

Известная хаотическая система - осциллятор Ресслера [7] описывается следующей системой:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y - z, \\ \dot{y} &= \omega x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{23}$$

где a, b, c, ω - положительные параметры. Рассмотрим поведение системы (23) при $b = 0.1$ и $c = 8.5$. Параметр a , который берется в интервале $[0.15 : 0.3]$, определяет форму

хаотического аттрактора в системе. Для a в этом интервале имеют место два существенно различных хаотических аттрактора:

(а) При a меньше некоторого критического значения a_{cr} ($a_{cr} \approx 0.186$ при $\omega = 0.98$), изображающая точка на проекции хаотической траектории на плоскость (x, y) всегда вращается вокруг точки - проекции состояния равновесия $(x_0, y_0) \approx (0, 0)$ (рис. 9(а)). (Заметим, что в качестве такого центра вращения в данном случае могут быть выбраны и другие точки.) В этом случае угол вращения:

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (24)$$

определяет фазу колебаний, которая растет практически линейно (равномерно). Соответствующий аттрактор системы (23) называют *фазо - когерентным* [4]. Для такого аттрактора определение фазы есть простое обобщение традиционного определения фазы для предельного цикла (см. (17)). Заметим, что такое определение хорошо подходит для всех аттракторов, проекции которых на какую-либо соответствующим образом выбранную плоскость выглядят как "размазанные" предельные циклы.

(б) При параметре a , большим критического значения a_{cr} , проекция фазовой траектории на плоскость (x, y) уже не всегда охватывает точку (x_0, y_0) (рис. 9(б,с)), и простое определение фазы (24) уже не применимо. Аттрактор в данном случае не фазо-когерентный. Его называют *аттрактор - воронка*. С ростом a количество не охватывающих точку $(0, 0)$ петель увеличивается (рис. 9(с)).

В этом случае эффективным оказывается другой подход для определения фазы, предложенный в [8]. Этот подход базируется на общей идее определения кривизны произвольной кривой. Так, для любой кривой на плоскости

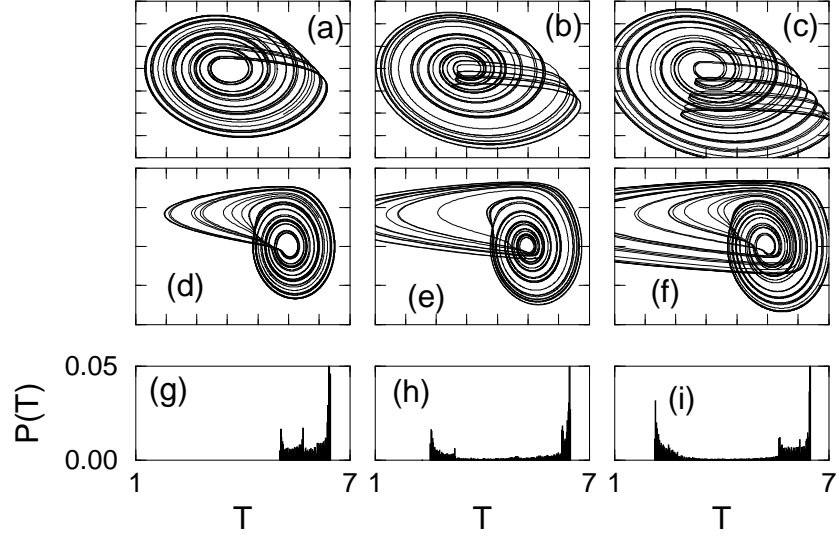


Рис. 9: Верхняя серия рисунков (a,b,c): проекции аттракторов системы Ресслера (23) на плоскость (x, y) ; средняя серия: (d,e,f): проекции на плоскость (\dot{x}, \dot{y}) ; нижняя серия (g,h,i): распределение времен возврата T . Параметры: $\omega = 0.98$, $b = 0.1$, $c = 8.5$ и $a = 0.16$ (a,d,g), $a = 0.22$ (b,e,h) и $a = 0.28$ (c,f,i).

(u, v) угловая скорость в каждой точке (мгновенная частота)

$$\nu = \frac{ds}{dt}/R, \quad (25)$$

где

$$ds/dt = \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} \quad (26)$$

является скоростью движения по кривой и

$$R = (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)^{3/2}/[\dot{v}\ddot{u} - \ddot{v}\dot{u}] \quad (27)$$

имеет смысл радиуса кривизны. Если $R > 0$ ($R < 0$) в каждой точке, то

$$\nu = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{v}\ddot{u} - \ddot{v}\dot{u}}{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}, \quad (28)$$

всегда положительна (отрицательна), и тогда переменная ϕ , определяемая как

$$\phi = \int \nu dt = \arctan \frac{\dot{v}}{\dot{u}}, \quad (29)$$

является монотонно изменяющейся угловой переменной и, следовательно, может рассматриваться как фаза колебаний. Геометрически это означает, что фазовая траектория в проекции на плоскость (\dot{u}, \dot{v}) монотонно вращается вокруг некоторой фиксированной точки.

Предложенные определения фазы и частоты являются общими для любой динамической системы, если проекция фазовой траектории на некоторую плоскость есть кривая со знакопостоянной кривизной. Это справедливо для большого числа хаотических генераторов, например, системы Лоренца, схемы Чуа, генератора Анищенко-Астахова, модели идеального лазера с четырьмя уровнями и периодической модуляцией накачки и др.

Для фазо-когерентного аттрактора и аттрактора-воронки в осцилляторе Ресслера проекция хаотических траекторий на плоскость (\dot{x}, \dot{y}) всегда представляет собой кривую, охватывающую начало координат (рис. 9(d,e,f)), и фаза может быть определена в соответствии с (29) равенством

$$\phi = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \quad (30)$$

Тогда средняя наблюдаемая (характерная) частота ха-

отических колебаний определяется как

$$\Omega = \langle \nu \rangle = \left\langle \frac{\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right\rangle_{\tau}. \quad (31)$$

Заметим, что как и в случае периодических колебаний, фаза хаотических колебаний соответствует нулевому ляпуновскому показателю так как возмущение вдоль траектории не возрастает и не убывает.

Обратимся к другой характеристике хаотических движений. Для определения влияния некогерентности фазовых траекторий на характерные временные масштабы можно вычислять распределение времен возврата T траекторий между двумя последовательными пересечениями сечения Пуанкаре $\dot{y} = 0$ при $\dot{x} > 0$. Для фазо-когерентного аттрактора (например, при $a = 0.16$), распределение значений T сосредоточено в относительно узком интервале (рис. 9(g)). Когда аттрактор становится менее фазо-когерентным, то появляющиеся малые петли имеют существенно меньшие значения T , и распределение становится довольно широким (рис. 9(h,i)). Для промежуточных значений a (например, при $a = 0.22$) доминирующим остается все еще один характерный временной масштаб, в то время как для больших a (например, при $a = 0.28$) существуют два сильно выделенных характерных временных масштаба.

Степень некогерентности движений характеризуется *коэффициентом диффузии фазы* D_{ϕ} , определяемым равенством

$$\langle (\phi(\tau) - \langle \phi(\tau) \rangle_{\tau})^2 \rangle_{\tau} = 2D_{\phi} \tau. \quad (32)$$

В целом, D_{ϕ} увеличивается с ростом a , обращаясь в ноль в периодических окнах - интервалах параметра a , в которых аттракторы - предельные циклы. Для фазо-когерентного

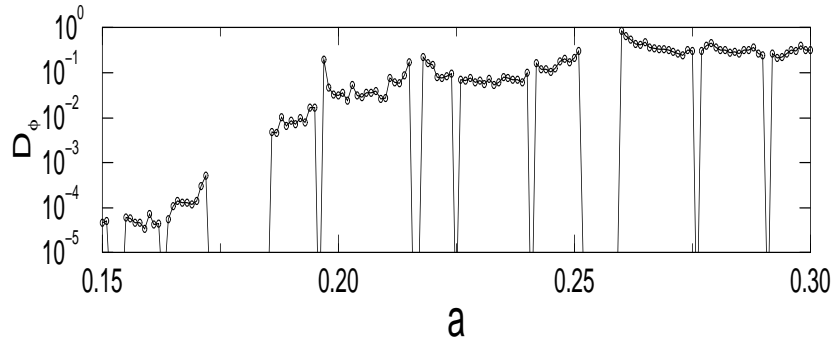


Рис. 10: Коэффициент диффузии фазы D_ϕ (32) для системы Ресслера (23) в зависимости от a при $\omega = 0.98$.

хаотического аттрактора фаза растет практически равномерно и поэтому D_ϕ довольно малая величина. Но для аттрактора-воронки рост фазы существенно неравномерен, и поэтому D_ϕ может быть на несколько порядков больше (рис. 10).

Задание:

1. Воспользовавшись одним из описанных выше способов введения фазы, построить зависимость фазы колебаний в системе Ресслера от времени при фиксированных значениях параметров a, b, c, ω .
2. Воспользовавшись одним из описанных выше способов введения частоты, построить зависимость средней частоты колебаний в системе Ресслера от одного из параметров при фиксированных значениях остальных параметров.
3. Используя метод сечения Пуанкаре построить рас-

пределение времен возврата при фиксированных значениях параметров.

2.2 Фазовая синхронизация хаотического осциллятора Ресслера внешним периодическим воздействием

Рассмотрим осциллятор Ресслера с внешним периодическим воздействием:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y - z + A \sin \omega t, \\ \dot{y} &= \omega_0 x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{aligned} \quad (33)$$

с параметрами $\omega_0 = 0.97$, $b = 0.2$ и $c = 10$. При $a = 0.04$ в автономном осцилляторе Ресслера реализуется периодическое движение с частотой $\omega^* = 0.981$. Рис. 11(a) показывает, что это периодическое движение захвачено в отношении $n : m = 1 : 1$ слабым внешним периодическим сигналом с $A = 0.4$ и $\omega = 1.0$. Область 1 : 1 синхронизации показана на рис. 11(b).

Рассмотрим вынужденную фазовую синхронизацию осциллятора в хаотическом режиме при $a = 0.165$. При этом a аттрактор в осцилляторе Ресслера является *фазо - когерентным* (см. выше).

По аналогии с вынужденной синхронизацией периодического осциллятора будем считать, что имеет место *хаотическая фазовая синхронизация*, если выполнено одно из двух условий:

1. $\Omega = \omega,$

где Ω - средняя наблюдаемая частота хаотических колебаний (т.е. имеет место частотный захват).

2. $|\phi(t) - \omega t - Const| < 2\pi,$

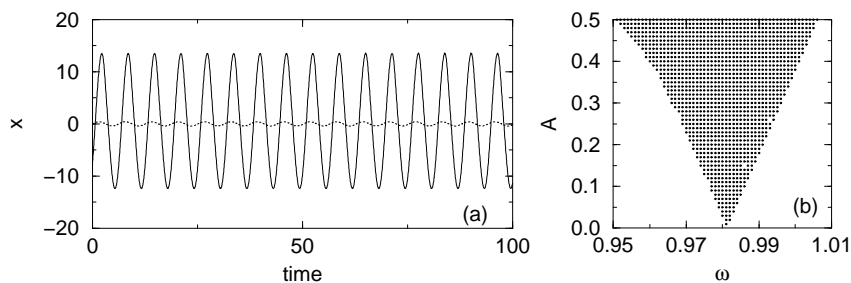


Рис. 11: (а) Синхронизация периодического колебания (сплошная линия) слабым периодическим сигналом (пунктирная линия). (б) Область 1 : 1 синхронизации.

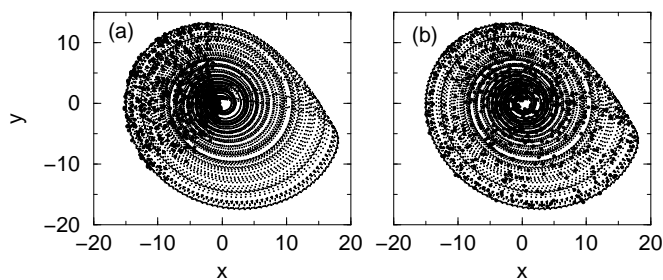


Рис. 12: Стробоскопическая проекция системы Ресслера на плоскость (x, y) , построенная через период внешнего сигнала (система (33)). Пунктирный фон - автономный хаотический аттрактор. (а) $A = 0.15$, $\omega = 1.0$, имеет место фазовая синхронизация. (б) $A = 0.15$, $\omega = 1.02$, фазовой синхронизации нет.

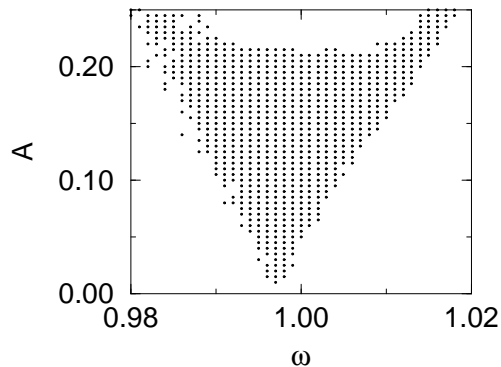


Рис. 13: Область синхронизации хаотического осциллятора Ресслера внешней периодической силой (система (33)).

где φ - фаза хаотических колебаний, а ωt - фаза внешнего воздействия (т.е. имеет место нестрогий захват фазы).

При анализе перехода к синхронному режиму эффективным оказывается использование *стробоскопической* техники. Ее суть в следующем: наблюдаются переменные управляемой системы только в моменты $t_k = kT$, где T - период внешней силы, и $k = 1, 2, \dots$. Как показано на рис. 12(a), в случае, когда система захвачена внешним сигналом, стробоскопическая проекция фазовой траектории на плоскость (x, y) ограничена внутри некоторой области хаотического аттрактора, в то время как вне области фазового захвата переменные $x(t_k)$ и $y(t_k)$ распределены по всему аттрактору (рис. 12(b)). Область синхронизации, показанная на рис. 13, аналогична области синхронизации для периодического осциллятора, приведенной на рис. 11 (b). Эти свойства впервые были обнаружены в [9] и более детально изучены в [10]. Очевидно, что можно ожи-

дать наличия аналогии между вынужденной периодической и хаотической синхронизациями. Это связано с тем, что, как замечено ранее, фаза фазо-когерентного хаотического аттрактора растет практически линейно, т.е. так же как и для слабонелинейного осциллятора Ван дер Поля (см. раздел 1.3). Чтобы получить более глубокое понимание этого подобия и выявить существующие особенности, очень полезно изучить фазовую синхронизацию хаотических осцилляторов в терминах седловых периодических орбит (СПО). Эти орбиты образуют скелет хаотического аттрактора [15]. Каждая из этих орбит имеет собственный отличный от других период. И если прикладывается внешняя сила к системе, в которой существует такая орбита, то она может быть синхронизована этой внешней силой в полной аналогии с вынужденной синхронизацией периодических автоколебаний. Анализ воздействия на систему, изображающая точка которой "кочует" от одной СПО к другой, показывает, что имеется множество областей синхронизации, соответствующих областям фазового захвата каждой СПО. Область, где имеет место пересечение всех этих областей, и будет являться областью хаотической фазовой синхронизации (рис. 14). Действительно, для хаотической траектории, проходящей последовательно вблизи каждой СПО, при условии их фазового захвата разность фаз внешнего сигнала и самой траектории всегда ограничена.

При выходе из области хаотической фазовой синхронизации появляются проскоки разности фаз. Когда появление таких проскоков наблюдается редко, т.е. на длительных временных интервалах имеет место синхронный режим, то можно говорить о *несовершенной фазовой синхронизации*.

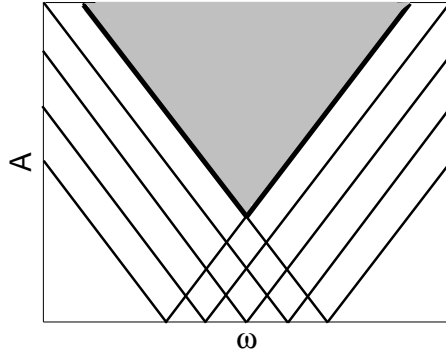


Рис. 14: Схематическое представление хаотической фазовой синхронизации. Область существования хаотической фазовой синхронизации - область пересечения областей фазового захвата всех СПО (приведены 5 таких областей) - выделена серым цветом.

При исследовании хаотической фазовой синхронизации в терминах СПО оказывается возможным прояснить особенности, которые отсутствуют при синхронизации периодических колебаний. Детальный анализ будет дан в разделе 5.

В заключение этого раздела отметим следующее. При фазовой синхронизации хаотических осцилляторов колебания одного генератора оказываются захваченными периодическим или хаотическим сигналом или другим периодическим или хаотическим осциллятором. Очевидно, что распределение временных масштабов (данном случае - времен возвращения на текущую седловую периодической орбиты) играет важную роль в возникновении синхронных режимов. Например, в фазо-когерентном хаотическом

осцилляторе Ресслера времена возвращения, то есть времена между последовательными пересечениями фазовой траекторией соответствующим образом выбранной плоскости Пуанкаре распределены в достаточно узком интервале (рис. 9), и поэтому фаза растет во времени почти линейно. В результате этого узкополосного распределения временных масштабов хаотический осциллятор Ресслера может быть довольно легко синхронизирован слабым сигналом с периодом, близким к среднему времени возвращения (смотри предыдущий раздел). Так как характерные временные масштабы (периоды возвращения СПО на некоторую секущую плоскость) довольно близки друг к другу, то близки и области фазового захвата этих циклов. Это гарантирует фазовую синхронизацию хаотического аттрактора. Очевидно, что подобное поведение может наблюдаться не только для осциллятора Ресслера, но и для других систем с хаотическими аттракторами, рождающимися через каскад бифуркаций удвоения периода периодических движений, то есть по сценарию Фейгенбаума, поскольку при таком сценарии возникновения хаоса характерные периоды СПО близки.

Задание:

1. При фиксированной амплитуде внешнего сигнала A найти полосу захвата периодическим сигналом $A \sin(\omega t)$ периодических и хаотических колебаний в осцилляторе Ресслера при фиксированных значениях параметров.
2. Построить эволюцию разности фазы внешнего сигнала и фазы осциллятора Ресслера для синхронного и несинхронного режимов при совпадающих значениях параметров b, c, A, ω и различных значениях па-

раметра a .

3 Синхронизация система Лоренца внешней периодической силой

3.1 Автономная система Лоренца

Система Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= (r - z)x - y, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{34}$$

демонстрирует два основных типа хаотического поведения. Наиболее известный тип - это "классический" аттрактор Лоренца. На рис. 15 (а) дана проекция аттрактора при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, и $r = 28$ на плоскость (x, z) . Как видно из рисунка задача определения фазы здесь не такая простая как в системе Ресслера с фазо-когерентным аттрактором. Это связано с тем, что проекции аттрактора на плоскости (x, y) , (x, z) , и (y, z) не являются кривыми, обязательно охватывающими некоторую фиксированную точку. Эта сложность может быть преодолена, если рассмотреть проекции аттрактора на плоскость $(u = \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ (рис. 15 (b)). Это позволяет ввести фазу колебаний следующим образом:

$$\phi = \arctan \frac{z - z_0}{u - u_0},\tag{35}$$

где $u_0 = 12$ и $z_0 = 27$, и тогда характерная частота определяется как

$$\Omega = \langle \dot{\phi} \rangle_\tau \quad (36)$$

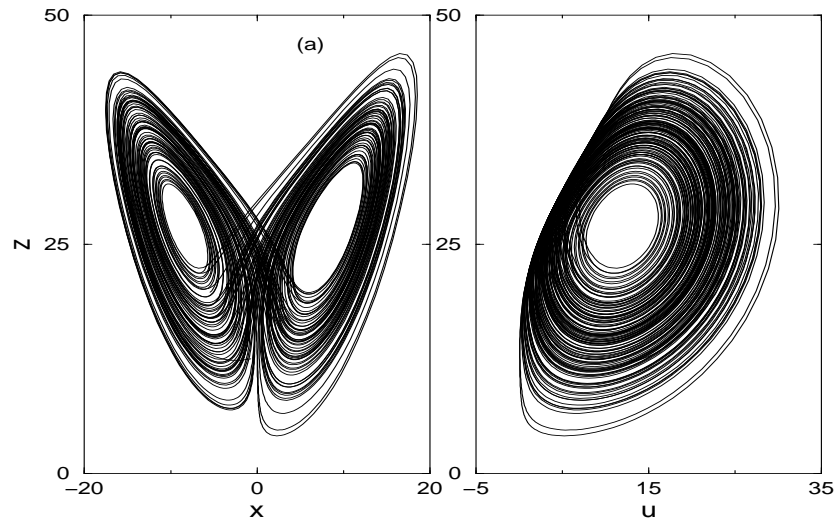


Рис. 15: Проекция "классического" аттрактора в системе Лоренца на плоскости (x, z) и $(u = \sqrt{x^2 + y^2}, z)$. Параметры: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, и $r = 28$.

Задание:

1. Воспользовавшись приведенным выше способом введения фазы, построить зависимость фазы колебаний в системе Лоренца от времени при фиксированных значениях параметров r, b, σ .
2. Воспользовавшись приведенным выше способом введения частоты, построить зависимость средней частоты колебаний в системе Лоренца от парамет-

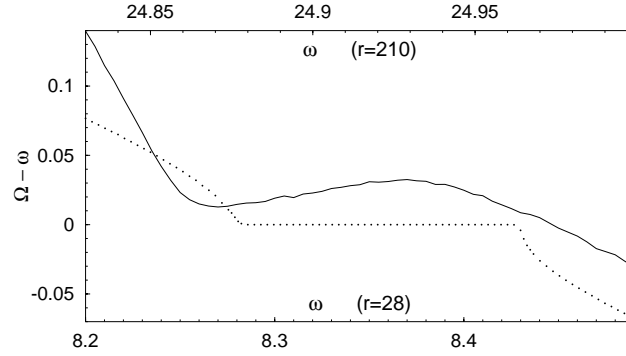


Рис. 16: Совершенная и несовершенная фазовая синхронизация для периодически возмущенной системы Лоренца (уравнение (37)); сплошная линия: $r = 28$, $A = 6$; пунктирная линия: $r = 210$, $A = 3$.

ра r при фиксированных значениях остальных параметров. Подумайте, каким образом определяется оптимальная длительность интервала усреднения.

3.2 Периодически управляемая система Лоренца

В [12–14] было проведено сравнительное изучение совершенной и несовершенной фазовой синхронизации для периодически управляемой системы Лоренца:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10(x - y), \\ \dot{y} &= (r - z)x - y, \\ \dot{z} &= -2.667z + xy + A \cos \omega t. \end{aligned} \quad (37)$$

При изменении параметра r в невозмущенной системе Лоренца происходит множество различных бифурка-

ций [11]. Так при $r = 210$ хаотические колебания возникают согласно сценарию Фейгенбаума и, как и в осцилляторе Ресслера имеет место узкополосное распределение временных масштабов (времен возвращения хаотической траектории на текущую), следовательно, в системе может иметь место совершенная фазовая синхронизация внешним периодическим сигналом с частотой, близкой к средней частоте $\Omega = 24.92$ хаотических колебаний. На рис. 16 этому режиму соответствует плато, для которого разность наблюдаемой частоты и частоты внешнего сигнала обращается в ноль ($\Omega - \omega = 0$).

Однако сценарий изменяется, если система имеет довольно широкое распределение временных масштабов СПО, включенных в хаотический аттрактор, как например в системе Лоренца при некоторых значениях параметра r . Тогда внешний сигнал с фиксированной частотой не способен захватить все СПО. В результате при прохождении траектории вблизи незахваченных СПО появляются проскоки разности фаз. Примером может являться аттрактор Лоренца при $r = 28$. Ситуация в данном случае следующая. Некоторое плато $\Omega - \omega$ появляется; однако, это плато не строго горизонтальное и не соответствует нулевой расстройке частот (рис.18). В результате фазовая синхронизация в этом случае несовершенная, о чем свидетельствует наличие 2π проскоков разности фаз на рис. 17. Причина наличия несовершенной фазовой синхронизации обусловлена широким распределением периодов СПО, имеющих место для хаотического аттрактора при $r = 28$. Для этого значения параметра r седло $(0, 0, 0)$ находится в области, покрываемой хаотическим аттрактором. Фазовые траектории значительно замедляются при прохождении около седла и существенно ускоряются при вращении вокруг од-

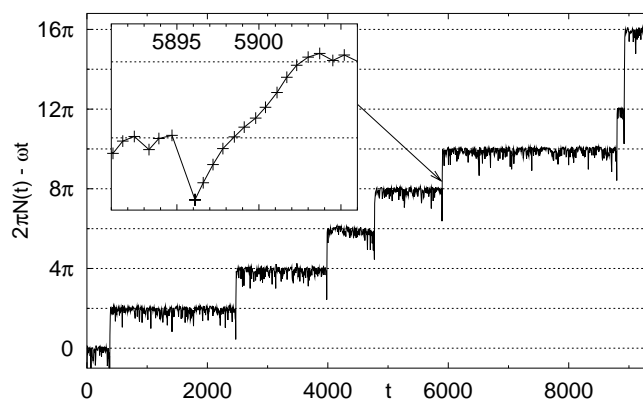


Рис. 17: Проскоки разности фаз при несовершенной фазовой синхронизации в периодически управляемой системе Лоренца при $r = 28$ (37) при $r = 28$.

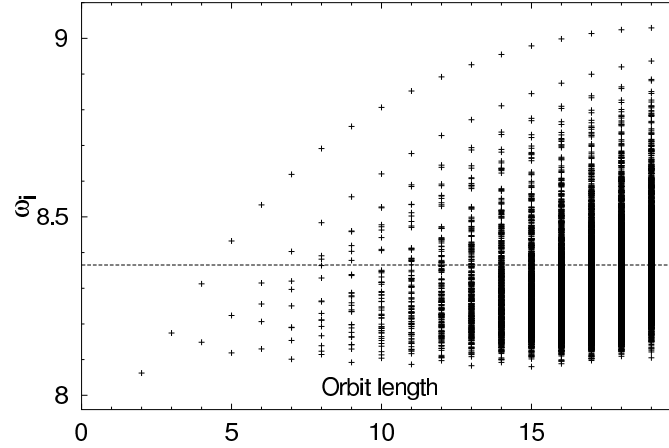


Рис. 18: Характерные частоты (средние частоты возвращения на текущую) седловых периодических орбит длины M , вложенных в хаотический аттрактор Лоренца при $r = 28$. M - кратность периодической орбиты (предельного цикла). Пунктирная линия соответствует средней частоте автономного хаотического аттрактора.

ного из двух неустойчивых фокусов [11]. Таким образом, временные масштабы имеют относительно большой разброс вокруг средней величины. В подтверждение этого на рис. 18 приведено распределение характерных частот различных СПО. Из-за этого большого разброса частот отсутствует область пересечения областей фазового захвата всех СПО и, следовательно, нет совершенной фазовой синхронизации хаотического аттрактора. Для данной частоты и амплитуды внешнего сигнала существуют седловые предельные циклы, которые не захвачены внешним сигналом.

Используя подход СПО, легко продемонстрировать, что проскок фазы наблюдается когда система проходит близко к некоторому СПО, который не находится в $1 : 1$ фазовом захвате внешним сигналом. Более детальный численный анализ показывает, что в течение такого проскока фазы, система фактически захвачена по фазе внешним сигналом но с другим отношением захвата, типа $(l - 1) : l$ или $(l - 2) : l$ (на рис. 19: 14:15 и 18:20). В таких случаях области фазового $1 : 1$ захвата некоторых предельных циклов перекрываются с областями фазового $(l - 1) : l$ или $(l - 2) : l$ захвата других предельных циклов, что видно на рис. 19. В результате в системе фактически устанавливается фазовый захват внешним сигналом с отношением частот отличным от $1 : 1$. При этом траектория системы состоит из кусков синхронизованных с различными фазовыми отношениями колебаний.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что наступление хаотической фазовой синхронизации полностью определяется возможностью захвата внешним периодическим сигналом характерных частот СПО, вложенных в хаотический аттрактор.

Задание:

1. Построить зависимость разности фаз осциллятора Лоренца и внешнего сигнала (ωt) при несовершенной фазовой синхронизации для двух различных наборов параметров r, b, σ, ω . Построить зависимость средней скорости нарастания фазовой расстройки от одного из этих параметров.
2. Найти полосу захвата для $1 : 1$ и $1 : 2$ режимов синхронизации СПО в осцилляторе Лоренца при значениях параметров r, b, σ, ω . Определить пересечение

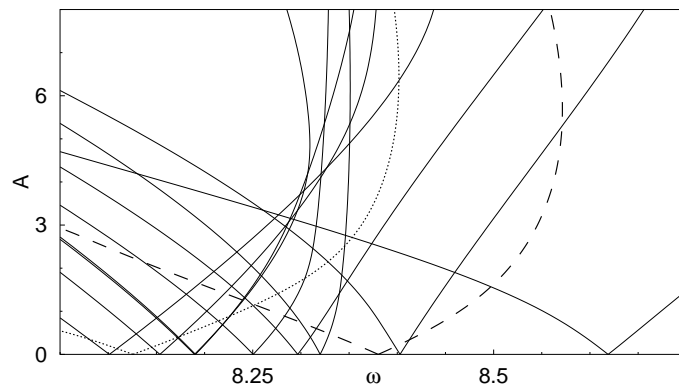


Рис. 19: Перекрытие областей синхронизации СПО с различными отношениями фазового захвата в периодически управляемой системе Лоренца при $r = 28$ (37). Сплошная линия соответствует захвату: $l = 7$ ($1 : 1$), точечная линия: $l = 15$ ($14 : 15$); пунктирная линия: $l = 20$ ($18 : 20$).

областей синхронизации СПО.

4 Вынужденная фазовая синхронизация хаотических колебаний с перемежаемостью

В этом разделе рассматривается фазовая синхронизация в осцилляторах, демонстрирующих возникновение хаоса через перемежаемость I-го типа. Для таких систем также имеет место наличие характерной частоты и фазы колебаний. Это позволяет сформулировать задачу синхронизации таких систем внешним периодическим воздействием.

4.1 Система Лоренца

Кроме классического аттрактора в системе Лоренца имеет место хаотический аттрактор с *перемежаемостью I-го типа* (смотри [3]) (рис. 20). Он реализуется, например, при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, и $r = 166.1$. Такое движение также имеет *характерный временной масштаб*. В системах с перемежаемостью I-го типа длительная регулярная (ламинарная) стадия продолжительности τ сменяется короткой нерегулярной (турбулентной) стадией (иногда только один скачок (выброс)) продолжительности $T \ll \tau$, и затем вновь начинается следующая ламинарная стадия (рис. 20). Такая перемежаемость наблюдалась в лазерах, динамике

жидкости, полупроводниках, плазме и т.д. Средняя длительность ламинарной стадии (СДЛС) определяется универсальным образом [16, 17]:

$$\langle \tau_0 \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_{cr}}}, \quad (38)$$

где ε - управляющий параметр, и ε_{cr} - критическое значение управляющего параметра, соответствующее бифуркации рождения хаоса.

Для численного определения СДСЛ используется следующее выражение:

$$\langle \tau \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (t_{n+1} - t_n), \quad (39)$$

где t_n момент начала n -того ламинарного участка или момент n -того выброса. Тогда характерная частота появления выбросов:

$$\Omega = 2\pi / \langle \tau \rangle. \quad (40)$$

Кроме того, для системы Лоренца, как и для любой другой системы с хаотической перемежаемостью, можно ввести фазу колебаний. Будем рассматривать начало каждой ламинарной стадии t_n в качестве маркера для некоего повторяющегося события. Тогда считаем, что за время $[t_n, t_{n+1}]$ фаза меняется на 2π , а внутри этого интервала она растет линейно:

$$\phi = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad (41)$$

где $t_n \leq t < t_{n+1}$. (Строго говоря, введенная переменная это не фаза колебаний, а фаза появления некоторого повторяющегося события; в данном случае - выброса.)

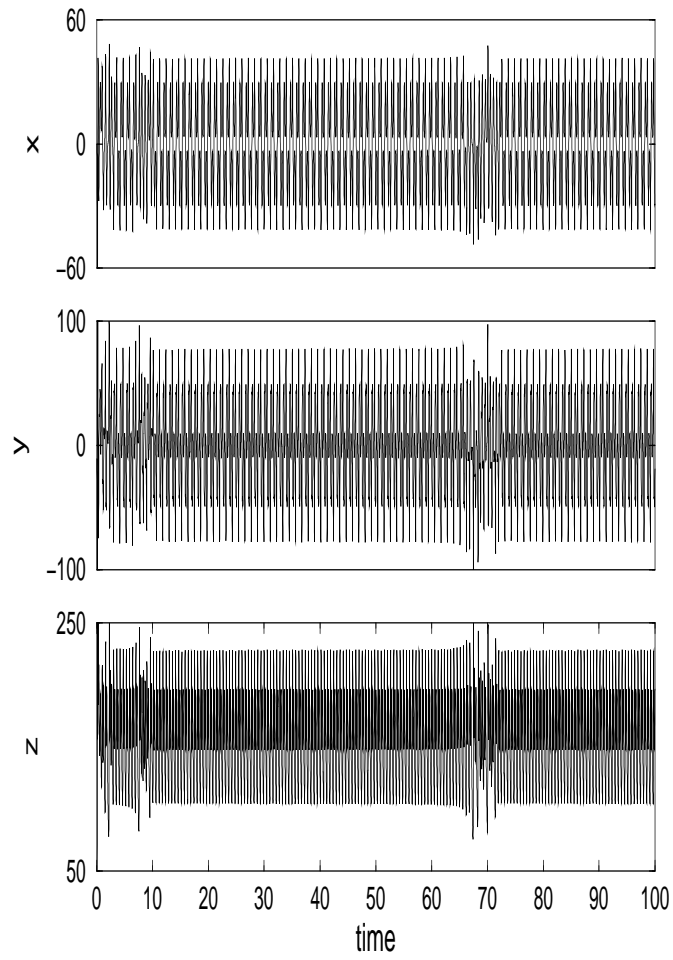


Рис. 20: Хаотические колебания с перемежаемостью в системе Лоренца. Параметры: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, и $r = 166.1$.

Перейдем к рассмотрению вынужденной фазовой синхронизации в системе Лоренца.

Система Лоренца (в которой при $r \approx 166.06$ в результате касательной бифуркации предельных циклов возникает перемежаемость [16]) под воздействием мультипликативного гармонического сигнала (что может также рассматриваться как модуляция бифуркационного параметра r) описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y), \\ \dot{y} = -y - xz + x(r + A \cos \omega t), \\ \dot{z} = -2.667z + xy, \end{cases} \quad (42)$$

где $\sigma = 10$, $\omega = 0.04177$ и A - амплитуда внешнего мультипликативного воздействия. Для определения длительности ламинарной стадии строилась последовательность значений $\{y_n\}$, соответствующих моментам пересечения проекции фазовой траектории на плоскость (x, y) с полупрямой $\{x = 0, y > 0\}$. Каждое из значений $\{y_n\}$ сравнивалось со значением координаты y соответствующей неподвижной точке отображения последования автономной системы Лоренца в момент касательной бифуркации. Если разность $y_n - \bar{y}$ была меньше некоторого ε , то это означает, что y_n принадлежит ламинарной стадии. Средняя длительность ламинарной стадии $\langle \tau \rangle$ выражалась в единицах дискретного времени (одна единица соответствует среднему интервалу непрерывного времени между последовательными пересечениями указанной полупрямой). На рис.21 приведены результаты численного моделирования системы (42) для различных значений r (включая одно субкритическое). Плато синхронизации хорошо выражены. В то же время, при увеличении амплитуды периодического сигнала синхронизация постепенно исчезает (сначала наблю-

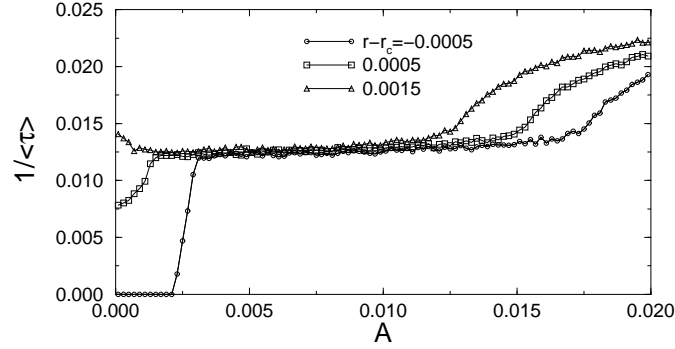


Рис. 21: Синхронизация средней длительности ламинарной стадии внешним периодическим сигналом в системе Лоренца. Здесь $r_c = 166.06149$, $\frac{1}{\langle \tau \rangle} = 0$ означает отсутствие перемежаемости.

дается слабый наклон, потом более резкий). Это исчезновение синхронизации при увеличении амплитуды управляющего сигнала связано с тем, что внешний сигнал не только способствует выравниванию временных масштабов, но также может приводить к усложнению динамики управляемой системы.

4.2 Модельное отображение с хаотической перемежаемостью

Аналогичное хаотическое поведение демонстрирует квадратичное отображение [18]:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (43)$$

где $f(x)$ кусочная функция состоящая из стандартной квадратичной части и некоторой возвращающей части:

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon + x + x^2, & \text{если } x \leq 0.2, \\ g(x - 0.2) - \varepsilon - 0.24, & \text{если } x > 0.2 \end{cases} \quad (44)$$

Здесь g определяет когерентные свойства хаотического аттрактора. При $g < 5$ возможные значения продолжительности ламинарной стадии распределены в узкой полосе, то есть хаотическое поведение сильно когерентно, но для $g > 5$, это распределение является довольно широким. Типичные реализации такого процесса в дискретном времени представлены на рис. 22.

Для этого отображения справедливы определения фазы и частоты, приведенные выше для системы Лоренца.

Рассмотрим отображение (43-44) под действием внешнего гармонического сигнала:

$$x_{n+1} = f(x_n) + A \cos \omega n, \quad (45)$$

где A - амплитуда, а ω - частота внешнего сигнала.

Фазовую синхронизацию для этой системы удастся исследовать аналитически. Для получения выражения для СДЛС, запишем непрерывный аналог отображения (45), т.е. неавтономное дифференциальное уравнение первого порядка [18], [19]:

$$\dot{x} = \varepsilon + x^2 + A \cos \omega t \quad (46)$$

Используя замену переменных

$$x = -\frac{\dot{u}}{u} \quad (47)$$

мы получаем уравнение Матье:

$$\ddot{u} + (\varepsilon + A \cos \omega t)u = 0 \quad (48)$$

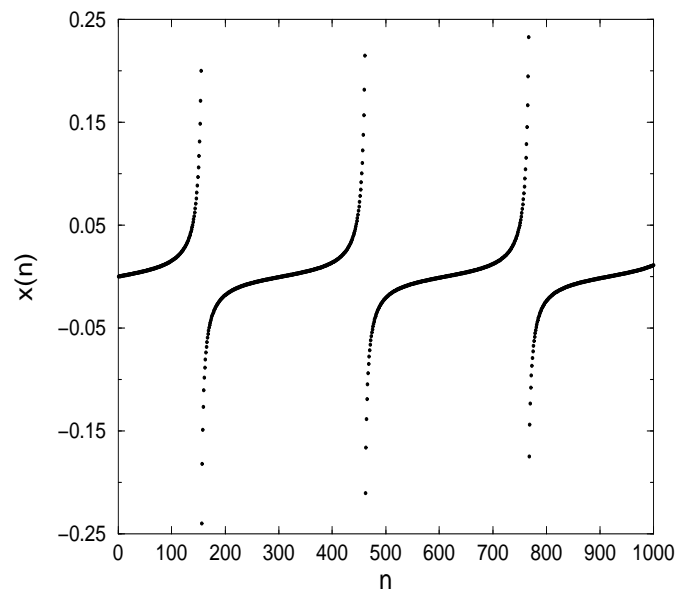


Рис. 22: Хаотические колебания в квадратичном отображении (43-44). Параметры: $\varepsilon = 0.0001$, $g = 2$.

В [19] это уравнение исследовалось с помощью асимптотических методов в предположении $\omega \gg \sqrt{\varepsilon}$, что исключало возможность резонанса. В данном случае внимание, напротив, будет сосредоточено на хорошо известных случаях параметрического резонанса в (48) (см., например [20]).

В (48) параметрический резонанс k -го порядка имеет место при

$$\sqrt{\varepsilon} \approx \frac{k}{2}\omega, \quad k \in N \quad (49)$$

В k -й зоне параметрического резонанса решение уравнения (48) имеет вид гармонических колебаний на частоте $\frac{k}{2}\omega$ с экспоненциально растущей амплитудой:

$$u = a \cos\left(\frac{k}{2}\omega t + \phi\right)e^{p_k t}, \quad (50)$$

где a , ϕ -некоторые константы, p_k зависит от номера зоны и от параметров системы. Благодаря специфическому виду замены (47) после перехода к исходной переменной x параметрическая неустойчивость исчезает и для x имеем:

$$x = \frac{k}{2}\omega \tan\left(\frac{k}{2}\omega t + \phi\right) - p_k, \quad (51)$$

что дает следующее выражение для средней длительности ламинарной стадии:

$$\langle \tau_s \rangle \propto \frac{2}{k\omega} \quad (52)$$

Следовательно, синхронизация внешним периодическим сигналом движения, характеризующегося перемежаемостью 1-го рода, приводит к следующему изменению продолжительности ламинарной стадии:

$$\frac{\langle \tau_s \rangle}{\langle \tau_0 \rangle} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{k\omega}, \quad (53)$$

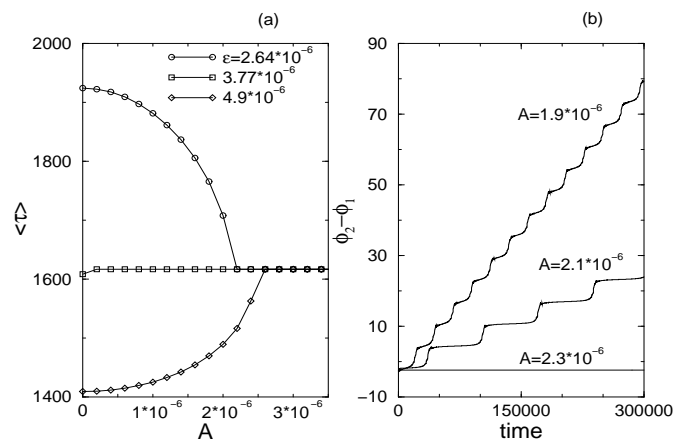


Рис. 23: (а) Захват средней длительности ламинарной стадии внешним периодическим сигналом в системе (45); (б) эволюция разности фаз отображения и внешнего сигнала в несинхронном ($A = 1.9 \times 10^{-6}, 2.1 \times 10^{-6}$) и синхронном ($A = 2.3 \times 10^{-6}$) режимах при $\varepsilon = 2.64 \times 10^{-6}$.

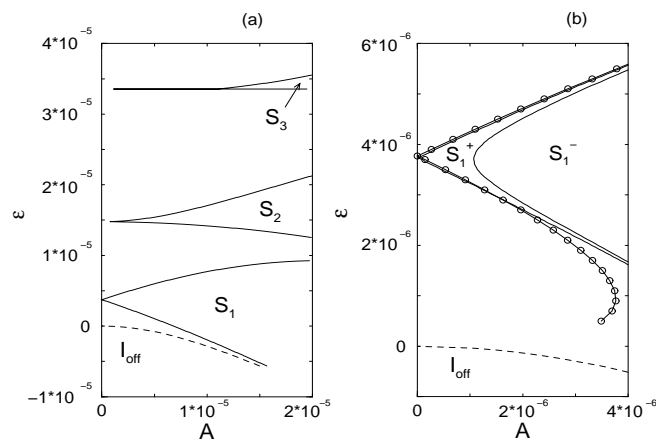


Рис. 24: (а) Три первых зоны синхронизации (S_k , $k = 1, 2, 3$) и область, в которой перемежаемость отсутствует (I_{off}); (б) Области синхронизации (внутри первой зоны) с положительным (S_1^+) и отрицательным (S_1^-) ляпуновским показателем. Теоретическая граница первой зоны синхронизации (54) показана кривой, помеченной 'o'.

где $\langle \tau_0 \rangle$ соответствует случаю автономного отображения ($A = 0$). Таким образом, в зоне параметрического резонанса в уравнении (48) экспоненциальный рост амплитуды колебаний не имеет значения для динамики исходного уравнения (46), а важной является только частота колебаний. Напротив, вне зон резонанса уравнения (48) реализуется двучастотное решение, а в отображении (46) синхронизация отсутствует. Границы первой зоны Матье ($k = 1$) в плоскости (A, ε) задаются уравнением:

$$A = 4\varepsilon \left| \frac{\omega}{2\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right| \quad (54)$$

и соответствуют первой зоне синхронизации в (46). Выражение для частоты биений $\Omega_1 = 1/\langle \tau \rangle$ вблизи границы первой зоны синхронизации:

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{4} \sqrt{\left(2 - \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 - \frac{A^2}{4\varepsilon^2}} \quad (55)$$

дает квадратичный закон скейлинга, типичный для фазовой синхронизации.

Обратимся теперь к результатам численного моделирования системы (45). Во всех экспериментах использовалось иррациональное значение $\omega = 0.001 \cdot 2\pi \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. На рис. 23(а) проиллюстрировано явление захвата средней длительности ламинарной стадии для различных значений ε при увеличении амплитуды внешнего сигнала A . Легко убедиться, что теоретический результат для длительности ламинарной стадии в режиме синхронизации (53) дает очень хорошее приближение. Интересно отметить, что это хорошее совпадение численного и теоретического результатов имеет место и в том случае, когда условия $A \ll \varepsilon$ и (49) не выполняются. Вблизи плато синхронизации кривые, представленные на рис.23, демонстрируют

квадратичный закон сходимости, что хорошо согласуется с (55). Кроме того, фазовый захват, проиллюстрированный на рис.23(b) подтверждает фазовую природу наблюдаемой хаотической синхронизации. Фаза колебаний вычислялась в соответствии с (41).

На рис.24(a) на плоскости параметров (A, ε) представлены первые три зоны синхронизации S_k , $k = 1, 2, 3$ и область I_{off} , в которой перемежаемость отсутствует. Численные расчеты показывают, что точки соприкосновения зон синхронизации S_k с осью ординат ($A = 0$) расположены согласно (49), что соответствует параметрическому резонансу в (48). Увеличенные области S_1 и I_{off} показаны на рис. 24(b). Границы первой зоны синхронизации, полученные из выражения (54) (линия, помеченная 'o') обнаруживают хорошее совпадение с численными результатами. Для более детального анализа синхронного режима было проведено вычисление ляпуновских показателей. Это позволило установить, что область синхронизации состоит из двух качественно различных подобластей. В S_1^+ ляпуновский показатель положителен, в то время как в S_1^- он отрицателен, и хаос отсутствует. При этом динамика отображения (45) в S_1^- остается нетривиальной, и аттрактор в неавтономном фазовом пространстве является странным нехаотическим.

Задание:

1. Исследовать неподвижные точки точечного отображения (43)-(44).
2. Получить выражение (49), определяющее области параметрического резонанса в уравнении Матъе (48).
3. Построить график распределения длительностей ламинарных стадий в отображении (43)-(44) при $g =$

2 и $g = 7$.

4. Построить зависимости разности фаз отображения (43)-(44) и внешнего сигнала (ωn) для различных наборов параметров.

5 Отображение окружности

В первом разделе пособия было показано, что уравнения периодической (с периодом T_0) автоколебательной системы, подверженной воздействию слабой внешней периодической силы могут быть сведены к фазовому уравнению:

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon q(\varphi - \omega t), \quad (56)$$

где q - 2π -периодическая функция фазы φ и $T = 2\pi/\omega$ - периодическая функция времени t , $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Здесь для удобства мы выделили в явном виде малый параметр ε . Вследствие этого фазовое пространство системы (56) есть двумерный тор $0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq t < T$. Используя стробоскопическое отображение за время T систему (56) можно свести к *отображению окружности*. Фиксируя фазу внешней силы в моменты времени t_0 и $t_0 + T$, можно определить взаимно-однозначное соответствие между фазами $\varphi(t_0)$ и $\varphi(t_0 + T)$. Таким образом получим:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_0 T + \varepsilon Q(\varphi_n), \quad (57)$$

где Q - также 2π -периодическая функция, которую можно найти, исходя из известных значений ω, ω_0 и зависимо-

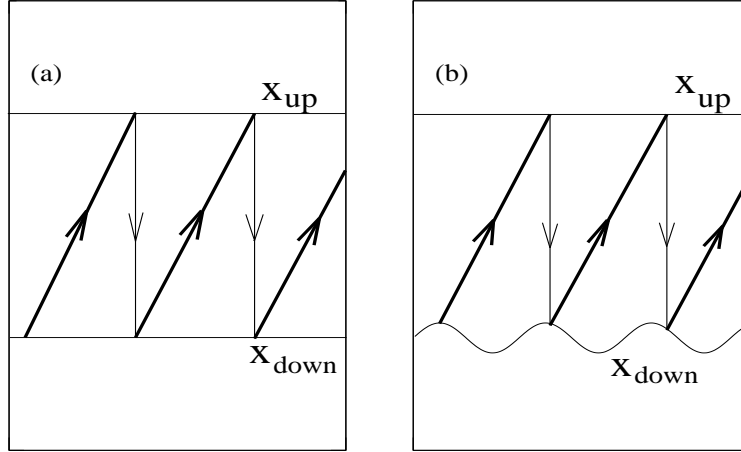


Рис. 25: Система типа накопление-сброс (a) с постоянным нижним порогом, (b) с модулированным нижним порогом.

сти $q(\varphi - \omega t)$. Это отображение называется отображением окружности поскольку оно определено на окружности $0 \leq \varphi < 2\pi$. При $\varepsilon = 0$ отображение (57) задает преобразование поворота. Динамика полученного отображения зависит от параметра $\omega_0 T$ и определяется отношением $\rho = T/T_0$. Если ρ рационально, то имеет место периодичность движения. Если ρ иррационально, то движение квазипериодическое.

Приведем простой пример, в котором явно получается отображение окружности. Рассмотрим систему типа *накопление - сброс* (*integer-fire*). Изменение переменной $x(t)$ представляет собой чередование с периодом T_0 двух стадий:

(a) накопление: x растет во времени линейно $x = (t - t_n)/T_0$, где t_n время предыдущего сброса;

(б) сброс: когда x достигает порога $x_{up} = 1$, значение x мгновенно уменьшается до $x_{down} = 0$ (рис. 25а).

Пусть x_{down} есть периодическая функция времени, например, $x_{down} = \varepsilon \sin \omega t$ (рис. 25б). В этом случае момент $n + 1$ -го сброса вычисляется через момент n -го сброса согласно $t_{n+1} = t_n + T_0 - \varepsilon T_0 \sin \omega t_n$. Тогда, вводя фазу внешней силы $\varphi = \omega t$, получаем отображение окружности $0 \leq \varphi < 2\pi$:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega T_0 - \varepsilon \omega T_0 \sin(\varphi_n), \quad (58)$$

Заметим, что в зависимости от вида функции x_{down} можно получить различные виды отображения окружности. В частности, в [5]² в связи с радиотехническими приложениями рассматривалось отображение окружности вида:

$$\varphi_{n+1} = \omega + \varphi_n - F(\varphi_n), \quad (59)$$

где $F(\varphi)$ - кусочно-линейная 2π - периодическая функция вида

$$F(\varphi) = c\varphi/\pi, \quad (60)$$

определенная в интервале $[-\pi, \pi]$.

Модель (59) описывает типовую импульсную систему фазовой автоподстройки частоты с идеальным запоминанием и идеальным фильтром в цепи управления. Уравнение (59) связывает разность фаз φ_n сигнала подстраиваемого генератора и опорного сигнала в моменты времени $t = n\tau$, где $n = 1, 2, \dots$, а τ - период дискретизации; $\omega \in [0; 2\pi]$ - начальная частотная расстройка; $F(\varphi)$ - характеристика фазового детектора, нормированная на единицу; c - параметр цепи управления.

²Заметим, что основное внимание в этой монографии уделено исследованию синхронных режимов в цепочках и решетках систем фазовой синхронизации

Очевидно, что режим синхронизации подстраиваемого генератора опорным сигналом имеет место при выполнении условия:

$$|\varphi_n| \leq Const \quad (61)$$

для всех n .

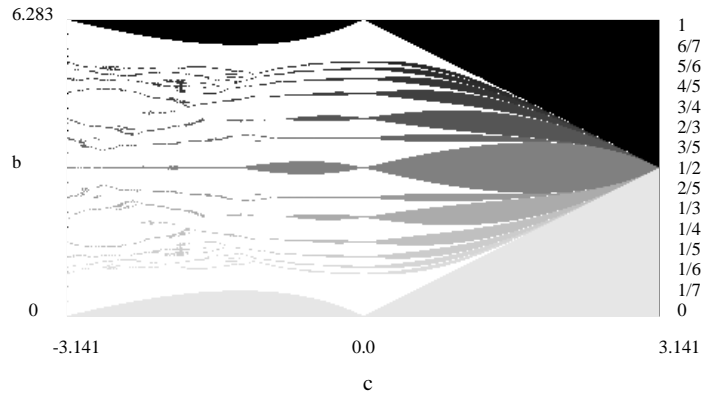


Рис. 26: Распределение чисел вращения отображения окружности (59). На плоскости (c, ω) представлены несколько областей, где числа вращения рациональны ($\rho = p/q$). Справа снизу вверх приведены значения ρ , соответствующие различным областям серого цвета. Между этими областями существуют (на рисунке не представлены) относительно маленькие области с другими рациональными числами вращения.

Кратко опишем основные свойства этого отображения. При

$$\omega < |c| \quad (62)$$

оно имеет единственную неподвижную точку

$$\bar{\varphi} = \frac{\omega\pi}{c}, \quad (63)$$

которая является устойчивой, если

$$\bar{\varphi} \in [0; \pi] \quad (64)$$

(Случай 1 ниже) и неустойчивой, если

$$\bar{\varphi} \in [-\pi; 0] \quad (65)$$

(Случай 3).

Динамика отображения окружности (как при рассматриваемом виде функции $F(\varphi)$ так и при других 2π -периодических функциях) может быть определена *числом вращения* ρ , которое и при регулярной и при хаотической динамике определяется как средняя скорость роста фазовой переменной:

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\varphi_M - \varphi_0}{M}. \quad (66)$$

Число вращения определяет характерный временной масштаб отображения окружности, так как фактически является аналогом частоты. Оно не зависит от начальных условий. Так как ρ фактически является отношением наблюдаемой частоты вращений к частоте внешнего сигнала, то оно может быть рациональным или иррациональным. Очевидно, что если число вращения рационально, то движение в модели (59) периодическое и, следовательно, имеет место синхронный режим. Иррациональное число вращения имеет место для квазипериодического движения, то есть в случае режима биений.

Для отображения (59) имеют место три типа поведения [21, 22]:

Случай 1)

При

$$\left| 1 - \frac{c}{\pi} \right| < 1. \quad (67)$$

производная отображения меньше единицы, то есть отображение сжимающее. В интервале $\omega < c$ неподвижная точка устойчива и могут иметь место следующие три варианта поведения:

а). При каждом ω отображение (59) имеет единственное притягивающее множество D . Для рационального числа вращения $\rho = p/q$ это множество - притягивающая периодическая траектория периода q , т.е. выполняется условие $\varphi_{n+q} = \varphi_n + 2\pi p$: за q итераций разность фаз совершает p оборотов. Для иррационального числа вращения набор D - канторовское множество, на котором (59) действует как вращение.

б). При изменении ω , число вращения ρ непрерывно зависит от ω и меняется немонотонно.

в). Для каждого $\rho = p/q$ есть соответствующий интервал ω , который не может быть сведен в точку. Зависимость ρ от ω для различных c показана на рис. 26. С увеличением c , число и ширина интервалов ω , в которых числа вращения являются рациональными, растет.

Случай 2)

$$\left| 1 - \frac{c}{\pi} \right| = 1. \quad (68)$$

При $1 - c/\pi = 1$ отображение (59) есть отображение поворота на величину ω . При $1 - c/\pi = -1$ отображение (59) остается непрерывным отображением окружности. Число вращения определяется в данном случае как $\omega/2\pi$.

Случай 3)

$$\left| 1 - \frac{c}{\pi} \right| > 1. \quad (69)$$

При этих c имеет место хаотический режим потому, что показатель Ляпунова

$$\lambda = \log \left| 1 - \frac{c}{\pi} \right| \quad (70)$$

положителен. Зависимость чисел вращения от индивидуальной частоты для маленьких $|c|$ аналогична случаю периодических движений (рис. 26). Существует множество интервалов с рациональными числами вращения. При увеличении $|c|$ эти области сначала увеличиваются, а потом уменьшаются и, следовательно, области иррациональных чисел вращения с ростом $|c|$ преобладают.

Задание:

Найти координаты неподвижных точек отображения окружности (58) и определить области их устойчивости.

6 Вынужденная синхронизация активного ротатора

В предыдущих разделах мы рассматривали регулярные и хаотические *автоколебания* и влияние на них периодической силы. В настоящем разделе мы исследуем синхронизацию активного ротатора внешним периодическим сигналом.

Динамика активного ротатора описывается неавтономным уравнением:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi = \omega_0 + A \cos \omega t. \quad (71)$$

Для этого уравнения также как и для отображения окружности, рассмотренного в предыдущем разделе, можно ввести число вращения:

$$\rho = \frac{1}{\omega} \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle. \quad (72)$$

Оно определяет отношение наблюдаемой частоты $\left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle$ к внешней частоте ω .

Число вращения ρ зависит от параметров уравнения (71), в частности от параметра ω_0 . В общем случае для нахождения зависимости $\rho(\omega_0)$ требуется привлечение численных методов. Вместе с тем некоторые свойства числа вращения можно определить аналитически:

а). Число вращения ρ уравнения (71) есть неубывающая функция параметра ω_0 :

$$\lim_{A \rightarrow 0} \rho = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \rho = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 1}}{\omega} \quad (73)$$

Это свойство следует из того, что $\frac{d\varphi}{dt}$ с ростом ω_0 возрастает. Формула (73) при $A \rightarrow 0$ находится интегрированием уравнения (71) (см. раздел 1.1); а при $\omega \rightarrow \infty$ - его усреднением;

б). При $0 < \omega_0 < 1 - A$ число вращения $\rho = 0$ и устойчиво, т.е. не изменяется при изменении параметров системы. Это свойство следует из того, что окружности $\varphi = \pi/2$, $\varphi = -\pi/2$ в фазовом пространстве (на торе) $(\varphi, \omega t)$ являются кривыми без контакта;

в). При $A = 1$ и $\omega_0 = \omega$ $\varphi = \omega t$ - решение уравнения (71);

г). Устойчивы только числа вращения $\rho = 0, 1, 2, \dots$

Приведем далее аналитический подход, позволяющий находить области синхронизации при больших амплитудах внешнего сигнала A . В этом случае сначала можно пренебречь нелинейным слагаемым в (71), а затем рассматривать его как возмущение. Чтобы найти синхронизованное решение, будем считать A^{-1} малым параметром, и разложим решение по степеням A^{-1} :

$$\varphi = n\omega t + A\varphi_{-1}(t) + \varphi_0(t) + \dots, \quad \langle \dot{\varphi}_{-1} \rangle_\tau = \langle \dot{\varphi}_0 \rangle_\tau = 0. \quad (74)$$

В (74) предполагается, что вращения происходят с частотой, кратной частоте внешней силы. Подставляя (74) в (71) получим для членов порядка A :

$$\varphi_{-1}(t) = \omega^{-1} \sin(\omega t) + \varphi_{-1}^0, \quad \text{где } \varphi_{-1}^0 = \text{const}, \quad (75)$$

Далее, подставляя полученное решение в (71) и собирая вместе слагаемые порядка A^0 , найдем:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \omega_0 - n\omega - \sin \left[n\omega t + A\omega^{-1} \sin(\omega t) + A\varphi_{-1}^0 \right]. \quad (76)$$

Используя условие $\langle \dot{\varphi}_0 \rangle_\tau = 0$ и интегрируя последнее уравнение по периоду 2π , получим:

$$0 = \omega_0 - n\omega - \sin \varphi_{-1}^0 J_n(-A\omega^{-1}), \quad (77)$$

где J_n - функция Бесселя первого рода. Поскольку $\sin \varphi_{-1}^0$ лежит между -1 и 1, ширина области синхронизации может быть определена исходя из неравенства:

$$|\omega_0 - n\omega| < \left| -J_n \frac{A}{\omega} \right|. \quad (78)$$

В случае, если (71) описывает контакт Джозефсона в присутствии внешнего гармонического во времени тока, области синхронизации, задаваемые условиями (78) можно наблюдать экспериментально, так как они приводят к возникновению ступенек на вольт-амперной характеристики диода при $V_n = n\omega\hbar/2e$, - так называемых ступенек Шапиро.

Задание:

Построить области синхронизации 1:1 и 2:1.

7 Синхронный отклик возбудимой системы на внешний периодический сигнал. Модель Луо-Руди

В этом разделе на примере модели возбудимой системы обсуждается явление близкое явлению синхронизации в автоколебательных системах. В качестве примера рассмотрим модель Луо-Руди (Luo-Rudy) [25], используемую в вычислительных экспериментах с изолированной клеткой сердечной мышцы:

$$C_m \frac{dV}{dt} = -I_{ion} - I_{stimul}, \quad (79)$$

где V - мембранное напряжение, I_{stimul} - внешний ток и I_{ion} - сумма шести ионных токов:

$$I_{ion} = I_{na} + I_{si} + I_k + I_{k1} + I_{kp} + I_b. \quad (80)$$

Натриевый ток I_{na} , медленный внутренний ток кальция I_{si} и калиевый ток I_k определяются согласно:

$$I_i = \bar{G}_i g_i(V, t)(V - E_i), \quad (81)$$

где \bar{G}_i - максимальная постоянная ионная проводимость, $g_i(V, t)$ - каналные проводимости (gating variables), и E_i - реверсионный ионный потенциал. Динамики каналных проводимостей описываются уравнениями:

$$\frac{dg_i}{dt} = \frac{g_\infty - g_i}{\tau_{gi}}, \quad (82)$$

где

$$g_\infty = \alpha_{gi} / [\alpha_{gi} + \beta_{gi}] \quad (83)$$

- стационарное значение проводимости, $\tau_{gi} = 1 / [\alpha_{gi} + \beta_{gi}]$ - постоянные времени, и α_{gi} , и β_{gi} - функции мембранного напряжения. Независимый от времени калиевый ток I_{k1} , постоянный калиевый ток I_{kp} , и вторичный ток I_b определяются равенствами:

$$I_i = \bar{A}_i(V - E_i), \quad (84)$$

где E_i - реверсивные ионные потенциалы и \bar{A}_i - масштабный множитель. Обратим внимание, что \bar{A}_i для I_{k1} и I_{kp} зависит от напряжения. Проводимости (\bar{G}_i (mS/cm^2)) для каждого тока следующие: $\bar{G}_{na} = 23$, $\bar{G}_{si} = 0.07$, $\bar{G}_k = 0.705$, $\bar{G}_{k1} = 0.6047$, $\bar{G}_{kp} = 0.0183$, $\bar{G}_b = 0.03921$. Реверсивные потенциалы (\bar{E}_i (милливольт)): $\bar{E}_{na} = 54.44$, $\bar{E}_k = -77$, $\bar{E}_{k1} = -87.23$, $\bar{E}_{kp} = -87.23$, $\bar{E}_b = -59.87$. Реверсивный потенциал E_{si} зависит от концентрации кальция, которая меняется во времени.

В невозмущенной системе имеет место устойчивое состояние равновесия. При достаточно сильном возмущении

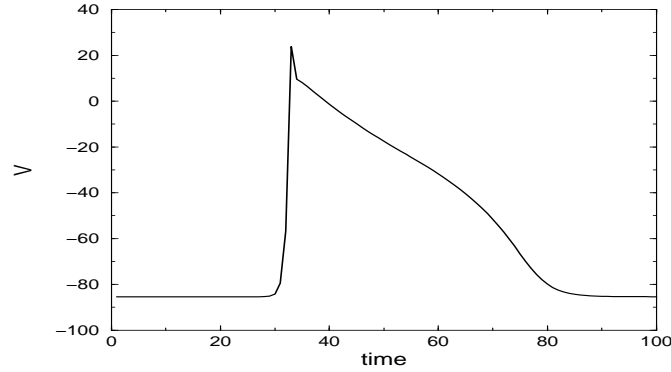


Рис. 27: Типичный отклик системы Луо-Руди (79- 84) на внешнее воздействие.

система возбуждается. Ее отклик имеет форму импульса, изображенного на рис. 27.

Далее рассматриваются некоторые аспекты влияния внешней силы на систему Луо-Руди. В качестве внешнего сигнала I_{stimul} подается периодическую последовательность импульсов прямоугольной формы различной амплитуды и длительности. В качестве управляющего параметра берется частота внешнего воздействия ω_{ext} , т.е. частоту следования импульсов. Проведенные численные эксперименты позволили получить следующие результаты, представленные на рис. 28- 29. При фиксированной амплитуде внешнего сигнала при малой частоте внешней силы ω_{ext} имеет место 1:1 синхронный отклик, т.е. каждый внешний импульс приводит к возбуждению системы (рис. 28(c)). С увеличением внешней частоты при некотором критическом значении частоты ω_{ext}^1 происходит переход к 2:1 синхронному отклику (рис. 28(b)). При уменьшении частоты

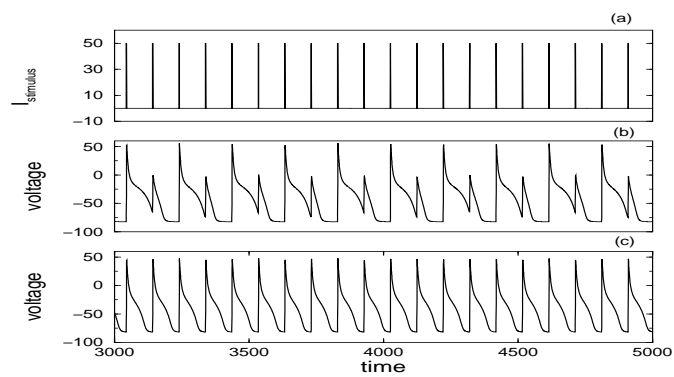


Рис. 28: Синхронный отклик системы Луо-Руди на внешнее периодическое воздействие. (a) последовательность внешних импульсов. (b) эволюция потенциала действия для 2 : 1 синхронного отклика. (c) эволюция потенциала действия для 1 : 1 синхронного отклика. Параметры: амплитуда внешних импульсов = 50 mV, продолжительность импульса = 10 ms.

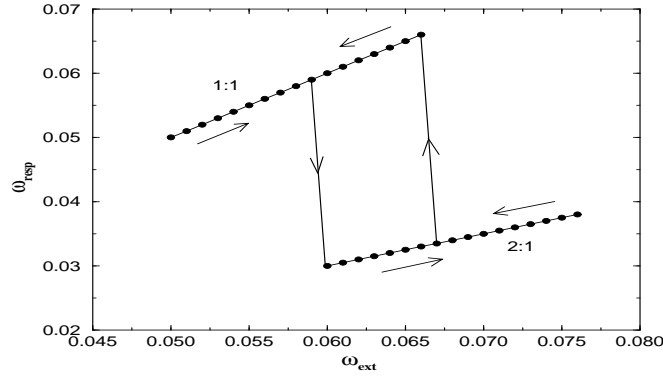


Рис. 29: Гистерезис при синхронном отклике системы Луо-Руди на внешнее периодическое воздействие. Частота отклика ω_{resp} в зависимости от частоты внешнего сигнала ω_{ext} для тех же значений параметров, что и на рис. 28.

внешнего сигнала переход от 2:1 синхронного отклика к 1:1 синхронному отклику происходит при другом критическом значении частоты $\omega_{ext}^2 < \omega_{ext}^1$, то есть имеет место *гистерезис* (рис. 29). Этот результат был получен в соответствии со следующей процедурой адаптации: конечные значения переменных, полученных в предыдущем эксперименте берутся в качестве начальных условий для следующего эксперимента. Таким образом отклик системы на внешнее воздействие зависит от состояния системы в момент, когда внешний стимул был подан.

Задание:

Определить значения параметра I_{stimul} , при которых в системе (79) реализуются автоколебания.

8 Синхронизация в системах с шумом

В данном разделе мы покажем, что хаотическая фазовая синхронизация и регулярная синхронизация в присутствии слабого шума имеют много общего. В разделе 1.1 было показано, что в случае слабого внешнего воздействия задача вынужденной синхронизации периодического осциллятора может быть сведена к задаче изучения динамики разности фаз внешнего сигнала и осциллятора (см. уравнение (8)). В простейшем случае влияние шума на синхронизацию может быть исследовано с помощью уравнения Ланжевена:

$$\dot{\theta} = \Delta - q(\theta) + \xi(t), \quad (85)$$

с аддитивным шумом $\xi(t)$. В дальнейшем мы рассматриваем гауссовский, δ -коррелированный шум с нулевым средним и интенсивностью \mathcal{D} . Уравнение (85) описывает перемещенные случайные блуждания частицы в поле с потенциалом $V(\theta)$ (см. Рис. 30):

$$V(\theta) = -\Delta \theta + \int_{\theta_0}^{\theta} q(\zeta) d\zeta \quad (86)$$

Если шума нет, то в зависимости от параметра Δ частица либо находится в потенциальной яме (Рис. 30 (а)), либо скользит вниз (Рис. 30 (б)). Первое состояние соответствует синхронному режиму. Воздействие шума на это состояние будет следующим. Какова бы ни была интенсивность шума, рано или поздно частица перескочит в соседнюю потенциальную яму (в верхнюю или в нижнюю). Т.е. произойдет перескок разности фаз θ либо на $+2\pi$, либо на

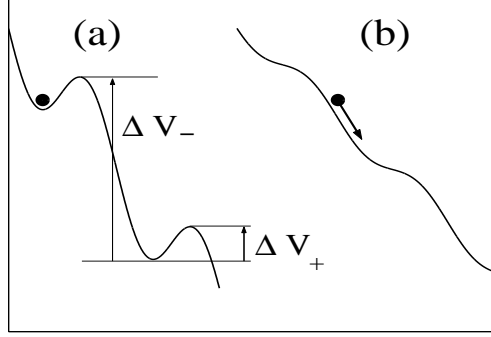


Рис. 30: Фаза как частица в наклонном потенциале $V(\theta)$. (a) Случай синхронизации: частица сидит в минимумах потенциала. (b) Вне области синхронизации частица скатывается вниз.

-2π . Средние частоты таких перескоков при слабом шуме определяются согласно формуле Крамерса [30], [31]:

$$\nu_{\pm} \propto \exp\left(\frac{-\Delta V_{\pm}}{\mathcal{D}}\right). \quad (87)$$

Согласно этой формуле вероятность преодолеть барьер экспоненциально зависит от его высоты и, следовательно, вероятность проскоков θ на $+2\pi$ выше. Обе вероятности растут с ростом интенсивности шума и понижением высоты потенциального барьера V_{\pm} .

Для количественного описания синхронизации воспользуемся теорией Фоккера-Планка [29], [30], [31]. Плотность распределения вероятности разности фаз θ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка (УФП) ([29], [30], [31]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial[(\Delta - q(\theta)) \rho]}{\partial t} + \mathcal{D} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2}. \quad (88)$$

Вводя, как обычно, поток G равенством:

$$G = -\frac{dV}{d\theta} \rho - \mathcal{D} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \quad (89)$$

где V - потенциал, определенный согласно (86), получим эквивалентную форму записи:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0. \quad (90)$$

Легко проверить, что стационарное (не зависящую от времени) решение уравнения (88) может быть представлено в виде:

$$\rho_{st} = C \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \exp\left(\frac{V(\theta') - V(\theta)}{\mathcal{D}}\right) d\theta', \quad (91)$$

где постоянная C находится из условия нормировки:

$$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \rho(\theta') d\theta' = 1 \quad (92)$$

Отметим, что стационарный поток вероятности G связан со средней разностью частот колебаний Δ простым соотношением, которое можно найти, усредняя уравнение (85).

Действительно,

$$\langle \dot{\theta} \rangle = \langle -\Delta + q(\theta) \rangle = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{dV}{d\theta} \right) \rho_{st}(\theta) d\theta \quad (93)$$

В соответствии с (89) подинтегральное выражение можно заменить на $G + \mathcal{D} \frac{\partial \rho_{st}}{\partial \theta}$, после чего вследствие условия $G = const$ и периодичности $\rho_{st}(\theta)$ будем иметь:

$$\Omega_{\theta} = \langle \dot{\theta} \rangle = 2\pi G = 2\pi (\nu_+ - \nu_-) \quad (94)$$

Рис. 31: Типичная зависимость скорости фазового дрейфа от расстройки. Пунктиром изображена зависимость разности частот осциллятора и внешнего сигнала в отсутствие флуктуаций

Таким образом, при наличии неограниченных по переменной θ (и, в частности, белых гауссовых) шумов синхронизация нелинейного осциллятора является относительной: в системе всегда будет присутствовать дрейф фазы, связанный с тем, что в случае $\Delta > 0$, когда собственная частота осциллятора ω_0 больше частоты внешнего сигнала ω , средняя частота ν_+ преодоления (более низкого) барьера в направлении возрастания фазы оказывается больше, чем средняя частота ν_- преодоления (более высокого) барьера в направлении убывания фазы.

Полученное выражение (94) имеет простую интерпретацию в случае шума $\xi(t)$ малой интенсивности, когда среднее время между такими скачкообразными срывами фазовой синхронизации значительно превосходит длительность одного скачка, и за время между скачками система

успевают "забыть" свою предисторию. Действительно, поскольку за время t совершается в среднем $\nu_+ t$ независимых скачков в направлении возрастания фазы, $\nu_- t$ скачков в сторону ее убывания, то общий средний сдвиг фазы равен:

$$\langle \Delta\theta(t) \rangle = 2\pi (\nu_+ - \nu_-) t. \quad (95)$$

Очевидно, что случайные скачки, происходящие как в сторону возрастания, так и в сторону убывания фазы, будут приводить не только к сносу, но и диффузионному расплыванию плотности вероятности распределения фазы. Для того, чтобы определить закон такого расплывания в рассмотренном выше случае малой интенсивности флуктуаций $\xi(t)$, учтем, что скачки фазы в "+" и "-" направлениях взаимно независимы, следовательно:

$$D_\theta = D_{\theta_+} + D_{\theta_-}, \quad (96)$$

где

$$D_{\theta_\pm} = 4\pi^2 D_{N_\pm} \quad (97)$$

- дисперсия фазы, обусловленная скачками только в "+" (только в "-") направлении, N_\pm - случайное число скачков только "+" (только в "-") направлении.

Отметим, что сами скачки можно считать независимыми событиями, равномерно распределенными во времени, и, соответственно, время ожидания одного скачка либо в "+" либо "-" направлении будет иметь экспоненциальное распределение:

$$p_\pm(t) = \nu_\pm \exp(-\nu_\pm t), \quad (98)$$

а полное число скачков в за время t в каком-либо направлении будет распределено по закону Пуассона:

$$p_{N_{\pm}}(t) = \frac{(\nu_{\pm} t)^{N_{\pm}}}{N_{\pm}!} \exp(-\nu_{\pm} t) \quad (99)$$

и обладать дисперсией, равной $\nu_{\pm} t$. Отсюда для значения дисперсии фазы согласно (96), (97) находим:

$$D_{\theta} = 4 \pi^2 (\nu_{+} + \nu_{-}) t \quad (100)$$

Таким образом, при синхронизации квазигармонического осциллятора гармоническим сигналом наличие белозумовых флуктуаций приводит к дрейфовому смещению фазы, выражаемому равенством (95), а также к диффузионному росту разброса возможных значений фазы по закону (100). Отметим, что вследствие наличия в выражении для ν_{\pm} (см. (87)) экспоненциального множителя, как скорость дрейфа, так и постоянная диффузии резко убывают при уменьшении интенсивности флуктуаций.

Задание:

1. Оценить среднюю скорость дрейфа фазы (94) в случае $q(\theta) = \sin(\theta)$.

Список литературы

- [1] А.А.Андронов, А.А.Витт и С.Э. Хайкин, *Теория колебаний*, М., Наука, 1981.
- [2] Н.Н.Боголюбов и Ю.А.Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва, Физматгиз, 1958.
- [3] М.И. Рабинович и Д.И. Трубецков *Введение в теорию колебаний и волн*. Ижевск, Рег. Хаот. Дин., 2000.
- [4] А.С. Пиковский, М.Г. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*, Москва, Техносфера, 2003.
- [5] Афраймович В.С, Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации./ Под ред. Гапонова-Грехова А.В. и М.И.Рабиновича М.И., Горький: ИПФ РАН, 1989.
- [6] В. van der Pol Radio Rev. **1**, 701 (1920)
- [7] О.Е. Rössler, Phys. Lett. A **57**, 397 (1976).
- [8] G.V. Osipov, B. Hu, Ch. Zhou, M.V. Ivanchenko, J. Kurths. Phys. Rev. Lett. **91**, 241041 (2003)
- [9] E.F. Stone, Phys. Lett. A **163**, 367 (1992).
- [10] A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, G.V. Osipov, and J. Kurths, Physica D, **104**, 219 (1997).
- [11] C. Sparrow, *The Lorenz Equations, Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer, New York, 1982.

- [12] M.A. Zaks, E.-H. Park, M.G. Rosenblum and J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **82**, 4228 (1999).
- [13] E.H. Park, M. Zaks, and J. Kurths, Phys. Rev. E **60**, 6627 (1999).
- [14] M.A. Zaks, E.-H. Park and J. Kurths, Int. J. Bifurcation and Chaos, **10**, 2649 (2000).
- [15] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [16] Y. Pomeau and P. Manneville, Phys.Lett., **75A**,1 (1979).
- [17] Y. Pomeau and P. Manneville, Commun.Math.Phys., **74**, 189 (1980).
- [18] J.E. Hirsch, B.A. Huberman, D.J. Scalapino, Phys. Rev. A, **25**, 519 (1982).
- [19] J.K. Bhattacharjee and K. Banerjee, Phys.Rev. A, **29**, 2301 (1984).
- [20] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц *Механика*, Наука, Москва, 1976.
- [21] Малкин М.И., Интервалы вращения и динамика отображений лоренцевского типа // Методы теории дифференциальных уравнений. Горьковский государственный университет. 1986. С.122-134.
- [22] Каток А.Б., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал,1999.
- [23] А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона*, М., Мир, 1984.

- [24] К.К. Лихарев, *Введение в динамику джозефсоновских контактов*, М., Наука, 1985.
- [25] С.Н. Luo and Y. Rudy, *Circ. Res.* **68**, 1501 (1991).
- [26] А.Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах*, Москва, Наука, 1968.
- [27] Н.Г. ван Кампен, *Стохастические процессы в физике и химии*, М., Высшая школа, 1990.
- [28] A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, and J. Kurts, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **10**, 2291 (2000).
- [29] Р.Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике*, Москва, Сов.Радио, 1961.
- [30] H.Z. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer, New York, Berlin 1989.
- [31] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer, New York, Berlin 1990.