МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет
им.Н.И. Лобачевского**

Задания для самостоятельной работы по курсу «Термодинамика»

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010302 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2017

УДК 536.(075.8)
ББК В317я73

Задания для самостоятельной работы по курсу «Термодинамика». Составители: Грезина А.В., Никифорова И.В., Панасенко А.Г. Учебно-методическое пособие – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 42 с.

Рецензент: д.ф.-м.н, профессор **Д.В. Баландин**

Задания для самостоятельной работы предназначены в первую очередь для студентов университета, обучающихся в институте информационных технологий, математики и механики. Данное учебно-методическое пособие соответствует программе курса «Термодинамика» по направлению подготовки 010302 «Прикладная математика и информатика» и учитывает специфику подготовки студентов.

В пособии представлены: основные законы и формулы в объеме, достаточном для решения задач, примеры решения типовых задач; контрольные вопросы и задачи для закрепления материала и самопроверки. В кратком приложении помимо математических формул даны основные физические константы и параметры, необходимые для решения задач.

УДК 536.(075.8)
ББК В317я73

2017

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

В пособии приведены задачи и вопросы, многие из которых использовались составителями на практических занятиях по разделу курса физики «Термодинамика» и предлагались для самостоятельной работы студентов.

Эти задачи, охватывая большую часть разделов курса, должны способствовать более глубокому усвоению материала.

При желании студенты могут самостоятельно прорабатывать материал курса, для чего пособие снабжено списком литературы, включающим в себя вполне достаточное количество, как учебников, так и задачников. (В списке приведены лишь наиболее доступные издания, общий список которых неизмеримо больший.) Кроме того, многолетний опыт преподавания показывает, что студенты чувствуют себя увереннее, когда перед зачетом или экзаменом они имеют список контрольных вопросов по курсу.

Все изложенное выше и определило структуру разработки: каждый из разделов курса включает в себя основные законы и формулы, примеры решения задач, вопросы и задачи.

В кратком приложении помимо математических формул приведены значения физических постоянных, необходимых для решения включенных в пособие задач.

Приступая к решению задачи, студентам рекомендуется хорошо вникнуть в ее смысл и постановку вопроса. Весьма полезным при решении многих задач является построение простейших рисунков, схем и графиков, помогающих увидеть основные особенности задачи и облегчающих получение искомого решения.

Большинство приведенных задач предполагают аналитическое решение, т. е. получение расчетных формул, в которых неизвестные искомые величины выражены через данные задачи. Следует обязательно проверять размерность полученных формул, пробовать приводить их к простейшим предельным случаям, которые известны или очевидны, и только после этого следует выполнять численные расчеты. Такой проверкой можно убедиться в правильности или ошибочности решения. После получения числового ответа задачи следует, по возможности, оценить его правдоподобность.

А.В. ГРЕЗИНА
И.В. НИКИФОРОВА
А.Г.ПАНАСЕНКО

1. Уравнение состояния идеального газа, процессы

1.1. Основные законы и формулы

Уравнение состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \,,$$

где p – давление; V – объем; T - абсолютная температура; m – масса; μ - молярная масса; R = 8,314 Дж/(К·моль) – универсальная газовая постоянная.

Уравнение состояния ван-дер-ваальсовского газа (для одного моля)

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \,,$$

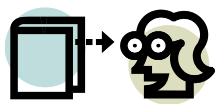
где V - объем, занимаемый молем газа при данных p и T; a и b - постоянные Ван-дер-Ваальса для данного газа.

Закон Дальтона: *давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений* (парциальное давление - это давление, которое оказывал бы на стенки сосуда один газ смеси в отсутствие остальных).

Зависимость давления газа от высоты в поле силы тяжести в изотермическом приближении дается барометрической формулой

$$p = p_0 e^{-\mu g h / RT} \,,$$

где p_0 - давление на высоте h = 0; g = 9,8 м/с^2 - ускорение свободного падения.

1.2. Примеры решения задач 

1-1. В баллоне объемом $V = 7.5$ л при температуре $T = 300$ К находится смесь идеальных газов: $\nu_1 = 0.10$ моля кислорода, $\nu_2 = 0.20$ моля азота и $\nu_3 = 0.30$ моля углекислого газа. Считая газы идеальными, найти:

а) давление смеси;

б) среднюю молярную массу μ данной смеси, которая входит в уравнение ее состояния $pV = (m/\mu)RT$, где m - масса смеси.

Решение. а) Смесь содержит ν_1, ν_2 и ν_3 молей O_2, N_2 и CO_2 соответственно. Тогда общее число молей в смеси $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$. Уравнение состояния идеального газа для смеси $pV = \nu RT$, откуда $p = \frac{\nu RT}{V}$ или после подстановки получаем

$$p = \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)RT}{V} = \frac{(0.1 + 0.2 + 0.3)\cdot 8.31 \cdot 300}{7.5\cdot 10^{-3}} = 199440\,(\text{Па}) = 1.968\ (\text{атм.}).$$

б) Масса кислорода O_2, содержащегося в смеси $m_1 = \nu_1\mu_1$, масса азота N_2, содержащегося в смеси $m_2 = \nu_2\mu_2$, масса углекислого газа, содержащегося в смеси $m_3 = \nu_3\mu_3$. Тогда масса смеси $m = m_1 + m_2 + m_3 = \nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2 + \nu_3\mu_3$.

Молярная масса смеси

$$\mu = \frac{\text{масса смеси}}{\text{общее число молей}} = \frac{\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2 + \nu_3\mu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{0.1\cdot 32 + 0.2\cdot 28 + 0.3\cdot 44}{0.1 + 0.2 + 0.3} =$$
$$= 36.7(\text{г/моль}).$$

Ответ: $p = 1.968$ атм., $\mu = 36.7$ г/моль.

1-2. Определить число N молекул, содержащихся в объеме $V = 1\,\text{мм}^3$, и массу m_1 молекулы воды. Считая условно, что молекулы воды имеют вид шариков, соприкасающихся друг с другом, найти диаметр d молекул.

Решение. Число N молекул, содержащихся в некоторой системе массой m, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν:

$$N = \nu N_A.$$

Так как $\nu = \frac{m}{\mu}$, где μ - молярная масса, то $N = \frac{mN_A}{\mu}$, $m = \rho V$ (ρ - плотность воды). Произведем вычисления, подставив значения $\mu = 2\cdot 1\cdot 10^{-3} + 16\cdot 10^{-3} = 18\cdot 10^{-3}$ (кг/моль), $\rho = 1000$ кг/м^3, $N_A = 6.02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Тогда $N = \frac{10^3\cdot 10^{-9}\cdot 6.02\cdot 10^{23}}{18\cdot 10^{-3}} = 3.34\cdot 10^{19}$ молекул. Массу m_1 одной молекулы можно найти по формуле

$$m_1 = \frac{\mu}{N_A}\ . \qquad (1\text{-}2.1)$$

Подставив в (1-2.1) значения μ и N_A найдем массу молекулы воды

$$m_1 = \frac{18\cdot 10^{-3}}{6.02\cdot 10^{23}}\,\text{кг} = 2.99\cdot 10^{-26}\,\text{кг}\,.$$

Если молекулы воды плотно прилегают друг к другу, то можно считать, что на каждую молекулу приходится объем (кубическая ячейка) $V_1 = d^3$, где d - диаметр молекулы. Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_1}\ . \tag{1-2.2}$$

Объем V_1 найдем, разделив молярный объем V_m на число молекул в моле, т.е. на N_A

$$V_1 = \frac{V_m}{N_A}\ . \tag{1-2.3}$$

Подставим выражение (1-2.3) в (1-2.2) $d = \sqrt[3]{\frac{V_m}{N_A}}$, где $V_1 = \frac{\mu}{\rho}$. Тогда $d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}}$.

Произведем вычисления: $d = \sqrt[3]{\frac{18\cdot 10^{-3}}{10^3\cdot 6.02\cdot 10}}\,\text{м} = 3.11\cdot 10^{-10}\,\text{м} = 311\,\text{пм}$.

Ответ: $d = 311\,\text{пм}$.

1-3. В баллоне объемом 10 л находится гелий под давлением $p_1 = 1\,\text{МПа}$ и при температуре $T_1 = 300\,\text{К}$. После того как из баллона было взято $m = 10\,\text{г}$ гелия, температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290\,\text{К}$. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение. Для решения уравнения воспользуемся уравнением состояния идеального газа, применив его к конечному состоянию газа

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2\ , \tag{1-3.1}$$

где m_2 - масса гелия в баллоне в конечном состоянии; μ - молярная масса гелия; R - универсальная газовая постоянная.

Из (1-3.1) найдем

$$p_2 = \frac{m_2}{\mu V} R T_2\ . \tag{1-3.2}$$

Массу m_2 гелия выразим через массу m_1, соответствующую начальному состоянию, и массу m гелия, взятого из баллона

$$m_2 = m_1 - m\ . \qquad (1\text{-}3.3)$$

Массу m_1 гелия найдем также из уравнения состояния идеального газа, применив его к начальному состоянию

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1}. \qquad (1\text{-}3.4)$$

Подставив (1-3.4) в (1-3.3), а затем полученное выражение в (1-3.2), найдем

$$p_2 = \left(\frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m\right)\frac{RT_2}{\mu V} \quad \text{или}$$

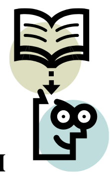
$$p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 - \frac{m}{\mu}\frac{RT_2}{V}\ . \qquad (1\text{-}3.5)$$

Произведем вычисления по формуле (1-3.5), учитывая, что $\mu = 4\cdot 10^{-3}$ кг/моль,

$$p_2 = \left(\frac{290}{300}\cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{8.31}{10^{-2}}\cdot 290\right)\text{Па} = 3.54\cdot 10^5\ \text{Па} = 0.364\,\text{МПа}.$$

Ответ: $p_2 = 0.364\,\text{МПа}$.

1.3. Задачи для самоконтроля



1.1. Найти плотность ρ двухатомного кислорода при давлении p = 50 атм и температуре t = 27° С.

Ответ: $\rho = \dfrac{\mu p}{RT} = 0{,}065$ г/см^3.

1.2. Каков может быть минимальный объем баллона, вмещающего 6,4 кг кислорода, если его стенки при температуре 20° С выдерживают давление в 17 Н/см^2.

Ответ: $V = \dfrac{m}{\mu}R\dfrac{T}{p} = 2{,}865$ м^3.

1.3. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре 7° С было равно 1 атм. При нагревании бутылки пробка вылетела.

Найти, до какой температуры нагрели бутылку, если известно, что пробка вылетела при давлении воздуха в бутылке, равном 1,3 атм.

Ответ: $T_2 = T_1 \dfrac{p_2}{p_1} = 364$ К.

1.4. Из баллона вследствие неисправности вытекает водород. Объем баллона 20 л. Первоначальное давление 10,2 атм в результате убыли газа уменьшается до 4,957 атм. Вместе с этим газ охлаждается с 127°С до 27°С. Определить, какое количество водорода вытекло. Газ считать идеальным.

Ответ: $\Delta m = \dfrac{\mu V}{R}\left(\dfrac{p_1}{T_1} - \dfrac{p_2}{T_2}\right) = 4{,}33$ г.

1.5. Из баллона вследствие неисправности вытекает водород. Объем баллона 20 л. Первоначальное давление 10,2 атм в результате убыли газа уменьшается до 4,957 атм. Вместе с этим газ охлаждается с 127°С до 27°С. Определить, сколько молекул газа ушло из баллона. Газ считать идеальным.

Ответ: $\Delta N = N_A \dfrac{\Delta m}{\mu} = 1{,}3 \cdot 10^{24}$.

1.6. Плотность ρ воздуха при температуре 0° С и давлении 760 мм рт. ст. равна 0,001293 г/см^3. Определить массу литра воздуха при температуре 27,3° С и давлении 750 мм рт. ст.

Ответ: m = 1,15 г.

1.7. Электрическая газонаполненная лампа накаливания наполнена азотом при давлении в 600 мм рт. ст. Емкость лампы 500 см^3. Какое количество воды войдет в лампу, если у нее отломить кончик под водой при нормальном атмосферном давлении?

Ответ: m = 105 г.

1.8. Найти молекулярный вес смеси, состоящей из 20 весовых процентов кислорода, 70 весовых процентов азота и 10 процентов углекислого газа. Определить плотность этой смеси при нормальных условиях.

Ответ: $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{\mu p}{RT} = 1{,}314$ кг/м3 , где $\mu = m / N = (\sum m_i) / \sum(m_i / \mu_i)$.

1.9. Смесь газов состоит из 30 г азота и некоторого количества углекислого газа, так что молекулярный вес смеси равен 32 г/моль. Определить количество углекислого газа в смеси.

Ответ: $m_2 = m_1 \dfrac{\mu_2(\mu - \mu_1)}{\mu_1(\mu_2 - \mu)} = 15{,}7$ г.

1.10. Давление воздуха в велосипедной камере при температуре 7°С равно 150 см.рт.ст. Определить, каково будет давление, если температура повысится до 32° С. Считать объем камеры неизменным.

<u>Ответ:</u> $p_2 = \dfrac{T_2}{T_1} p_1 = 163{,}4$ см. рт. ст.

1.11. Подсчитать, как сильно отличается масса автомобильной шины летом, при t = 30°С, и зимой, при t = -30° С. Давление в шине зимой и летом 3 атм. Объем шины считать неизменным и равным 50 л. Масса одного литра воздуха при нормальных условиях равна 1,29 г/л.

<u>Ответ:</u> $\Delta m = V\rho_0 \dfrac{p}{p_0} T_0 \left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1} \right) = 43{,}05$ г.

1.12. Конец открытой стеклянной метровой (l = 1 м) трубки, бóльшая часть которой погружена в ртуть, выступает на h = 12 см над поверхностью ртути. Трубку закрывают и вынимают из ртути. Какую часть трубки будет занимать ртуть после поднятия? Атмосферное давление 750 мм.рт.ст.

<u>Ответ:</u> $\Delta l = \dfrac{(l + H_0) - \sqrt{(l + H_0)^2 - 4(l - h)H_0}}{2} = 55$ см.

1.13. Узкая цилиндрическая трубка, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути длиной h (мм). Когда трубка обращена закрытым концом кверху, воздух внутри нее занимает длину l, когда же трубка обращена кверху открытым концом, то воздух внутри нее занимает длину $l' < l$. Определить атмосферное давление H (мм.рт.ст.).

<u>*Ответ*</u>: $H = \dfrac{h(l + l')}{l - l'}$.

1.14. Два одинаковых баллона соединены трубкой с клапаном, пропускающим газ из одного баллона в другой при разности давлений $\Delta_p \geq 1{,}1$ атм. Сначала в одном баллоне был вакуум, а в другом идеальный газ при температуре $t_1 = 27$°С и давлении $p_1 = 1$ атм. Затем оба баллона нагрели до температуры $t_2 = 107$°С. Найти давление газа в баллоне, где был вакуум.

<u>Ответ:</u> $p = \dfrac{1}{2} \left(p_1 \cdot \dfrac{T_2}{T_1} - \Delta p_0 \right) = 0{,}1$ атм.

1.15. Сосуд объемом V = 20 л содержит смесь водорода и гелия при температур t = 20° С и давлении p = 2 атм. Масса смеси m = 5 г. Найти отношение массы водорода к массе гелия в данной смеси.

Ответ: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1-\mu/\mu_2}{\mu/\mu_1 - 1} = 0{,}5;\quad \left(\mu = \dfrac{mRT}{pV} = 3\,\text{г/моль}\right).$

1.16. В сосуде находится смесь $m_1 = 7\,\text{г}$ азота и $m_2 = 11\,\text{г}$ углекислого газа при температуре T = 290 К и давлении $p_0 = 1\,\text{атм}$. Найти плотность этой смеси, считая газы идеальными.

Ответ: $\rho = \dfrac{p_0}{RT} \cdot \dfrac{m_1 + m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2} = 1{,}5\,\text{г/л}.$

1.17. При одном качании компрессор захватывает V_0 = 2 л воздуха при атмосферном давлении и температуре $t_1 = 3^\circ$ С. Сколько качаний должен сделать компрессор, чтобы увеличить вдвое давление в сосуде емкостью V = 1000 л, если температура воздуха в нем поддерживается равной $t_2 = 27^\circ$ С и начальное давление вне и внутри сосуда одинаково?

Ответ: $N = (\eta - 1)\dfrac{V}{V_0} \cdot \dfrac{T_1}{T_2} = 455;\ (\eta = \dfrac{p_2}{p_1} = 2).$

1.18. В вертикальном закрытом с обоих торцов цилиндре находится массивный поршень, по обе стороны которого по одному молю воздуха. При T_1 = 300 К отношение верхнего объема к нижнему $\eta_1 = 4$. При какой температуре это отношение станет $\eta_1 = 3$? Трение не учитывать.

Ответ: $T_2 = T_1 \cdot \dfrac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \dfrac{\eta_1^2 - 1}{\eta_2^2 - 1} \approx 422\ \text{К}.$

1.19. В гладкой открытой с обоих концов вертикальной трубе, имеющей два разных сечения (см. рис.), находятся два поршня, соединенные нерастяжимой нитью, а между поршнями - один моль идеального газа. Площадь сечения верхнего поршня на ΔS = 10 см^2 больше, чем нижнего. Общая масса поршней m = 5 кг. Давление наружного воздуха p_0 = 1 атм. На сколько кельвин надо нагреть газ между поршнями, чтобы они переместились на l = 5 см?

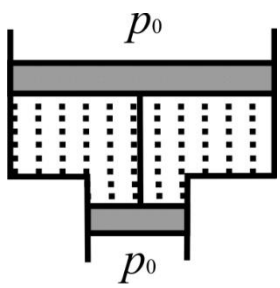


Рисунок к задаче 1.19.

Ответ: $\Delta T = (mg + p_0 \Delta S)l/R = 0{,}9\,\text{К}.$

1.20. Поршневым воздушным насосом откачивают сосуд объемом V. За один цикл (ход поршня) насос захватывает объем ΔV. Через сколько циклов давление в сосуде уменьшится в η раз? Процесс считать изотермическим, газ - идеальным.

Ответ: $n = \dfrac{\ln \eta}{\ln(1 + \Delta V/V)}$.

1.21. Найти давление воздуха в откачиваемом сосуде как функцию времени откачки *t*. Объем сосуда *V*, первоначальное давление p_0. Процесс считать изотермическим и скорость откачки не зависящей от давления и равной С.(*Скоростью откачки называют объем газа, откачиваемый за единицу времени, причем этот объем измеряется при давлении газа в данный момент*).

Ответ: $p = p_0\exp(-ct/V)$.

1.22. Найти максимально возможную температуру идеального газа в каждом из нижеследующих процессов:

а) $p = p_0 - \alpha V^2$,

б) $p = p_0 e^{-\beta V}$,

где p_0, α, β - положительные постоянные; V - объем моля газа.

Ответ: а) $T_{\max} = \dfrac{2p_0}{3R}\sqrt{\dfrac{p_0}{3\alpha}}$; б) $T_{\max} = \dfrac{p_0}{eR\beta}$.

1.23. Допустим, давление p и плотность ρ воздуха связаны соотношением $\rho = \mathrm{const} \cdot p^n$ независимо от высоты (здесь n - постоянная). Найти соответствующий градиент температуры.

Ответ: $\dfrac{dT}{dh} = \mu g \dfrac{n-1}{R}$.

1.24. Считая, что температура и молярная масса воздуха, а также ускорение свободного падения не зависят от высоты, найти разность высот, на которых плотности воздуха при температуре 0° С отличаются: а) в e раз; б) на η = 1%.

Ответ: а) $h = \dfrac{RT}{\mu g} = 8$ км; б) $h = \dfrac{\mu RT}{\eta g} = 0{,}8$ км.

1.25. Какому давлению необходимо подвергнуть углекислый газ при температуре T = 300 К, чтобы его плотность оказалась равной ρ = 500 г/л? Расчет провести как для идеального газа, так и для ван-дер-ваальсовского.

Ответ: $p_{\text{ид}} = \rho \dfrac{RT}{\mu} = 280$ атм; $p_{\text{В-В}} = \dfrac{RT}{\mu - \rho b} - \dfrac{a\rho^2}{\mu^2} = 80$ атм.

1.26. Один моль азота находится в объеме V = 1 л. Найти температуру азота, при которой погрешность в давлении, определяемом уравнением состояния идеального газа, составляет η = 10% по сравнению с давлением ван-дер-ваальсовского газа.

Ответ: $T = \dfrac{a(V-b)(1+\eta)}{RV(\eta V+b)} = 133\ \text{К}$.

1.27. Изобразить для идеального газа примерные графики изохорического, изобарического и изотермического процессов на диаграммах: а) *p, V*; б) *T, V*; в) *T, p*. Графики изобразить проходящими через общую для них точку.

1.28. На рисунке изображены две изотермы для одной и той же массы идеального газа. Какая из температур больше?

1.29. На рисунке изображен круговой процесс в координатах (*p, V*). Криволинейные участки – изотермы. Изобразить тот же процесс в координатах (p, T) и (*V,T*).

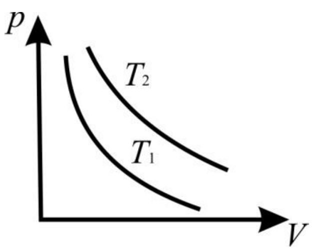


Рисунок к задаче 1.28.

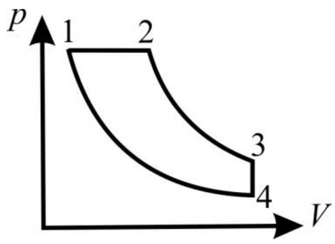
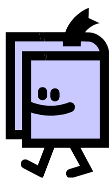


Рисунок к задаче 1.29.

1.30. Пользуясь уравнением $pV = RT$, убедиться в справедливости соотношения

$$\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V \cdot \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T = -1.$$

1.4. Вопросы для самопроверки



1. Что такое «количество вещества» и в чем оно измеряется?
2. Каков смысл постоянной Авогадро ?
3. Что определяет нулевой закон термодинамики?

4. Как определяется температура шкалы Цельсия, Кельвина? Какие температуры Вы еще знаете?
5. При каких условиях газы становятся идеальными?
6. Как выглядит уравнение состояния идеального газа?
7. Как изображаются на различных осях изопроцессы идеальных газов (изотермический, изобарный, изохорный)?
8. Что определяет закон Дальтона для смеси газов?
9. Как выглядит уравнение состояния ван-дер-ваальсовского газа для произвольного количества вещества?
10. Какой физический смысл постоянных в уравнении Ван-дер-Ваальса?

2. Первое начало термодинамики, теплоемкость

2.1. Основные законы и формулы

Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q - количество тепла, сообщенное системе; A - работа, совершаемая системой; ΔU - приращение внутренней энергии системы.

Работа, совершаемая газом

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

Теплоемкость системы

$$C = \frac{\delta Q}{dT} .$$

Уравнение Майера

$$C_p - C_V = R .$$

где C_p, C_V - молярные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно.

Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении определяются соотношениями

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i},$$

где i - число степеней свободы молекулы газа.

Внутренняя энергия идеального газа

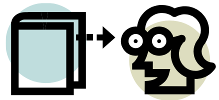
$$U = \frac{m}{\mu} \cdot C_V T = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}.$$

Молярная теплоемкость идеального газа при политропическом процессе

$$C = \frac{n-\gamma}{(n-1)(\gamma-1)}R.$$

Внутренняя энергия моля газа Ван - дер – Ваальса $U = C_V T - \dfrac{C}{V}$

2.2. Примеры решения задач



2-1. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме c_v и при постоянном давлении c_p смеси неона и водорода, если массовые доли неона и водорода составляют $\omega_1 = 80\%$ и $\omega_2 = 20\%$.

Решение. Удельные теплоемкости идеальных газов выражаются формулами $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Для неона (одноатомный газ) $i = 3$ и $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Произведем вычисления

$$c_{V1} = \frac{3}{2}\frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} = 6{,}24 \cdot 10^2 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \; c_{p1} = \frac{3+2}{2}\frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} = 1{,}04 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Для водорода (двухатомный газ) $i = 5$ и $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тогда

$$c_{V2} = \frac{5}{2}\frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}04 \cdot 10^4 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \; c_{p2} = \frac{5+2}{2}\frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}46 \cdot 10^4 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Для нахождения удельной теплоемкости c_v смеси при постоянном объеме решение проведем следующим образом. Выражение для теплоты, необходимой для нагревания смеси на ΔT, запишем двумя способами:

$$Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T \qquad (2\text{-}1.1)$$

$$Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\Delta T \qquad (2\text{-}1.2)$$

Приравняв правые части (2-1.1) и (2-1.2) и разделив обе части полученного равенства на ΔT, получим $c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2$. Отсюда

$$c_v = c_{v1}\frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{v2}\frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{или} \quad c_v = c_{v1}\omega_1 + c_{v2}\omega_2,$$

где $\omega_1 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$ и $\omega_2 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Проведя аналогичные рассуждения, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении:

$$c_p = c_{p1}\omega_1 + c_{p2}\omega_2.$$

Произведем вычисления:

$$c_V = 6{,}24 \cdot 10^2 \cdot 0{,}8 + 1{,}04 \cdot 10^4 \cdot 0{,}2 = 2{,}58\,\text{кДж/(кг}\cdot\text{К)},$$
$$c_p = 1{,}04 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8 + 1{,}46 \cdot 10^4 \cdot 0{,}2 = 3{,}75\,\text{кДж/(кг}\cdot\text{К)}.$$

Ответ: $c_V = 2{,}58\,\text{кДж/(кг}\cdot\text{К)}$, $c_p = 3{,}75\,\text{кДж/(кг}\cdot\text{К)}$.

2-2. Кислород массой $m = 2\,\text{кг}$ занимает объем $V_1 = 1\,\text{м}^3$ и находится под давлением $p_1 = 0{,}2\,\text{МПа}$. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3\,\text{м}^3$, а затем при постоянном объеме до давления $p_2 = 0{,}5\,\text{МПа}$. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q, переданную газу. Построить график процесса.

Решение. Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = c_V m\Delta T = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}m\Delta T.$$

Для двухатомных молекул водорода $i = 5$. $\Delta T = T_3 - T_1$- разность температур газа в конечном (третьем) и начальном состояниях.

Начальную и конечную температуру найдем из уравнения состояния идеального газа $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$, откуда $T = pV\mu/(mR)$.

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой

$$A_1 = \frac{m_1}{\mu} R\Delta T .$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме равна нулю:

$$A_2 = 0 .$$

Следовательно, полная работа, совершаемая газом,

$$A = A_1 + A_2 = A_1 .$$

Согласно первому началу термодинамики

$$Q = \Delta U + A .$$

Произведем вычисления, учтя, что для кислорода $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль :

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 385 \text{ К};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 1155 \text{ К};$$

$$\text{Т}_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 2887 \text{ К};$$

$$A_1 = \frac{8{,}31 \cdot 2 \cdot (1155 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} = 0{,}4 \text{ МДж};$$

$$A = A_1 = 0{,}4 \text{ МДж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{8{,}31 \cdot 2 \cdot (2887 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} =$$
$$= 3{,}24 \text{ МДж};$$

$$Q = 3{,}24 + 0{,}4 = 3{,}64 \text{ МДж} .$$

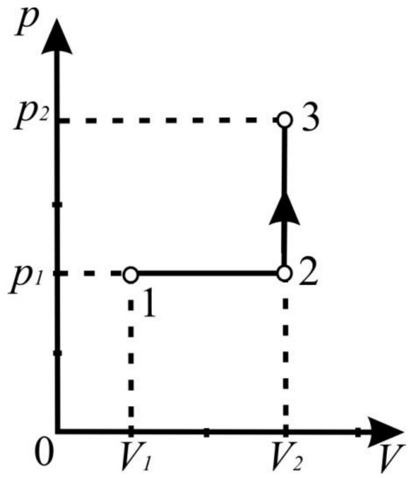


Рисунок к задаче 2-2.

График процесса приведен на рисунке.

Ответ: $\Delta U = 3{,}24$ МДж , $A = 0{,}4$ МДж , $Q = 3{,}64$ МДж .

2-3. Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ совершает процесс, при котором его давление зависит от температуры по закону $p = aT^{\alpha}$, где a и α - постоянные. Найти:

а) работу, которую произведет газ, если его температура испытает приращение ΔT ;

б) молярную теплоемкость газа в этом процессе; при каком значении α теплоемкость будет отрицательной?

Решение. Дано $p = aT^{\alpha}$ (для одного моля газа), тогда $pT^{-\alpha} = a$. Используя уравнение состояния идеального газа, получим $T = pV/R$, $p\left(\dfrac{pV}{R}\right)^{-\alpha} = a$ или $p^{1-\alpha}V^{-\alpha} = aR^{-\alpha}$. Тогда $pV^{-\alpha/(\alpha-1)} = \text{const}$. Здесь показатель политропы $n = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$.

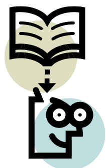
а) При политропическом процессе для одного моля газа

$$A = \frac{R\Delta T}{1 - n} = \frac{R\Delta T}{\left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\right)} = R\Delta T(1 - \alpha).$$

б) Молярная теплоемкость может быть найдена по формуле

$$C = \frac{R}{\gamma - 1} - \frac{R}{n - 1} = \frac{R}{\gamma - 1} - \frac{R}{\dfrac{\alpha}{\alpha - 1} - 1} = \frac{R}{\gamma - 1} + R(1 - \alpha).$$

Ответ: $A = R\Delta T(1 - \alpha)$, $C = \dfrac{R}{\gamma - 1} + R(1 - \alpha)$.



2.3. Задачи для самоконтроля

2.1. Найти число степеней свободы молекул идеального газа, молярная теплоемкость которого:

а) при постоянном давлении $C_p = 29$ Дж/К $\cdot$ моль;

б) в процессе $pT = \text{const}$ равна $C = 29$ Дж/К $\cdot$ моль.

<u>Ответ:</u> а) $i = 2(C_p / R - 1) = 5$, б) $i = 2(C / R - 2) = 3$.

2.2. Газообразный водород, находящийся при нормальных условиях в закрытом сосуде объемом $V = 5$ л. охладили на $\Delta T = 55$ К. Найти приращение внутренней энергии газа и количество отданного им тепла.

<u>Ответ:</u> $\Delta U = -\dfrac{p_0 V\Delta T}{T_0(\gamma - 1)} = -0{,}25$ кДж; $Q' = -\Delta U$.

2.3. Какое количество тепла надо сообщить азоту при изобарическом нагревании, чтобы газ совершил работу A, равную 2 Дж?

Ответ: $Q = A\dfrac{\gamma}{\gamma - 1} = 7$ Дж.

2.4. Газ, занимающий объем 5 л и находящийся под давлением $2 \cdot 10^5$ Н/м^2 при температуре 17^o С, был нагрет и расширялся изобарически. Работа расширения газа при этом оказалась равной 196 Дж. На сколько нагрели газ?

Ответ: $\Delta T = \dfrac{A \cdot T_1}{p \cdot V_1} = 56{,}84\,\text{К}$

2.5. На нагревание 40 г кислорода от 16^o С до 40^o С затрачено 150 кал. При каких условиях нагревался газ? (При постоянном объеме или при постоянном давлении?)

Ответ: при постоянном объеме, т. к.

$$Q_V = \nu\, i\frac{R}{2}\Delta T = 624\,\text{Дж}; \quad Q_p = \nu(i+2)\frac{R}{2}\Delta T = 873\ \text{Дж}.$$

2.6. Найти молярную массу газа μ, если при нагревании m = 0,5 кг этого газа на ΔT = 10 К изобарически требуется на ΔQ= 1,48 кДж тепла больше, чем при изохорическом нагревании.

Ответ: $\mu = mR\Delta T / \Delta Q$ μ= 28 г/моль.

2.7. Один моль некоторого идеального газа изобарически нагрели на ΔT = 72 К, сообщив ему количество тепла Q = 1,6 кДж. Найти приращение его внутренней энергии и величину $\gamma = C_p/C_V$.

Ответ: $\Delta U = Q - R\Delta T$ = 1 кДж; $\gamma = Q/(Q - R\Delta T) = 1{,}6$.

2.8. Вычислить γ для газовой смеси, состоящей из ν_1= 2 моля кислорода и ν_2 = 3 моля углекислого газа. Газы считать идеальными.

Ответ: $\gamma = [\nu_1\gamma_1(\gamma_2 - 1) + \nu_2\gamma_2(\gamma_1 - 1)]/[\nu_1(\gamma_2 - 1) + \nu_2(\gamma_1 - 1)] = 1{,}33$.

2.9. Вычислить удельные теплоемкости C_p и C_V для газовой смеси, состоящей из 7 г азота и 20 г аргона. Газы идеальные.

Ответ: C_p = 0,65 Дж/(г·К); C_V = 0,42 Дж/(г·К).

2.10. Найти удельные теплоемкости C_vи C_pнекоторого газа, если известно, что масса одного киломоля этого газа равна μ = 30 кг/кмоль и отношение $\gamma = C_p/C_v$ = 1,4.

Ответ: $C_V = \dfrac{R}{\mu(\gamma - 1)} = 2{,}5R = 692{,}83\,$Дж/(кг·К); $C_p = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}R = 969{,}96$ Дж/(кг·К).

2.11. При изобарическом расширении кислорода им была совершена работа A = $2 \cdot 10^{-6}$ Дж. Определить изменение внутренней энергии ΔU этого количества газа, количество тепла Q, сообщенного ему в процессе расширения, а также массу газа m, если его температура возросла на 10^o. Газ считать идеальным.

Ответ: $A = p\Delta V = \nu R\Delta T \rightarrow \nu = \dfrac{A}{R\Delta T} = 2{,}4\cdot 10^{-8}$ моль; $m = \nu\mu = 0{,}768$ мкг;
$\Delta U = \nu C_V \Delta T = \left(\frac{5}{2}\right)\nu R\Delta T = 4{,}99\cdot 10^{-6}$ Дж; $Q = \nu C_p \Delta T = \left(\frac{7}{2}\right)\nu R\Delta T = 6{,}99\cdot 10^{-6}$ Дж.

2.12. Газ находится в вертикально расположенном цилиндре с площадью дна s = 10 см^2. Поршень, закрывающий цилиндр, имеет массу 10 кг и может перемещаться в цилиндре без трения. Начальный объем газа 8 л, температура 10^o C. Какое количество тепла необходимо затратить для того, чтобы нагреть газ при этих условиях на 25^o C, если известно, что теплоемкость C_V этой массы газа, измеренная при закрепленном в начальном положении поршне, оказалась равной 25 Дж/град? Давление наружного воздуха не учитывать.

Ответ: $Q = \left(C_V + \dfrac{mg}{S}\dfrac{V_0}{T_0}\right)\Delta T = 694{,}25$ Дж.

2.13. В сосуде под поршнем находится m_0 = 10 г азота. 1) Какое количество тепла Q надо затратить, чтобы нагреть азот на $\Delta t^o = 20^o$C? 2) На сколько при этом поднимается поршень? Масса поршня m = 1 кг, площадь поперечного сечения s = 10 см^2. Давление над поршнем равно 1 атм.

Ответ: $Q = \nu C_p \Delta T = 20785$ Дж; $h = \dfrac{\nu R\Delta T}{sp_0 + mg} = 0{,}54$ м.

2.14. 2 л азота находятся под давлением 10^5 Н/м^2. Какое количество тепла надо сообщить азоту, чтобы при p = const объем увеличить вдвое?
Ответ: $Q = pC_pV/R$ = 700 Дж.

2.15. 2 л азота находятся под давлением 10^5 Н/м^2. Какое количество тепла надо сообщить азоту, чтобы при V = const давление увеличить вдвое?
Ответ: $Q = C_VVp/R$= 500 Дж.

2.16. Найти молярную теплоемкость идеального газа при политропическом процессе pV^n = const, если показатель адиабаты газа равен γ. При каких значениях показателя политропы n теплоемкость газа будет отрицательной?

Ответ: $C = P(n - \gamma)/(n - 1)(\gamma - 1)$; $C < 0$ при $1 < n < \gamma$.

2.17. Имеется идеальный газ, молярная теплоемкость C_V которого известна. Найти молярную теплоемкость этого газа как функцию его объема V, если газ совершает процесс по закону:

а) $T = T_0e^{\alpha V}$; б) $p = p_0e^{\alpha V}$, где T_0, p_0, α - постоянные.

Ответ: а) $C = C_V + R/\alpha V$; б) $C = C_V + R/(1 + \alpha V)$.

2.18. Один моль идеального газа, теплоемкость которого при постоянном давлении C_p, совершает процесс по закону $p = p_0 + \alpha/V$, где p_0, α - постоянные. Найти:

а) теплоемкость газа как функцию его объема V;

б) сообщенное газу тепло при его расширении от V_1 до V_2.

Ответ: а) $C = \gamma R/(\gamma - 1) + \alpha R/p_0 V$; б) $Q = p_0(V_2 - V_1)C_P/R + \alpha \ln(V_2/V_1)$.

2.19. Найти уравнение процесса (в переменных T, V), при котором молярная теплоемкость идеального газа изменяется по закону:

а) $C = C_V + \alpha T;$

б) $C = C_V + \beta V;$

в) $C = C_V + ap$.

Здесь α, β, a - постоянные.

Ответ: а) $Ve^{-\alpha T/R} = \text{const}$; б) $Te^{R/\beta V} = \text{const}$; в) $V - aT = \text{const}$.

2.20. Один моль кислорода, находившегося при температуре T_0= 290 K, адиабатически сжали так, что его давление возросло в η = 10 раз. Найти:

а) температуру газа после сжатия;

б) работу, которая была совершена над газом.

Ответ: а) $T = T_0\eta^{(\gamma-1)/\gamma}$ = 560 K; б) $A' = RT_0(\eta^{\gamma-1/\gamma} - 1)/(\gamma - 1)$ = 5.6 кДж.

2.21. Некоторую массу азота сжали в η = 5 раз (по объему) один раз адиабатически, другой раз изотермически. Начальное состояние газа в обоих случаях одинаково. Найти отношение соответствующих работ, затраченных на сжатие.

Ответ: при адиабатическом сжатии работа больше в $n = (\eta^{\gamma-1} - 1)/(\gamma - 1)\ln\eta$ = 1,4 раза.

2.22. Объем моля идеального газа с показателем адиабаты γ изменяют по закону $V = a/T$, где a - постоянная. Найти количество тепла, полученное газом в этом процессе, если его температура испытала приращение ΔT.

Ответ: $\Delta Q = R\Delta T(2 - \gamma)/(\gamma - 1)$.

2.23. Найти работу, совершаемую одним молем ван-дер-ваальсовского газа при изотермическом расширении его объема от V_1 до V_2 при температуре T.

Ответ: $A = RT\cdot\ln[(V_2 - b)/(V_1 - b)] + a/V_2 - a/V_1$.

2.24. Один моль кислорода расширили от объема $V_1 = 1$ л: до $V_2 = 5$ л при постоянной температуре $T = 280$ K. Вычислить количество поглощенного газом тепла. Газ считать ван-дер-ваальсовским.

Ответ: $Q = RT \cdot \ln[(V_2 - b)/(V_1 - b)] = 3.8$ кДж.

2.25. Найти для ван-дер-ваальсовского газа уравнение адиабаты в переменных (T, V), если его теплоемкость при постоянном объеме равна C_V.

Ответ: $T(V - b)^{R/Cv} = \text{const}$.

2.26. Определить для ван-дер-ваальсовского газа разность молярных теплоемкостей $C_p - C_V$.

Ответ: $C_p - C_V = R/[1 - 2a(V - b)^2/RTV^3]$.

2.27. Показать, что между адиабатической и изотермической сжимаемостями $\chi_{ad} = -(1/V)\cdot(\partial V/\partial p)_S$, $\chi_T = -(1/V)\cdot(\partial V/\partial p)_T$, существует соотношение: $\chi_{ad} = \chi_T/\gamma$, где $\gamma = C_p/C_V$.

2.28. Показать, что если уравнение состояния имеет вид $p = p(T, V)$, то справедливо соотношение: $p\alpha_p = K\alpha_V$, где

$\alpha_p = (\partial p/\partial T)_V/p$ - тепловой коэффициент давления при постоянном объеме,

$\alpha_V = (\partial V/\partial T)_p/V$ - коэффициент теплового расширения при постоянном давлении,

$K = -V(\partial p/\partial V)_T$ - изотермический модуль упругости.

2.29. В цилиндре, закрытом с обоих концов и наполненном воздухом, находится поршень, разделяющий пространство в цилиндре на две равные части. Давление воздуха по обе стороны поршня равно $p_0 = 10^5$ Па. Поршень начинает совершать малые колебания, причем процесс в газе считаем адиабатическим. Масса поршня $m = 1{,}5$ кг, расстояние от стенки до поршня $l = 20$ см, площадь поршня $S = 100$ см^2. Трением пренебрегаем. Определить период колебаний поршня.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{ml/2\gamma p_0 S} = 0{,}05$ с.

2.30. Моль идеального газа находится в неограниченном вертикальном цилиндре, помещенном в однородное поле тяжести. Найти теплоемкость газа.

Ответ: $C = C_V + R = C_p$.

2.31. Рассматривая воздух как идеальный газ, показать, что при нагревании воздуха, находящегося в комнате, его внутренняя энергия не меняется, если только внешнее давление остается постоянным.

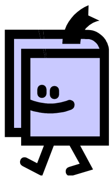
Ответ: результат следует из формулы $U = C_V PV/R$.

2.32. С какой высоты упал медный шар, если при столкновении с почвой его температура повысилась с 20°С до 23°С? Считать, что выделившееся в результате столкновения количество теплоты распределилось между медным шаром и почвой в соотношении 1**:**2. Сопротивлением воздуха пренебречь. $C_м$ = 390 Дж/(кг·К).

Ответ: $h = 3C_м\Delta T/g$ = 358 м.

2.33. Внутренняя энергия теплового излучения в замкнутой полости с объемом V определяется выражением $U = Vu$, где плотность энергии $u = aT^4$(постоянная $a > 0$), а давление излучения определяется уравнением состояния $p = u/3$. Найти уравнение адиабатического процесса.

Ответ: $pV^{4/3}$ = const.



2.4. Вопросы для самопроверки

1. Какой физический смысл первого начала термодинамики?
2. Что общего и в чем отличие между работой и теплотой?
3. Как определяется работа, совершаемая однородным, изотропным веществом?
4. Зависит ли теплоемкость от процесса? Может ли быть теплоемкость отрицательной?
5. Как связаны молярная и удельная теплоемкости?
6. Как связаны C_V смеси идеальных газов с C_{Vi}- теплоемкостями ее компонент?
7. Какой вид имеет уравнение Майера для смеси идеальных газов?

3. Второе начало термодинамики, энтропия

3.1. Основные законы и формулы

К. п. д. тепловой машины

$$\eta = A/Q_1 = 1 - Q_2/Q_1,$$

где Q_1 - тепло, получаемое рабочим телом; Q_2 - отдаваемое тепло.

К.п.д. цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1, T_2- температуры нагревателя и холодильника.

Неравенство Клаузиуса

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0,$$

где δQ - элементарное тепло, полученное системой.

Приращение энтропии системы

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}.$$

Основное уравнение термодинамики для обратимых процессов

$$TdS = dU + pdV.$$

Свободная энергия

$$F = U - TS,\ A_T = -\Delta F.$$

Связь между энтропией и статистическим весом Ω (термодинамической вероятностью)

$$S = k \cdot \ln\Omega,$$

где k - постоянная Больцмана.

3.2. Примеры решения задач

3-1. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермы, политропы и адиабаты, причем изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла. Найти к.п.д. такого цикла, если абсолютная температура в его пределах изменяется в n раз.

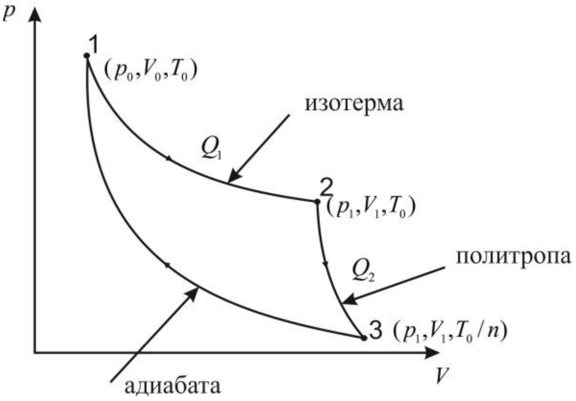


Рисунок к задаче 3-1.

Решение. $Q_1 = \int\limits_{V_0}^{V_1} pdV = \int\limits_{V_0}^{V_1} \frac{RT_0}{V} dV =$

$= RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0}$. Для политропы $pV^{\alpha} = const$ или $TV^{\alpha-1} = const$. Тогда для участка (2-3) $T_0 V_1^{\alpha-1} = \frac{T_0}{n} V_2^{\alpha-1}$, $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\alpha-1} = n$, $V_1 = \frac{V_2}{n^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.

Для участка (1-3) $T_0 V_0^{\gamma-1} = \frac{T_0}{n} V_2^{\gamma-1}$, тогда $V_0 = \frac{V_2}{n^{\frac{1}{\gamma-1}}}$. Следовательно, $\frac{V_1}{V_0} = n^{\frac{\alpha-\gamma}{(\gamma-1)(\alpha-1)}}$.

$Q_1 = RT_0 \frac{(\alpha-\gamma)}{(\gamma-1)(\alpha-1)} \ln n$; $Q_2 = C(T_0 - T_0/n) = RT_0 \frac{(\alpha-\gamma)}{(\alpha-1)(\gamma-1)} \frac{n-1}{n}$, где C – молярная теплоемкость идеального газа при политропическом процессе. Тогда

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{n-1}{n \ln n}.$$

Ответ: $\eta = 1 - \frac{n-1}{n \ln n}$.

3-2. В цикле Карно разность энтропии между двумя адиабатами равна 4200Дж/К. Разность температур ΔT между изотермами в этом цикле 100 К. Какая работа совершается за цикл?

Решение. Работа, совершаемая за цикл $A = Q_1 - Q_2$, где Q_1 - полученное тепло, Q_2 - отданное. Изменение энтропии при переходе с одной адиабаты на другую $\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$, где T_1 - температура нагревателя, T_2 - температура холодильника.

$$A = \Delta S \cdot T_1 - \Delta S \cdot T_2 = \Delta S (T_1 - T_2) = \Delta S \cdot \Delta T = 4{,}21 \frac{\text{кДж}}{\text{К}} \cdot 100\text{К} = 420\ \text{кДж}.$$

Ответ: A = 420 кДж.

3-3. 1 кг льда при начальной температуре $t_1 = -20^{\circ}\text{C}$ путем нагревания переводится в пар при температуре 100°C. Найти приращение энтропии.

Решение. По определению энтропии $\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$. Процесс перехода льда в пар состоит из следующих этапов: 1) нагревания льда от T_1 до температуры T_2; 2) плавления льда при T_2; 3) нагревания полученной массы воды от T_2 до температуры кипения T_3 и 4) испарения воды при $T = T_3$. В результате получим $\Delta S = \sum \Delta S_i$, где ΔS_i - приращение энтропии на каждом этапе.

1) При нагревании льда на dT подводится тепло $dQ = mc_1 dT$, где c_1 - удельная теплоемкость льда. По определению ΔS имеем

$$\Delta S_1 = mc_1 \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

2) Для плавления льда (при $T = T_2$) надо подвести тепло $Q = m\lambda$, где λ - удельная теплота плавления. Для ΔS_2 получим

$$\Delta S_2 = m\lambda \frac{1}{T_2}.$$

3) При нагревании воды (ее удельная теплоемкость c_2) энтропия повышается (как на первом этапе) на

$$\Delta S_3 = mc_2 \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

4) Испарение при $T = T_3$ сопровождается повышением энтропии (как на втором этапе) на

$$\Delta S_4 = mr \frac{1}{T_3},$$

где r - удельная теплота парообразования. В результате получим

$$\Delta S = m\left(c_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln \frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3} \right).$$

Подставляя значения m=1кг, $c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), T_1=253К, T_2=273К, T_3 =373К, $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, $c_2 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, получим $\Delta S = 8{,}8$ кДж/К.

Ответ: $\Delta S = 8{,}8$ кДж/К.

3.3. Задачи для самоконтроля

3.1. У тепловой машины, работающей по циклу Карно, температура нагревателя в n = 1,6 раза больше температуры холодильника. За один цикл машина производит работу A = 12 кДж. Какая работа за цикл затрачивается на изотермическое сжатие вещества? (Рабочее вещество - идеальный газ.)

Ответ: $A' = A/(n - 1) = 20$ кДж.

3.2. В каком случае к.п.д. цикла Карно повысится больше: при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину?

Ответ: при уменьшении температуры холодильника T_2.

3.3. Водород совершает цикл Карно. Найти к.п.д. цикла, если при адиабатическом расширении:

а) объем газа увеличивается в $n = 2{,}0$ раза;

б) давление уменьшается в $n = 2{,}0$ раза.

Ответ: а) $\eta = 1 - n^{1-\gamma} = 0{,}25$; б) $\eta = 1 - n^{1/(\gamma-1)} = 0{,}18$.

3.4. Холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, должна поддерживать в своей камере температуру —10°С при температуре окружающей среды 20°С. Какую работу надо совершить над рабочим веществом машины, чтобы отвести от ее камеры $Q_2 = 140$ кДж тепла?

Ответ: $A' = Q_2(T_1/T_2 - 1) = 16$ кДж.

3.5. Тепловую машину, работающую по циклу Карно с к.п.д. η 10% используют при тех же тепловых резервуарах как холодильную машину. Найти ее холодильный коэффициент ε.

Ответ: $\varepsilon = (1 - \eta)/\eta = 9$.

3.6. Найти к.п.д. цикла, состоящего из двух изобар и двух адиабат, если в пределах цикла давление изменяется в nраз. Рабочее вещество идеальный газ с показателем адиабаты γ.

Ответ: $\eta = 1 - n^{-(\gamma - 1)/\gamma}$.

3.7. Идеальный газ с показателем адиабаты γ, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найти к.п.д. такого цикла, если температура T газа возрастает в n раз как при изохорическом нагреве, так и при изобарическом расширении.

Ответ: $\eta = 1 - (n + \gamma)/(1 + \gamma n)$.

3.8. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из:

а) изохоры, адиабаты и изотермы;

б) изобары, адиабаты и изотермы,

причем изотермический процесс происходит при минимальной температуре цикла. Найти к.п.д. каждого цикла, если температура в его пределах изменяется в n раз.

Ответ: в обоих случаях $\eta = 1 - \ln n/(n - 1)$.

3.9. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает прямой цикл, состоящий из адиабаты, изобары и изохоры. Найти к.п.д. цикла, если при адиабатическом процессе объем идеального газа:

а) увеличивается в n раз;

б) уменьшается в n раз.

Ответ: а) $\eta = 1 - \gamma(n - 1)/(n^{\gamma} - 1)$; б) $\eta = 1 - (n^{\gamma} - 1)/\gamma(n - 1)n^{\gamma-1}$.

3.10. Воспользовавшись неравенством Клаузиуса, показать, что к.п.д. всех циклов, у которых одинакова максимальная температура T_{max} и одинакова минимальная температура T_{min}, меньше, чем у цикла Карно при T_{max} и T_{min}. *Указание*: Учесть, что неравенство $\int\delta Q_1/T_1 - \int\delta Q'_2/T_2 \le 0$ только усиливается при замене T_1 на T_{max} и T_2 на T_{min}.

3.11. Какую максимальную работу может произвести тепловая машина, если в качестве нагревателя используется кусок железа массы m = 100 кг с начальной температурой T_1 =1500 К. а в качестве холодильника вода океана с температурой T_2 = 285 К?

Ответ: $A_{max} = mc[T_1 - T_2 - T_2 \cdot \ln(T_1/T_2)]$ = 34 МДж, где c =460 Дж/кг·К- удельная теплоемкость железа.

3.12. В качестве основных переменных, характеризующих состояние тела, можно принять его температуру и энтропию. Изобразить графически цикл Карно на диаграмме, откладывая по оси абсцисс энтропию, а по оси ординат температуру. Вычислить с помощью этого графика к.п.д. цикла.

3.13. Найти изменения энтропии моля идеального газа при изохорическом, изотермическом и изобарическом процессах.

3.14. Найти изменение энтропии при переходе 80 г кислорода от объема 10 л при температуре 80° С к объему в 40 л при температуре 300° С.

Ответ: $\Delta S = \nu C_p \ln\dfrac{V_2}{V_1} + \nu C_V \ln\dfrac{T_2 V_1}{V_2 T_1} = 54{,}06\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

3.15. Один кубический метр воздуха, находящегося при температуре 0°С и давлении 19,6 Н/см^2, изотермически расширяется от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение энтропии при этом процессе.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{p_0 V_0}{T_0}\int\limits_{V_1}^{2V_1}\dfrac{dV}{V} = \dfrac{p_0 V_0}{T_0}\ln 2 = 497{,}5\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

3.16. Доказать, что энтропия v молей идеального газа может быть представлена в виде: $S = v[c_V \ln T + R\ln(V/v) + \mathrm{const}]$, где аддитивная постоянная в скобках не зависит от числа частиц газа.

3.17. В двух сосудах одного и того же объема находятся различные идеальные газы. Масса газа в первом сосуде m_1 во втором – m_2, давление газов и температуры их одинаковы. Сосуды соединили друг с другом, и начался процесс диффузии. Определить суммарное изменение ΔS энтропии рассматриваемой системы, если относительная молекулярная масса первого газа μ_1, а второго μ_2.

Ответ: $\Delta S = R\ln 2(m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)$.

3.18. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен поршнем пренебрежимо малой массы на две равные части. По одну сторону поршня находится идеальный газ с массой m, относительной молекулярной массой μ и молярными теплоемкостями C_p и C_V, не зависящими от температуры, а по другую сторону поршня создан высокий вакуум. Начальные температура и давление газа T_0 и p_0. Поршень отпускают, и он, свободно двигаясь, дает возможность газу заполнить весь объем цилиндра. После этого, постепенно увеличивая давление на поршень, медленно доводят объем газа до первоначальной величины. Найти изменение внутренней энергии н энтропии газа при таком процессе.

Ответ: $\Delta U = U - U_0 = (m/\eta)\cdot C_V T_0(2^{\gamma-1} - 1)$; $\Delta S = S - S_0 = (m/\mu)\cdot C_V(\gamma - 1)\ln 2$.

3.19. Зная зависимость свободной энергии от температуры и объема $F(T, V)$, показать, что давление $p = -(\partial F/\partial V)_T$ и энтропия $S = -(\partial F/\partial T)_V$.

3.20. Наряду с внутренней энергией U и свободной энергией F в термодинамике широко используют функции $H = U + pV$ – энтальпию и $\Phi = F + pV$ – свободную энергию Гиббса. Доказать, что эти функции удовлетворяют соотношениям:

$$dU = TdS - pdV, \qquad dF = -SdT - pdV,$$

$$d\Phi = -SdT + Vdp, \qquad dH = TdS + Vdp,$$

$$T = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_V, \qquad T = \left.\frac{\partial H}{\partial S}\right|_p, \qquad S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V,$$

$$S = -\left.\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right|_p, \qquad p = -\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_S, \qquad p = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T,$$

$$V = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right|_T, \qquad V = \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_S.$$

3.21. Доказать соотношения Максвелла:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_S = -\left.\frac{\partial p}{\partial S}\right|_V, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_S = \left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_p,$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T = \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V, \quad \left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_T = -\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p.$$

3.22. В чем ошибочность следующего рассуждения? Элементарное количество тепла dQ, полученное физически однородным телом при квазистатическом процессе, равно

$$dQ = dU + pdV = dH - Vdp,$$

или $dQ = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right]dp.$

Отсюда $\frac{\partial Q}{\partial T} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V,$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial p \partial T} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial T}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial T \partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial T \partial p} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Приравнивая оба выражения, получим $(\partial V/\partial T)_p = 0$. Отсюда следует, что тепловое расширение тел невозможно.

3.23. Показать, что внутренняя энергия вещества с уравнением состояния в форме $p = f(V)T$ не зависит от объема.

3.24. Внутренняя энергия единицы объема является функцией только от T, а уравнение состояния газа имеет вид $p=u(T)/3$.Определить функциональную форму $u(T)$.

Ответ: $u(T) = \text{const}T^4$ - (фотоновый газ)

3.25. Для идеального электронного газа имеет место соотношение:

$pV = {}^2/_3U$. Найти для этого газа уравнение адиабаты: а) в переменных (pV);

б) в переменных (V, T).

Ответ: а) $pV^{5/3} = \text{const}$; б) $TV^{2/3} = \text{const}$.

3.26. Показать, что для веществ, у которых давление является линейной функцией температуры T, теплоемкость Cv не зависит от объема.

3.27. Используя соотношения Максвелла найти выражение для энтропии моля газа Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $S = R\ln(V - b) + \int \frac{CV(T)}{T} dT + \text{const}.$

3.28. Вычислить плотность энтропии S поля теплового излучения (см. условие задачи 2.33.) .

Ответ: $S = {}^4/_3 aT^3$+const.

3.29. N атомов газообразного гелия находятся при комнатной температуре в кубическом сосуде объемом 1,0 см^3. (Среднее время пролета атомов гелия расстояния порядка размера сосуда $\tau \sim 10^{-5}$ с). Найти:

а) вероятность того, что все атомы соберутся в одной половине сосуда;

б) примерное числовое значение N, при котором это событие можно ожидать на протяжении $t = 10^{10}$ лет (возраст Вселенной).

Ответ: а) $p = \left(\frac{1}{2}\right)^N$; б) $N = 1g(t/\tau)/1g2 = 80$.

3.30. Найти статистический вес наиболее вероятного распределения $N = 10$ одинаковых молекул по двум одинаковым половинам сосуда. Определить вероятность такого распределения.

Ответ: $\Omega_{вер} = N!/[(N/2)!]^2 = 252$, $p_{N/2} = \Omega_{вер}/2^N = 24{,}6\%$.

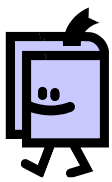
3.31. Какое количество тепла необходимо сообщить макроскопической системе, находящейся при температуре $T = 290$ K, чтобы при неизменном объеме ее статистический вес увеличился на $\Delta\eta = 0{,}1\%$?

Ответ: $\delta Q = kT\Delta\eta = 4 \cdot 10^{-23}$ Дж.

3.32. Один моль идеального газа, состоящего из одноатомных молекул, находится в сосуде при температуре $T_0 = 300$ K. Как и во сколько раз изменится статистический вес этой системы (газа), если ее нагреть изохорически на $\Delta T = 1{,}0$ K?

Ответ: Увеличится в $\Omega/\Omega_0 = (1 + \Delta T/T_0)^{i\,N\,a\,/\,2} = 10^{1{,}31 \cdot 10\hat{}21}$ раз.

3.4. Вопросы для самопроверки



1. Принцип Клаузиуса.
2. Принцип Томсона (Кельвина).
3. Какова взаимосвязь между принципами Клаузиуса и Томсона?
4. Что такое вечный двигатель второго рода?
5. Что такое тройная точка воды?
6. Как определяется абсолютная температурная шкала?

7. Как определяется термодинамическая энтропия, и какими свойствами она обладает?
8. Какие термодинамические потенциалы вам известны.
9. Как формулируется принцип Ля-Шателье.
10. Как определяется энтропия в статистической физике?
11. В чем суть «парадокса Гиббса»?

4. Молекулярно-кинетическая теория, статистические распределения

4.1. Основные законы и формулы

Уравнение состояния идеального газа:

$$p = nkT\,,$$

где p - давление: V – объем; T– абсолютная температура, n –концентрация, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

В состоянии термодинамического равновесия на одну молекулу приходится в среднем энергия теплового движения, равная

$$<\varepsilon> = (n_{пост} + n_{вр} + 2n_{колеб})\frac{kT}{2} = i\frac{kT}{2}\,,$$

где $n_{пост}, n_{вр}, n_{колеб}$ – число поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы молекулы.

В состоянии термодинамического равновесия функция распределения Максвелла

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\,,$$

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,,$$

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,,$$

дает распределение молекул по значениям проекции скорости v_x, скорости $\vec{v}$, абсолютной величины скорости v. Здесь m – масса молекулы.

Распределение молекул $n(\vec{r})$ в пространстве при наличии потенциального силового поля дается распределением Больцмана

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-\varepsilon_p(\vec{r})/kT},$$

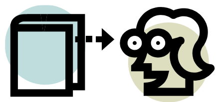
где $\varepsilon_p(\vec{r})$ - потенциальная энергия молекулы, n_0 - концентрация молекул в области $\varepsilon_p(\vec{r}) = 0$.

Распределение Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна

$$n_i = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{T}\right) \pm 1},$$

где μ - химический потенциал газа. Знак «+» определяет статистику Ферми-Дирака, «-» – Бозе-Эйнштейна.

4.2. Примеры решения задач



4-1. Для величины x функция распределения вероятности имеет вид $f = Ax(a-x)$ в интервале $0 < x < a$ и $f = 0$ вне этого интервала. При заданной величине интервала (a) найти:

1. Нормировочную константу
2. Наиболее вероятное значение и соответствующее ему значение
3. Среднее значение

Решение. Условие нормировки f на 1 дает

$$\int_0^a Ax(a-x)dx = \frac{1}{6}Aa^3 = 1,\ A = \frac{6}{a^3}.$$

1. Наиболее вероятное значение x_m соответствует максимуму $f(x)$, т.е. $f'(x_m) = 0$. $A(a - 2x_m) = 0,\ x_m = \frac{a}{2},\ f(x_m) = \frac{6}{a^3}\frac{a^2}{4} = \frac{3}{2a}.$

2. $\bar{x} = \int_0^a xf(x)dx = \frac{6}{a^3}\int_0^a x^2(a-x)dx = \frac{6}{a^3}\frac{a^4}{12} = \frac{a}{2}$;

$$\overline{x^2} = \int_0^a x^2 f(x)dx = \frac{6}{a^3}\int_0^a x^3(a-x)dx = \frac{6}{a^3}\frac{a^5}{20} = 0{,}3a^2.$$

4-2. Газ из молекул с массой *m* нагрет до температуры *T*. Найти вероятность того, что измеряя скорость молекулы, найдем значение ее компоненты v_z в интервале $(v_z, v_z + dv_z)$, а значение модуля перпендикулярной составляющей в интервале $(v_\perp, v_\perp + dv_\perp)$.

Решение. Введем в пространстве скоростей цилиндрическую систему координат, в которой $v^2 = v_z^2 + v_\perp^2$ и $dv_x dv_y dv_z$ заменится на $dv_z \cdot 2\pi v_\perp \cdot dv_\perp$. В этой системе распределение Максвелла приобретает вид

$$d\omega(v_z, v_\perp) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-m(v_z^2 + v_\perp^2)/(2kT)\right] \cdot 2\pi v_\perp dv_\perp dv_z .$$

4-3. Получить уравнение состояния идеального газа из распределения Максвелла.

Решение. Выделим элемент стенки сосуда площадью ds. Направим ось *z* из газа по нормали к стенке. За время dt к стенке долетят все атомы со скоростью v_z, лежащей в интервале $(v_z, v_z + dv_z)$, находящиеся в столбе газа высотой $v_z dt$. Их количество равно $dN(v_z) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left[-mv_z^2/(2kT)\right] dv_z \cdot v_z ds \cdot dt$, где n – концентрация атомов. Изменение импульса при ударении о стенку каждой частицы равно $-2mv_z$. Изменение импульса потока частиц, отразившихся от стенки за время dt равно

$$d\Phi_z = -n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^\infty 2mv_z^2 \exp\left[-mv_z^2/(2kT)\right] dv_z \cdot ds \cdot dt .$$

Учитывая $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}$, получим $d\Phi_z = -nkT \cdot ds \cdot dt$.

Сила, действующая на налетающий поток, $F = \frac{d\Phi_z}{dt} = -nkT \cdot ds$, по третьему закону Ньютона сила, действующая на стенку, равна $F_\partial = nkT \cdot ds$, а давление $p = nkT,\, n = \frac{\nu N_A}{V}$. ν - число молей в объеме, N_A - число Авогадро. Тогда $p = \frac{\nu N_A}{V} kT$ или $pV = \nu RT$, $R = N_A k$.

4.3. Задачи для самоконтроля

4.1. Найти энергию полностью вырожденного ферми-газа (электронов без учета кулоновского взаимодействия), занимающего объем V. Число электронов N.

<u>Ответ:</u> $E = \dfrac{3(3\pi^2)^{2/3}}{10} \cdot \dfrac{h_1^2}{m} \cdot \left(\dfrac{N}{V}\right)^{2/3} \cdot N$, где $h_1 = \dfrac{h}{2\pi}$.

4.2. Получить уравнение состояния $p = p(V)$ полностью вырожденного ферми-газа (см. задачу 4.1).

<u>Ответ:</u> $p = \dfrac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \cdot \dfrac{h_1^2}{m} \cdot \left(\dfrac{N}{V}\right)^{5/3}$.

4.3. Найти энергию полностью вырожденного ультрарелятивистского ($\varepsilon = c \cdot p$) электронного газа.

<u>Ответ:</u> $E = \dfrac{3(3\pi^2)^{1/3}}{4} \cdot h_1 c N \cdot \left(\dfrac{N}{V}\right)^{1/3}$.

4.4. Получить уравнение состояния $p = p(V)$ полностью вырожденного ультрарелятивистского электронного газа.

<u>Ответ:</u> $p = \dfrac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \cdot h_1 \cdot c \left(\dfrac{N}{V}\right)^{4/3}$.

4.5. Найти отношение средних квадратичных скоростей молекул гелия и азота при одинаковых температурах.

<u>Ответ:</u> $\dfrac{v_{He}}{v_{N_2}} = \sqrt{\dfrac{m_{N_2}}{m_{He}}} = \sqrt{7} \approx 2{,}65$.

4.6. Определить температуру смеси CO_2 и H_2, если разность средних кинетических энергий на одну молекулу того и другого газа равна $2{,}07 \cdot 10^{-14}$ эрг. Газ считать идеальным.

<u>Ответ:</u> $T = \dfrac{2 \cdot \Delta W_k}{k} = 300$К.

4.7. Найти число ударов в единицу времени, приходящееся на единицу площади стенки, в электронном газе при $T = 0$.

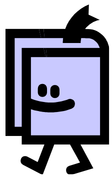
Ответ: $\nu = \frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{16} \frac{\pi}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{4/3}$.

4.8. Найти число ударов в единицу времени, приходящееся на единицу площади стенки, в ультрарелятивистском ($\varepsilon = c \cdot p; v \approx c$) электронном газе при $T = 0$.

Ответ: $\nu = \frac{c}{4} \frac{N}{V}$.

4.9. Найти химический потенциал μ, включающий в себя энергию покоя частицы, релятивистского ($\varepsilon^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$) электронного газа при $T = 0$.

Ответ: $\mu^2 = m^2 c^4 + (3\pi^2)^{2/3} (\pi c)^2 \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$.



4.4. Вопросы для самопроверки

1. Как из уравнения Менделеева-Клапейрона получить зависимость давления от объемной концентрации газа?
2. Как давление идеального газа зависит от средней энергии молекул газа?
3. Какие степени свободы определяют давление, а какие энергию газа?
4. Какие ограничения вносит температура на применение закона равного распределения энергии по степеням свободы?
5. В чем смысл микроканонического распределения и для каких систем оно применяется?
6. Что такое каноническое распределение?
7. Что такое большое каноническое распределение?
8. Как из большого канонического распределения получить распределения Максвелла и Больцмана?
9. Как изменяется с повышением температуры площадь под графиком $F(v)$, положение максимума и его высота?
10. Как изменятся эти характеристики при увеличении молекулярной массы?
11. Как качественно изменится давление идеального газа, если учесть квантовые поправки: а) для ферми-газа, б) для бозе-газа?
12. Как ведут себя бозе-ферми-газы при $T \to 0$?

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики - т. 1. М.: Наука, 1977, 416с.
2. Сивухин Д.В. Курс общей физики - т. 2. М.: Наука, 1979, 552с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика, М.: Наука, 1987, 421с.
4. Кубо Р. Термодинамика, М.: Мир, 1970.
5. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981.
6. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика. Издание четвертое, переработанное и дополненное. М.: Наука, 1976. 207 с.

Приложения

1. Вычисление некоторых интегралов

1) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ (интеграл Пуассона),

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt .$$

Имеем тождество

$$I^2 = \frac{4}{\alpha} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt \int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{4}{\alpha} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(u^2+t^2)} dtdu .$$

Вводя полярные координаты

$$r^2 = u^2 + t^2, \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{u}{t}, \ dtdu = rdrd\varphi,$$

имеем

$$I^2 = \frac{4}{\alpha} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2} rdrd\varphi = \frac{\pi}{\alpha},$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} .$$

2) $I_{2n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx .$

Дифференцируя I по параметру α, находим

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} , \quad I_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^4 dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} ,$$

$$I_{2n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)(2n-2)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}} .$$

3) $I_{2n+1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n+1} dx,$

$$I_0 = \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x dx = \frac{1}{2\alpha}.$$

Дифференцируя I_1 по параметру α, получаем

$$I_{2n+1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n+1} dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}.$$

2. Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2)
Постоянная Авогадро	N_{A}	$6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль$\cdot$К)
Стандартный объем (молярный объем идеального газа при нормальных условиях)	V_{m}	$22{,}4\cdot10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3{,}00\cdot10^{8}$ м/с
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4)
Постоянная закона смещения Вина	b	$2{,}90\cdot10^{-3}$ м$\cdot$К
Постоянная Планка	h	$6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с
	$\hbar$	$1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж $\cdot$с
Постоянная Ридберга	R	$1{,}10\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Радиус Бора	a	$0{,}529\cdot10^{-10}$ м

Комптоновская длина волны электрона	Λ	$2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_B	$0{,}927 \cdot 10^{-23}$ $А \cdot м^2$
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Атомная единица массы	а.е.м.	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

3. Относительные атомные массы (округленные значения) A_r и порядковые номера Z некоторых элементов

Элемент	Символ	A_r	*Z*	Элемент	Символ	A_r	*Z*
Азот	N	14	7	Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13	Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молибден	Mo	96	42
Барий	Ba	137	56	Натрий	Na	23	11
Ванадий	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водород	H	1	1	Никель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелий	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Железо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сера	S	32	16
Калий	K	39	19	Серебро	Ag	108	47
Кальций	Ca	40	20	Углевод	C	12	6
Кислород	O	16	8	Уран	U	238	92
Магний	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

4. Константы Ван-дер-Ваальса

Имя	**Формула**	**a** ($см^6 \cdot атм$)	**b** ($см^3$)
Азот	N_2	0,00277	0,001747
Кислород	O_2	0,00271	0,001421
Углекислый газ	CO_2	0,00716	0,001905

Задания для самостоятельной работы по курсу «Термодинамика»

Составители

Александра Викторовна **Грезина**
Ирина Владимировна **Никифорова**
Адольф Григорьевич **Панасенко**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23