

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Двумерные динамические системы в приложениях

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 "Математика",
02.03.01 "Математика и компьютерные науки",
01.03.02 "Прикладная математика и информатика",
01.03.03 "Механика и математическое моделирование."

Нижний Новгород
2016

УДК 517.9
ББК 22.1
Д 64

Д 64 Двумерные динамические системы в приложениях. Составители: **Касаткина Ю.А., Митрякова Т.М.** Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 47 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Е.Н. Махрова**

В пособии рассматриваются вопросы, связанные с приложениями двумерных динамических систем к решению задач, возникающих в различных естественно-научных областях. Для полноты изложения, в разработке приводятся сведения из общей теории дифференциальных уравнений, а именно, о классификации неподвижных точек линейных систем на плоскости и о процессе линеаризации нелинейных систем. В пособии подробно описывается решение некоторых прикладных задач, в которых возникают линейные и нелинейные двумерные системы, и приводятся задания для самостоятельной работы студентов.

Предназначается студентам для более углубленного изучения качественной теории дифференциальных уравнений.

УДК 517.9
ББК 22.1

Введение

Данное пособие по своей тематике относится к области применения качественной теории дифференциальных уравнений к решению ряда практических задач и содержит некоторые примеры, позволяющие составить представление о приложениях двумерных непрерывных динамических систем. В качестве таких примеров рассматриваются задачи, в которых динамика процесса моделируется линейными и нелинейными системами второго порядка. Приложение линейной модели в пособии иллюстрируется на примере описания динамики человеческих взаимоотношений. Кроме того, хорошо известно, что математическим описанием дарвиновского принципа борьбы за существование является классическая модель Лотки–Вольтерры, поэтому как пример приложения нелинейных систем, в пособии рассматривается модель конкуренции двух видов „Кролики против овец“. В основу данного учебно-методического пособия легла книга [9].

1 Двумерные потоки

1.1 Примеры

Решения системы $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ могут быть визуализированы как траектории, движущиеся по (x, y) -плоскости. В данном контексте плоскость называется фазовой плоскостью. Первый пример представляет собой анализ фазового портрета системы, которая описывает колебания масс, подвешенных на пружину. Колебания масс описываются линейным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (1)$$

где m - масса, k - жесткость пружины и x - смещение из состояния равновесия (рис. 1). Проанализируем фазовую плоскость простого гармонического осциллятора.

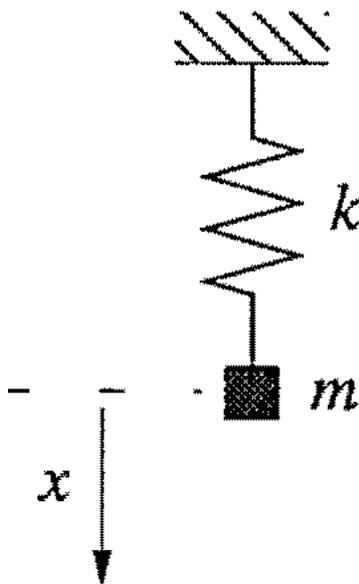


Рис. 1.

Хорошо известно, что уравнение (1) легко решить аналитически и получить ответ в виде комбинации синуса и косинуса. Но это именно то, что делает линейные уравнения особенными. Для нелинейных уравнений обычно невозможно найти аналитическое решение. Мы

хотим описать методы для получения качественной картины решения уравнения (1), фактически не решая его.

Движение в фазовой плоскости определяется векторным полем, которое описывается дифференциальным уравнением (1). Чтобы найти это векторное поле, отметим, что состояние системы характеризуется ее текущим положением x и скоростью v . Если мы знаем значения x и v , то (1) однозначно определяет будущее состояние системы. Поэтому перепишем (1), с точки зрения x и v , следующим образом:

$$\dot{x} = v, \dot{v} = -\frac{k}{m}x. \quad (2)$$

Первое уравнение системы является просто определением скорости, а второе уравнение системы является дифференциальным уравнением (1), переписанным для v . Для упрощения записи положим $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Тогда (2) примет вид

$$\dot{x} = v, \dot{v} = -\omega^2 x. \quad (3)$$

Система (3) ставит в соответствие вектор $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$ каждой точке (x, v) , и поэтому представляет собой векторное поле на фазовой плоскости.

Например, давайте посмотрим как выглядит векторное поле на оси x . Тогда $v = 0$ и $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, -\omega^2 x)$. Следовательно векторы указывают вертикально вниз для положительных x и вертикально вверх для отрицательных x (рис. 2). Поскольку x увеличивается, векторы $(0, -\omega^2 x)$ становятся длиннее. Аналогично, на v -оси, $x = 0$ и $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, 0)$, следовательно, векторы указывает вправо, когда $v > 0$ и влево при $v < 0$. Поскольку мы перемещаемся в фазовом пространстве, векторы изменяют направление как показано на рисунке 2.

Это полезно для визуализации векторного поля в терминах движения воображаемой жидкости. В данном случае, мы представим себе, что жидкость протекает равномерно на фазовой плоскости с локальной скоростью, заданной $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$. Затем, чтобы найти траекторию, начинающуюся в (x_0, v_0) , мы помещаем воображаемую частицу или фазовую точку в (x_0, v_0) и смотрим поток вокруг точки. Поток на рисунке 2 циркулирует вокруг начала координат. Начало координат является особой точкой: фазовая точка, помещенная там, останется неподвижной, потому что $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, 0)$, когда $(x, v) = (0, 0)$; отсюда начало координат является неподвижной точкой. Но фазовая точка, идущая не из начала координат, циркулирует вокруг него и в конечном счете возвращается в свое исходное место. Такие траектории образуют замкнутые орбиты, как показано на рисунке 3. На рисунке 3

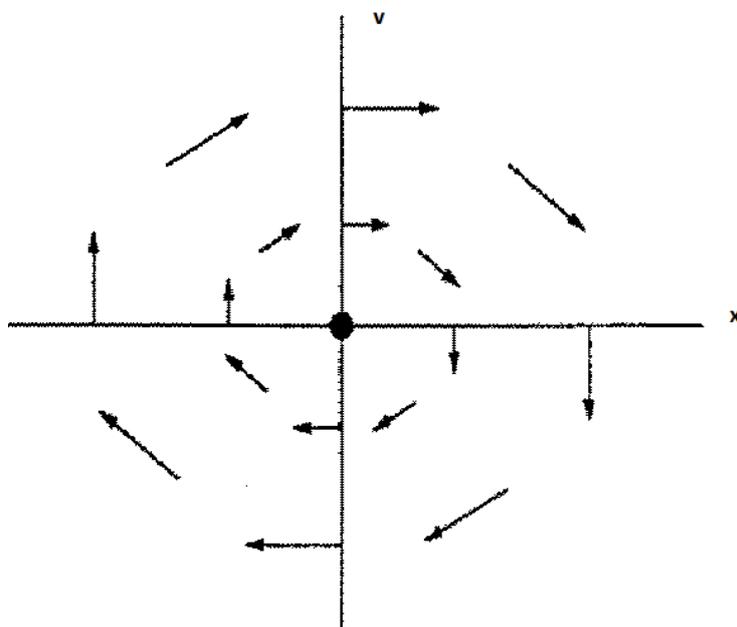


Рис. 2.

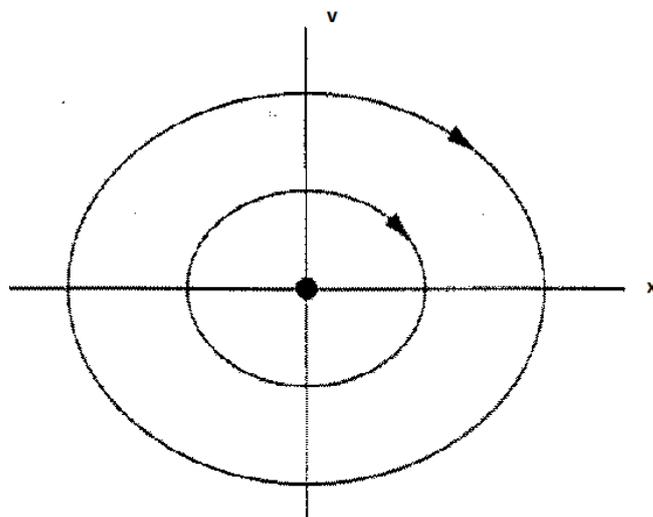


Рис. 3.

изображен фазовый портрет системы, который показывает общую картину траекторий в фазовом пространстве. Какое отношение имеют неподвижные точки и замкнутые орбиты к

проблеме массы на пружине? Ответы очевидны. Неподвижной точке соответствует статическое равновесие системы: масса находится в покое в своем равновесном положении и останется там навсегда, так как пружина расслаблена. У замкнутых орбит есть более интересная интерпретация: они соответствуют периодическим движениям, т.е. колебаниям массы. Чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на некоторые точки на замкнутой орбите (рис. 4, e)). Когда смещение x является наиболее критическим, то скорость v равна нулю; это соответствует одной крайности колебаний, где пружина является наиболее сжатой (рис. 4, a)). В следующий момент, поскольку точка

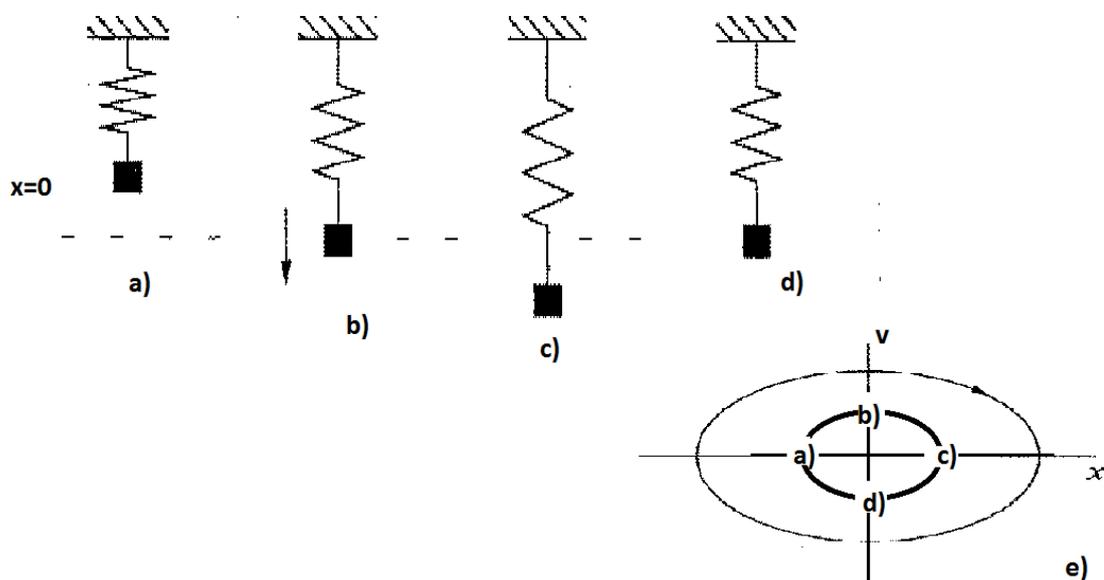


Рис. 4.

фаза движется вдоль орбиты, это происходит в точках, где x увеличился, и v является теперь положительным, массы оттесняют его в сторону положения равновесия. Но к тому времени масса достигла $x = 0$, и имеет большую положительную скорость (рис. 4, b)), поэтому масса проскакивает через $x = 0$. Масса, в конечном итоге, останавливается на другом конце своего колебания, где x является существенным и v опять равно нулю (рис. 4, c)). Затем масса возвращается и, в конечном счете, завершает цикл (рис. 4, d)). У формы замкнутых орбит также есть интересная физическая интерпретация. Орбиты на рис. 3 и рис. 4, e) фактически эллипсы, заданные уравнением $\omega^2 x^2 + v^2 = C$, где $C \geq 0$, C -константа.

Пример 1.1.1 Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Изобразим фазовый портрет при $-\infty < a < +\infty$, показав качественно различные случаи.

Решение 1.1.1 Система имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, получим систему

$$\dot{x} = ax,$$

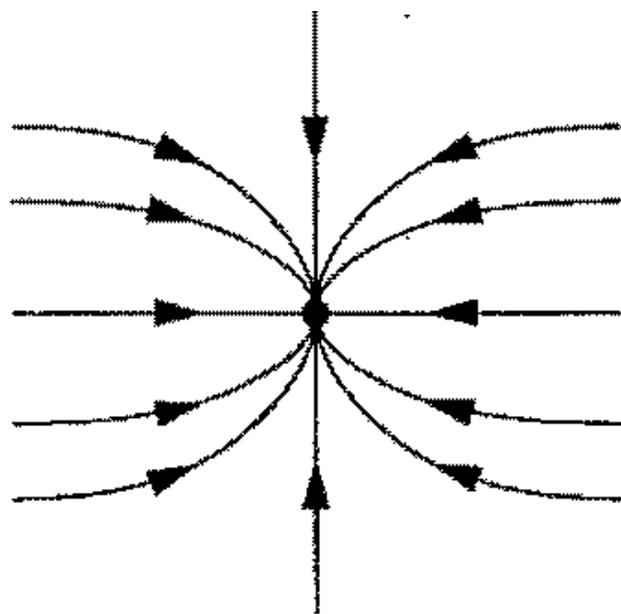
$$\dot{y} = -y,$$

которая показывает, что два уравнения оказываются уравнениями с разделяющимися переменными. В этом простом случае каждое уравнение может быть проинтегрировано отдельно. Решение имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{at},$$

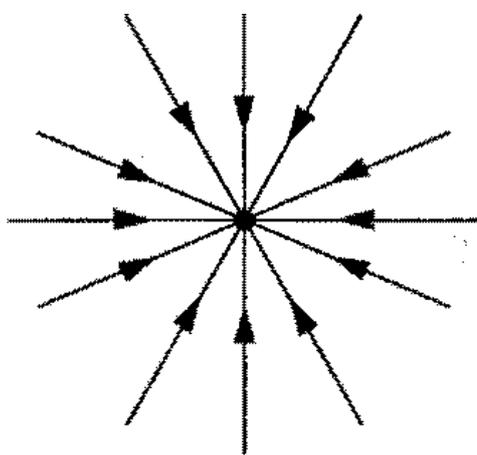
$$y(t) = y_0 e^{-t}.$$

Фазовые портреты для различных значений a показаны на рисунках 5-9. В каждом случае, $y(t)$ экспоненциально затухает. Когда $a < 0$, $x(t)$ также экспоненциально затухает и все траектории приближаются к началу координат при $t \rightarrow +\infty$. Однако, направление подхода зависит от величины a по сравнению с (-1) . Рисунок 5 соответствует случаю $a < -1$, а это означает, что $x(t)$ убывает быстрее, чем $y(t)$. Траектории приближаются к касательной в начале координат, совпадающей с медленным направлением (y -направлением). Это объясняется тем, что когда a критическое, траектория приближается горизонтально к y -оси, так как убывание $x(t)$ почти мгновенно. Следовательно, траектория „застрянет“ где-нибудь вдоль y -оси в направлении начала координат, и поэтому подход является касательным к y -оси. С другой стороны, если мы посмотрим в обратном направлении вдоль траектории ($t \rightarrow -\infty$), то все траектории становятся параллельными более быстрому направлению, которое убывает (x -направлению). На рисунке 6 изображен случай, соответствующий $a = -1$. Из уравнения видно, что $y(t)/x(t) = y_0/x_0 = \text{const}$, и поэтому все траектории представляют собой прямые линии, проходящие через начало координат. Это очень особый случай, который происходит потому, что скорости затухания



$a < -1$

Рис. 5.



$a = -1$

Рис. 6.

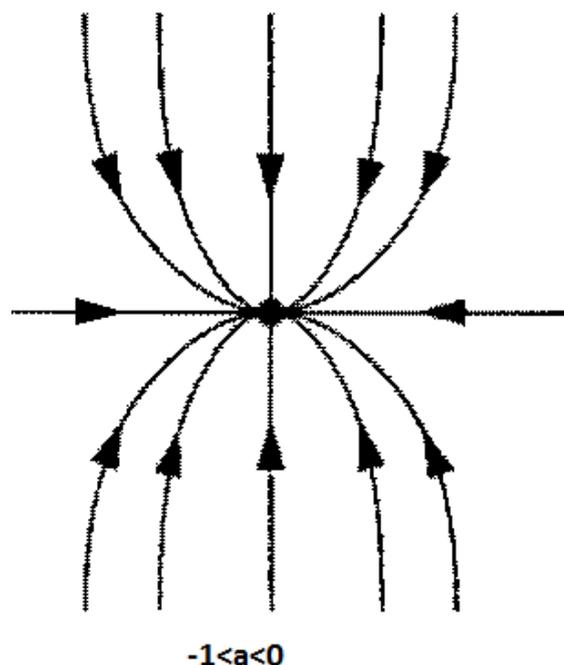


Рис. 7.

в этих двух направлениях точно равны. В этом случае, x^* называется симметрическим узлом или звездой.

Когда $-1 < a < 0$, особая точка снова узел, но теперь траектории приближаются к x^* вдоль x -направления, которое является более медленным распадающимся направлением для этого диапазона (рис. 7). Рассмотрим случай, когда $a = 0$ (рис. 8). Уравнение становится $x(t) \equiv x_0$ и существует целая линия неподвижных точек вдоль оси x . Все траектории приближаются к этим неподвижным точкам вдоль вертикальных линий. Наконец, когда $a > 0$ (рис. 9), x^* становится неустойчивой из-за показательного роста в x -направлении.

Большинство траекторий поворачивают далеко от x^* и направляются в бесконечность. Исключение составляет случай, когда траектория начинается на оси y . В прямом времени, траектории асимптотически приближаются к оси Ox ; в обратном времени, к оси Oy . В этом случае, $x^* = 0$ называется седловой точкой. Ось y является устойчивым многообразием седловой точки x^* , которое определяется как множество начальных условий x_0 , таких, что $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow +\infty$. Аналогично, неустойчивым многообразием x^* является множество начальных условий x_0 , таких, что $x(t) \rightarrow x^*$

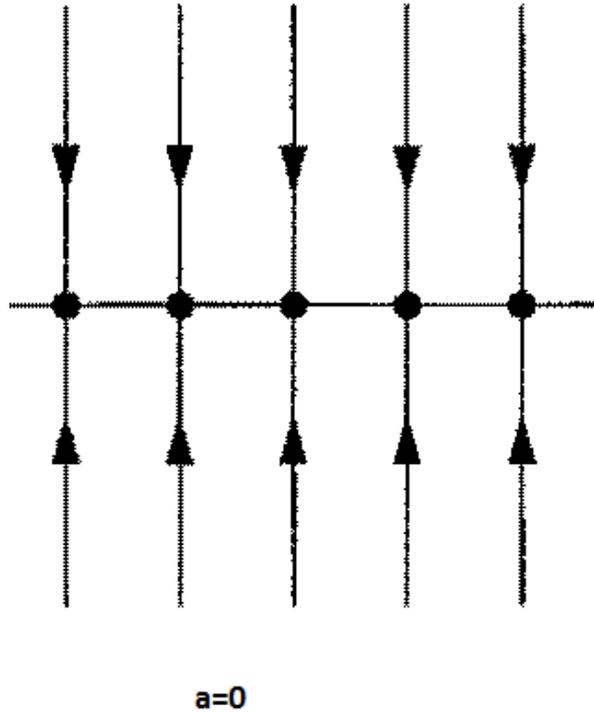


Рис. 8.

при $t \rightarrow -\infty$. Здесь неустойчивым многообразием является ось x . Обратим внимание, что типичная траектория асимптотически приближается к неустойчивому многообразию при $t \rightarrow +\infty$ и приближается к устойчивому многообразию при $t \rightarrow -\infty$.

Полезно ввести некоторый язык, который позволит нам обсуждать устойчивость различных типов неподвижных точек. Этот язык будет особенно полезен, когда мы проанализируем неподвижные точки нелинейных систем.

Мы говорим, что $x^* = 0$ является притягивающей неподвижной точкой в случаях, изображенных на рисунках 5 - 7; все траектории, начинающиеся вблизи x^* , притягиваются при $t \rightarrow +\infty$, то есть $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow +\infty$. На самом деле, x^* притягивает все траектории в фазовой плоскости, так что ее можно назвать глобально притягивающей точкой. Рисунок 9 показывает, что неподвижная точка может быть устойчивой по Ляпунову, но не притягивающей. Соседние траектории и не притягиваются, и не отталкиваются от нейтрально устойчивой точки. Вторым примером служит пример о гармоническом осцилляторе. В

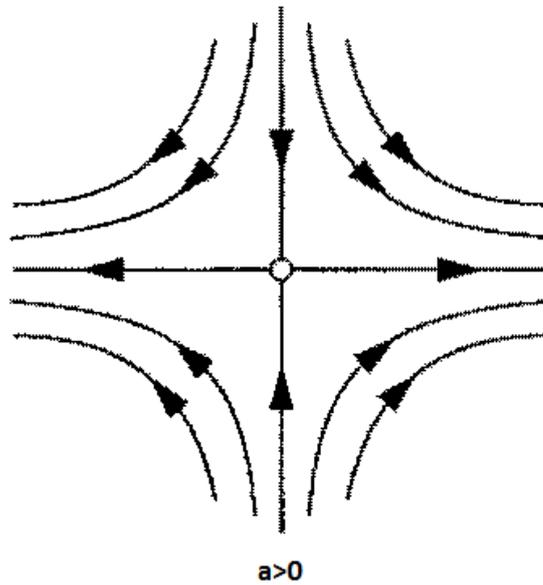


Рис. 9.

нейтральной устойчивости обычно сталкиваются механические системы в отсутствие трения. Примером является следующее векторное поле на окружности: $\dot{\theta} = 1 - \cos \theta$ (рис. 10). Здесь $\theta^* = 0$ притягивает все

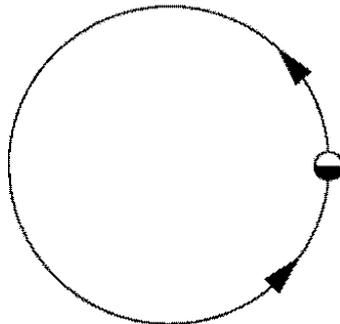


Рис. 10.

траектории при $t \rightarrow \infty$, но это не устойчивость по Ляпунову. Наконец, x^* неустойчива на рисунке 9, потому, что она неустойчива по Ляпунову и не притягивающая. Везде далее будем изображать

выколотыми точками неустойчивые неподвижные точки и
закрашенными — устойчивые по Ляпунову.

1.2 Классификация линейных систем

В примерах главы 1.1 матрица A имела два нулевых элемента. Теперь мы хотим изучить общий случай произвольной (2×2) матрицы, с целью классификации всех возможных фазовых портретов.

Оси x и y определяют направление траекторий при $t \rightarrow \pm\infty$, а также содержат специальные прямолинейные траектории, начинающиеся на одной из координатных осей и показывающие экспоненциальный рост или убывание.

Для общего случая, мы хотели бы найти аналог этих прямолинейных траекторий. То есть, мы хотим получить траекторию в виде

$$x(t) = e^{\lambda t} \vec{v}, \quad (4)$$

где $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq 0$ - некоторый фиксированный вектор, который будет определен, и λ - скорость роста, которая также будет определена. Если такие решения существуют, они соответствуют экспоненциальным движениям вдоль линии, соответствующей вектору \vec{v} .

Подставим $x(t) = e^{\lambda t} v$ в $\dot{x} = Ax$, получим $\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av$. Сократим обе части на $e^{\lambda t}$, получим равенство

$$Av = \lambda v, \quad (5)$$

которое говорит, что желаемые решения для прямой линии существуют, если \vec{v} является собственным вектором с соответствующим собственным значением λ . В данном случае, будем называть решение (22) собственным решением.

Напомним, что собственные значения матрицы A заданы характеристическим уравнением $\det(A - \lambda I) = 0$, где I -единичная матрица. Для (2×2) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение выглядит

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получаем:

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0, \quad (6)$$

где $\tau = \text{trace}(A) = a + d$, $\Delta = \det(A) = ad - bc$.

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

решения квадратного уравнения (6). Другими словами, собственные значения зависят только от следа и определителя матрицы A . Типичная ситуация для собственных значений, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае теорема линейной алгебры гласит, что соответствующие собственные векторы \vec{v}_1 и \vec{v}_2 являются линейно независимыми, а следовательно, являются базисными векторами (рис. 11). В частности,

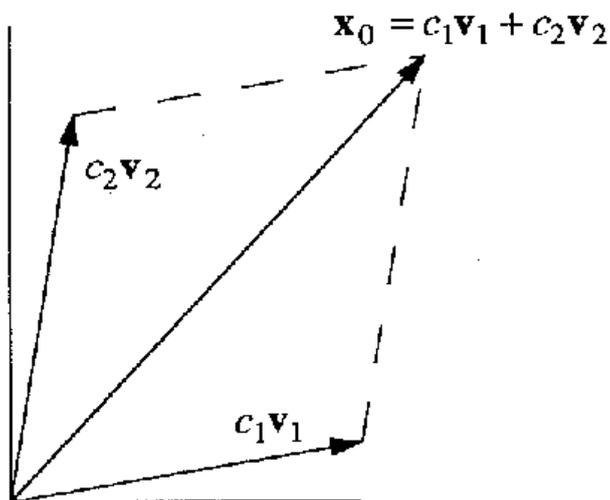


Рис. 11.

любое начальное условие x_0 может быть записано как линейная комбинация собственных векторов, скажем $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$. Это позволяет записать общее решение $x(t)$:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \quad (7)$$

Заметим, что x_t является линейной комбинацией решений уравнения $\dot{x} = Ax$, а следовательно, является общим решением. Во-вторых, оно удовлетворяет начальному условию $x(0) = x_0$, и поэтому имеет место теорема существования и единственности, из которой следует, что оно является единственным решением.

Пример 1.2.1 Рассмотрим начально-краевую задачу $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = 4x - 2y$ при условии, что $(x_0, y_0) = (2, -3)$

Решение 1.2.1 *Запишем уравнение в матричном виде*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Сначала найдем собственные значения матрицы A . Матрица имеет след $\tau = -1$, определитель $\Delta = -6$, поэтому характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Отсюда

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3.$$

Далее найдем собственные векторы. Учитываем собственные значения λ , соответствующие собственному вектору $\vec{v} = (v_1, v_2)$ и подставляем в систему

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1 = 2$ получаем уравнение $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, которое имеет нетривиальное решение $(v_1, v_2) = (1, 1)$. Аналогично, для $\lambda_2 = -3$, уравнение $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ имеет нетривиальное решение $(v_1, v_2) = (1, -4)$. Суммируя вышесказанное,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Далее запишем общее решение в виде линейной комбинации собственных решений. Подставляя в (7), получим общее решение

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad (8)$$

Найдем c_1 и c_2 , исходя из начальных условий $(x_0, y_0) = (2, -3)$. При $t = 0$, уравнение (6) примет вид

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

которое эквивалентно алгебраической системе

$$2 = c_1 + c_2,$$

$$-3 = c_1 - 4c_2.$$

Решением этой системы являются значения $c_1 = 1$, $c_2 = 1$.
Подставляя эти значения в (8), получим

$$x(t) = e^{2t} + e^{-3t},$$

$$y(t) = e^{2t} - 4e^{-3t}$$

решение начально-краевой задачи.

Заметим, что для того, чтобы нарисовать фазовый портрет линейной системы, достаточно знать собственные значения и собственные векторы.

Пример 1.2.2 Построим фазовый портрет для системы из примера 1.2.1.

Решение 1.2.2 Система имеет собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. Отсюда первое собственное решение растет экспоненциально, а второе собственное решение убывает экспоненциально. Это означает, что начало координат является седловой точкой. Его устойчивым многообразием является линия, соответствующая собственному вектору $\vec{v}_2 = \{1, -4\}$, а также соответствующая затухающему собственному решению. Точно так же, неустойчивым многообразием является линия, соответствующая $\vec{v}_1 = \{1, 1\}$. Как для любых седловых точек, типичная траектория приближается к неустойчивому многообразию при $t \rightarrow +\infty$ и к устойчивому многообразию при $t \rightarrow -\infty$. На рисунке 12 изображен фазовый портрет.

Пример 1.2.3 Изобразим фазовый портрет системы для случая $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Решение 1.2.3 Сначала предположим, что $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Тогда оба собственных решения экспоненциально убывают. Неподвижной точкой является устойчивый узел, показанный на рисунке 13, но собственные векторы теперь не взаимно перпендикулярны. Траектории, как правило, приближаются к той линии, которой соответствует собственное значение меньшее по модулю. В обратном направлении времени, траектории становятся параллельными быстрому направлению. На рисунке 13 показан фазовый портрет. (Если стрелки будут направлены в другую сторону, то мы получим фазовый портрет для неустойчивого узла.)

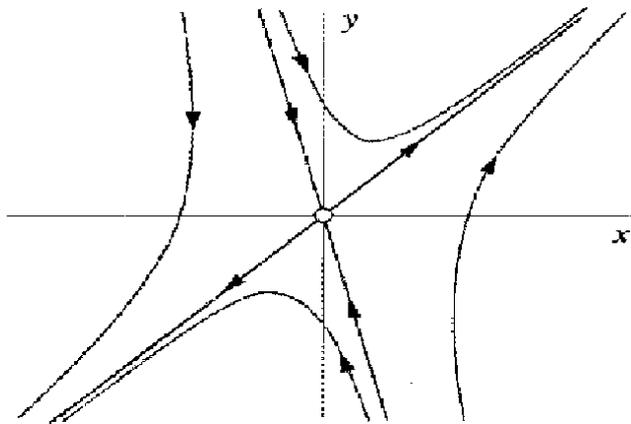


Рис. 12.

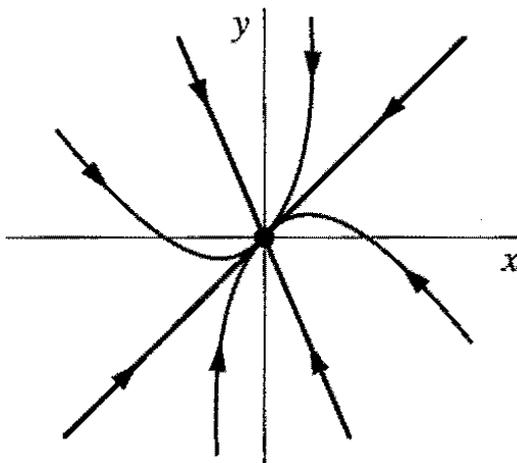


Рис. 13.

Пример 1.2.4 Что произойдет, если собственные значения будут являться комплексными числами?

Решение 1.2.4 Если собственные значения являются комплексными, то неподвижная точка является либо центром (рис.14, а)) либо фокусом (рис.14, б)). Обратим внимание, что центры нейтрально устойчивы, поскольку близлежащие траектории ни притягиваются, ни отталкиваются от неподвижной точки. Фокусы появляются, если гармонический осциллятор был слабодемпфирован. Тогда траектория будет просто не в состоянии замкнуться, потому что осциллятор теряет немного энергии на каждом цикле. Чтобы

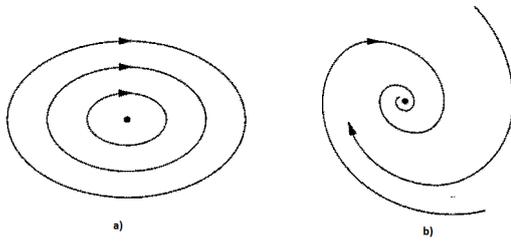


Рис. 14.

обосновать это, напомним, что собственными значениями являются $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})$. Таким образом, комплексные собственные значения возникают при

$$\tau^2 - 4\Delta < 0.$$

Чтобы упростить обозначения, будем писать собственные значения как

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega,$$

где

$$\alpha = \tau/2, \omega = \frac{1}{2}(\sqrt{4\Delta - \tau^2}).$$

Предположим, что $\omega \neq 0$. Тогда собственные значения различны и решение имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2.$$

Но сейчас c_1, c_2 и v_1, v_2 являются сложными по структуре. Это означает, что $x(t)$ включает в себя линейные комбинации $e^{(\alpha \pm i\omega)t}$. С помощью формулы Эйлера получим $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$.

Следовательно, $x(t)$ запишем в виде комбинации функций $e^{\alpha t} \cos \omega t$ и $e^{\alpha t} \sin \omega t$. Такие условия представляют собой экспоненциально затухающие колебания, если $\alpha = \text{Re} \lambda < 0$, и колебания с увеличением амплитуды, если $\alpha > 0$. Соответствующие неподвижные точки являются устойчивыми и неустойчивыми фокусами.

Если собственные значения являются чисто мнимыми ($\alpha = 0$), то все решения являются периодическими с периодом $T = 2\pi/\omega$. Колебания имеют фиксированную амплитуду, и неподвижная точка — центр. Для центров и фокусов легко определить, является ли вращение по часовой стрелке или против часовой стрелки, просто рассмотрим несколько векторов в векторном поле.

Пример 1.2.5 В общем случае мы предполагаем, что собственные значения различны. Что произойдет, если собственные значения равны?

Решение 1.2.5 Допустим, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Есть два случая: либо есть два независимых собственных вектора λ , либо вектор только один.

Если есть два независимых собственных вектора, то они образуют базис, и каждому собственному вектору присваивается собственное значение λ . Чтобы убедиться в этом, запишем произвольный вектор x_0 как линейную комбинацию из двух собственных векторов:

$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$. Тогда

$$Ax_0 = A(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \lambda v_1 + c_2 \lambda v_2 = \lambda x_0,$$

таким образом, x_0 — также собственный вектор с собственным значением λ . Матрица A примет вид:

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда, если $\lambda \neq 0$, все траектории представляют собой прямые линии, проходящие через начало координат ($x(t) = e^{\lambda t} x_0$), и неподвижная точка звезда или дикритический узел. С другой стороны, если $\lambda = 0$, вся плоскость состоит из неподвижных точек.

Пусть есть только один собственный вектор. Например, любая матрица вида $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ имеет единственное одномерное собственное пространство.

Когда существует только одно направление, то неподвижная точка является вырожденным узлом. Типичный фазовый портрет показан на рисунке 16. Заметим, что как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$, собственные направления траекторий становятся параллельными имеющимся собственным направлениям. Можно представлять вырожденный узел, как деформацию обычного узла. Обычный узел имеет два независимых собственных направления, все траектории параллельны медленному направлению при $t \rightarrow +\infty$, и быстрому при $t \rightarrow -\infty$. Теперь предположим, что мы начинаем изменять параметры системы таким образом, что два собственных направления вырываются вместе. Затем некоторые из траекторий будут сжиматься в области между двумя направлениями, а уцелевшие траектории будут закручиваться вокруг, чтобы сформировать вырожденный узел. Другими словами, вырожденный узел находится на границе между фокусом и узлом.

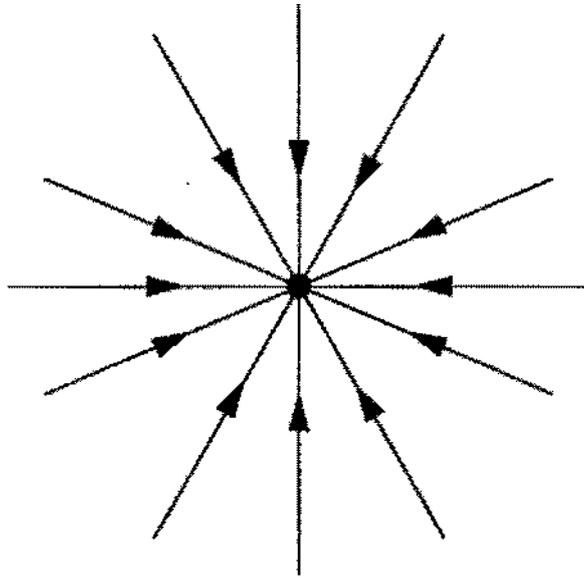


Рис. 15.

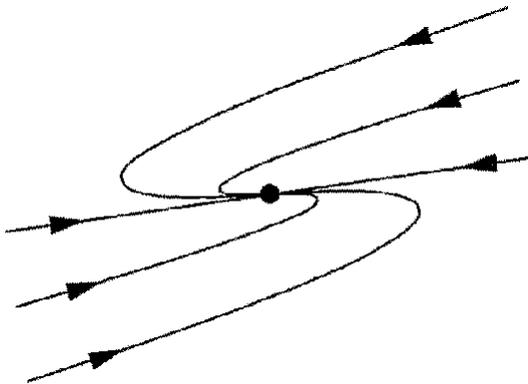


Рис. 16.

1.2.1 Классификация неподвижных точек

Покажем тип и устойчивость различных неподвижных точек на одной диаграмме. Осями являются след τ и определитель Δ матрицы A . Вся информация на схеме видна из следующих формул:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}),$$

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2,$$

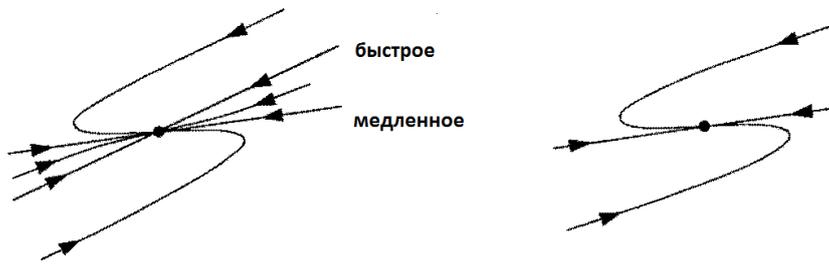


Рис. 17.

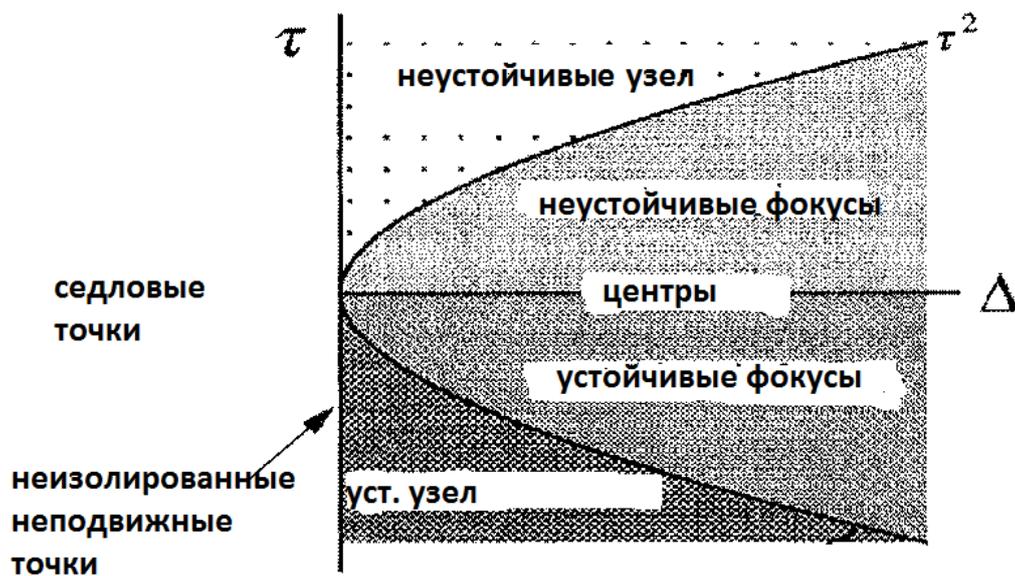


Рис. 18.

$$\tau = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Рассмотрим подробнее рисунок 18: если $\Delta < 0$, собственные числа являются действительными и имеют противоположные знаки, следовательно, неподвижная точка является седловой точкой. Если $\Delta > 0$, то собственные значения являются либо действительными одного знака (узел), либо комплексно-сопряженными (фокусы и центры). Узлы удовлетворяют условию $\tau^2 - 4\Delta > 0$, а фокусы условию $\tau^2 - 4\Delta < 0$. Парабола является границей между узлами и фокусами, дикритические узлы и вырожденные узлы находятся на этой параболе. Устойчивость узла и фокуса определяется τ . Когда $\tau < 0$, оба собственных значения имеют отрицательные вещественные части, так

что неподвижная точка устойчива. Неустойчивые фокусы и узлы появляются при $\tau > 0$. Нейтрально устойчивые центры расположены на границе $\tau = 0$, собственные значения являются чисто мнимые. Если $\Delta = 0$, по крайней мере одно из собственных значений равно нулю. Тогда начало координат не является изолированной неподвижной точкой. Рисунок 18 показывает, что седловые точки, узлы и фокусы являются главными типами неподвижных точек, они находятся в открытых областях плоскости (Δ, τ) . Центры, дикритические узлы, вырожденные узлы и неизолированные неподвижные точки являются граничными случаями, которые происходят вдоль кривых в (Δ, τ) . Из этих граничных случаев центры являются наиболее важными. Они появляются очень часто в механических системах без трения, в которых энергия сохраняется.

Пример 1.2.6 *Определить тип неподвижных точек для систем:*

1) $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

2) $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение 1.2.6 1) Матрица имеет $\Delta = -2$, следовательно, неподвижная точка является седловой точкой.

2) $\Delta = 5$, $\tau = 6$. Поскольку $\Delta > 0$ и $\tau^2 - 4\Delta = 16 > 0$, неподвижная точка является узлом. Он неустойчивый, так как $\tau > 0$.

1.3 Модель взаимоотношений между людьми

Обсудим простую модель динамики человеческих взаимоотношений [9].

Следующий пример иллюстрирует главную идею.

Ромео любит Джульетту, но любовь Джульетты к Ромео является непостоянной: чем больше Ромео любит ее, тем больше Джульетте хочется убежать и скрыться, но когда Ромео отчаивается и отступает, у Джульетты пробуждаются чувства к Ромео. Ромео ведет себя по-другому: он становится счастливым, когда Джульетта его любит, и холодным, когда она его ненавидит.

Пусть $R(t)$ -любовь/ненависть Ромео к Джульете за время t , $J(t)$ -любовь/ненависть Джульетты к Ромео за время t . Положительные значения R , J означают любовь, отрицательные значения означают ненависть. Тогда модель их отношений выглядит так

$$\dot{R} = aJ,$$

$$\dot{J} = -bR,$$

где параметры a и b являются положительными, чтобы соответствовать истории. Печальный исход их романа — это, конечно же, бесконечный цикл любви и ненависти; система регулирования имеет центр в точке $(R, J) = (0, 0)$. По крайней мере, им удастся добиться взаимной любви на протяжении одной четверти отведенного времени (рис. 19). Теперь

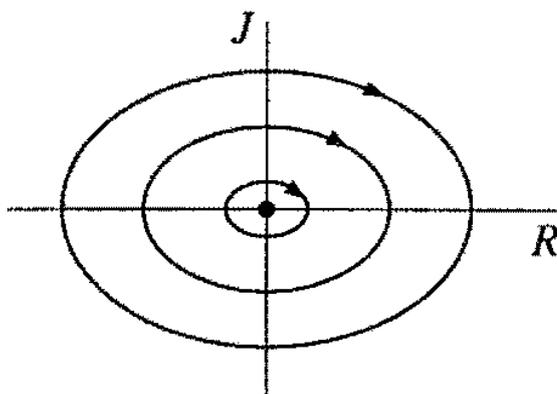


Рис. 19.

рассмотрим прогноз в общей линейной системе

$$\dot{R} = aR + bJ,$$

$$\dot{J} = cR + dJ,$$

где параметры a, b, c, d могут иметь любой знак. Выбор знаков определяет романтические стили. Выбор $c > 0, d > 0$ означает, что Ромео приходит в восторг от любви Джульетты к нему и далее подпитывается собственными нежными чувствами к ней.

Пример 1.3.1 *Выясним, что происходит, когда два одинаково осторожно любящих друг друга человека пытаются наладить взаимоотношения.*

Решение 1.3.1 *Система имеет вид*

$$\dot{R} = aR + bJ,$$

$$\dot{J} = bR + aJ,$$

у которой $a > 0, b > 0$. Здесь a — это мера осторожности и b — это мера реагирования (они оба приходят в восторг от достижений другого). Мы можем подозревать, что результат зависит от относительной величины a, b . Давайте посмотрим, что происходит. Запишем матрицу для системы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

которая имеет

$$\tau = 2a < 0, \Delta = a^2 - b^2, \tau^2 - 4\Delta = 4b^2 > 0.$$

Следовательно, неподвижная точка $(R, J) = (0, 0)$ является седловой точкой, если $a^2 < b^2$ и устойчивым узлом, если $a^2 > b^2$. Собственными значениями и соответствующими собственными векторами являются

$$\lambda_1 = a + b,$$

$$\vec{v}_1 = \{1, 1\},$$

$$\lambda_2 = a - b,$$

$$\vec{v}_2 = \{1, -1\}.$$

Так как $a + b > a - b$, собственный вектор $\{1, 1\}$ определяет неустойчивое многообразие, когда начало координат является седловой точкой, и определяет его медленное направление, когда начало координат является устойчивым узлом. На рисунке 20 изображен фазовый портрет для двух случаев.

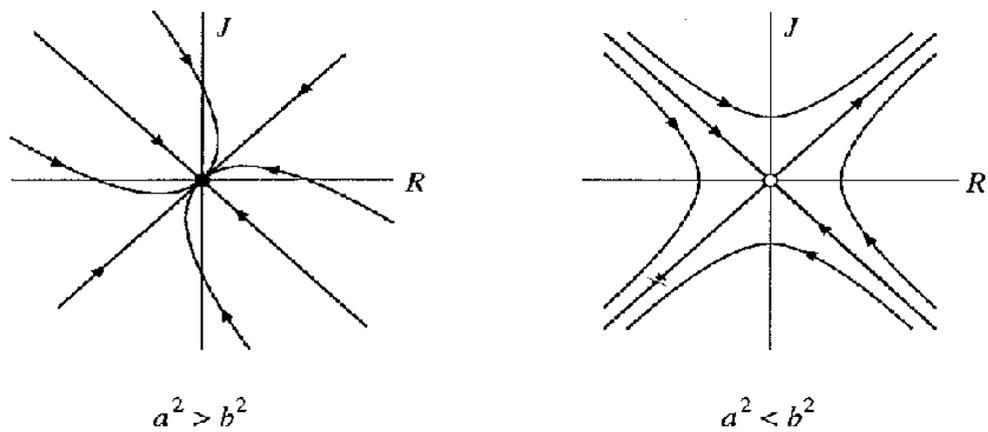


Рис. 20.

Если $a^2 > b^2$, отношения всегда заканчиваются взаимным равнодушием.

Если $a^2 < b^2$, Ромео и Джульетта более смелы или возможно чувствительны друг к другу. В зависимости от первоначальных своих чувств, их отношения превращаются или в праздник любви, или в войну. В любом случае, все траектории приближаются к линии $R = J$, так что их чувства, в конечном счете, взаимны.

2 Фазовая плоскость

2.1 Фазовый портрет

Векторное поле на фазовой плоскости описывает система

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2),$$

где f_1 и f_2 являются заданными функциями. Эта система может быть записана более компактно в векторных обозначениях как

$$\dot{x} = f(x),$$

где $x = (x_1, x_2)$ и $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Здесь x представляет собой точку в фазовой плоскости, а \dot{x} — вектор скорости в этой точке. При течении вдоль векторного поля, фазовая точка вычерчивает решение $x(t)$, соответствующее траектории обмотки на фазовой плоскости (рис. 21). Кроме того, вся фазовая плоскость заполнена траекториями, поскольку

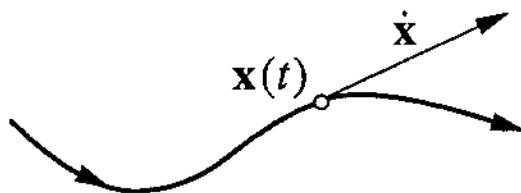


Рис. 21.

каждая точка может играть роль начального условия. Для нелинейных систем, как правило, нет никакой надежды на то, чтобы найти траектории аналитически. Даже когда явные формулы доступны, они не всегда предоставляют много информации. Вместо нахождения траекторий аналитически, мы постараемся определить качественное поведение решений. Возможно огромное разнообразие фазовых портретов, один из примеров показан на рисунке 22. Наиболее характерными особенностями любого фазового портрета являются следующие.

- 1) Неподвижные точки, как например А, В и С, показанные на рисунке 22. Неподвижные точки удовлетворяют уравнению $f(x^*) = 0$ и соответствуют устойчивым состояниям или равновесию системы.
- 2) Замкнутые орбиты, такие как D, которые показаны на рисунке 22. Они соответствуют периодическим решениям, т.е. решениям, для которых $x(t + T) = x(t)$ для всех t и для $T > 0$.

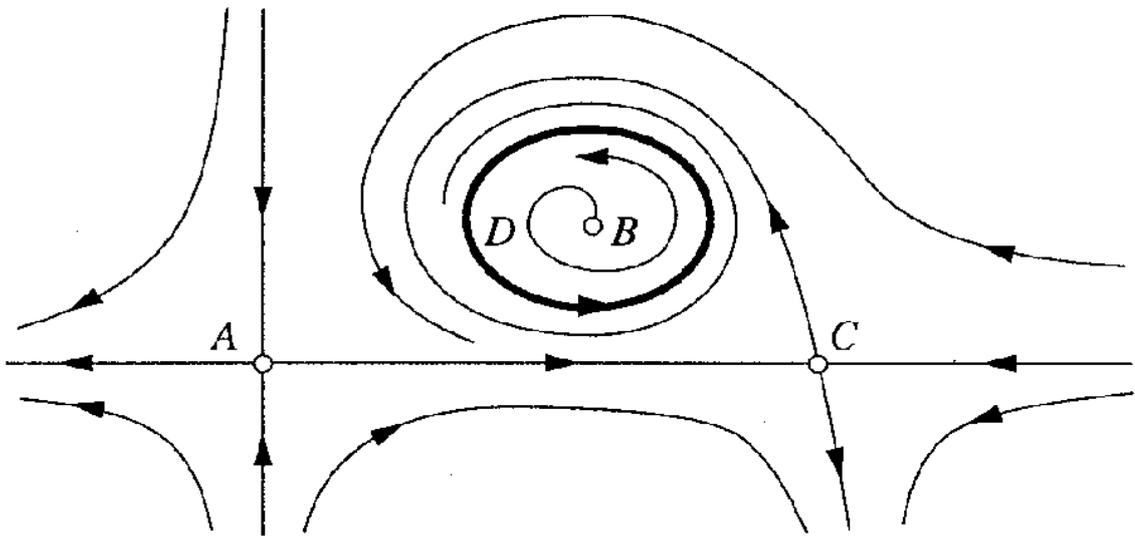


Рис. 22.

3) Расположение траекторий вблизи неподвижных точек и замкнутых орбит. Например, характер движения потока около A и C похож, и разный около B.

4) Устойчивость или неустойчивость неподвижных точек и замкнутых орбит. Здесь, неподвижные точки A, B и C являются неустойчивыми, потому что близлежащие траектории стремятся отойти от них, в то время как замкнутая орбита D является устойчивой.

2.2 Существование, единственность и топологические последствия

На данном этапе у нас нет никакой гарантии, что общая нелинейная система $\dot{x} = f(x)$ имеет решения. Запишем теорему существования и единственности для n -мерных систем:

Теорема 1 (Теорема существования и единственности)

Рассмотрим задачу Коши $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$. Предположим, что f непрерывна и что все ее частные производные $\partial f_i / \partial x_j, i, j = 1, \dots, n$ непрерывны по x в некотором открытом связном множестве $D \subset R^n$. Тогда для $x_0 \in D$, задача Коши имеет решение $x(t)$ на некотором интервале времени $(-\tau, \tau)$, где $t = 0$, и решение является единственным.

Иными словами, существование и единственность решения гарантируется, если f является непрерывно дифференцируемой.

Отныне мы будем считать, что все наши векторные поля достаточно гладкие, чтобы обеспечить существование и единственность решений, начиная с любой точки в фазовом пространстве.

Из теоремы существования и единственности следует, что различные траектории никогда не пересекаются. Если две траектории пересеклись, то существует два решения, начиная с той же точки (точки пересечения), а это нарушает единственность решения. На более понятном языке, траектории не могут двигаться в двух направлениях сразу.

Поскольку траектории не пересекаются, фазовые портреты всегда имеют красивый вид. В противном случае, кривые могут перерасти в семейство пересекающихся траекторий (рис. 23), но теорема существования и единственности предотвращает это.

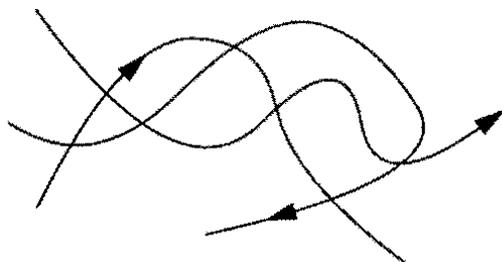


Рис. 23.

В двумерных фазовых пространствах (в отличие от многомерных фазовых пространств) у этих результатов есть особенно сильные топологические последствия. Например, предположим, что существует замкнутая орбита C на фазовой плоскости. Тогда любая траектория, начинающаяся внутри C , остается там навсегда (рис. 24).

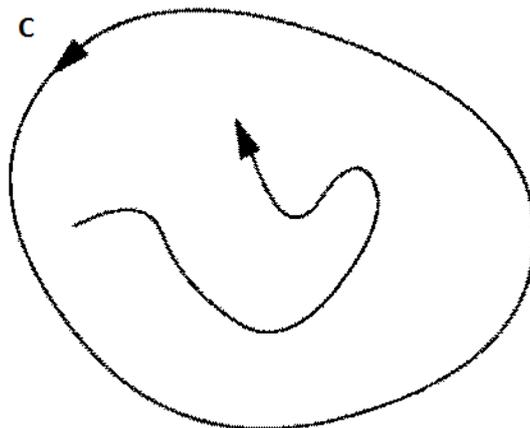


Рис. 24.

Какова судьба такой ограниченной траектории? Если есть неподвижные точки внутри C , то, конечно, траектория могла бы в конечном счете приблизиться к одной из них. Но что будет при отсутствии неподвижных точек? Для векторных полей на плоскости, теорема Пуанкаре-Бендиксона гласит, что в замкнутой ограниченной области, если нет неподвижных точек, траектории должны в конечном итоге приблизиться к замкнутой орбите.

2.3 Неподвижные точки и линеаризация

2.3.1 Линеаризация

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}$$

и предположим, что (x^*, y^*) — неподвижная точка, то есть

$$f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0.$$

Обозначим через

$$u = x - x^*, v = y - y^*$$

компоненты небольшого отклонения от неподвижной точки. Чтобы увидеть, убывают или растут отклонения, мы должны вывести дифференциальные уравнения для u и v . Сначала для u :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{x} = \\ &= f(x^* + u, y^* + v) = \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) = \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv).\end{aligned}$$

$O(u^2, v^2, uv)$ обозначает квадратичные члены по u и v . Так как u и v малы, эти квадратичные члены достаточно малы.

Аналогичным образом находим

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv).$$

Следовательно, отклонение (u, v) изменяется согласно

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \sigma, \quad (9)$$

σ - квадратичные члены. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби в неподвижной точке (x^*, y^*) .
 Теперь, так как квадратичные члены в (9) являются достаточно малыми, ими можно пренебречь. В результате получим линеаризованную систему:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

2.3.2 Влияние малых нелинейных членов

Действительно ли можно пренебрегать квадратичными членами в (9)?
 Иными словами, дают ли линеаризованные системы качественно правильную картину фазового портрета вблизи (x^*, y^*) ? Ответ да, если неподвижная точка для линеаризованной системы не относится к одному из граничных случаев. Иными словами, если линеаризованная система прогнозирует седло, узел или фокус, то неподвижная точка действительно является седлом, узлом или фокусом для исходной нелинейной системы.

Пример 2.3.1 *Найдем все неподвижные точки системы $\dot{x} = -x + x^3, \dot{y} = -2y$, и используем процесс линеаризации для классификации неподвижных точек. Проверим полученные результаты путем получения фазового портрета для полной нелинейной системы.*

Решение 2.3.1 *Неподвижные точки находятся путем решения системы уравнений $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$, из которой получаем: $x = 0$ или $x = \pm 1$ и $y = 0$. Таким образом, есть три неподвижные точки: $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. Матрица Якоби в произвольной точке (x, y) имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда, в точке $(0, 0)$ получаем $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, для которой $\Delta = 2, \tau = -3$. Поскольку $\Delta > 0$ и $\tau^2 - 4\Delta = 1 > 0$, неподвижная точка $(0, 0)$ является устойчивым узлом. В точках $(\pm 1, 0)$ матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\Delta = -4$, следовательно $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ — седловые точки. В данной ситуации устойчивый узел и седловые точки не относятся к граничным случаям, и мы можем быть уверенными, что

неподвижные точки для полной нелинейной системы спрогнозированы правильно.

Этот вывод можно явно проверить для нелинейной системы, так как x и y в уравнении разделены. В y -направлении, все траектории убывают экспоненциально до $y = 0$. В x -направлении, траектории притягиваются к $x = 0$ и отталкиваются от $x = \pm 1$. Вертикальные линии $x = 0$ и $x = \pm 1$ являются инвариантными, поскольку $\dot{x} = 0$ на них, следовательно, любая траектория, которая начинается на этих линиях остается на них навсегда. Аналогичным образом, $y = 0$ является инвариантной горизонтальной линией. В качестве заключительного замечания отметим, что фазовый портрет должен быть симметричным относительно осей x и y , так как уравнения инвариантны относительно преобразований $x \rightarrow -x$ и $y \rightarrow -y$. Анализируя полученную информацию, получим фазовый портрет, изображенный на рисунке 25. Эта картина подтверждает, что $(0, 0)$

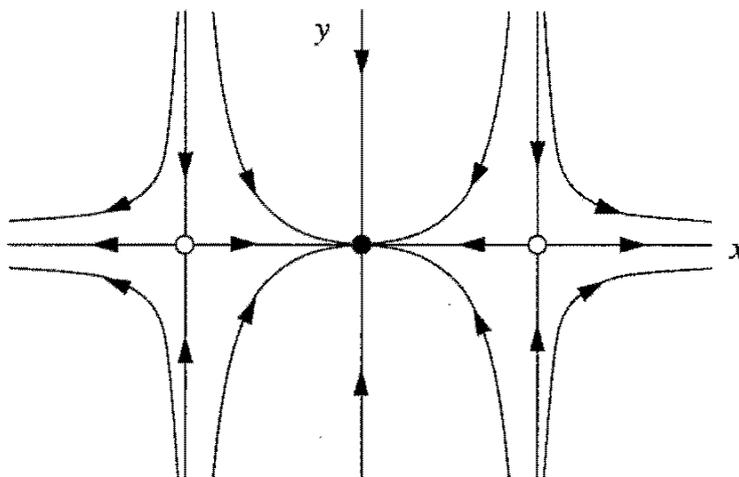


Рис. 25.

является устойчивым узлом, и $(\pm 1, 0)$ являются седлами.

Следующий пример показывает, что достаточно малые нелинейные члены могут изменить центр на фокус.

Пример 2.3.2 Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2),$$

$$\dot{y} = x + ay(x^2 + y^2),$$

где a — параметр. Покажем, что линеаризованная система неправильно прогнозирует, что начало координат — это центр для всех значений, когда на самом деле начало координат является устойчивым фокусом, если $a < 0$ и неустойчивым фокусом, если $a > 0$.

Решение 2.3.2 Для получения линеаризации около $(x^*, y^*) = (0, 0)$ запишем матрицу Якоби согласно определению. Для любой системы с неподвижной точкой в начале координат, x и y представляют отклонения от неподвижной точки, $u = x - x^* = x$ и $v = y - y^* = y$, следовательно, мы можем линеаризовать, опустив нелинейные члены по u и v . Таким образом, линеаризованной системой является $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$. Матрица Якоби имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

для которой $\tau = 0, \Delta = 1 > 0$, так что начало координат — это всегда центр согласно линеаризации.

Для анализа нелинейной системы, перейдем к полярным координатам. Пусть $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Чтобы вывести дифференциальное уравнение для r , можно отметить, что $x^2 + y^2 = r^2$, поэтому $x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}$. Подставляя \dot{x} и \dot{y} , получим

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x(-y + ax(x^2 + y^2)) + y(x + ay(x^2 + y^2)) = \\ &= a(x^2 + y^2)^2 = \\ &= ar^4. \end{aligned}$$

Следовательно, $\dot{r} = ar^3$. Запишем дифференциальное уравнение для θ

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

После подстановки \dot{x} и \dot{y} , мы находим $\dot{\theta} = 1$. Таким образом, в полярных координатах исходная система примет вид

$$\dot{r} = ar^3,$$

$$\dot{\theta} = 1.$$

Система проста для анализа в таком виде, потому что радиальные и угловые перемещения являются независимыми. Все траектории вращаются вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью $\dot{\theta} = 1$.

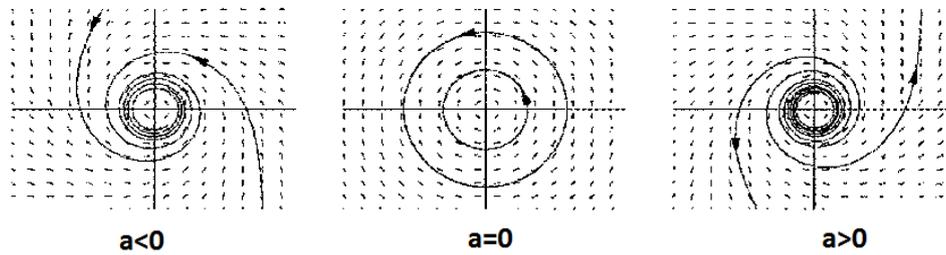


Рис. 26.

Радиальное движение зависит от a , как показано на рисунке 26. Если $a < 0$, то $r(t)$ монотонно стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$. В данном случае начало координат является устойчивым фокусом. Если $a = 0$, то $r(t) = r_0$ и начало координат является центром. Если $a > 0$, то $r(t)$ монотонно стремится к 0 при $t \rightarrow -\infty$ и начало координат в этом случае является неустойчивым фокусом.

2.4 Модель „Кролики против овец“

Далее рассмотрим один пример анализа фазовой плоскости. Мы начнем с классической модели Лотки-Вольтерры: модели конкуренции двух видов, кроликов и овец. Предположим, что оба вида конкурируют за один и тот же источник пищи (например, траву) и количество пищи ограничено. Кроме того, проигнорируем все другие осложнения, как например хищники, сезонные условия и другие источники еды. Тогда есть два главных эффекта, которые необходимо рассмотреть.

1. Кролики известны своей легендарной плодовитостью, поэтому коэффициент роста для них будет больше, чем для овец.
2. Когда кролики и овцы сталкиваются друг с другом, начинаются проблемы. Иногда кролик добирается до лужайки, чтобы поесть, но овечка чаще отталкивает кролика в сторону и начинает сама употреблять пищу. Мы будем считать, что эти конфликты происходят в размере, пропорциональном объему каждой популяции (если овец в два раза больше, то разногласия кроликов, сталкивающихся с овцами, увеличиваются в два раза). Кроме того, мы предполагаем, что конфликты уменьшают темп роста для каждой разновидности, но эффект более серьезен для кроликов.

Конкретной моделью, которая включает эти предположения является

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y),$$

$$\dot{y} = y(2 - x - y),$$

где $x(t)$ — популяция кроликов, $y(t)$ — популяция овец и $x, y \geq 0$.

Коэффициенты выбраны для того, чтобы отразить два эффекта, изложенные ранее, но в общем случае коэффициенты произвольные. Для того, чтобы найти неподвижные точки системы, решим систему уравнений $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$. Получим четыре неподвижные точки: $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$ и $(1,1)$. Записываем матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - y \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу Якоби в каждой из неподвижных точек.

$(0,0)$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Собственными значениями являются $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, таким образом точка $(0,0)$ является неустойчивым узлом (собственные

значения являются вещественными одного знака, и след и определитель больше нуля). Траектории выходят из начала координат параллельно собственному вектору с собственным значением $\lambda_1 = 2$, т.е. вектор $\vec{v} = \{0, 1\}$ является касательным вектором к траекториям. (Напомним общее правило: в узле медленное направление является касательным к траекториям и оно соответствует направлению с наименьшим $|\lambda|$). Таким образом, фазовый портрет вблизи $(0,0)$ изображен на рисунке 27.

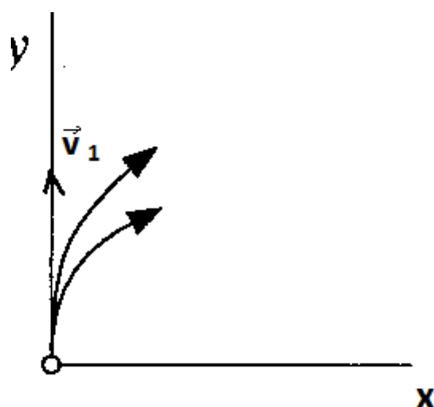


Рис. 27.

$(0,2)$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Матрица имеет собственные значения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. Следовательно, неподвижная точка является устойчивым узлом, так как определитель больше нуля, а след матрицы меньше нуля. На рисунке 28 изображен фазовый портрет вблизи неподвижной точки $(0,2)$.

$(1,1)$: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\tau = -2, \Delta = -1$ и $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Следовательно, неподвижная точка является седловой точкой. Фазовый портрет около неподвижной точки $(1,1)$ изображен на рисунке 29.

$(3,0)$: $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$. Аналогичным образом определяем, что неподвижная точка $(3,0)$ является устойчивым узлом. На рисунке 30 изображен фазовый портрет в окрестности неподвижной точки $(3,0)$.

Комбинируя рисунки 27-30, получим общий рисунок 31, на котором изображен общий фазовый портрет. Кроме того, обратим внимание,

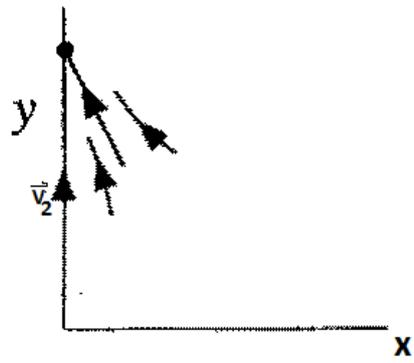


Рис. 28.

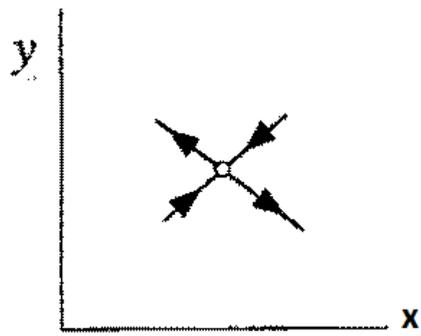


Рис. 29.

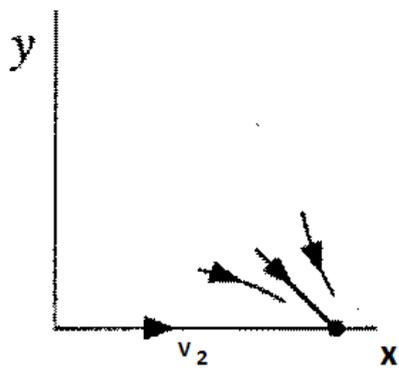


Рис. 30.

что оси Ox и Oy содержат по прямой траектории, так как $\dot{x} = 0$, когда $x = 0$ и $\dot{y} = 0$, когда $y = 0$. Заполним оставшуюся часть фазового

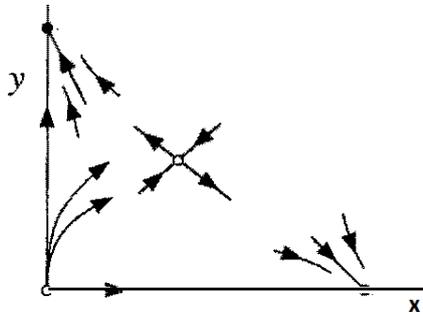


Рис. 31.

портрета (рис. 32). Например, некоторые из траекторий, начинающиеся в начале координат, должны подойти к устойчивому узлу на x -оси, в то время как другие должны идти к устойчивому узлу на y -оси. Между траекториями должна существовать особая траектория, которая не может решить, в какую сторону повернуть, и поэтому она погружается в седло. Эта траектория является частью устойчивого многообразия седла. Другая ветвь устойчивого многообразия состоит из траектории,

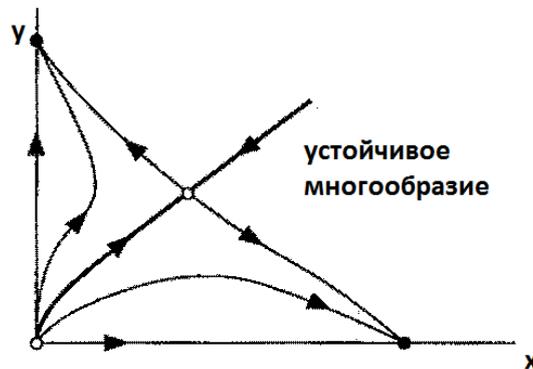


Рис. 32.

исходящей "из бесконечности". Фазовый портрет в окрестности бесконечности показан на рисунке 33. Фазовый портрет имеет интересную биологическую интерпретацию: один из видов, как правило, ведет другой к исчезновению. Траектории, начинающиеся ниже

устойчивого многообразия, приводят к окончательному вымиранию овец, а те траектории, что начинаются выше, приводят к вырождению популяции кроликов. Эта дихотомия возникает в других моделях конкуренции и приводит биологов к формулированию принципа конкурентного исключения, который гласит, что два вида одних и тех же ограниченных ресурсов, как правило, не могут сосуществовать.

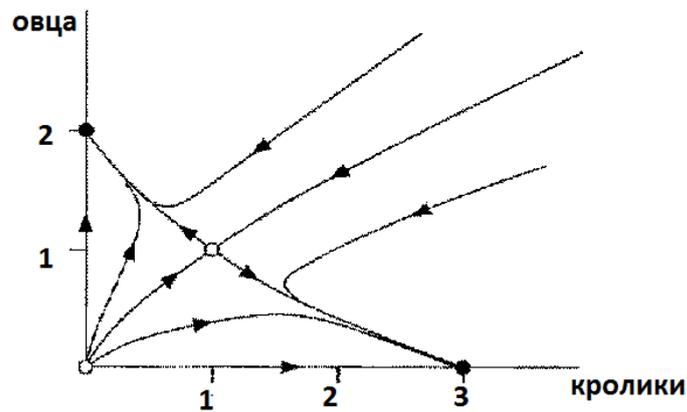


Рис. 33.

Данный пример иллюстрирует некоторые общие математические понятия. Учитывая, что неподвижная точка x^* является притягивающей, ее бассейн притяжения определяется как множество начальных условий x_0 таких, что $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow +\infty$. Например, бассейн притяжения узла $(3, 0)$ состоит из всех точек, лежащих ниже устойчивого многообразия седла (заштрихованная область на рисунке 34).

Устойчивое многообразие седла разделяет бассейны двух узлов и является границей бассейна. Бассейны и их границы очень важны, потому что они разбивают фазовое пространство на области различного долгосрочного поведения.

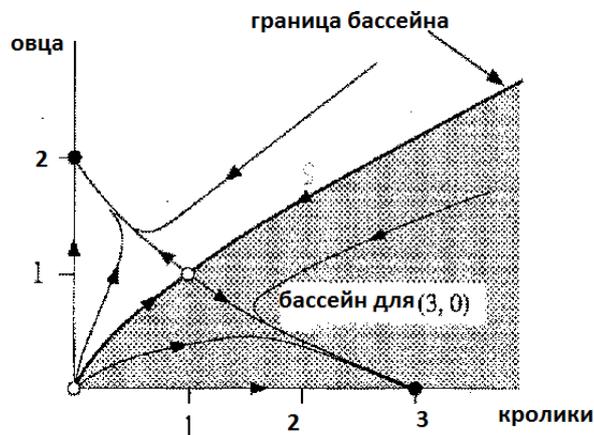


Рис. 34.

3 Упражнения

Упражнение 3.1 Рассмотрите гармонический осциллятор, заданный системой уравнений $\dot{x} = v, \dot{v} = -\omega^2 x$.

a) Покажите, что орбитами являются эллипсы, заданные как $\omega^2 x^2 + v^2 = C$, где C - любая неотрицательная константа.

b) Покажите, что это условие эквивалентно сохранению энергии.

Упражнение 3.2 Рассмотрите систему $\dot{x} = ax, \dot{y} = -y$, где $a < -1$.

Покажите, что все траектории становятся параллельными направлению y при $t \rightarrow +\infty$, и параллельными направлению x при $t \rightarrow -\infty$.

Упражнение 3.3 Запишите данные системы в матричной форме:

a) $\dot{x} = -y, \dot{y} = -x$.

b) $\dot{x} = 3x - 2y, \dot{y} = 2y - x$.

c) $\dot{x} = 0, \dot{y} = x + y$.

d) $\dot{x} = x, \dot{y} = 5x + y$.

Упражнение 3.4 Изобразите векторное поле для следующих систем.

Укажите длину и направление векторов с достаточной точностью.

a) $\dot{x} = x, \dot{y} = x + y$.

b) $\dot{x} = -2y, \dot{y} = x$.

Упражнение 3.5 Рассмотрите систему $\dot{x} = -y, \dot{y} = -x$.

- Изобразите векторное поле.
- Покажите, что траекториями системы являются гиперболы, задающиеся уравнением $x^2 - y^2 = C$. (Комментарий: покажите, что определяющим уравнением является $x\dot{x} - y\dot{y} = 0$, с последующим интегрированием.)
- Начало координат является седловой точкой; найдите уравнения ее устойчивого и неустойчивого многообразий.
- Система может быть решена следующим образом. Путем введения новых переменных u, v , где $u = x + y, v = x - y$, перепишите систему относительно u, v . Решите для $u(t), v(t)$, начиная с произвольного начального состояния (u_0, v_0) .
- Каковы уравнения для устойчивых и неустойчивых многообразий относительно u, v ?
- Используя d), запишите общее решение для $x(t)$ и $y(t)$, начиная с исходного состояния (x_0, y_0) .

Упражнение 3.6 Для каждой из следующих систем установите, является ли начало координат притягивающим, устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым или ни одним из вышесказанных.

- $\dot{x} = y, \dot{y} = -4x$.
- $\dot{x} = 2y, \dot{y} = x$.
- $\dot{x} = 0, \dot{y} = x$.
- $\dot{x} = 0, \dot{y} = -y$.
- $\dot{x} = -x, \dot{y} = -5y$.
- $\dot{x} = x, \dot{y} = y$.

Упражнение 3.7 Рассмотрите систему $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 2x + y$.

- Запишите систему в виде $\dot{x} = Ax$. Покажите, что характеристическим многочленом является $\lambda^2 - 5\lambda + 6$, и найдите собственные значения и собственные векторы.
- Найдите общее решение системы.
- Определите тип неподвижной точки — начала координат.
- Решите систему с начальным условием $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

Упражнение 3.8 Докажите, что орбиты замкнуты для простого гармонического осциллятора $\dot{x} = v, \dot{v} = -x$, используя только свойство симметрии векторного поля. (Комментарий: рассмотрите траекторию, которая начинается на v -оси в $(0, -v_0)$ и предположите, что траектория пересекает x -ось в точке $(x, 0)$. Затем с помощью аргументов симметрии найдите пересечения с v -осью и x -осью.)

Упражнение 3.9 Для системы $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y$:

- найдите A и покажите, что она имеет собственные значения $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$ и собственные векторы $v_1 = (i, 1), v_2 = (-i, 1)$;
- запишите общее решение $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ с учетом комплексных собственных значений.

Упражнение 3.10 Изобразите фазовый портрет и классифицируйте неподвижные точки следующих линейных систем.

- $\dot{x} = y, \dot{y} = -2x - 3y$.
- $\dot{x} = 5x + 10y, \dot{y} = -x - y$.
- $\dot{x} = 3x - 4y, \dot{y} = x - y$.
- $\dot{x} = -3x + 2y, \dot{y} = x - 2y$.
- $\dot{x} = 5x + 2y, \dot{y} = -17x - 5y$.
- $\dot{x} = -3x + 4y, \dot{y} = -2x + 3y$.
- $\dot{x} = 4x - 3y, \dot{y} = 8x - 6y$.
- $\dot{x} = y, \dot{y} = -x - 2y$.

Упражнение 3.11 Рассмотрите уравнение $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$, где $L, C > 0$ и $R \geq 0$.

- Перепишите уравнение в виде двумерной линейной системы.
- Покажите, что начало координат асимптотически устойчиво, если $R > 0$ и нейтрально устойчиво, если $R = 0$.
- Определите тип неподвижной точки, в зависимости от того, является ли выражение $R^2 C - 4L$ положительным, отрицательным или равным нулю, и постройте фазовый портрет во всех трех случаях.

Упражнение 3.12 Движение затухающего гармонического осциллятора описывается уравнением $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$, где $b > 0$ является коэффициентом демпфирования.

- Перепишите уравнение в виде двумерной линейной системы.
- Определите тип неподвижной точки и постройте фазовый портрет. Покажите все разные случаи, которые могут произойти, в зависимости от относительных размеров параметров.

Упражнение 3.13 Рассмотрите историю взаимоотношений, которая описывается следующей системой уравнений

$$\dot{R} = J, \dot{J} = -R + J.$$

- Опишите романтические стили Ромео и Джульетты.
- Определите тип неподвижной точки. Что это означает в истории про Ромео и Джульетту?
- Изобразите $R(t)$ и $J(t)$, причем $R(0) = 1, J(0) = 0$

Упражнение 3.14 Предположим, что Ромео и Джульетта воздействуют друг на друга, но не на себя: $\dot{R} = aJ, \dot{J} = bR$. Что произойдет?

Упражнение 3.15 Противоположности притягиваются? Проанализируйте систему уравнений $\dot{R} = aR + bJ, \dot{J} = -bR - aJ$.

Упражнение 3.16 Для каждой из следующих систем, найдите неподвижные точки, изобразите векторное поле и фазовый портрет.

- a) $\dot{x} = x - y, \dot{y} = 1 - e^x$.
- b) $\dot{x} = x(x - y), \dot{y} = y(2x - y)$.
- c) $\dot{x} = x - x^3, \dot{y} = -y$.
- d) $\dot{x} = y, \dot{y} = x(1 + y) - 1$.
- e) $\dot{x} = x(2 - x - y), \dot{y} = x - y$.
- f) $\dot{x} = x^2 - y, \dot{y} = x - y$.

Упражнение 3.17 Постройте фазовый портрет, который имеет ровно три замкнутые орбиты и одну неподвижную точку.

Упражнение 3.18 Рассмотрим систему $\dot{x} = x + e^{-y}, \dot{y} = -y$. Данная система имеет одну неподвижную точку $(-1, 0)$ — седло.

Неустойчивым многообразием седла является ось Ox , устойчивое многообразие представляет собой кривую. Цель этого упражнения состоит в аппроксимации этой кривой. Пусть (x, y) точка на устойчивом многообразии, и предположим, что (x, y) близка к $(-1, 0)$. Введем новую переменную $u = x + 1$, запишем устойчивое многообразие в виде $y = a_1u + a_2u^2 + O(u^3)$. Для определения коэффициентов, получите два выражения dy/du и приравняйте их.

Упражнение 3.19 Рассмотрите систему

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x + (1 - x^2 - y^2)y.$$

- a) Пусть D — это открытый диск $x^2 + y^2 < 4$. Убедитесь, что данная система удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности во всей области D .
- b) Путем замены покажите, что $x(t) = \sin t, y(t) = \cos t$ является точным решением системы.
- c) Рассмотрите другое решение, в данном случае, начиная с начальных условий $x(0) = \frac{1}{2}, y(0) = 0$. Не делая никаких расчетов, объясните, почему данное решение должно удовлетворять $x(t)^2 + y(t)^2 < 1$ для всех $t < +\infty$.

Упражнение 3.20 Для каждой из следующих систем найдите неподвижные точки, определите их тип, постройте соседние траектории, и попробуйте заполнить оставшуюся часть фазового портрета.

a) $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x^2 - 4$.

b) $\dot{x} = \sin y, \dot{y} = x - x^3$.

c) $\dot{x} = 1 + y - e^x, \dot{y} = x^3 - y$.

d) $\dot{x} = y + x - x^3, \dot{y} = -y$.

e) $\dot{x} = \sin y, \dot{y} = \cos x$.

f) $\dot{x} = xy - 1, \dot{y} = x - y^3$.

Упражнение 3.21 Рассмотрите систему $\dot{x} = y^3 - 4x, \dot{y} = y^3 - y - 3x$.

a) Найдите неподвижные точки и определите их тип.

b) Покажите, что прямая $x = y$ является инвариантной.

c) Покажите, что $|x(t) - y(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ для всех остальных траекторий.

d) Постройте фазовый портрет.

Упражнение 3.22 Используя тождество $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$, покажите, что $\dot{\theta} = (x\dot{y} - y\dot{x})/r^2$.

Упражнение 3.23 Рассмотрите систему $\dot{x} = -y - x^3, \dot{y} = x$.

Покажите, что начало координат является фокусом, хотя линеаризация прогнозирует центр.

Упражнение 3.24 Определите тип неподвижной точки — начала координат для системы $\dot{x} = -y + ax^3, \dot{y} = x + ay^3$ для всех значений параметра a .

Упражнение 3.25 Рассмотрите систему $\dot{r} = r(1 - r^2), \dot{\theta} = 1 - \cos \theta$, где r, θ представляют собой полярные координаты. Постройте фазовый портрет и тем самым покажите, что неподвижная точка $r^* = 1, \theta^* = 0$ притягивающая, но не устойчивая по Ляпунову.

Упражнение 3.26 Рассмотрите следующие системы „кролики и овцы“, где $x, y \geq 0$. Найдите неподвижные точки, исследуйте их на устойчивость, постройте эскиз фазового портрета. Укажите бассейны притяжения любой устойчивой неподвижной точки.

a) $\dot{x} = x(3 - x - y), \dot{y} = y(2 - x - y)$.

b) $\dot{x} = x(3 - 2x - y), \dot{y} = y(2 - x - y)$.

c) $\dot{x} = x(3 - 2x - 2y), \dot{y} = y(2 - x - y)$.

Список литературы

- [1] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. - М.: Факториал, 1999. - 768 с.
- [2] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. - М.: Наука, 1975. - 304 с.
- [3] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения 4-е изд.- М.: Наука, 1974. - 331с.
- [4] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений 8-е изд.. Гос. изд. физико-математ. литературы, 1959. - 468с.
- [5] Трубецков Д.И. Феномен модели Лотки - Вольтерры. Саратовский гос. университет им. Чернышевского, 2011. - 20с.
- [6] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. КомКнига, 2007. - 240с.
- [7] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. - Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003. - 428 с.
- [8] Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos - Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press, 1999.
- [9] Strogatz S. H. Nonlinear dynamics and chaos - Perseus Books is a member of the Perseus Books Group, 1994. - 505 p.

Содержание

Введение	3
1 Двумерные потоки	4
1.1 Примеры	4
1.2 Классификация линейных систем	14
1.3 Модель взаимоотношений между людьми	24
2 Фазовая плоскость	27
2.1 Фазовый портрет	27
2.2 Существование, единственность и топологические последствия	29
2.3 Неподвижные точки и линеаризация	31
2.4 Модель „Кролики против овец“	36
3 Упражнения	41
Список литературы	46

**Двумерные динамические системы в
приложениях**

Составители

Юлия Александровна Касаткина

Татьяна Михайловна Митрякова

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования "Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.