

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКЕ

(электронное пособие)

Практикум

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.06.01 – «Физика и астрономия», и для магистрантов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.04.03 – «Радиофизика»

Нижний Новгород
2014

УДК 535.4
ББК 22.343
Д-50

Д-50 ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКЕ (электронное пособие):
Составители: Бодров С. Б., Царев М. В. Практикум. – Нижний Новгород:
Нижегородский госуниверситет, 2014. – 17 с.

Рецензент: доктор физ.-мат.наук **А. Н. Степанов**

В лабораторной работе исследуется дифракция оптического излучения на периодических неоднородностях, создаваемых ультразвуковой волной в воде.

Практикум предназначен для магистрантов и аспирантов – слушателей исследовательской школы «Лазерная физика».

Подготовлено в соответствии с Планом мероприятий по реализации программы повышения конкурентоспособности ННГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013-2020 годы.

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ,
д.ф.-м.н., доцент **Е.З. Грибова**

УДК 535.4
ББК 22.343

Введение

Ультразвуковые волны – это продольные упругие волны с частотой от 20 кГц до 500 МГц. Соответствующий диапазон длин волн зависит от скорости распространения волн в среде и, например, для воды, где скорость ультразвука равна 1470 м/с, составляет от ~7 см до ~3 мкм.

Распространение ультразвуковой волны сопровождается возникновением неоднородностей оптического показателя преломления среды в областях сжатия и разрежения. В случае стоячей волны (возникающей при наложении двух встречных бегущих волн), эти неоднородности образуют в пространстве неподвижную периодическую структуру, которая представляет собой фазовую дифракционную решетку.

Дифракция света на упругих волнах была предсказана Бриллюэном (L.N. Brillouin) в 1922 году и обнаружена экспериментально в 1932 году. Это явление позволяет исследовать характеристики упругих волн с помощью света или управлять световыми пучками с помощью упругих волн. Эффект дифракции света на ультразвуке лежит в основе работы целого класса акустооптических приборов – дефлекторов и модуляторов света, имеющих в настоящее время многочисленные применения.

Цель настоящего практикума – экспериментально исследовать дифракцию света на периодических неоднородностях показателя преломления, создаваемых в воде стоячей синусоидальной ультразвуковой волной.

Теоретическая часть

Пусть плоская световая волна длины λ , распространяющаяся вдоль оси z , падает на плоский слой среды толщины d , в котором возбуждена стоячая синусоидальная ультразвуковая волна, имеющая период Λ вдоль направления x (рис. 1).

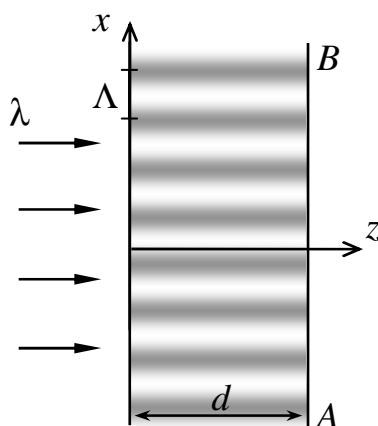


Рис. 1. Геометрия задачи

Показатель преломления среды n меняется по закону

$$n = n_0 + \mu \cos(Kx) \cos(\Omega t), \quad (1)$$

где n_0 – показатель преломления среды в отсутствие ультразвука, μ – амплитуда модуляции показателя преломления, зависящая от свойств среды и амплитуды ультразвуковой волны, $K=2\pi/\Lambda$ – волновое число ультразвуковой волны, $\Omega=Kv$ – циклическая частота ультразвука (v – скорость ультразвука). Так как скорость света c значительно больше, чем скорость ультразвука v , то можно считать, что ультразвуковое поле за время распространения через него светового фронта не изменяется. Будем считать, что амплитуда модуляции показателя преломления μ много меньше показателя преломления в отсутствие возмущения n_0 , и градиенты показателя преломления среды также малы. В этом случае можно не учитывать искривления световых лучей и пренебречь модуляцией амплитуды световой волны при прохождении через среду, а значит, ультразвуковая волна изменит только фазу плоской световой волны.

Набег фазы световой волны равен произведению волнового числа света $k = 2\pi/\lambda$ и оптической толщины среды:

$$\Delta\varphi = knd, \quad (2)$$

или, с учетом формулы (1),

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + m \cos(Kx), \quad (3)$$

где $\Delta\varphi_0 = kn_0d$ – набег фазы в отсутствие ультразвуковой волны, а глубина модуляции фазы

$$m = k\Delta nd. \quad (4)$$

Здесь введена величина $\Delta n = \mu \cos(\Omega t)$, представляющая собой амплитуду пространственных изменений стоячей волны показателя преломления в фиксированный момент времени.

Пусть на входной границе слоя комплексное электрическое поле световой волны $\hat{E}_0 = A_0 \exp(i\omega t)$ [$\omega=kc$ – циклическая частота света], тогда на выходе слоя в плоскости AB в соответствии с выражением (3) для набег фазы комплексное электрическое поле можно записать в виде

$$\hat{E} = \hat{A}_0 \exp[i(\omega t - m \cos Kx)], \quad (5)$$

где комплексная амплитуда колебаний $\hat{A}_0 = A_0 \exp(-i\Delta\varphi_0)$ учитывает набег фазы в отсутствие ультразвуковой волны, а глубина модуляции фазы m определяется формулой (4). Это колебание изображено на векторной диаграмме (рис. 2а). Изображающий вектор при изменении x описывает дугу окружности радиуса A_0 , а его угол отклонения зависит от x как $\varphi(x) = m \cos Kx$.

В случае малой глубины модуляции ($m \ll 1$) формулу (5) можно преобразовать, используя формулу Эйлера и полагая $\cos(m \cos Kx) \approx 1$, $\sin(m \cos Kx) \approx m \cos Kx$, в результате чего колебание (5) можно представить в виде суммы трёх колебаний:

$$\hat{E} = \hat{A}_0 \exp(i\omega t) + \frac{m\hat{A}_0}{2} \exp\left[i\left(\omega t - Kx - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{m\hat{A}_0}{2} \exp\left[i\left(\omega t + Kx - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (6)$$

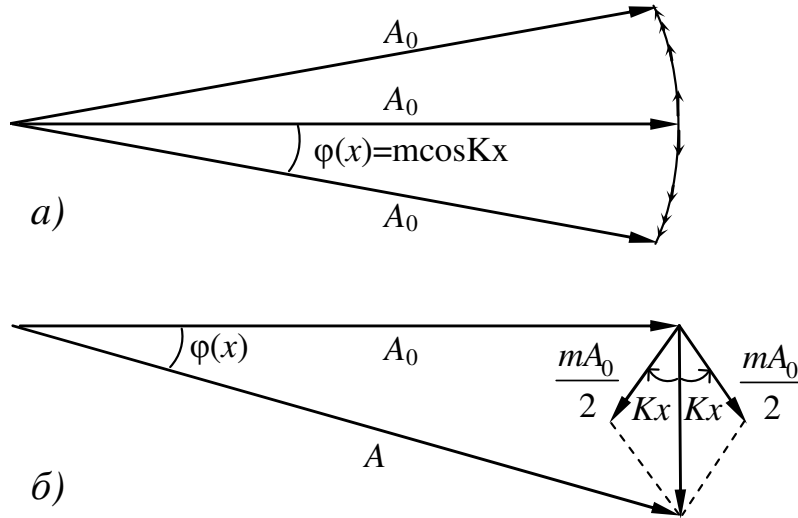


Рис. 2. Векторные диаграммы для формул (5) и (6)

Эти три колебания и их сумма изображены на векторной диаграмме (рис. 2б). При изменении x вектор, изображающий первое колебание, не меняется, а два других вращаются в противоположные стороны. Легко видеть, что при $m \ll 1$ угол $\varphi(x)$ мал и приблизительно равен $\varphi(x) \approx \text{tg}\varphi(x) = m \cos Kx$, а амплитуда суммарного колебания $A \approx A_0$, что согласуется с формулой (5). Формула (6) напоминает выражение для амплитудно-модулированного колебания, с тем отличием, что «боковые» гармоники отстают по фазе на $\pi/2$ от «центральной» гармоники.

Решение волнового уравнения для световой волны, прошедшей фазовую решётку, представляет собой сумму трёх плоских волн («центральной» и двух «боковых») с одинаковыми волновыми числами k , вместе создающих в плоскости $z = 0$ колебание (6):

$$\hat{E} = \hat{A}_0 \exp(i\omega t - ikz) + \frac{m\hat{A}_0}{2} \exp\left[i\left(\omega t - Kx - k_z z - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{m\hat{A}_0}{2} \exp\left[i\left(\omega t + Kx - k_z z - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (7)$$

«Центральная» волна распространяется вдоль оси z , а «боковые» волны – под углами $\psi_{\pm} = \pm \arcsin \frac{K}{k} \approx \pm \frac{\lambda}{\Lambda}$ к оси z . Продольное волновое число k_z боковых волн получается из условия $k_z^2 + K^2 = k^2$.

Дифракционную картину Фраунгофера от ультразвуковой решётки можно наблюдать в фокальной плоскости линзы, расположенной за решёткой. Рассмотренные выше плоские волны образуют три главных дифракционных максимума. Если оптическая ось линзы параллельна направлению падающего

пучка, то они расположены в главном фокусе F_0 и в точках F_1 и F_2 с координатами

$$x_{1,2} = F\psi_{\pm} = \pm F \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad (8)$$

где F - фокусное расстояние линзы (см. рис. 3). Формула (8) позволяет, например, найти период фазовой решётки Λ по известным координатам дифракционных максимумов.

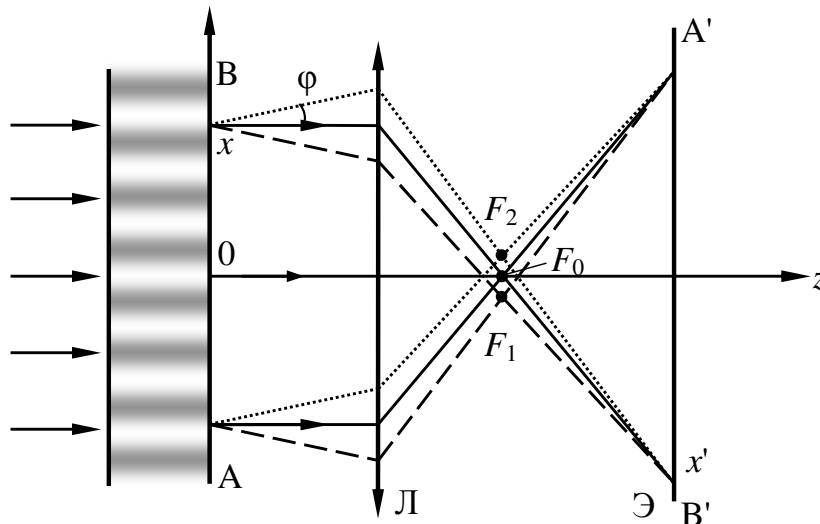


Рис. 3. Схема наблюдения дифракционной картины и визуализации фазовой решётки

Можно ли увидеть саму фазовую решётку, а не создаваемую ей дифракционную картину? Поскольку глаз не чувствителен к фазе световых колебаний, а реагирует только на освещённость, то непосредственно наблюдать фазовую решётку нельзя – амплитуда световых колебаний во всех точках плоскости AB одинакова. Нельзя увидеть также изображение фазовой структуры, создаваемое линзой в некоторой плоскости $A'B'$, сопряжённой AB (рис. 3). Главное свойство сопряжённых плоскостей, расстояние между которыми подчиняется формуле тонкой линзы $1/a + 1/b = 1/F$, состоит в том, что соотношение между фазами и амплитудами световых колебаний в точке x и в сопряжённой ей точке x' одинаково. Поэтому три плоские волны, на которые мы разложили световое поле, создадут в плоскости $A'B'$ колебания с таким же отношением амплитуд и сдвигом фаз, как в плоскости AB . В результате в плоскости $A'B'$ воспроизводится фазовая модуляция (при этом пространственный период модуляции фазы может быть увеличен или уменьшен) и равномерное распределение амплитуд.

Для того чтобы в плоскости изображения можно было увидеть картину ультразвукового поля, нужно созданную этим полем фазовую модуляцию превратить в амплитудную. Для этого можно использовать метод тёмного поля, заключающийся в том, что центральный максимум дифракционной картины (в области F_0) закрывают. Тогда в плоскости изображения

складываются колебания только от «боковых» плоских волн [см. формулу (7)], которые создают поле

$$E' = \text{Re}[\hat{E}'] = \frac{mA'_0}{2} [\sin(\omega t' - K'x') + \sin(\omega t' + K'x')] = mA'_0 \cos(K'x') \sin(\omega t'). \quad (9)$$

Здесь физические величины, относящиеся к плоскости изображения, отмечены штрихами; в частности, $K' = K/u$, u – увеличение линзы ($u = b/a$). Освещённость в плоскости изображения пропорциональна усреднённому по времени квадрату амплитуды

$$A'^2(x') = \left[\pi \mu \frac{d}{\lambda} \right]^2 A_0'^2 \cos^2(K'x') \quad (10)$$

и изменяется с пространственным периодом $\frac{\pi}{K'} = \frac{u\Lambda}{2}$. При переносе изображения линзой «один в один» ($u = 1$) этот период в два раза меньше периода фазовой решётки.

Экспериментальная установка

Схема установки изображена на рис. 4. Источником света является лампа накаливания S с вертикально расположенной спиралью накаливания (спираль перпендикулярна плоскости рисунка). Поскольку спираль не является точечным источником, то для создания последнего используются линза-конденсор K и вертикальная щель (D). Щель совмещают с фокусом линзы L_1 , в результате чего пучок света после линзы становится параллельным. Пучок проходит через кювету с водой. Для возбуждения ультразвуковой волны в кювете используется кварцевая пластина Q , на которую подается перестраиваемое по частоте синусоидальное напряжение с генератора. В противоположной от пластины Q стороне кюветы расположена металлическая пластина R , отражающая ультразвуковую волну в обратном направлении. В результате образуется стоячая волна.

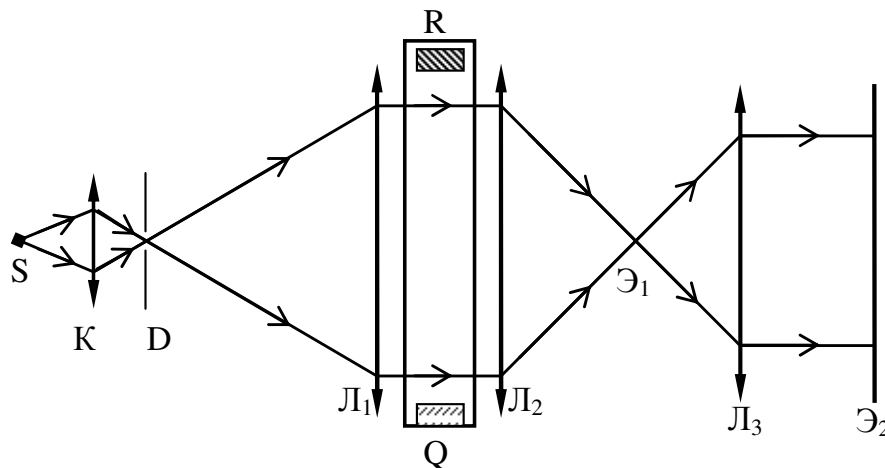


Рис. 4. Схема экспериментальной установки

После прохождения кюветы свет фокусируется линзой L_2 . В фокальной плоскости этой линзы наблюдается дифракционная картина Фраунгофера в виде вертикальных полос. Эту картину можно наблюдать невооружённым глазом на экране или в микроскоп. Если закрыть центральный максимум с помощью тонкой вертикальной проволоки (шторки \mathcal{E}_1) и поставить линзу L_3 (в экспериментальной установке это длиннофокусный объектив), то на экране \mathcal{E}_2 можно получить увеличенное изображение звукового поля. Это изображение можно наблюдать глазом на экране или в микроскоп.

Общий вид установки и устройство кюветы показаны на рис. 5, 6.

Для калибровки измерительной шкалы микроскопа используются две амплитудные эталонные решётки (миры) с периодами $1/6$ и $0,25$ мм (рис. 7), которые можно размещать в кювете с водой.

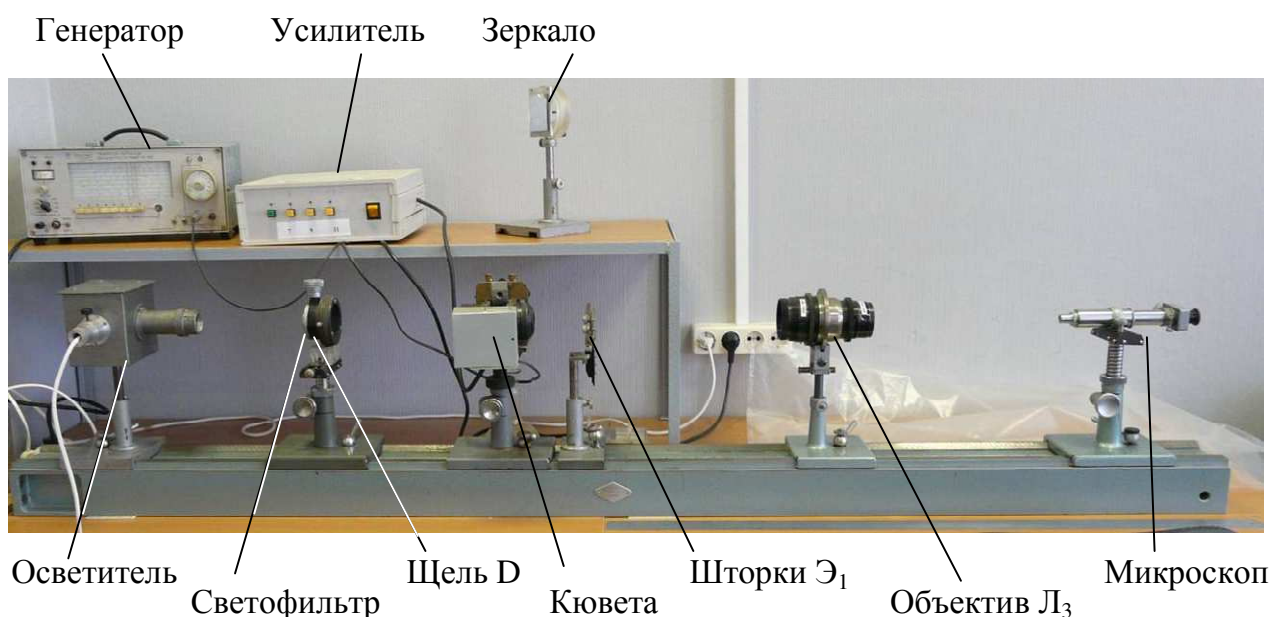


Рис. 5. Общий вид установки



Рис. 6. Кювета

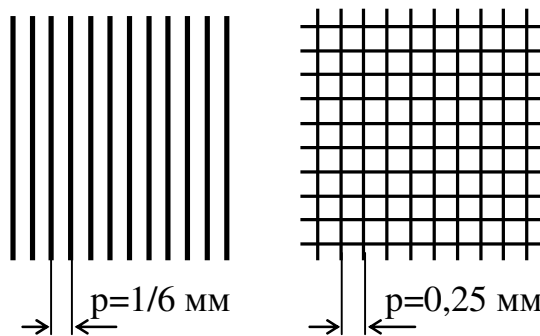


Рис. 7. Миры

Для генерации ультразвуковой волны в лабораторной установке используется круглая пластинка кварца. Пластинка с торцов металлизирована и вмонтирована с помощью резиновых прокладок в торцевую стенку кюветы с водой (считаем, что пластинка закреплена в центральном сечении). Кварц при таком закреплении является практически свободным, т.к. его окружают среды с малым акустическим сопротивлением $\sqrt{E\rho}$ (Здесь E – модуль Юнга, ρ – плотность среды). Действительно, акустические сопротивления воздуха, воды и кварца равны, соответственно, $4,29 \cdot 10^2$, $1,49 \cdot 10^5$ и $1,53 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$.

При подведении высокочастотного напряжения к торцам кварцевой пластины в ней за счет обратного пьезоэффекта возбуждаются вынужденные механические колебания. С наибольшей эффективностью возбуждаются колебания на собственных частотах пластины, при которых в ней формируются стоячие упругие волны с пучностями смещений на торцах пластины и узлом в центральном сечении (см. рис. 8). Резонансные длины волн удовлетворяют условию

$$2h = \Lambda_0 = 3\Lambda_1 = \dots = (2i+1)\Lambda_i, \quad (11)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$; h – толщина пластины. Волну, соответствующую $i = 0$, называют основной частотой.

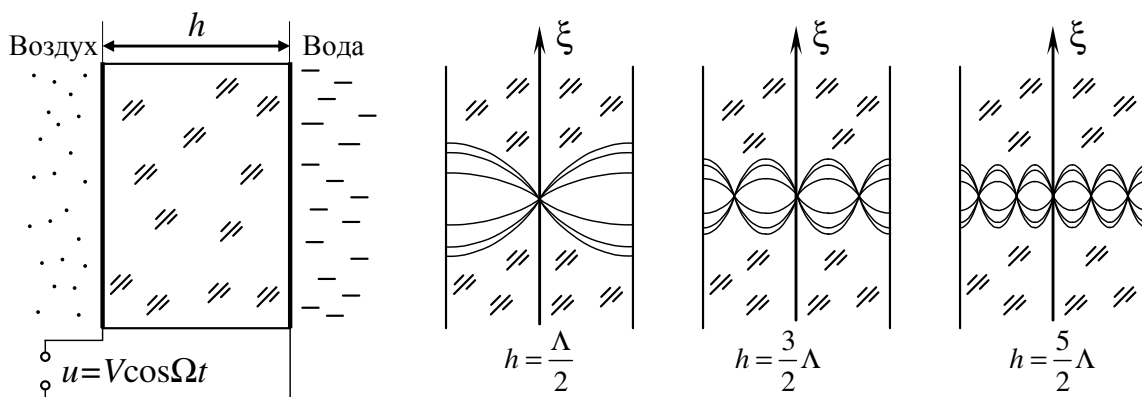


Рис. 8. Возбуждение ультразвуковых волн

В целом помещенная в воду кварцевая пластина является высокодобротной колебательной системой с достаточно узкой резонансной кривой. Это необходимо учитывать при проведении эксперимента.

При неограниченной кювете от торца пластины будет распространяться слабо расходящаяся (диаметр пластины $\gg \Lambda$) бегущая ультразвуковая волна. Для получения стоячей волны на некотором расстоянии от кварцевой пластины устанавливается отражатель в виде полированной стальной пластины, параллельной излучающей поверхности кварца. В силу значительного отличия акустических сопротивлений воды и стали ($1,49 \cdot 10^5$ и $3,98 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ соответственно) падающая волна практически полностью отражается. Суперпозиция падающей и отражённой волн образует стоячую волну.

Порядок выполнения работы

1. Рассчитайте основную частоту и ряд резонансных частот кварцевого излучателя, пользуясь формулой (11) и известным значением толщины кварцевой пластинки. Выберите из ряда резонансных частот частоту ν_i , которая бы возбуждала в воде ультразвуковую волну с длиной Λ_i около 0,2 мм. Эта частота и две следующие резонансные частоты, ν_{i+1} и ν_{i+2} , будут рабочими.

2. Настройте источник света. Для этого включите осветитель и, перемещая лист бумаги вдоль оптической оси, найдите плоскость, в которую конденсорная линза K осветителя переносит изображение спирали лампы накаливания. Расположите микрометрическую щель D в этой плоскости так, чтобы сфокусированный пучок находился посередине щели. Теперь щель является «точечным» источником света. Убедитесь, что световой пучок, исходящий из щели, равномерно освещает входную линзу кюветы L_1 .

3. Чтобы получить параллельный пучок света в кювете, совместите фокальную плоскость входной линзы кюветы L_1 с плоскостью источника света (т. е. с плоскостью щели D). Для этого следует снять выходную линзу кюветы L_2 , поставить за кюветой зеркало и отразить световой пучок в обратном направлении. Параллельный пучок, отражаясь от зеркала, сфокусируется снова в плоскости щели D (можно будет увидеть чёткий «зайчик» - изображение щели).

4. Настройте систему переноса изображения для наблюдения дифракции на ультразвуковой волне. Установите выходную линзу кюветы L_2 , найдите её фокус с помощью листка бумаги и поместите объектив микроскопа в 2-3 см дальше фокуса. Передвигая микроскоп вдоль оптической оси системы, найдите чёткое изображение щели D в микроскопе. Достигнутое положение микроскопа обеспечивает перенос изображения из фокальной плоскости линзы L_2 в плоскость наблюдения. Зафиксируйте положение микроскопа.

5. Наполните кювету водой и установите в неё эталонную решётку (миру) с периодом 1/6 мм. Наблюдайте дифракционную картину Фраунгофера при дифракции на мире в белом, красном и зелёном свете (для наблюдений в красном и зелёном свете установите соответствующий светофильтр). Измерьте координаты дифракционных максимумов в красном и зелёном свете с помощью окулярного микрометра и постройте графики зависимостей координаты максимума от его номера. Уберите миру.

6. Получите стоячую ультразвуковую волну в кювете. Для этого включите генератор высокочастотных сигналов Г4-102, затем включите усилитель. Выберите диапазон, в котором находится расчётная частота (ν_i , ν_{i+1} или ν_{i+2}) с помощью нажатия на соответствующую кнопку на генераторе. Усилитель сконструирован для усиления сигнала в окрестности трёх частот: 7, 9 и 11 МГц. Включите нужный контур усиления нажатием соответствующей кнопки на усилителе. Затем вращайте ручку точной настройки частоты на генераторе. Небольшой вольтметр, установленный на кювете, показывает

величину резонансного отклика кварцевой пластины. Чем больше его показания, тем ближе частота к резонансной и тем эффективнее возбуждается ультразвуковая волна. Добейтесь максимального отклонения стрелки вольтметра и запишите экспериментально наблюдаемое значение резонансной частоты (соответственно, ν_i^* , ν_{i+1}^* или ν_{i+2}^*). Для получения стоячей волны, возможно, придется отрегулировать положение отражающей ультразвуком пластины R .

7. С помощью микроскопа наблюдайте дифракционную картину Фраунгофера при дифракции на стоячей ультразвуковой волне для частот ν_i^* , ν_{i+1}^* или ν_{i+2}^* . Наблюдения проводите в белом, красном и зелёном свете. Зарисуйте дифракционные картины. Измерьте координаты дифракционных максимумов в красном и зелёном свете, постройте графики. Определите длины ультразвуковых волн Λ_i , Λ_{i+1} и Λ_{i+2} , пользуясь графиками из п. 5 и 7.

8. Чтобы по результатам выполненных измерений найти длину волны света, нужно определить увеличение микроскопа. Поместите миру с периодом 0,25 мм в кювету с водой и установите объектив фотоаппарата L_3 так, чтобы сформировать действительное изображение миры. Получите чёткое изображение миры в микроскопе. Измерьте наблюдаемый в микроскоп период миры и рассчитайте увеличение оптической системы u . Исходя из расстояний между элементами схемы, рассчитайте увеличение u_1 объектива L_3 (оно должно быть порядка единицы). Вычислите увеличение микроскопа u_2 . Используя найденное значение u_2 и измеренные в п. 7 координаты дифракционных максимумов, найдите длину волны красного и зелёного света λ . Оцените точность определения λ .

9. Используйте собранную в п. 8 схему для наблюдения фазовой дифракционной решётки методом тёмного поля. Включите генератор, настройтесь на одну из резонансных частот. В фокусе линзы L_2 поместите стойку с проволочками \mathcal{E}_1 . С помощью микровинта перемещайте шторки в поперечном направлении так, чтобы они перекрывали часть дифракционных максимумов. Зарисуйте и объясните картины, наблюдаемые при перекрывании: одного из максимумов – нулевого, +1 или -1; нулевого и +1 вместе.

10. Осуществите визуализацию фазовой дифракционной решётки методом тёмного поля. Для этого перекройте только центральный максимум. Наблюдайте изображение дифракционной решётки в микроскоп для частот ν_i^* , ν_{i+1}^* или ν_{i+2}^* . Измерьте наблюдаемый период решётки i , используя известное значение увеличения u , определите Λ_i , Λ_{i+1} и Λ_{i+2} .

11. Оцените точность измерений длин ультразвуковых волн, выполненных в п. 7 и 10. Сравните результаты этих измерений с расчётом на основе найденных ν_i^* , ν_{i+1}^* и ν_{i+2}^* . Построив график $\nu_i^*(i)$, определите уточнённое значение толщины кварцевой пластины.

Параметры установки и физические величины, необходимые для обработки результатов

1. Толщина пластинки кварца $h = (2,7 \pm 0,1)$ мм
2. Скорость звуковой волны:

в кварце	$v_{зв. кв.} = (5390 \pm 10)$ м/с
в воде	$v_{зв. в.} = (1470 \pm 10)$ м/с
3. Периоды эталонных решёток:

одномерно периодической	$p = (1/6 \pm 0,001)$ мм
двумерно периодической	$p = (0,25 \pm 0,001)$ мм
4. Фокусные расстояния линз:

входная линза кюветы	$F = (263 \pm 5)$ мм
выходная линза кюветы	$F = (105 \pm 5)$ мм
фотообъектив	$F = (200 \pm 5)$ мм

Контрольные вопросы

1. Почему дифракционная решётка, создаваемая ультразвуковой волной, называется фазовой?
2. Получите формулы (6) и (7).
3. В каком направлении вращаются векторы на рис. 2 при изменении координаты x ? Как при этом изменяется суммарный вектор?
4. За счёт чего метод тёмного поля позволяет увидеть узлы и пучности ультразвуковой волны?
5. Поясните назначение всех элементов оптической схемы (рис. 4).
6. Чем определяется эффективность возбуждения стоячей ультразвуковой волны в лабораторной установке?
7. Какое распределение интенсивности наблюдается на экране при фраунгоферовой дифракции плоской световой волны на синусоидальной амплитудной дифракционной решетке? Чем определяется ширина дифракционных максимумов и расстояние между ними?
8. Объясните отличие дифракционных картин, наблюдаемых при дифракции на ультразвуковой волне и на эталонной амплитудной решётке.
9. Можно ли наблюдать дифракцию света на бегущей ультразвуковой волне? Получить картину поля такой волны?
10. Для визуализации неоднородностей показателя преломления можно использовать метод фазового контраста, в котором фазу «центральной» волны [см. формулу (7)] изменяют на $\pi/2$ (путем помещения прозрачной пластинки нужной толщины в центральный максимум дифракционной картины). С помощью векторной диаграммы найдите получающееся при этом распределение амплитуд в плоскости $A'B'$. Каким будет период модуляции амплитуды? Период модуляции освещённости?

Приложение

Получим выражение для распределения интенсивности света в фраунгоферовой дифракционной картине, наблюдаемой на экране при дифракции на синусоидальной амплитудной дифракционной решётке. Для этого предварительно рассмотрим сферическую волну, распространяющуюся из некоторой точки S (рис. П1).

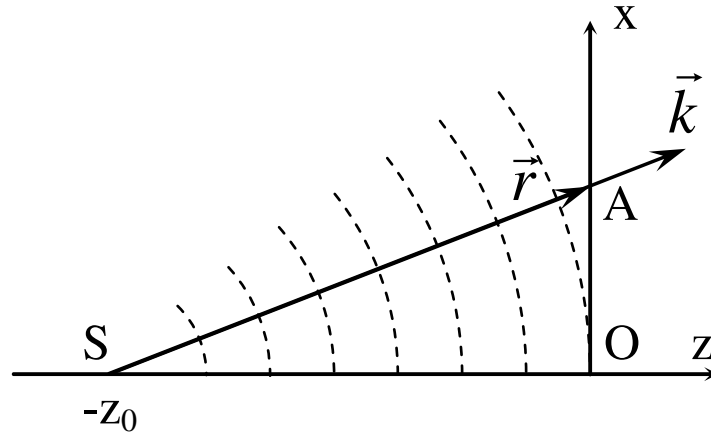


Рис. П1. Сферическая волна. Пунктиром показаны фазовые фронты

Запишем электрическое поле волны в виде

$$E(r, t) = E_0(r) \cos(\omega t - kr), \quad (\text{П1})$$

где r и k – модули векторов \vec{r} и \vec{k} , исходящих из точки S . Амплитуда волны $E(r)$ спадает обратно пропорционально r . Нас будет интересовать распределение фазы волны вдоль оси Ox . Для параксиальных, т.е. распространяющихся под малыми углами к оси Oz лучей, амплитуду волны можно считать не зависящей от x ($x \ll z_0, r \approx z_0$). В точку O приходят колебания

$$E(x=0, t) = E_0 \cos(\omega t - kz_0), \quad (\text{П2})$$

а в точку A

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kr). \quad (\text{П3})$$

Для параксиальных лучей можно принять $r \approx z_0 + \frac{x^2}{2z_0}$, тогда разность фаз колебаний в точках O и A будет равна

$$\Delta\varphi = \frac{kx^2}{2z_0} = -\frac{\pi x^2}{\lambda z_0}. \quad (\text{П4})$$

Для простоты положим начальную фазу колебаний в точке O равной нулю, тогда в точке A колебания запишутся как

$$E(x, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi x^2}{\lambda z_0}\right). \quad (\text{П5})$$

Аналогичным образом, сходящаяся в точку с координатами (x, z_0) сферическая волна в плоскости Ox даст колебание

$$E(x, t) = E_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi x^2}{\lambda z_0} \right). \quad (\text{П6})$$

Таким образом, в параксиальном приближении сферическая волна порождает в плоскости колебания с квадратичной зависимостью фазы от координаты.

Теперь рассмотрим прохождение плоской волны через тонкую собирающую линзу с показателем преломления n (ограничимся случаем плоско-выпуклой линзы, рис. П2).

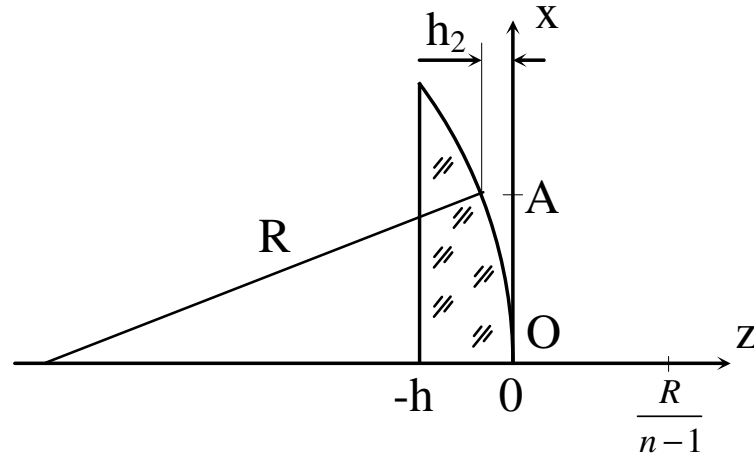


Рис. П2. Линза

Луч, проходящий через центр линзы, приобретает фазу

$$\varphi(0) = -\frac{2\pi}{\lambda} nh, \quad (\text{П7})$$

а луч, проходящий через точку А,

$$\varphi(x) = -\frac{2\pi}{\lambda} (nh_1 + h_2), \quad (\text{П8})$$

Для параксиальных лучей $h_2 \cong \frac{x^2}{2R}$ (R – радиус линзы), и разность фаз колебаний в точках А и О

$$\Delta\varphi(x, 0) = k \frac{(n-1)x^2}{2R} = \frac{\pi(n-1)x^2}{\lambda R}. \quad (\text{П9})$$

Если фазу колебаний в точке О положить нулю, то колебания в точке А запишутся как

$$E(x, t) = E_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi x^2}{\lambda \frac{R}{n-1}} \right). \quad (\text{П10})$$

Из сравнения последнего выражения с полученной выше формулой для поля сферической волны делаем вывод, что плоская волна, распространяющаяся вдоль оси линзы, преобразуется линзой в сферическую волну, сходящуюся в точку с координатами $(0, R/(n-1))$, т.е. фокусное расстояние линзы равно $F = R/(n-1)$.

Вернемся к вопросу о распределении интенсивности в фокальной плоскости линзы за амплитудной дифракционной решеткой. Для упрощения вычислений будем решать одномерную задачу (такое решение справедливо, если перед линзой установлена прямоугольная диафрагма).

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, в точку наблюдения М от элемента волнового фронта dx поступают световые колебания, комплексная амплитуда которых, с точностью до постоянного фазового множителя, равна

$$d\hat{E} = cE_0[1 + m \cos Kx] e^{j\frac{\pi x^2}{\lambda F}} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r} dx. \quad (\text{П11})$$

Здесь $e^{j\frac{\pi x^2}{\lambda F}}$ - фазовый множитель линзы, r - расстояние от элемента dx до точки наблюдения, c - коэффициент, который зависит от r , λ , диаграммы направленности вторичного источника, поперечного размера прямоугольной диафрагмы. Выражение в квадратных скобках в (П11) отвечает за амплитудную модуляцию волны дифракционной решёткой. В случае параксиальных лучей расстояние r можно представить в виде

$$r = \sqrt{F^2 + (\xi - x)^2} \cong F + \frac{(\xi - x)^2}{2F}. \quad (\text{П12})$$

С учетом (П12) преобразуем (П11) к виду

$$d\hat{E} = cE_0 e^{-j\frac{2\pi F}{\lambda}} e^{-j\frac{\pi \xi^2}{\lambda F}} \left[e^{j\frac{2\pi \xi}{\lambda F}x} + \frac{1}{2} m e^{j\frac{2\pi}{\lambda F}(\xi + \frac{\lambda}{\Lambda}F)x} + \frac{1}{2} m e^{j\frac{2\pi}{\lambda F}(\xi - \frac{\lambda}{\Lambda}F)x} \right] dx. \quad (\text{П13})$$

Комплексную амплитуду суммарного колебания в точке М получим интегрированием (П13) по апертуре (от $-D/2$ до $+D/2$):

$$\hat{E}(\xi) = cDE_0 e^{-j\frac{2\pi F}{\lambda}} e^{-j\frac{\pi \xi^2}{\lambda F}} \left[\frac{\sin \frac{\pi D \xi}{\lambda F}}{\frac{\pi D \xi}{\lambda F}} + \frac{1}{2} m \frac{\sin \frac{\pi D}{\lambda F} \left(\xi - \frac{\lambda}{\Lambda} F \right)}{\frac{\pi D}{\lambda F} \left(\xi - \frac{\lambda}{\Lambda} F \right)} + \frac{1}{2} m \frac{\sin \frac{\pi D}{\lambda F} \left(\xi + \frac{\lambda}{\Lambda} F \right)}{\frac{\pi D}{\lambda F} \left(\xi + \frac{\lambda}{\Lambda} F \right)} \right] dx. \quad (\text{П14})$$

Из последнего выражения видно, что распределение освещенности определяется функциями вида $\frac{\sin x}{x}$ (как при дифракции Фраунгофера). Таким образом, положительная линза переносит изображение фраунгоферовой дифракционной картины из бесконечности в свою фокальную плоскость. Функции вида $\frac{\sin x}{x}$ приобретают характер δ -функций по мере увеличения линейной апертуры D (полуширина функций равна $\Delta \xi = \frac{\lambda}{D} F$).

Если в достаточно широкое окно установлена мелкоструктурная решётка, т.е. $\Lambda \ll D$, то слагаемые в квадратных скобках в (П14) практически не перекрываются. Тогда освещенность в фокальной плоскости будет равна

$$I(\xi) = \hat{E}(\xi) \cdot \hat{E}^*(\xi) = I_0(\xi) + I_{+1}(\xi) + I_{-1}(\xi), \quad (\text{П15})$$

где $I_0(\xi) = (cE_0D)^2 \left[\sin \frac{\pi D \xi}{\lambda F} / \frac{\pi D \xi}{\lambda F} \right]^2$ – освещенность от плоской волны с волновым вектором \vec{k}_0 , а $I_{\pm 1}(\xi) = \left(\frac{cE_0mD}{2} \right)^2 \left[\sin \frac{\pi D (\xi \mp \frac{\lambda}{\Lambda} F)}{\lambda F} / \frac{\pi D (\xi \mp \frac{\lambda}{\Lambda} F)}{\lambda F} \right]^2$ – освещенности от плоских волн с волновыми векторами \vec{k}_0 и \vec{k}_0 (см. рис. П3).

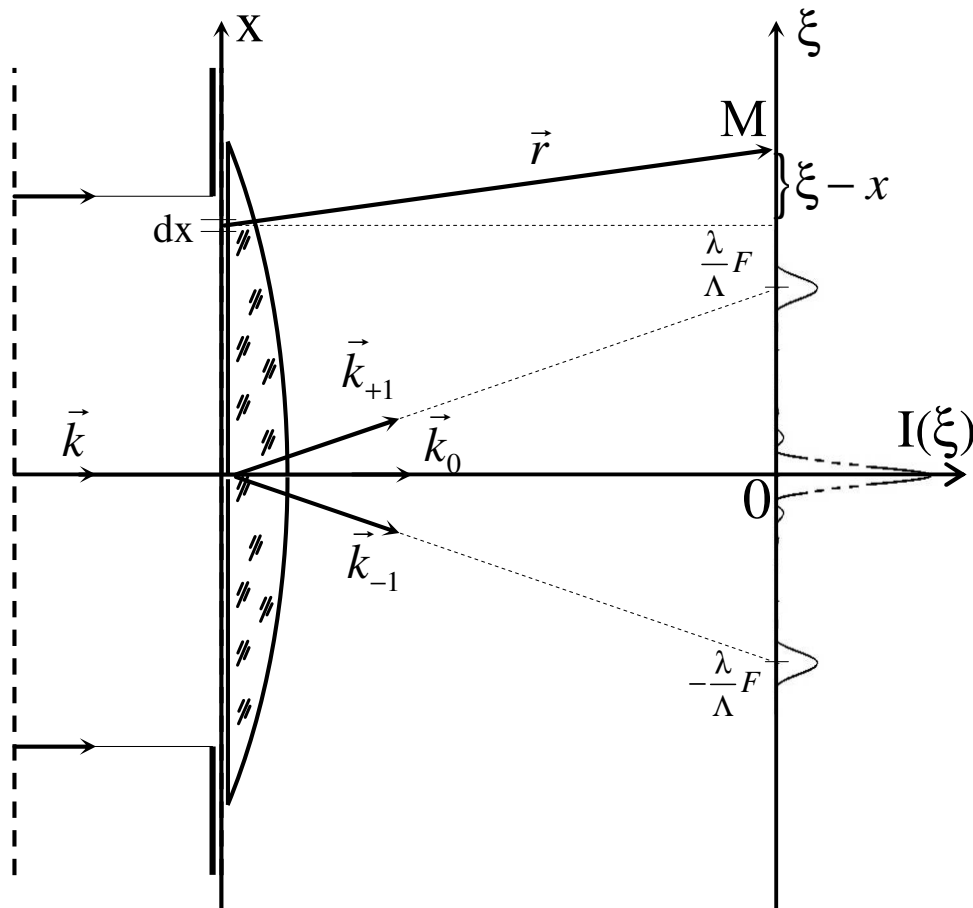


Рис. П3. Фраунгоферова картина дифракции на синусоидальной дифракционной решётке конечной апертуры

Литература

1. Горелик Г.С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. — 2-е изд. — М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. — 572 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. IV. Оптика. — 3-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 792 с.

