

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**А.Л. Пригоровский
В.М. Сандалов
А.А. Ширяева**

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ,
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАМ
КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ЧАСТЬ 1**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики для
студентов ННГУ, обучающихся по направлению 01.03.02 «Прикладная
математика и информатика» и специальности 01.05.01 «Фундаментальные
математика и механика»

Нижний Новгород

2019

УДК 534.01 (075.8)

ББК В 323.1 я 73

П75

Пригоровский А.Л., Сандалов В.М., Ширяева А.А. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ, УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАМ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЧАСТЬ 1: учебно-метод. пособие. – Нижегородский госуниверситет ННГУ, 2019. – 33 с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук **Д.В. Баландин**

Настоящий сборник задач необходим для студентов и аспирантов, специализирующихся по прикладной математике и информатике, изучающих теорию линейных и в, основном, нелинейных колебаний, устойчивость движения и элементы качественного исследования эволюционных систем. В нем говорится о языке теории колебаний, изоморфизме динамических систем. Рассмотрены типы состояний равновесия двумерных и трёхмерных систем, их грубость и не грубость, плоскость $\sigma - \Delta$ и границы на ней, задачи на эти разделы. Для самостоятельной работы приведены контрольные вопросы и более 50 задач. Ко многим из них даны ответы и указания. Сборник задач может быть полезен студентам радиофизического и физического факультетов, изучающих колебания.

УДК 534.01 (075.8)

ББК В 323.1 я 73

© Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, 2019

Оглавление

Введение	4
1. Линейный автономный осциллятор	5
1.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы. Язык современной теории колебаний. Изоморфизм	5
1.2. Зависимости свободных колебаний автономного осциллятора от затухания и циклической частоты	7
1.3. Фазовая плоскость. Фазовый цилиндр	13
1.4. Цикличность в механике и понижение размерности фазового пространства	14
1.5. Задачи	14
2. Некоторые качественные методы исследования нелинейных автономных динамических систем второго порядка	15
2.1. Основной результат, применяемый при построении фазовых портретов динамических систем на плоскости	15
2.2. Типы и устойчивость основных состояний равновесия двумерных динамических систем. Грубые и негрубые состояния равновесия	15
2.3. Плоскость $\sigma - \Delta$. Бифуркационные и небифуркационные границы	18
2.4. Задачи	19
3. Типы и устойчивость состояний равновесий динамических систем третьего порядка	25
4. Задачи для самостоятельной работы	28
Литература	32

Введение

«Теория колебаний сегодня – это широкая всеобъемлющая наука об эволюционных процессах в природе, технике и обществе, в механике, физике, астрономии, химии, биологии, экономике... и во всем, что нас окружает, и в нас самих...»

Ю.И. Неймарк

«Обычную динамику интересует в первую очередь то, что происходит в данное время, теорию колебаний – движение в целом.»

Л.И. Мандельштам

Теория колебаний(ТК) – это ветвь прикладной математики. Она зародилась в недрах теоретической механики. В настоящее время объектом ее исследования являются эволюционные или динамические системы. Под динамической системой (ДС) понимается любой объект или процесс, для которых возможно определить понятие состояния как некоторого мгновенного описания, изменения которого во времени им же и определяется [1]. Есть более общее определение ДС через оператор сдвига, данное А. Пуанкаре. Мы будем пользоваться определением ДС в узком смысле, данное Ю.И. Неймарком. В таких ДС процессы отображаются дифференциальными уравнениями (ДУ). Ограничимся рассмотрением ДС с сосредоточенными параметрами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. В основном будут изучаться автономные ДС, в которых время t в уравнения явно не входит и в большинстве случаев двумерные.

1. Линейный автономный осциллятор

1.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы. Язык современной теории колебаний. Изоморфизм

Рассмотрим три системы с одной степенью свободы.

1. Рассмотрим колебания грузика на пружине.

Ограничимся анализом малых вертикальных колебаний тела массой m около состояния равновесия (СР) $x \equiv 0$ (рис. 1). Согласно второму закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

где $F_{\text{упр}}$ – сила упругости пружины, $F_{\text{тр}}$ – сила трения. Точки над переменными здесь и далее означают дифференцирование по t .

Сила упругости при малых деформациях определяется согласно закону Гука по формуле $F_{\text{упр}} = -kx$, где $k = \text{const} > 0$ – жесткость пружины, x – смещение тела от состояния равновесия.

Сила трения обусловлена сопротивлением воздуха и в линейном приближении $F_{\text{тр}} = -b\dot{x}$, $b = \text{const} > 0$. С учетом приведенных зависимостей для сил уравнение (1) примет вид:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (2)$$

Разделив (2) на m и введя обозначения $2h = \frac{b}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, получим уравнение линейного осциллятора.

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3)$$

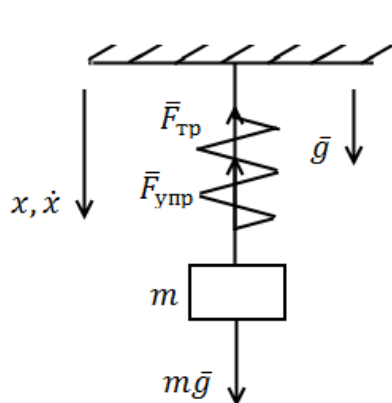


Рис.1

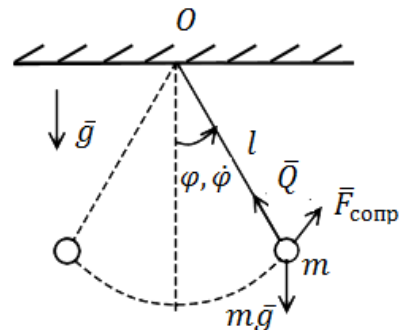


Рис.2

При $h = b = 0$ движение тела представляет собой гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (школьная формула).

2. Рассмотрим малые колебания математического маятника (рис. 2).

Отсчёт угла φ идет от вертикали против часовой стрелки. Уравнение динамики вращательного движения тела массой m записывается в виде:

$$I\dot{\omega} = \sum M_k.$$

Здесь $I = ml^2$ – момент инерции тела относительно точки O , $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость тела, $M_1 = -mgl \sin \varphi$ – момент силы тяжести, $M_2 = a\dot{\varphi}$ – момент сил сопротивления, $a = \text{const} > 0$.

Для малых колебаний $\sin \varphi \approx \varphi$. С учетом этих зависимостей получим уравнение вращательного движения:

$$ml^2\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0. \quad (4)$$

Разделив обе части уравнения на ml^2 , получим

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (5)$$

где $2h = \frac{a}{ml^2}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

При отсутствии трения ($h = 0$) маятник будет совершать гармонические колебания, период которых $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (формула Гюйгенса).

3. Простейший электрический колебательный контур с рассеянием энергии на рис. 3.

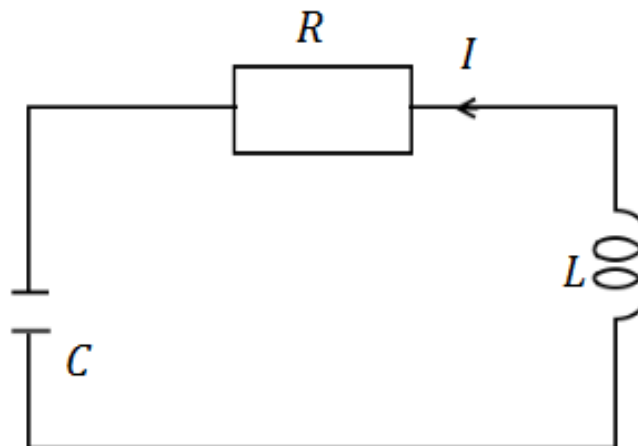


Рис.3

Пусть q – заряд на конденсаторе, тогда сила тока $I = \dot{q}$. По закону Кирхгофа при отсутствии источников в схеме $\sum U_i = 0$, где U_i – напряжения на элементах контура, то есть:

$$L\dot{I} + RI + \frac{q}{C} = 0, \quad (6)$$

где L – индуктивность, R – сопротивление, C – емкость.

Для заряда q уравнение (6) имеет вид:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0. \quad (7)$$

Поделим уравнение (7) на L :

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (8)$$

$$\text{Здесь } 2h = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{CL}.$$

Если $h = 0$, то $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ – формула Томсона.

Заметим, что уравнения (3), (5) и (8) одинаковые, хотя физически системы различны. В таком случае говорят, что системы изоморфны. С точки зрения ТК между рассмотренными ДС нет различия

1.2. Зависимости свободных колебаний автономного осциллятора от затухания и циклической частоты

Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (9)$$

Это уравнение автономного диссипативного линейного осциллятора. Свободные колебания в системе будут различными в зависимости от затухания h и циклической частоты ω_0 . Рассмотрим 3 случая.

1. *Трения нет, $h = 0$ (консервативный случай):*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10)$$

Фундаментальная система решений $-\{\sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t\}$. Тогда общее решение запишется так:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = K \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A, B или K, φ – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (НУ): $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

$$K = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x_0}{K}, \quad \sin \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 K}.$$

Осциллограмма $x(t)$ имеет вид, изображенный на рис.4.

Аналогично можно построить осциллограмму и для скорости, амплитуда колебаний которой равна $\omega_0 K$.

Перейдём от (10) к системе двух уравнений первого порядка (нормальная форма Коши):

$$\{\dot{x} = y, \dot{y} = -\omega_0^2 x\}. \quad (11)$$

На плоскости $(x, y = \dot{x})$ каждому состоянию ДС (11), т.е. каждому ее решению $x(t), y(t)$ в момент времени t поставим в соответствие точку плоскости Декарта. И обратно, каждой точке этой плоскости отвечает определённое состояние $x(t), y(t)$ в момент времени t . Такая плоскость называется фазовой плоскостью (ФП). Точка, представляющая в этом пространстве состояние системы, называется изображающей или фазовой точкой. ФП выбирается так, чтобы соответствие между ее точками и состояниями системы было взаимно однозначным и непрерывным [2].

При непрерывном изменении t непрерывно меняется и состояние системы $x(t), y(t)$. На ФП точка будет непрерывно перемещаться, прочерчивая некоторую кривую, которая называется фазовой траекторией (ФТ) (рис.5).

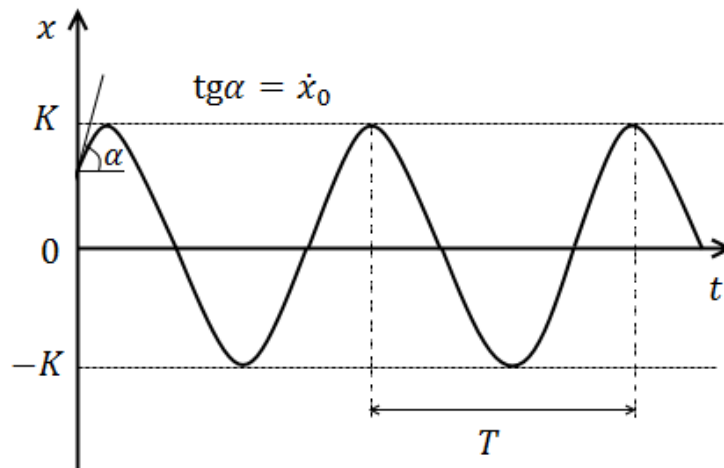


Рис.4

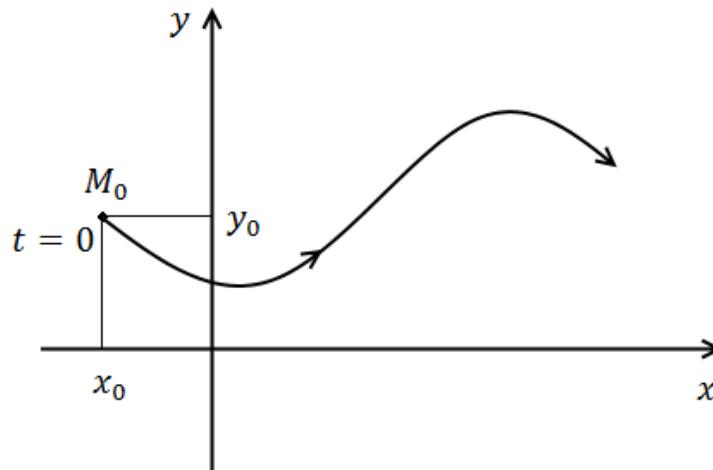


Рис.5

Решение системы (11)

$$\{x(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi), y(t) = -K \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\}$$

является параметрическим заданием ФТ, где t – параметр. Исключая t , получим соотношение

$$x^2 + \frac{y^2}{\omega_0^2} = K^2 = \text{const} > 0,$$

являющееся уравнением эллипса. Согласно (11), если $y > 0$, то $\dot{x} > 0$, т.е. x – увеличивается; если $y < 0$, то $\dot{x} < 0$. Движения фазовой точки по фазовым траекториям в этом случае изображены на рис.6.

Особая точка системы $O(0,0)$ в рассматриваемом случае называется центром.

При нахождении фазовых траекторий использовалось решение ДУ (9), хотя можно получить фазовую траекторию по-другому, разделив второе уравнение системы (11) на первое уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2 x}{y} \text{ или } y dy + \omega_0^2 x dx = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\frac{y^2}{\omega_0^2} + x^2 = C,$$

т.е. то же самое соотношение, полученное выше.

2. Трение мало, $h < \omega_0$.

Сделаем в (9) подстановку Эйлера $e^{\lambda t}$, получаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0$$

с корнями

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -h \pm i\omega.$$

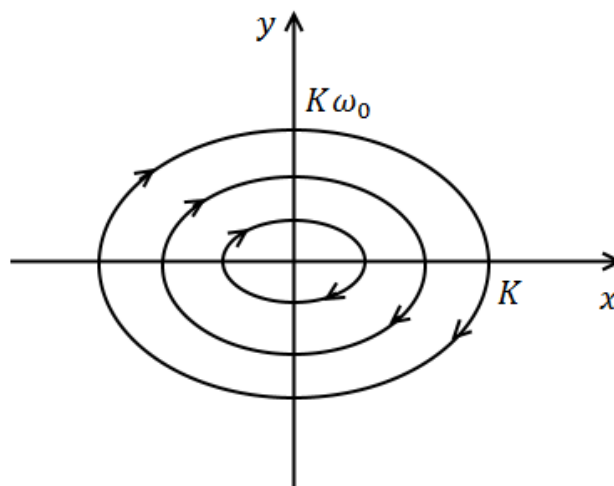


Рис.6

Решение (9) в этом случае имеет вид:

$$x(t) = e^{-ht} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = Ke^{-ht} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$y(t) = \dot{x}(t) = -Ke^{-ht} (h \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ – условная частота колебаний.

Фазовая траектория незамкнута, так как $x \rightarrow 0$, $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Последние уравнения определяют затухающий процесс с условным периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, осциллограмма которого приведена на рис.7.

Отношение двух последовательных максимумов (или минимумов) обозначают через e^d ($d = hT$) и называют логарифмическим декрементом затухания, где $\frac{1}{d}$ – это число условных периодов, когда размах амплитуды уменьшается в e раз.

Перейдём к системе:

$$\{\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2hy - \omega_0^2 x\}. \quad (12)$$

Разделив второе уравнение системы (12) на первое, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y}.$$

Это однородное ДУ первого порядка, которые можно проинтегрировать. Построим качественно фазовые траектории с помощью метода изоклин. Уравнение изоклины, для точек которой интегральные кривые имеют наклон χ , запишется так:

$$\frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y} = \chi \text{ или } y = \sigma x,$$

где $\sigma = -\frac{\omega_0^2 x}{\chi + 2h}$, т.е. изоклины – это прямые, проходящие через начало координат. Задав достаточно большой ряд значений χ , получим семейство изоклин и с их помощью можно построить векторное поле, а, значит, и фазовые траектории. Характер фазового портрета можно определить по изоклинам вертикального наклона $y = 0$ ($\chi = \infty$), и изоклинам горизонтального наклона

$$y = -\frac{\omega_0^2 x}{2h}, \quad (\chi = 0) \text{ (рис. 8).}$$

СР (0,0) – устойчивый фокус.

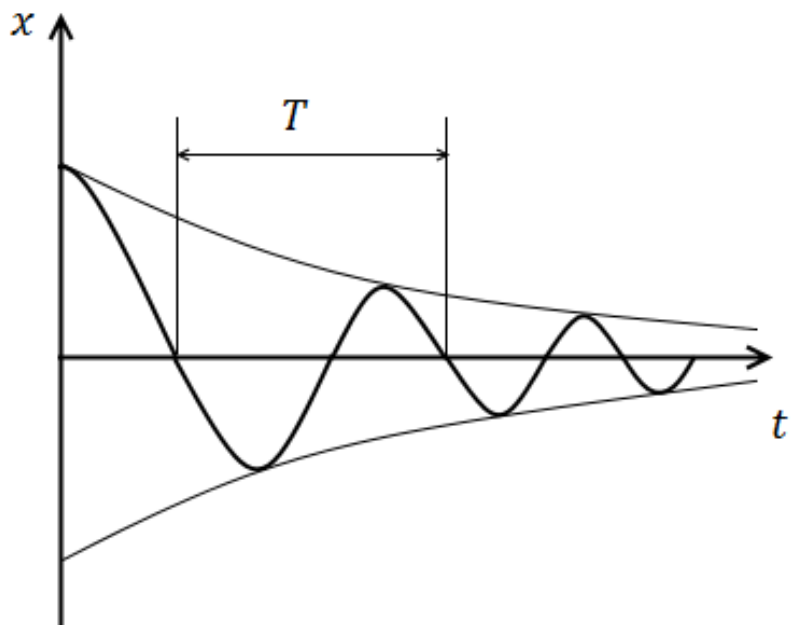


Рис.7

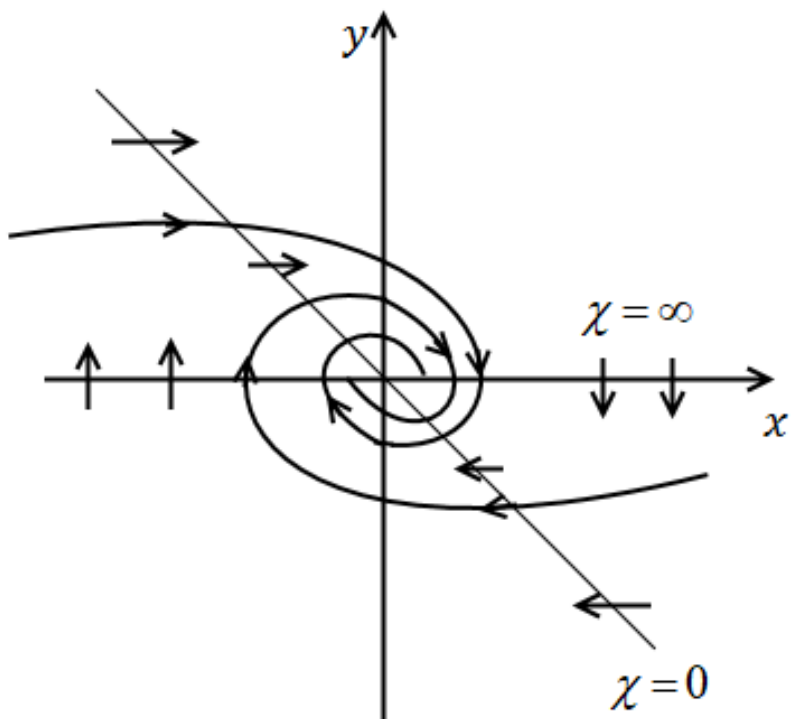


Рис.8

3. Трение велико, $h > \omega_0$.

Оба корня характеристического уравнения отрицательны, осциллограммы имеют вид, приведенный на рис.9.

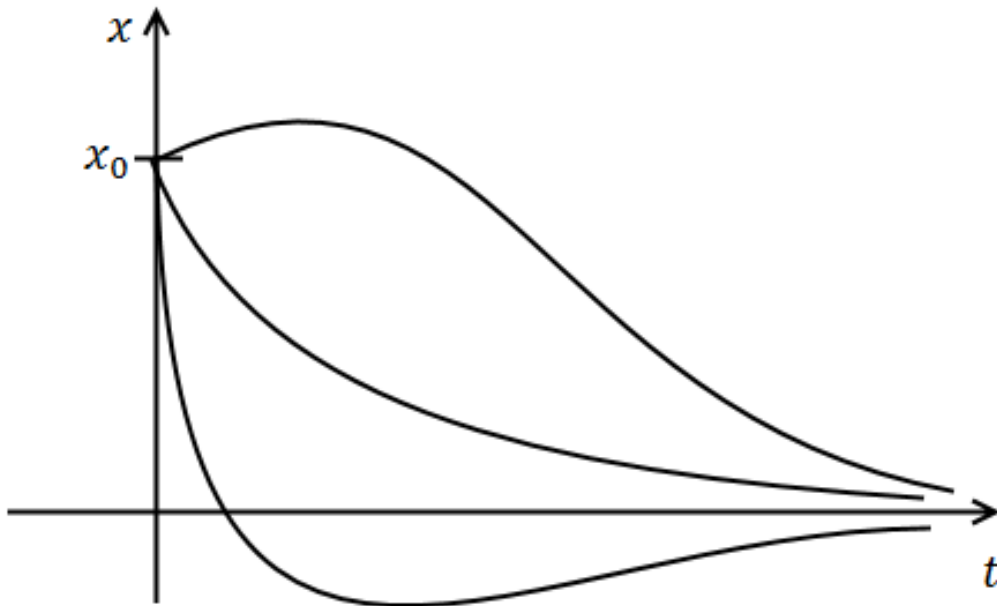


Рис.9

Фазовый портрет изображен на рис.10, СР $(0,0)$ – устойчивый узел.

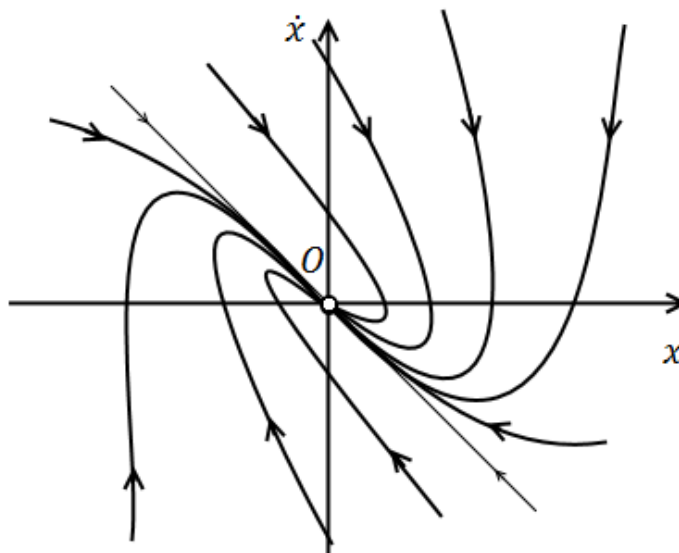


Рис.10

1.3. Фазовая плоскость. Фазовый цилиндр

Вернёмся к рассмотрению движений маятника при отсутствии трения. Пусть угол x не мал, тогда уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0. \quad (13)$$

Сделав замену $\dot{x} = y$, запишем уравнение (13) в виде системы:

$$\{\dot{x} = y, \dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x\}. \quad (14)$$

Перейдём к ДУ первого порядка, исключив время:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g \sin x}{l y}.$$

При исследовании движений маятника, выходящих за пределы одного полного оборота, исследование плоскости в качестве фазового пространства становится непригодным, так как нарушается взаимно однозначное соответствие между состоянием системы и соответствующей ему точкой фазового пространства ввиду того, что на фазовой плоскости все точки, отстоящие друг от друга на угол $2\pi k$ по оси абсцисс, соответствуют одному и тому же состоянию системы.

Для системы, положение которых определяется заданием угла, требование однозначности соблюдается, если в качестве фазового пространства взять цилиндрическую поверхность (ось цилиндра совпадает с осью y) [3].

Для маятника имеется два СР:

1. $x = \dot{x} = 0$ – центр;
2. $x = \pi, \dot{x} = 0$ – седло.

На рис.11 показано, как выглядят на цилиндрической поверхности фазовые траектории.

На рис.12 изображена развёртка цилиндрической поверхности при $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

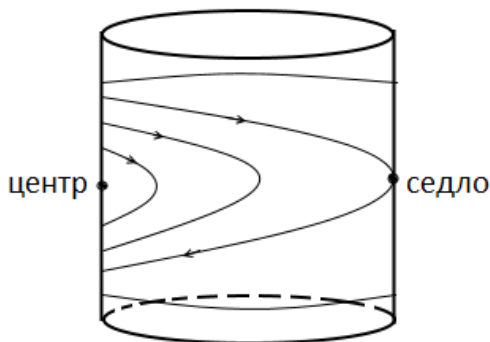


Рис.11

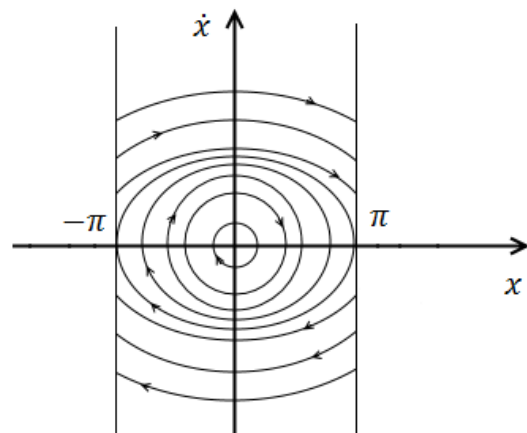


Рис.12

1.4. Цикличность в механике и понижение размерности фазового пространства

Динамику ротора электродвигателя или генератора можно описать уравнением

$$I\ddot{\varphi} = M(\dot{\varphi}).$$

Здесь угол поворота φ – циклическая координата и явно в уравнение не входит. Несмотря на то, что фазовыми переменными являются φ и $\dot{\varphi}$, можно размерность фазового пространства уменьшить на единицу, введя угловую скорость вращения ротора $\omega = \dot{\varphi}$:

$$I\dot{\omega} = M(\omega).$$

Фазовое пространство стало одномерным – это ось ω или ее часть.

1.5. Задачи

1. $h \leq \omega_0$. Найти решение ДУ осциллятора, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.
2. $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega_0 t$. а) $h < \omega_0$; б) $h = 0$. Найти общее и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.
3. $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Методом изоклин построить фазовые кривые ДУ для случая большого трения $h > \omega_0$.
4. Найти условный период колебаний ДС, изображенной на рис.13. Каков будет период, если $C_1 = C_2 = C_3 = C$, $R_1 = R_2 = R$?
5. Найти частоту колебаний системы (рис. 14). Какова будет частота, если $K_1 = K_2 = K_3 = K$.

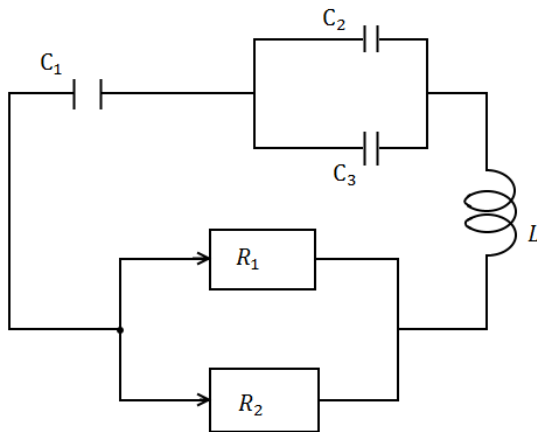


Рис.13

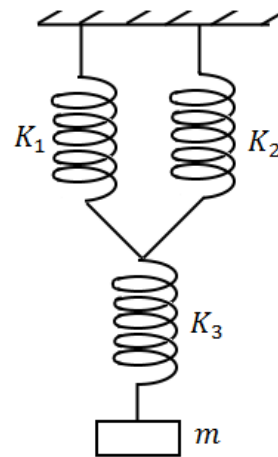


Рис.14

2. Некоторые качественные методы исследования нелинейных автономных динамических систем второго порядка

2.1. Основной результат, применяемый при построении фазовых портретов динамических систем на плоскости

Основная задача исследования ДС заключается в анализе структуры разбиения пространства состояний ДС на ФТ. Картина взаимного расположения ФТ составляет ФП системы. Для ДС второго порядка достаточно знать поведение не всех траекторий, а только некоторых из них, называемых особыми [4]:

- 1) особых точек;
- 2) предельных циклов;
- 3) сепаратрис седел.

Если известно взаимное расположение особых траекторий, определены устойчивость предельных циклов и типы СР, то этого достаточно для построения полной качественной картины разбиения ФП на фазовые траектории.

2.2. Типы и устойчивость основных состояний равновесия двумерных динамических систем. Грубые и негрубые состояния равновесия

Пусть задана автономная динамическая система на плоскости

$$\dot{x} = P(x, y); \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (15)$$

и состояния этой системы взаимно однозначно и непрерывно соответствуют точкам фазовой плоскости x, y . Функции P и Q аналитические на всей плоскости x, y . Полагая, что P и Q не имеют общего множителя, обращающегося в некоторой точке фазовой плоскости в нуль, разделим одно уравнение из (15) на другое. Получим ДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (16)$$

Пусть (x_0, y_0) – исследуемое СР (15), т.е. $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ (особые точки уравнения (16)). Перенесём начало координат в особую точку, полагая $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0$, и разложим функции P и Q в ряды Тейлора. Тогда система (15) переписется так:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a\xi + b\eta + \bar{P}(\xi, \eta) = P^*(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} = c\xi + d\eta + \bar{Q}(\xi, \eta) = Q^*(\xi, \eta), \end{cases} \quad (17)$$

где ξ, η – новые координаты, а \bar{P} и \bar{Q} – нелинейные члены разложения. Введем обозначения: $P'_x(x_0, y_0) = a, P'_y(x_0, y_0) = b, Q'_x(x_0, y_0) = c, Q'_y(x_0, y_0) = d$ и отбросим нелинейные члены \bar{P} и \bar{Q} . Получим линеаризованную систему:

$$\dot{\xi} = a\xi + b\eta, \quad \dot{\eta} = c\xi + d\eta. \quad (18)$$

Составим характеристическое уравнение линеаризованной системы (18):

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (19)$$

В зависимости от корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (19) линеаризованной системы (18) исходная система (15) может иметь шесть различных типов состояний равновесия ($ad - bc \neq 0$ – простые СР):

1. *Устойчивый узел.* λ_1 и λ_2 – отрицательные величины. При задании ненулевых начальных условий в линеаризованной системе имеет место аperiodически затухающий процесс. Состояние равновесия асимптотически устойчиво. Изобразите окрестность СР самостоятельно.
2. *Неустойчивый узел.* λ_1 и λ_2 – положительные величины. При отклонении от положения равновесия в линеаризованной системе имеет место аperiodически нарастающий переходный процесс. СР неустойчиво.
3. *Седло.* Корни λ_1 и λ_2 – действительные и разных знаков. Переходный процесс здесь также характеризуется аperiodическим уходом от неустойчивого СР (рис. 15). Седло имеет две сепаратрисы – одна входящая, другая выходящая. Замыкание их идет через бесконечность.
4. *Устойчивый фокус.* λ_1 и λ_2 – комплексные числа и $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$. СР асимптотически устойчиво. Переходный процесс в линеаризованной системе носит характер затухающих колебаний. Изобразите его.
5. *Неустойчивый фокус.* λ_1 и λ_2 – комплексные числа и $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$. СР неустойчиво. При малых отклонениях от него в системе совершаются нарастающие колебания. Постройте окрестность этого СР.
6. *Центр.* Корни λ_1 и λ_2 – мнимые. Состояние равновесия устойчиво по Ляпунову (по теореме 1). При задании малых отклонений в системе совершаются периодические колебания, амплитуда которых определяется начальными условиями. Изобразите окрестность центра.

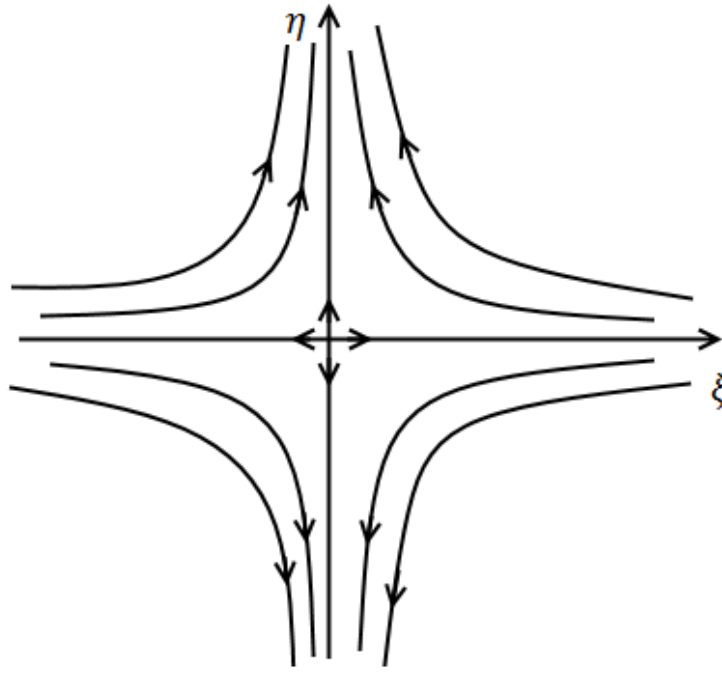


Рис.15

Первые пять типов СР являются грубыми. Это значит, что их характер не меняется при достаточно малых изменениях правых частей системы (15) и их первых производных (т.е. коэффициентов a , b , c и d). Шестой тип (так же, как и СР при $ad - bc = 0$, которые здесь не рассматривались) является негрубым: при сколь угодно малом изменении правых частей системы (15) и их первых производных может происходить качественное изменение типа СР в соответствии с теоремами Ляпунова.

Теорема 1. Пусть $\xi_0 = \eta_0 = 0$ – состояние равновесия системы (17) и корни характеристического уравнения, составленного для него, чисто мнимые. Тогда необходимым и достаточным условием того, что точка x_0 , y_0 в нелинейной системе есть центр, является существование аналитического интеграла системы (15) в окрестности этой точки.

Теорема 2. Если при чисто мнимых корнях уравнения (19) особая точка $\xi_0 = \eta_0 = 0$ не является центром, то она имеет характер фокуса (так называемый устойчивый или неустойчивый сложный фокус).

Исследование на устойчивость при $\text{Re } \lambda_{1,2} = 0$ можно провести с помощью функции Ляпунова. Однако это сделать непросто, так как в рассматриваемом случае функцию Ляпунова часто надо брать в виде суммы второй, третьей и четвертой степеней относительно x , y . Отметим также, что для наличия центра достаточно, чтобы интегральные кривые уравнения $\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{Q^*}{P^*}$ имели ось симметрии, проходящую через исследуемую особую точку – начало координат.

В частности, ось симметрии существует, если уравнение $\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{Q^*}{P^*}$ не меняется при замене ξ на $-\xi$ (или η на $-\eta$). Очевидно, что для наличия фокуса (при $\text{Re } \lambda_{1,2} = 0$) необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы (17) было асимптотически устойчиво при $t \rightarrow \infty$ или при $t \rightarrow -\infty$.

2.3. Плоскость $\sigma - \Delta$. Бифуркационные и небифуркационные границы

Характеристическое уравнение (19) запишем так:

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad (20)$$

где $\sigma = -(a + d)$, $\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. Анализ уравнения (20) приводит к результатам, приведённым на рисунке 16.

Перейдем к рассмотрению модифицированной плоскости $\sigma - \Delta$. Модификация заключается в том, что на этой плоскости, кроме границ различных СР, указаны также бифуркационные и небифуркационные границы, которые связаны с линейностью и нелинейностью преобразования линеаризованной системы.

Из рисунка следует, что: а) при $\Delta < 0$ имеем седловую особую точку; б) $\Delta > 0$ и $\sigma = 0$ – особая точка типа центр; в) при $\Delta > 0$, $\sigma > 0$ состояние равновесия асимптотически устойчиво (устойчивый узел, если $\sigma^2 - 4\Delta > 0$, или устойчивый фокус $\sigma^2 - 4\Delta < 0$); г) при $\Delta > 0$, $\sigma < 0$ состояние равновесия неустойчиво (узел, если $\sigma^2 - 4\Delta > 0$, фокус, если $\sigma^2 - 4\Delta < 0$). На рис. 16 бифуркационные границы задаются уравнениями $\Delta = 0$ и $\sigma = 0$ ($\Delta > 0$). Граница $D = 0$ не является бифуркационной, так как можно найти линейное невырожденное преобразование, которое переводит узлы в фокусы или фокусы в узлы. Границы же $\Delta = 0$ и $\sigma = 0$ ($\Delta > 0$) являются бифуркационными, так как с помощью линейного невырожденного преобразования нельзя, например, перевести узлы в седла, устойчивый фокус в неустойчивый и т.д.



Рис.16

2.4. Задачи

Дальше будут рассмотрены задачи с решениями.

Задача 1. $\dot{x} = x^2 - y$, $\dot{y} = \ln(1 - x - x^2) - \ln 3$

Найти СР и определить их типы.

Решение. Состояний равновесий, которые определяются из системы уравнений $[x^2 - y = 0, x^2 - x - 2 = 0]$, два: $O_1(2,4)$, $O_2(-1,1)$. Линеаризованные в окрестности состояний равновесий O_1 и O_2 системы имеют вид:

$$\dot{\xi} = 2x_i \xi - \eta, \quad \dot{\eta} = \frac{2x_i - 1}{1 - x_i + x_i^2} \xi \quad (i=1,2),$$

причём $x_i^2 - x_i + 1 = 3$.

Характеристическое уравнение системы таково:

$$\lambda^2 - 2x_i \lambda + \frac{1}{3}(2x_i - 1) = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что точка O_1 – неустойчивый узел, а точка O_2 – седло.

Задача 2. Определите типы и устойчивость состояний равновесий ДС, задаваемой уравнением:

$$\ddot{x} + (\dot{x} + x^2 - 4)x = 0.$$

Решение. Перейдём к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(x^2 + y^2 - 4)x = 0$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(x^2 + y^2 - 4)}{y}. \quad (21)$$

Имеется три состояния равновесия: $O_1(0,0)$, $O_2(2,0)$, $O_3(-2,0)$. Для первой точки корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \pm 2$, т.е. особая точка – седло. Для O_2 и O_3 характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + 8 = 0$, т.е. O_2 и O_3 – центры в линеаризованной системе. В исходной системе O_2 и O_3 – тоже центры, так как ось абсцисс, на которой расположены эти точки, есть ось симметрии интегральных кривых уравнения (20), поскольку это уравнение сохраняется при замене y на $-y$.

Для уравнения (21) легко получить первый интеграл и далее воспользоваться теоремой Ляпунова о сохранении центра и в нелинейной системе. Действительно, непосредственно из (20) имеем $dV + (U + V - 4) = 0$, где $U = x^2$, $V = y^2$. Отсюда $\frac{dV}{dU} + V = 4 - U$. Интегрируя это уравнение, получим аналитический интеграл уравнения (20) в виде $V + U - 5 = C \exp(-U)$.

Задача 3. Исследуйте типы и устойчивость СР системы

$$a\dot{x} = \ln(1 - x - y^2), \quad \dot{y} = x - y - 2.$$

Решение. Состояний равновесий два: $O_1(4,2)$, $O_2(1,-1)$. Характеристическое уравнение $a\lambda^2 + (1+a)\lambda + 1 - 2y_i = 0$ ($i=1,2$). Запишем это уравнение для точек O_1 : $a\lambda^2 + (1+a)\lambda - 3 = 0$ и O_2 : $a\lambda^2 + (1+a)\lambda + 3 = 0$. В зависимости от параметра a получим результаты, приведённые в таблице:

a	$a > 0$	$-1 < a < 0$	$a < -1$
$O_1(4,2)$	седло	неустойчивый узел (фокус)	устойчивый узел (фокус)
$O_2(1,-1)$	устойчивый узел (фокус)	седло	седло

Для первого характеристического уравнения дискриминант будет $D_1 = (1+a)^2 + 12a$, для второго $D_2 = (1+a)^2 - 12a$. Значения a , при которых $D_1 = 0$ и $D_2 = 0$ отделяют узлы от фокусов.

Заметим, что при $a = -1$ для особой точки O_2 характеристическое уравнение примет вид $\lambda^2 - 3 = 0$, значит это точка седло, а для $O_1: \lambda^2 + 3 = 0$, следовательно, это СР – центр в линеаризованной системе и для точки O_1 необходимо дополнительное исследование, которое здесь не приведено.

Если $a = 0$, то $\ln(1-x+y^2) = 0$, значит, $x = y^2$, то есть произошло вырождение исходной ДС второго порядка в ДС первого порядка: $x = y^2, \dot{y} = y^2 - y - 2$. Движение фазовой точки происходит по параболе $x = y^2$. Если $|y|$ величина большая, то $\dot{y} > 0$ и поэтому можно определить направление движения фазовой точки на траектории (рис. 17).

Значит, O_2 – устойчивое СР, O_1 – неустойчивое. Далее на рисунках будем обозначать устойчивое СР – кружочками, а неустойчивое – крестиками.

Задача 4. В зависимости от параметров a и b исследуйте состояния равновесия системы

$$\dot{x} = -ax(1+x) - b(x-y), \quad \dot{y} = x - y.$$

Решение. Состояний равновесий два: $O_1(0,0)$ и $O_2(-1,-1)$. Для точки $O_1(0,0)$ характеристическое уравнение будет выглядеть так: $\lambda^2 + (1+a+b)\lambda + a = 0$. $D_1 = (1+a+b)^2 - 4a$. Для точки $O_2(-1,-1)$: $\lambda^2 + (1-a+b)\lambda - a = 0$. $D_2 = (1-a+b)^2 + 4a$. Применяя результаты, приведенные на рисунке 16, получим рисунок 18 для O_1 и рисунок 19 для O_2 где область I соответствует устойчивым узлам (фокусам), область II – неустойчивым узлам (фокусам), область III – седлам. Границы $D_1 = 0$ и $D_2 = 0$ отделяют узлы от фокусов.

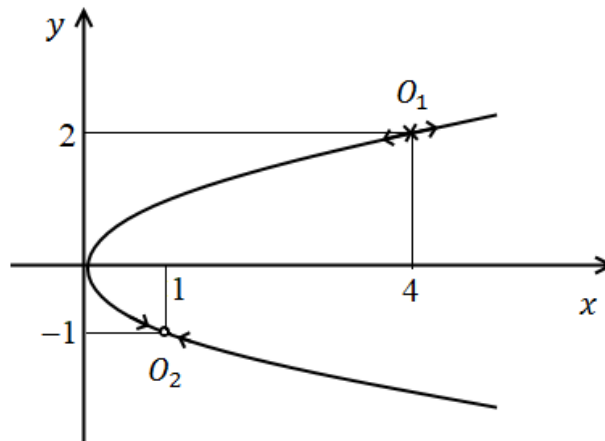


Рис.17

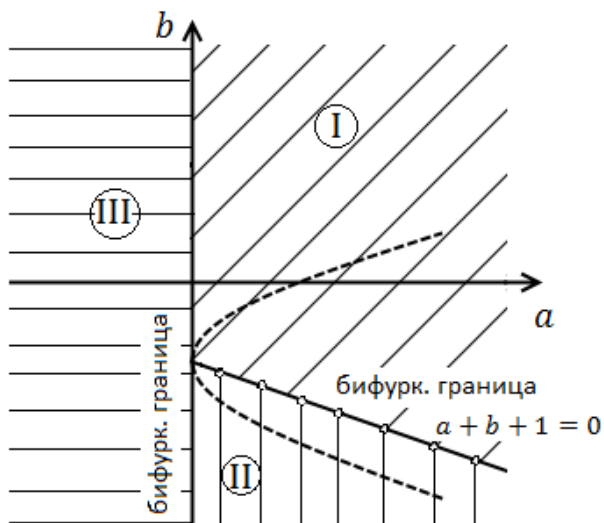


Рис.18

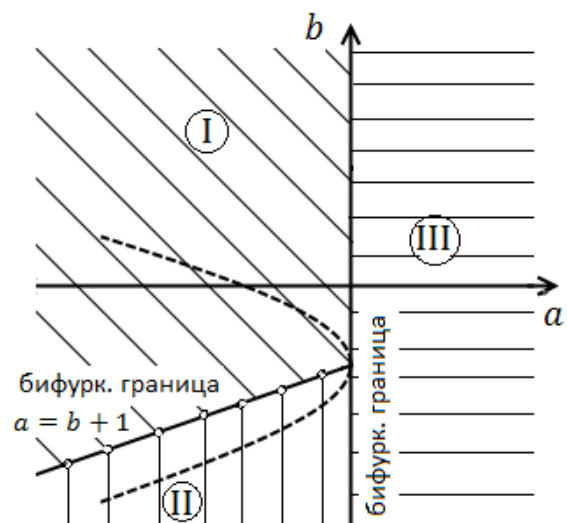


Рис.19

В случае сложного СР (седло-узел, сложный узел, СР с эллиптической областью, вырожденные СР и так далее) исследования поведения фазовых траекторий следует проводить методами, изложенными в [5]. В настоящей работе ограничимся тремя примерами, связанными с интегрированием в квадратурах системы и с применением метода изоклин, известного из курса дифференциальных уравнений.

Задача 5. Исследуйте структуры СР динамической системы

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y^2.$$

Решение. Корни характеристического уравнения единственного состояния равновесия $O(0,0)$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, значит O – сложное состояние равновесия. Интегрируя уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$, получим его решение $x \exp\left(\frac{1}{y}\right) = C$. Поведение траекторий в окрестности СР показано на рис. 20. Это сложная особая точка седло-узел.

Направление движения изображающих точек по фазовым траекториям определяется непосредственно из исходных уравнений (по знакам их правых частей в различных точках (x, y)).

Задача 6. Исследуйте структуры СР динамической системы

$$\dot{x} = -xy, \quad \dot{y} = \frac{1}{2}x - y^2.$$

Решение. Состояние равновесия этой системы есть точка $(0,0)$. Характеристическое уравнение для неё будет $\lambda^2 = 0$, т.е. оба корня равны нулю.

Уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y^2}{-2xy}$ есть уравнение Бернулли. Его общее решение

$\frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x} = C$. Расположение траекторий в окрестности состояния равновесия показано на рисунке 21. При $C < 0$ получаются эллипсы, при $C > 0$ – гиперболы, при $C = 0$ – парабола $x = y^2$.

Задача 7. Исследуйте структуры СР динамической системы

$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = y^2 - x^2. \quad (22)$$

Решение. Имеется единственное состояние равновесия – начало координат. Это сложная особая точка, т.к. в системе (22) нет линейных членов. Из уравнения (22) видно, что ось ординат – фазовая траектория, по которой изображающая точка движется снизу вверх с ростом t . Непосредственно из (22)

строим поле направлений $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{xy}$ (рис. 22). Поведение фазовых траекторий вблизи состояния равновесия показано на рисунке 23.

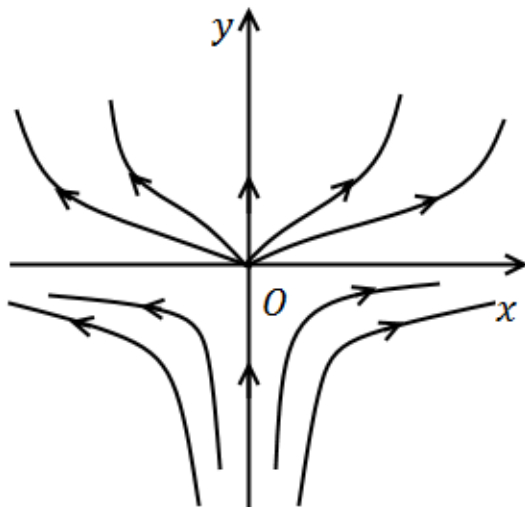


Рис.20

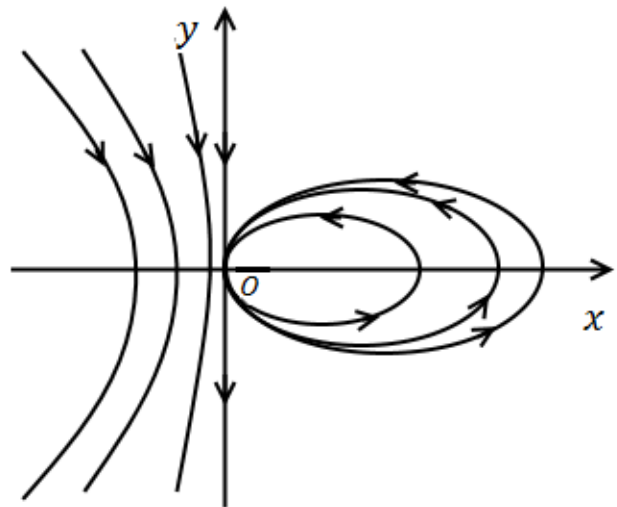


Рис.21

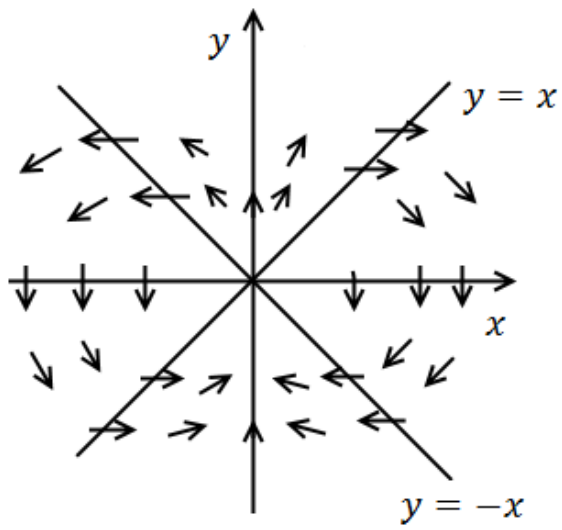


Рис.22

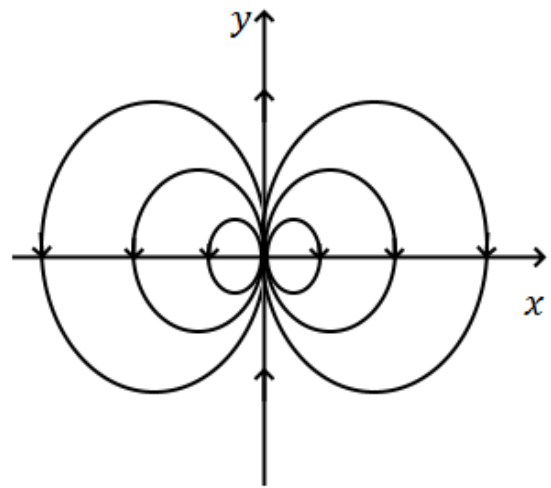


Рис.23

3. Типы и устойчивость состояний равновесий динамических систем третьего порядка

Рассмотрим трёхмерную ДС

$$\dot{x} = P(x, y, z), \quad \dot{y} = Q(x, y, z), \quad \dot{z} = R(x, y, z). \quad (23)$$

Пусть правые части этой системы гладкие, а точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – изолированное СР системы (23), т.е. $P(M_0) = Q(M_0) = R(M_0) = 0$. Запишем характеристическое уравнение линеаризованной системы в окрестности M_0 системы (23):

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} P_x - \lambda & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y - \lambda & Q_z \\ R_x & R_y & R_z - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая $D(\lambda)$, получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + \sigma\lambda^2 + \Delta\lambda + \alpha = 0.$$

У этого уравнения есть хотя бы один действительный корень.

В зависимости от корней уравнения $D(\lambda) = 0$ возможны следующие основные случаи.

1. Корни действительные отрицательные (положительные), тогда СР – устойчивый (неустойчивый) узел (рис. 24, 25).

2. Один из корней действительный, два другие комплексные, причём $\text{Re } \lambda_{1,2,3} < 0$ ($\text{Re } \lambda_{1,2,3} > 0$), тогда СР – устойчивый (неустойчивый) фокус (рис. 26, 27).

На рисунке 26 изображено устойчивое двумерное многообразие π , одномерное l – устойчиво.

На рисунке 27 изображено неустойчивое двумерное многообразие, одномерное – неустойчиво.

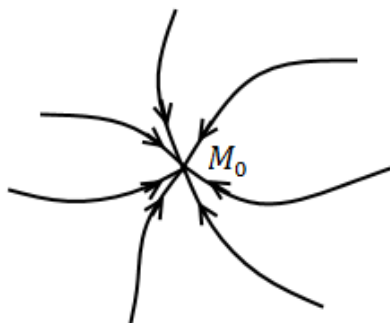


Рис. 24

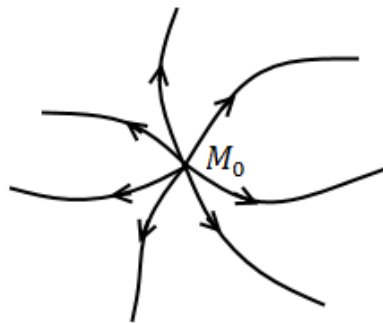


Рис.25

3. Один корень действительный, два других комплексные, причём знаки действительного корня и действительных частей двух других комплексно сопряжённых корней различные, CP – неустойчивое седло-фокус (рис 28, 29).

На рисунке 28 изображено неустойчивое двумерное многообразие, одномерное – неустойчивое.

На рисунке 29 изображено устойчивое двумерное многообразие, одномерное – неустойчивое.

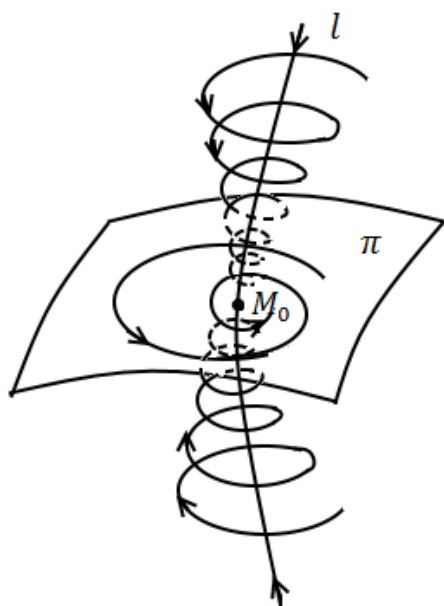


Рис.26

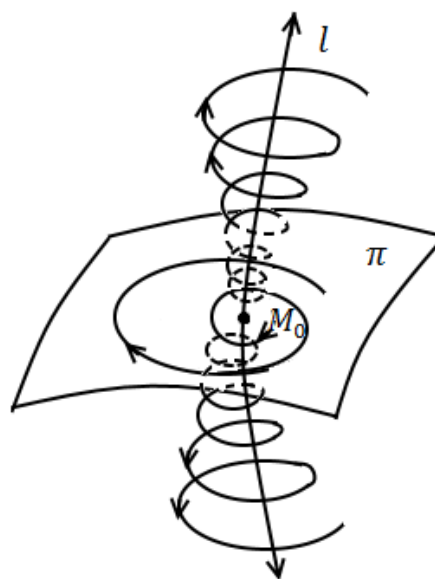


Рис.27

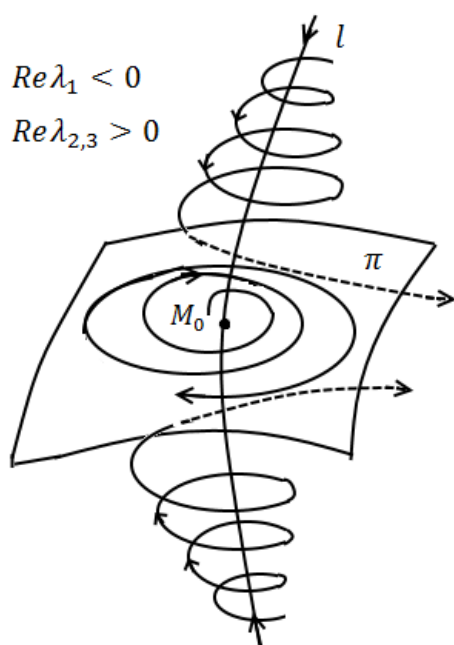


Рис.28

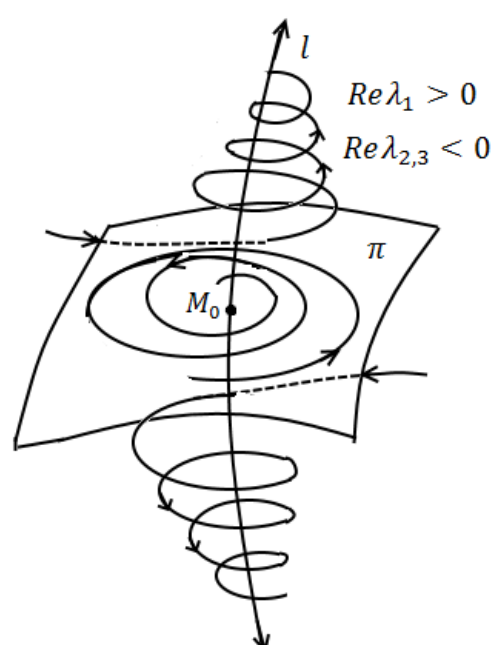


Рис.29

4. Все корни действительные и разных знаков, тогда СР – неустойчивое и соответствует двум типам седло-узла (рис 30, 31).

На рисунке 30 изображено устойчивое двумерное многообразие, одномерное – неустойчивое.

На рисунке 31 изображено неустойчивое двумерное многообразие, одномерное – устойчивое.

Задача 1. Определить тип нулевого СР в системе

$$\dot{x} = 1 - \cos xy + \exp x - \exp(-2z), \quad \dot{y} = \sin 4z - 3\sin(x + y), \quad \dot{z} = \ln(1 + z - 2x).$$

Решение. Составим характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности точки (0,0,0):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -3 & -3-\lambda & 4 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (3+\lambda)[(\lambda-1)^2+4]=0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$, т.е. третий случай (СР – седло-фокус, рис. 28).

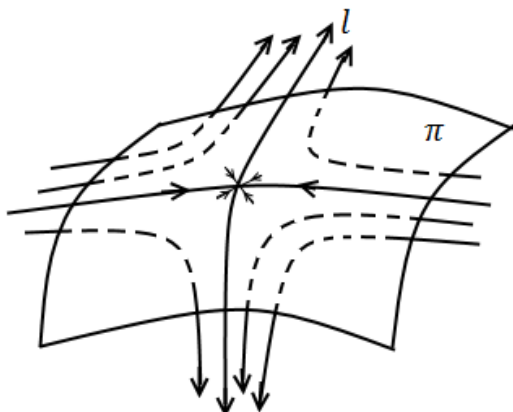


Рис.30

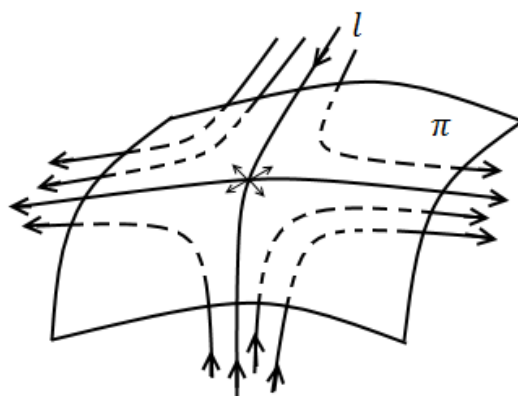


Рис.31

4. Задачи для самостоятельной работы

1. Определите типы СР в задачах 29 – 36, 43 – 70 [6].
2. Определите тип СР (0,0) в зависимости от параметров в задачах 37 – 42, 97, 98 [6].

Найдите все СР уравнений и систем, определите их типы и устойчивость в зависимости от параметров, входящих в уравнения:

3. $\dot{x} = \frac{x}{2} - \frac{xy}{\alpha + x} - \beta x^2$, $\dot{y} = \frac{xy}{\alpha + x} - \frac{y}{2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $2\alpha\beta < 1$.
4. $\dot{x} = (\alpha x - \beta y)(1 + x)$, $\dot{y} = x - y$, $\alpha < 1$, $\beta > \alpha$.
5. Для предыдущей системы на плоскости (α, β) построить области, соответствующие различным типам СР.
6. $\alpha\dot{x} = x^2 + y - 1$, $\dot{y} = xy$.
7. $\dot{u} = u^2(1 - \beta u) - uv$, $\dot{v} = -v(1 - u)$, $\beta > 0$.
8. $\dot{x} = \alpha x - \beta\varphi(x)$, $\dot{y} = -y + \varphi(x)$. Функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает в окрестности $x = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\beta > 0$. Дополнительно докажите, что при $\alpha > 0$ СР асимптотически устойчиво в целом.
9. $\ddot{x} - (\exp x - 1)\dot{x} + \alpha(\exp x - 1) = 0$, $\alpha = \text{const}$.
10. $\dot{x} = (x - 1)(y - 1)$, $\dot{y} = x - 2y$. Дополнительно укажите бифуркационные параметры α .
11. $\beta\dot{x} = x(1 - x^2) - y$, $\dot{y} = x - 2y$.
12. $\dot{x} = A - (B + 1)x + x^2y$, $\dot{y} = Bx - x^2y$.
13. $\dot{x} = (1 + x)[\varphi(x) + \psi(y)]$, $\dot{y} = x - y$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(u) + \psi(v) \neq 0$, если $u \neq 0$.
14. $\dot{x} = y(\alpha x + 2) + x^2 + y^2 - 1$, $\dot{y} = -x(\alpha x + 2)$. Рассмотрите 2 случая $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$. Попробуйте рассмотреть общий случай.
Указание. Убедитесь в том, что при $\alpha = 0$ система имеет первый интеграл $\exp y(x^2 + y^2 - 1) = \text{const}$.
15. $\dot{x}_1 = x_2^2 - 3x_1 + 2$, $\dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2$.
16. $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -(1 + x_1^2 + x_1^4)x_2 - x_1$. Дополнительно докажите асимптотическую устойчивость в «целом».
17. $\dot{x}_1 = -3x_2 + x_1x_2 - 4$, $\dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2$.
18. $\dot{x} = \alpha^2 - y^2$, $\dot{y} = -x - \beta y - y^2$, $\alpha > 0$.
19. $\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 + \beta)$, $\dot{y} = -x + (\alpha y - x^2)(x^2 + y^2 + \beta)$, $\beta \geq 0$.
20. $\dot{x} = 2xy$, $\dot{y} = 1 - x^2 + y^2$.
21. $\ddot{x} + \alpha\ddot{x} - \dot{x}^2 - \dot{x} - \sin \alpha x + x^2 = 0$. Определить тип СР $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$.

22. $\dot{x} = \operatorname{tg}(y - \alpha x)$, $\dot{y} = 2^{\beta y} y - 2 \cos(\frac{\pi}{3} - x)$. Ограничиться только нулевым СР.
23. $\dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x$, $\dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y$, $\dot{z} = -3y$.
24. $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$.
25. $y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$.
26. $y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$.
27. $y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}$.
28. $\dot{x} = x^y - 2$, $\dot{y} = (2x)^{y^2} - 64$.
29. $\dot{x} = \ln(2 - y^2)$, $\dot{y} = e^x - e^y$.
30. $\dot{x} = \alpha(2x - y)(x - 2)$, $\dot{y} = xy - 2$.
31. $\dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2$, $\dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy)$.
32. $\dot{x} = x^2 - y$, $\dot{y} = x^2 - (y - 2)^2$.
33. $\dot{x} = \ln(y^2 - y + 1) - \ln 3$, $\dot{y} = x^2 - y^2$.
34. $\dot{x} = \ln(y^2 - y + 1)$, $\dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}$.
35. $\dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2$, $\dot{y} = e^{y^2 - x} - e$.

Для исследования особых точек следующих уравнений и систем нужно построить несколько изоклин. Затем выяснить, с каких сторон интегральные кривые входят в особую точку.

36. $y' = \frac{xy}{x + y}$.
37. $\dot{x} = x^2 + y$, $\dot{y} = x^2 + y^2$.
38. $y' = \frac{2xy}{x^2 + y}$.
39. $\dot{x} = y - x^2$, $\dot{y} = \alpha xy$.
40. $\dot{x} = x^2 + y$, $\dot{y} = \beta y^2$.
41. Исследовать на устойчивость нулевое СР в задачах 2 – 9 [7].
42. Найти все СР и исследовать их на устойчивость в задачах 16 – 35 [7].
43. Линеаризовав систему дифференциальных уравнений, исследовать на устойчивость нулевое СР в задачах 36 – 45 [7].

Ответы и указания к задачам для самостоятельной работы

3. $P_1(0,0)$ – седло, $P_2(\frac{\beta}{2}, 0)$ – седло. $P_3(\alpha, \alpha(1-2\alpha\beta))$ – неустойчивый узел (фокус), если $6\alpha\beta < 1$ и P_3 – устойчивый узел (фокус), если $6\alpha\beta > 1$.

6. $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$, $P_3(-1,0)$. Характеристическое уравнение $\alpha\lambda^2 - (\alpha + 2)x_i\lambda + 2x_i^2 - y_i = 0$, где x_i , y_i – координаты точек $P_i (i = 1, 2, 3)$. Рассмотреть случай $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$.

8. $P(0,0)$ – устойчивый узел (фокус), если $\beta - \alpha > 0$, и седло, если $\beta - \alpha < 0$.

Выбрать $V = \frac{\alpha}{2}y^2 + \int_0^x \varphi(z)dz$.

9. При $\alpha > 0$ $x = \dot{x} = 0$ – центр как в линеаризованной, так и в исходной системе. При $\alpha < 0$ эта точка – седло.

10. $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ – бифуркационные значения параметров.

11. $P_1(0,0)$, $P_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$, $P_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$ – седло, если $\beta > 0$ и устойчивый узел при $\beta < 0$; P_2 и P_3 – устойчивые узлы (или фокусы) при $\beta > 0$ и седла при $\beta < 0$.

12. CP $(A, \frac{B}{A})$ – устойчивый узел (фокус), если $A^2 - B + 1 > 0$ и неустойчивый узел (фокус), если $A^2 - B + 1 < 0$.

13. $P_1(0,0)$, $P_2(-1,-1)$. P_1 – седло, если $a + b > 0$. Если $a + b < 0$, то P_1 – неустойчивый фокус (узел) при $1 - a < 0$ и устойчивый фокус при $1 - a > 0$. P_2 – седло, если $\alpha + \beta > 0$, или устойчивый узел, если $\alpha + \beta < 0$. $a = \varphi'_x(0)$, $b = \psi'_y(0)$, $\alpha = \varphi(-1)$, $\beta = \psi(-1)$.

16. $P_1(0,0)$ – устойчивый фокус. Выбрать $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ и применить теорему об асимптотической устойчивости в «целом».

19. Выбрать $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. При $\alpha < 0$ система предельно ограничена.

20. $P_1(1,0)$, $P_2(-1,0)$ – центры и в линеаризованной системе, и в исходной системе (интегральные кривые симметричны относительно оси абсцисс).

21. Седло-узел.

23. Устойчивый фокус.

24. $O_1(4,2)$ – неустойчивый узел, $O_2(-2,-1)$ – устойчивый фокус.
25. $O_1(1,0)$ – неустойчивый узел, $O_2(-1,0)$ – седло.
27. $O_1(0,-1)$ – неустойчивый узел, $O_2(2,-3)$ – седло.
33. $O_1(-2,2)$ – устойчивый узел, $O_2(1,-1)$ – неустойчивый фокус; $O_3(2,2)$, $O_4(-1,-1)$ – седла.
35. $O_1(0,1)$, $O_2(0,-1)$ – седла; $O_3(-1,0)$ – устойчивый фокус, $O_4(3,2)$ – неустойчивый узел.
36. При $y > 0$ интегральные кривые расположены, как у седла, а при $y < 0$ – как у узла.
37. Через $(0,0)$ проходит одна кривая, имеющую там точку возврата первого рода. Остальные кривые не заходят в особую точку.
38. Из области $y < 0$ все интегральные кривые обоими концами входят в особую точку, а из области $y > 0$ не выходит ни одна.
39. Две интегральные кривые проходят через особую точку, касаясь друг друга. Остальные кривые расположены как у седла.
40. Из области $y > 0$ кривые не входят в особую точку. В области $y < 0$, $x < 0$ расположение кривых напоминает вырожденный узел, а в области $y < 0$, $x > 0$ – седло.

Литература

1. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний: Учебное пособие для ВУЗов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2001.
2. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория Колебаний. – 2-е изд. – М.: Физмат, 1959.
4. Горяченко В.Д. Качественные методы теории колебаний. Учебное пособие. – Горький: Изд-во ГГУ, 1987.
5. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка – М.: Наука, 1966.
6. Горяченко В.Д., Сандалов В.М. Задачи по теории колебаний. Часть 1. Устойчивость состояний равновесия. – Горький: Изд-во ГГУ, 1998.
7. Горяченко В.Д., Пригоровский А.Л., Сандалов В.М. Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. Часть 2. Устойчивость в малом. Критерий устойчивости. Метод D -разбиений: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. – Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009.

Александр Леонидович Пригоровский
Владимир Михайлович Сандалов
Алена Александровна Ширяева

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ,
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАМ
КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ЧАСТЬ 1**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23