

**Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского**

Национальный исследовательский университет

**Учебно-научный и инновационный комплекс
«Физические основы информационно-телекоммуникационных
систем»**

**Основная образовательная программа
011200 «Физика», общий профиль, квалификация (степень)
бакалавр**

**Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Методы математической физики»**

Жислин Г. М.

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий,
укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород
2012

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Жислин Г. М. Электронное учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. — 80 с.

В учебно-методическом пособии рассмотрены наиболее употребительные интегральные преобразования (ИП) Фурье, Лапласа, Ханкеля, синус- и косинус-преобразования, двумерное ИП Фурье. Для каждого из них даны достаточные условия применимости, выведены формулы обращения и приведены примеры решения с их помощью уравнений в частных производных. Разобран также пример последовательного применения двух ИП в решении одной и той же задачи и пример решения задачи с использованием различных ИП для сравнения их эффективности.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению 011200 «Физика», изучающих курс «Методы математической физики».

Введение

«Когда идешь на тигра — бери длинную палку»
Мао Цзе-дун

Интегральные преобразования являются мощным средством решения уравнений в частных производных. Эти преобразования позволяют во многих случаях свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению или — в общей ситуации — уменьшить в уравнении число переменных, по которым берутся частные производные.

Настоящее методическое пособие имеет довольно утилитарную цель: показать, как интегральные преобразования (далее ИП) применяются при решении конкретных задач, какие трудности могут при этом возникнуть и как эти трудности преодолевать. Будут рассмотрены одномерные ИП Фурье, Лапласа, Ханкеля (Бесселя) и синус- и косинус-преобразования, а также двумерное преобразование Фурье. Для всех этих ИП будут установлены достаточные условия их применения, формулы обращения и даны рекомендации по практическому использованию, а главное — будут решены задачи с их применением. Кроме того, мы приведем решение задачи с последовательным использованием двух ИП, а также пример решения одной и той же задачи с помощью различных ИП для сравнения их эффективности и трудоёмкости. Из чисто теоретических вещей в пособии кроме вывода формул обращения и свертки (в Приложении) мы доказываем лемму Жордана в силу её важности для вычисления интегралов, возникающих при обращении преобразования Лапласа.

В заключение хочется отметить одно важное обстоятельство. Хотя применение каждого ИП обосновано только при (своих для данного ИП) достаточно жестких условиях, тем не менее мы рекомендуем пытаться применять ИП и в ситуации, когда проверить эти условия трудно или даже когда они вообще не выполняются. Разумеется в этих случаях необходима проверка полученного решения, например, прямой подстановкой в уравнение. И

такая проверка зачастую дает положительный результат. Главная причина этого состоит в том, что наши условия применимости ИП всего лишь достаточные и, значит, полученный конечный результат может быть верен и при их нарушении. Кроме того, нельзя исключить, что найденное с помощью ИП решение задачи может быть получено и каким-то другим методом при существенно более слабых ограничениях (пример такой ситуации приведен в п.6.4, п.6.5 и в пп.8.2–8.5).

Что касается использования данного пособия, то оно зависит от целей читающего. При недостатке времени можно ограничиться лишь первыми десятью параграфами (без Приложения). Однако я бы посоветовал прочитать и Приложение для того, чтобы лучше понимать происхождение и смысл как используемых в §§ 2–10 формул обращения и свертки, так и ограничений, при которых они получены.

§ 1. Определения. Преобразование производных

п.1.1. Пусть $K(p, x)$ — некоторая (известная) функция аргументов $p, x \in (a, b)$ и

$$\bar{f}(p) = \int_a^b K(p, x) f(x) dx. \quad (1.1)$$

Интеграл в (1.1) называется интегральным преобразованием (ИП) функции $f(x)$, а функция $\bar{f}(p)$ — образом (изображением) функции $f(x)$ при ИП (1.1); $f(x)$ — прообраз (оригинал) функции $\bar{f}(p)$, $K(p, x)$ — ядро ИП. В зависимости от того, будет ли $|a| + |b| < +\infty$ или $|a| + |b| = +\infty$ ИП делятся на два больших класса — конечные и бесконечные. Далее рассматриваются только бесконечные ИП, а именно такие, где $b = +\infty$, $a = 0$ или $a = -\infty$. Вид ядра $K(p, x)$ и значения a и b определяют тип ИП. Для того, чтобы можно было пользоваться рассматриваемым преобразованием, на функцию $f(x)$ в (1.1) накладываются

ограничения, определяемые типом ИП. Эти ограничения будут сформулированы для каждого из изучаемых ИП позже. Однако всюду мы будем предполагать (не оговаривая каждый раз этот факт особо), что на каждом конечном интервале из $(a, +\infty)$ функция $f(x)$ ограничена, кусочно-непрерывна и имеет не более чем конечное число максимумов, минимумов и точек разрыва.

Почти во всех случаях применения ИП наряду с нахождением изображения функции $f(x)$ приходится находить образ $g(p)$ её первой производной, а часто и образ $h(p)$ второй производной. Положим

$$g(p, y) = \int_a^y K(p, x) f'(x) dx, \quad g(p) = g(p, +\infty), \quad (1.2a)$$

$$h(p, y) = \int_a^y K(p, x) f''(x) dx, \quad h(p) = h(p, +\infty). \quad (1.2b)$$

Пусть $K(p, x) \in C^2[a, +\infty)^*$, $f(x) \in C^1[a, +\infty)$. Проведя в (1.2a) интегрирование по частям, получим

$$g(p, y) = K(p, y) f(y) - K(p, a) f(a) - \int_a^y K'_x(p, x) f(x) dx. \quad (1.3)$$

Предположим, что

$$K(p, s) f(s) \rightarrow 0 \quad (1.4a)$$

при $s \rightarrow +\infty$, а если $a = -\infty$, то и при $s \rightarrow -\infty$, и что интеграл

$$\int_a^{+\infty} K'_x(p, x) f(x) dx \text{ существует.} \quad (1.4b)$$

*) При $a = -\infty$ вместо $[a, +\infty)$ везде надо брать $(-\infty, +\infty)$.

Тогда, переходя в (1.3) к пределу при $y \rightarrow +\infty$, получим

$$g(p) = -K(p, a) f(a) - \int_a^{\infty} K'_x(p, x) f(x) dx. \quad (1.5)$$

Мы нашли образ первой производной $f'(x)$. Для нахождения образа второй производной функции $f(x)$ считаем, что $f(x) \in C^2[a, +\infty)$ и дважды интегрируем по частям в (1.2b). Получим

$$h(p, y) = K'_x(p, a) f(a) - K'_x(p, y) f(y) - K(p, a) f'(a) + \\ + K(p, y) f'(y) + \int_a^y K''_{xx}(p, x) f(x) dx. \quad (1.6)$$

Предположим, что

$$K(p, s) f'(s) - K'_s(p, s) f(s) \rightarrow 0 \quad (1.7a)$$

при $s \rightarrow +\infty$, а если $a = -\infty$, то и при $s \rightarrow -\infty$, и что интеграл

$$\int_0^{\infty} K''_{xx}(p, x) f(x) dx \text{ существует.} \quad (1.7b)$$

Тогда переходя в (1.6) к пределу при $y \rightarrow +\infty$, мы получим, что

$$h(p) = K'_x(p, a) f(a) - K(p, a) f'(a) + \int_a^{+\infty} K''_{xx}(p, x) f(x) dx. \quad (1.8)$$

Если $a = -\infty$, то в силу (1.4a) и (1.7a) внеинтегральные члены в правых частях (1.5), (1.8) занулятся и мы получим, что в этом случае

$$g(p) = - \int_{-\infty}^{+\infty} K'_x(p, x) f(x) dx, \quad h(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} K''_{xx}(p, x) f(x) dx. \quad (1.9)$$

п.1.2. Формулы (1.5), (1.8), (1.9), дающие изображение первой и второй производной при ИП (1.1), являются базовыми и будут неоднократно использоваться в дальнейшем. Поэтому полезно найти достаточные условия выполнения соотношений (1.4a), (1.4b) и (1.7a), (1.7b), на основе которых получены равенства (1.5), (1.8), (1.9). Что касается требований (1.4b) и (1.7b), то мы рассмотрим их в п.1.3 применительно к конкретным ИП, а сейчас докажем простое утверждение, с помощью которого можно проверять выполнение (1.4a) и (1.7a).

Лемма 1.1. Пусть функция $\psi(x)$ — кусочно-непрерывно дифференцируема при $x \in [0, +\infty]$ и интегралы

$$\int_0^{+\infty} \psi(x) dx, \quad \int_0^{+\infty} \psi'(x) dx$$

существуют. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = 0.$$

Доказательство. Очевидно

$$\psi(s) = \int_0^s \psi'(x) dx + \psi(0)$$

и, значит, предел $d := \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s)$ существует. Если $d \neq 0$, то интеграл от $\psi(x)$ по оси $[0, +\infty)$ будет расходящимся, что невозможно по условию. Значит $d = 0$ и Лемма доказана.

Замечание. Лемма остается верной при замене в её формулировке и доказательстве $+\infty$ на $-\infty$.

Положим $\psi(x) = K(p, x) f(x)$. Тогда применяя Лемму 1.1 видим, что для справедливости (1.4a) достаточно выполнения условия: интегралы

$$(A) \quad \int_a^{\infty} K(p, x) f(x) dx, \quad \int_a^{\infty} \frac{d}{dx} (K(p, x) f(x)) dx \quad \text{существуют.}$$

Полагая $\psi(x) = K'_x(p, x) f(x) - K(p, x) f'(x)$ видим, что в силу Леммы 1.1 требование (1.7a) будет выполнено, если интегралы

$$(B) \quad \int_a^{\infty} (K'_x(p, x) f(x) - K(p, x) f'(x)) dx,$$

$$\int_a^{\infty} \frac{d}{dx} (K'_x(p, x) f(x) - K(p, x) f'(x)) dx \text{ существуют.}$$

п.1.3. Для конкретных преобразований условия (1.4b), (1.7b) и (A) и (B) существенно упрощаются. Пусть

$$L_1 = L_1[a, +\infty) = \left\{ \psi(x) \mid \int_a^{+\infty} |\psi(s)| ds < +\infty \right\}.$$

Прямые вычисления показывают, что при $K(p, x) = e^{-ipx}$, $\sin px$, $\cos px$, $p \in (a, +\infty)$ достаточное условие для выполнения (1.4b), (1.7b): $f(x) \in L_1$; для справедливости (A) (и, значит, (1.4a)): $f(x), f'(x) \in L_1$; для выполнения (B) (и, значит, (1.7a)): $f(x), f'(x), f''(x) \in L_1$.

Для этих же ядер вместо (A) и (B) для справедливости (1.4a) и (1.7a) можно потребовать соответственно, чтобы

$$a) \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad b) \quad |f(x)| + |f'(x)| \rightarrow 0 \quad (1.10)$$

при $x \rightarrow +\infty$, а если $a = -\infty$, то и при $x \rightarrow -\infty$.

При $K(p, x) = e^{-px}$, p — комплексное, $[a, b) = [0, +\infty)$ (см. (1.1)), достаточные условия для справедливости (1.4b), (1.7b): $f(x) e^{-px} \in L_1$, для выполнения (A): $f(x) e^{-px}, f'(x) e^{-px} \in L_1$; для выполнения (B): $f(x) e^{-px}, f'(x) e^{-px}, f''(x) e^{-px} \in L_1$.

Задание. Проверить утверждения п.1.3.

§ 2. Преобразование Лапласа. Температурный режим бесконечного цилиндра (Задача 1)

п.2.1. Преобразование Лапласа — это ИП (1.1) с ядром e^{-px} , где p — комплексное число, $a = 0$, $b = +\infty$, т. е. это преобразование

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx. \quad (2.1)$$

Для нахождения класса функций $f(x)$, к которым мы можем применять преобразование Лапласа, и значений p , для которых величины $\bar{f}(p)$ конечны, введем понятие порядка роста функции. Пусть

$$D(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} |f(x)| dx, \quad \alpha — \text{вещественно.}$$

Число γ называется порядком роста функции $f(x)$, если $D[\alpha] < +\infty$ при $\alpha > \gamma$ и $D[\alpha] = +\infty$ при $\alpha < \gamma$. Значение $D[\gamma]$ при этом не существенно. Порядок роста функции $f(x)$ будем обозначать через $\rho(f)$. Если $D[\alpha] < +\infty$ при $\forall \alpha$, то пишем $\rho(f) = -\infty$. Например, $\rho(e^{-x^2}) = -\infty$. Если $D[\alpha] = +\infty$ при $\forall \alpha$, то полагаем $\rho(f) = +\infty$. Например, $\rho(e^{x^2}) = +\infty$. Далее мы рассматриваем только функции $f(x)$, для которых $\rho(f) < +\infty$, и будем их называть функциями с конечным порядком роста.

Задание. Доказать, что если $|f(x)| \leq |g(x)|$ при $x \in [0, \infty)$, то $\rho(f) \leq \rho(g)$.

Отсюда следует, в частности, что если $M = \sup_{x \in [0, +\infty)} |f(x)| < +\infty$, то $\rho(f) \leq 0$, если $|f(x)| \leq e^{\beta x}$, то $\rho(f) \leq \beta$ и т. д.

Для конечности интеграла в (2.1) мы при ИП Лапласа будем рассматривать только такие значения p , для которых $\operatorname{Re} p > \rho(f)$. Очевидно, что функция $\bar{f}(p)$ будет аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \rho(f)$, где она не будет иметь особых точек.

Например, при $f(x) = e^{-2x}$, очевидно, $\bar{f}(p) = (2 + p)^{-1}$ и мы видим, что функция $\bar{f}(p)$ при $\operatorname{Re} p > -2 = \rho(f)$ аналитична без особенностей (а при $p = -2$ имеет полюс).

При нахождении образов производных $f'(x)$ и $f''(x)$ мы предполагаем, что величины $\rho(f')$ и $\rho(f'')$ конечны и берем $\operatorname{Re} p > \max\{\rho(f), \rho(f'), \rho(f'')\}$. Тогда в силу п.1.3 справедливы равенства (1.5), (1.8), т. е.

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f'(x) dx = -f(0) + p \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx = p\bar{f}(p) - f(0), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-px} f''(x) dx &= -f'(0) - pf(0) + p^2 \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx = \\ &= p^2 \bar{f}(p) - f'(0) - pf(0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Равенства (2.2), (2.3) описывают главное свойство преобразования Лапласа, используемое при решении задач: образы первой и второй производной функции $f(x)$ выражаются через изображение самой функции и через значение $f(0)$ для образа $f'(x)$ или через значения $f(0)$, $f'(0)$ — для образа $f''(x)$.

п.2.2. Приведем пример решения задачи с помощью ИП Лапласа.

Задача 1.

Найти температурный режим бесконечного цилиндра радиуса b , начальная температура которого равна нулю, а боковая поверхность, начиная с момента времени $t = 0 + 0$, поддерживается при температуре u_0 .

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось z совпала с осью цилиндра. Обозначим температуру цилиндра в произвольной точке $M = (x, y, z)$ в любой момент t через $u(M, t)$. Тогда искомая функция u должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = a^2 \Delta u \quad (2.4)$$

и условиям

$$u(M, 0) = 0; \quad u(M, t) = u_0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = b^2, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

Введем цилиндрические координаты, полагая $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, $z = z$. Из физических соображений следует, что температура $u(M, t)$ не будет зависеть ни от z , ни от угла α . Поэтому, не ограничивая общности, с самого начала считаем, что $u = u(r, t)$. Тогда уравнение (2.4) и условия (2.5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2.6)$$

$$\text{a) } u(r, 0) = 0, \quad \text{b) } u(b, t) = u_0 \quad \text{при} \quad t > 0. \quad (2.7)$$

Сделаем преобразование Лапласа по t , т.е. умножим (2.6) и (2.7),b) на e^{-pt} и проинтегрируем по t от нуля до плюс бесконечности. Пусть

$$\bar{u}(r, p) = \int_0^{+\infty} u(r, t) e^{-pt} dt,$$

где $\operatorname{Re} p > \max\{\rho(u), \rho(u_t)\}$. В силу (2.2) и (2.7),a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-pt} dt = p \bar{u}(r, p).$$

Считаем далее, что порядки роста $\rho(u_{rr})$, $\rho(u_r)$ функций $u_{rr}(r, t)$ и $u_r(r, t)$ по t при фиксированном r конечны для $0 \leq r \leq b$ и предполагаем всюду, что

$$\operatorname{Re} p > \max\{\rho(u), \rho(u_r), \rho(u_{rr}), \rho(u_t)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} e^{-pt} dt &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_0^{+\infty} u e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial r} e^{-pt} dt &= \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{+\infty} u e^{-pt} dt = \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \end{aligned}$$

и уравнение (2.6) примет вид $p\bar{u} = a^2(\bar{u}_{rr} + r^{-1}\bar{u}_r)$, т. е.

$$\bar{u}_{rr} + \frac{1}{r}\bar{u}_r - \frac{p}{a^2}\bar{u} = 0. \quad (2.8)$$

Граничное условие (2.7),b) преобразуется к виду

$$\bar{u}(b, p) = \int_0^{+\infty} u(b, t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} u_0 e^{-pt} dt = \frac{u_0}{p}. \quad (2.9)$$

Таким образом мы преобразовали смешанную задачу (2.6), (2.7) для уравнения в частных производных к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (2.8) с начальным условием (2.9). Решим эту задачу. Пусть

$$q = \sqrt{\frac{p}{a^2}}.$$

Введем в уравнение (2.8) новую переменную $\rho = qr$. Тогда для функции $v(\rho) = \bar{u}(r, p)$ при $\rho = qr$ мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - v = 0^*) \quad (2.10)$$

с граничным условием

$$v(qb) = u_0 p^{-1}. \quad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.10) есть

$$v(\rho) = d_1 I_0(\rho) + d_2 K_0(\rho),$$

где $I_0(\rho)$ и $K_0(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя (иногда называемые соответственно функциями Бесселя и Ханкеля

*) Хотя ρ является комплексной переменной, но при фиксированном p (а значит и q) переход от дифференцирования по r к дифференцированию по ρ — это переход к дифференцированию по фиксированному направлению в комплексной плоскости p .

чисто мнимого аргумента) нулевого порядка [1], d_1, d_2 — произвольные константы. Значение $v(0)$ должно быть конечным, ибо величина $\bar{u}(0, p)$ конечна, поскольку $\operatorname{Re} p > \rho(u(r, t))$. Поскольку функция Макдональда $K_0(\rho)$ обращается в бесконечность при $\rho = 0$, а $I_0(0) = 1$, то в формуле для $v(\rho)$ мы должны положить $d_2 = 0$. В силу (2.11)

$$v(qb) = u_0 p^{-1} = d_1 I_0(qb),$$

откуда

$$d_1 = \frac{u_0}{I_0(qb) p}.$$

Следовательно,

$$\bar{u}(r, p) = v(\rho) = \frac{u_0 I_0(qr)}{p I_0(qb)}.$$

Таким образом мы нашли функцию $\bar{u}(r, p)$ — образ (по Лапласу) решения $u(r, t)$ задачи (2.6), (2.7), и возникает задача нахождения оригинала по известному изображению.

§ 3. Формула обращения для преобразования Лапласа. Лемма Жордана

п.3.1. В ходе решения Задачи 1 перед нами возникла необходимость нахождения прообраза по известному образу (изображению). Подобные задачи возникают при любых ИП и для наиболее употребительных из них — к которым безусловно относится и преобразование Лапласа — существуют достаточно подробные таблицы, где в одном столбце даны оригиналы, а в другом — изображения; фрагмент такой таблицы из [2] приведен ниже.

$f(x)$	$\bar{f}(p)$
$\frac{x^n}{\Gamma(n+1)}, \quad n > -1$	p^{-n-1}
$e^{-\beta x}$	$(p + \beta)^{-1}$
$\sin \omega x$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

Очень подробные таблицы для различных ИП содержатся в [3].

Однако никакие таблицы не могут предусмотреть возможные образы решений для всевозможных задач.

В общем случае задача нахождения прообраза по данному образу решается с помощью формулы обращения. Пусть $\bar{f}(p)$ — образ по Лапласу функции $f(x)$. Тогда в любой точке x , где $f(x) \in C^1$, имеет место равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(p) e^{px} dp, \quad (3.1)$$

где γ — любое число, $\gamma > \rho(f)$, и интегрирование ведется по прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$, параллельной мнимой оси. Хотя условие $f(x) \in C^1$ является достаточным для справедливости (3.1), но в большинстве задач оно выполнено. Формула (3.1) и есть формула обращения для преобразования Лапласа. Её вывод дан в Приложении (§ П2).

п.3.2. В случае, когда в области $\operatorname{Re} p < \gamma$ функция $\bar{f}(p)$ не имеет других особых точек кроме полюсов, интеграл в (3.1) может быть вычислен с помощью леммы Жордана.

Лемма Жордана. Пусть $M(-d, 0)$, $d \geq 0$, — произвольная точка вещественной оси, C_R^M — окружность радиуса R с центром в точке M , $0 < \delta \ll 1$, $\beta(R) = \max_{p \in C_R^M} |\bar{f}(p)|$, $\arg p \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{3}{2}\pi + \delta \right]$. Тогда если $\exists \delta > 0$ и $R_n \rightarrow \infty$ такие, что $\beta(R_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(p) e^{px} dp = 2\pi i \sum_{p, \operatorname{Re} p < \gamma} \operatorname{res} (\bar{f}(p) e^{px}), \quad (3.2)$$

где $\operatorname{res} \Phi(p)$ — вычет функции $\Phi(p)$ в точке p .

Замечание. Обычно в лемме Жордана центр окружности — точка $M(-d, 0)$ — совпадает с началом координат, т. е. $d = 0$. Однако в интересах приложения (см. Задачу 2, § 5) надо рассмотреть и случай $d \neq 0$.

Доказательство. Для $\forall R_n, R_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, пусть $(ia_n, -ia_n)$ — ординаты точек $B_n(\gamma, ia_n), A_n(\gamma, -ia_n)$ пересечения окружности $C_{R_n}^M$ с прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$ (рис. 1). Так как интеграл в левой части равенства (3.2) конечен, то

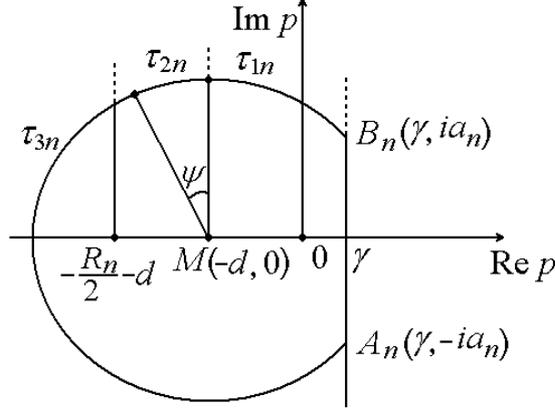


Рис. 1

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(p) e^{px} dp = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma-ia_n}^{\gamma+ia_n} \bar{f}(p) e^{px} dp.$$

Пусть Γ_n — часть окружности $C_{R_n}^M$, лежащая слева от прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$, и $\hat{\Gamma}_n := \Gamma_n \cup [A_n, B_n]$. Тогда

$$\int_{\gamma-ia_n}^{\gamma+ia_n} \bar{f}(p) e^{px} dp = \int_{\hat{\Gamma}_n} \bar{f}(p) e^{px} dp - \int_{\Gamma_n} \bar{f}(p) e^{px} dp. \quad (3.3)$$

Поскольку внутри кривой $\hat{\Gamma}_n$ функция $\bar{f}(p) e^{px}$ имеет своими особыми точками только полюса, то [4]

$$\int_{\hat{\Gamma}_n} \bar{f}(p) e^{px} dp = 2\pi i \sum_{\operatorname{Re} p < \gamma, |pM| \leq R_n} \operatorname{res} (\bar{f}(p) e^{px}). \quad (3.4)$$

Переходя в (3.3) и (3.4) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(p) e^{px} dp = 2\pi i \sum_{p, \operatorname{Re} p < \gamma} \operatorname{res}(\bar{f}(p) e^{px}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} \bar{f}(p) e^{px} dp. \quad (3.5)$$

Поэтому для доказательства леммы Жордана достаточно установить равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} \bar{f}(p) e^{px} dp = 0. \quad (3.6)$$

п.3.3. Рассмотрим сначала верхнюю часть кривой Γ_n , которую обозначим Γ_n^+ , т.е. $\Gamma_n^+ = \{p \mid p \in \Gamma_n, \operatorname{Im} p \geq 0\}$. Разобьем Γ_n^+ на 3 части: $\tau_{1n} = \{p \mid p \in \Gamma_n^+, -d \leq \operatorname{Re} p < \gamma\}$, $\tau_{2n} = \{p \in \Gamma_n^+, -\frac{R_n}{2} - d \leq \operatorname{Re} p < -d\}$, $\tau_{3n} = \{p \mid p \in \Gamma_n^+, -R_n - d \leq \operatorname{Re} p < -\frac{R_n}{2} - d\}$. Очевидно

$$\int_{\Gamma_n^+} \bar{f}(p) e^{px} dp = \sum_{i=1}^3 \int_{\tau_{in}} \bar{f}(p) e^{px} dp. \quad (3.7)$$

Пусть $\delta > 0$ и последовательность $R_n \rightarrow +\infty$ такие, что $\alpha_n := \beta(R_n) = \sup_{p \in \Gamma_n} |\bar{f}(p)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\arg p \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{3\pi}{2} + \delta\right]$.

Докажем, что интегралы по дугам τ_{in} стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Начнем с τ_{1n} . Очевидно

$$\left| \int_{\tau_{1n}} \bar{f}(p) e^{px} dp \right| \leq \alpha_n e^{\gamma x} l(\tau_{1n}), \quad (3.8)$$

где $l(\tau_{1n})$ — длина дуги τ_{1n} . Угол (с вершиной в точке M), опирающийся на эту дугу, равен $\arcsin \frac{\gamma + d}{R_n}$, и поэтому

$$l(\tau_{1n}) = R_n \arcsin \frac{\gamma + d}{R_n}.$$

Разлагая $\arcsin \varphi$ в ряд в окрестности точки $\varphi = 0$, видим, что

$$\left| \arcsin \frac{\gamma + d}{R_n} \right| \leq \frac{\text{const}}{R_n} \quad \text{при } R_n \gg 1$$

и, следовательно, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} l(\tau_{1n}) < +\infty$. Поэтому и так как $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, из (3.8) получаем, что

$$\int_{\tau_{1n}} \bar{f}(p) e^{px} dp \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Для оценки интеграла по кривой τ_{2n} заметим, что при $p = p_1 + ip_2 \in \tau_{2n}$, очевидно, $p_1 = -d - R_n \sin \psi$, $p_2 = R_n \cos \psi$ (см. рис. 1), и поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau_{2n}} \bar{f}(p) e^{px} dp \right| &\leq \alpha_n \int_0^{\arcsin \frac{1}{2}} |e^{iR_n \cos \psi}| e^{-(d+R_n \sin \psi)} R_n d\psi = \\ &= \alpha_n R_n e^{-d} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R_n \sin \psi} d\psi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Поскольку $\psi \leq \frac{\pi}{6}$, то $\cos \psi \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $d\psi = \frac{d \sin \psi}{\cos \psi} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} d \sin \psi$. Учитывая это и полагая $t = \sin \psi$, имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R_n \sin \psi} d\psi \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R_n \sin \psi} d \sin \psi = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-R_n t} dt \leq \frac{\text{const}}{R_n}.$$

Отсюда и из(3.10) следует, что

$$\int_{\tau_{2n}} \bar{f}(p) e^{px} dp \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Наконец, на дуге τ_{3n} , очевидно, $p_1 = \operatorname{Re} p \leq -\frac{R_n}{2} - d$. Поэтому

$$\left| \int_{\tau_{3n}} \bar{f}(p) e^{px} dp \right| \leq \alpha_n e^{-d-0,5R_n} \pi R_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Из (3.7) в силу (3.9), (3.11), (3.12) следует, что

$$\int_{\Gamma_n^+} f(p) e^{px} dx \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство аналогичного соотношения для дуги $\Gamma_n^- = \{p \mid p \in \Gamma_n, \operatorname{Im} p < 0\}$ проводится так же, как и для Γ_n^+ (проверки самостоятельно) и, следовательно, мы доказали справедливость равенства (3.6). Лемма Жордана доказана.

§ 4. Задача 1 (Окончание)

п.4.1. В конце § 2 мы нашли образ $\bar{u}(r, p)$ решения $u(r, t)$ Задачи 1 при ИП Лапласа:

$$\bar{u}(r, p) = \frac{u_0}{p} \frac{I_0(qr)}{I_0(qb)}, \quad \text{где } q = \frac{\sqrt{p}}{a}. \quad (4.1)$$

Покажем, что функция $\bar{u}(r, p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Поскольку ряды для функции $I_0(\rho)$ содержат только четные степени аргумента [1], то в этих рядах не будет корней из p . Следовательно, функция $I_0(\rho)$ не имеет точек ветвления. Нам остается только проверить, что при фиксированном r найдутся число $\delta > 0$ и последовательность $R_n \rightarrow \infty$ такие, что

$$\alpha_n := \sup_{p, |p|=R_n} |\bar{u}(r, p)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \arg p \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{3}{2}\pi + \delta \right].$$

Пусть $\xi = \frac{r}{b}$ и $\omega = qb$. Тогда в силу (4.1)

$$\bar{u}(r, p) = \frac{u_0}{p} \frac{I_0(\omega\xi)}{I_0(\omega)}, \quad \text{где } \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \leq \arg \omega \leq \frac{3}{4}\pi + \frac{\delta}{2}. \quad (4.2)$$

Пусть $|\omega| \gg 1$. В силу [5, (5.11.8)]

$$I_0(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\omega}} \left\{ e^\omega \left(1 + O\left(\frac{1}{|\omega|\right)} \right) + i e^{-\omega} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\omega|\right)} \right) \right\}. \quad (4.3)$$

Вычислим $|I_0(\omega)|$ и $|I_0(\omega\xi)|$, пренебрегая членами $O\left(\frac{1}{|\omega|\right}$.

Пусть $\omega = \omega_1 + i\omega_2$. Имеем

$$\begin{aligned} |I_0(\omega)| &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi|\omega|}} \left| e^{\omega_1}(\cos \omega_2 + i \sin \omega_2) + e^{-\omega_1}(\sin \omega_2 + i \cos \omega_2) \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\omega|}} \left[(e^{\omega_1} \cos \omega_2 + e^{-\omega_1} \sin \omega_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (e^{\omega_1} \sin \omega_2 + e^{-\omega_1} \cos \omega_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\omega|}} (e^{2\omega_1} + e^{-2\omega_1} + 2 \sin 2\omega_2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выражение для $|I_0(\omega\xi)|$ при $|\omega\xi| \gg 1$ получается из (4.4) заменой ω на $\omega\xi$, ω_i на $\omega_i\xi$. Покажем, что на последовательности окружностей $\omega_1^2 + \omega_2^2 = (\pi n)^2$ отношение $B(\omega) := |I_0(\omega\xi)| : |I_0(\omega)|$ будет равномерно ограничено при $\arg p \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{3}{2}\pi + \delta \right]$. Рассмотрим сначала те ω_1 , для которых $|\omega_1| \leq 100$, $|\omega| = \pi n \gg 100$. Тогда

$$\omega_2 = \sqrt{(\pi n)^2 - \omega_1^2} = \pi n \left(1 - \frac{\omega_1^2}{(\pi n)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \pi n \left(1 - \frac{\omega_1^2}{2(\pi n)^2} \right) = \pi n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому $|\sin 2\omega_2| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ и в силу (4.4) для больших n

$$\begin{aligned} |I_0(\xi\omega)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi|\omega|}} (e^{2\omega_1\xi} + e^{-2\omega_1\xi} + 2)^{\frac{1}{2}}, \\ |I_0(\omega)| &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi|\omega|}} (e^{2\omega_1} + e^{-2\omega_1} - 0,5)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B(\omega) = \left| \frac{I_0(\omega\xi)}{I_0(\omega)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{(e^{2\omega_1\xi} + e^{-2\omega_1\xi} + 2)^{\frac{1}{2}}}{(e^{2\omega_1} + e^{-2\omega_1} - 0,5)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2e^{100}}{\sqrt{\xi}} \quad (4.5)$$

при $|\omega_1| \leq 100$ и $n \gg 100$. Если $\omega_1 > 100$, то, поделив числитель и знаменатель отношения $B(\omega)$ на e^{ω_1} , получим, что

$$B(\omega) \leq \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{(e^{2\omega_1(\xi-1)} + e^{-2\omega_1(\xi+1)} + 2e^{-2\omega_1})^{\frac{1}{2}}}{(1 + e^{-4\omega_1} + 2e^{-2\omega_1} \sin 2\omega_2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{4}{\sqrt{\xi}} \quad (4.6)$$

ибо $|2e^{-2\omega_1} \sin 2\omega_2| \leq 0,5$. При $\omega_1 < -100$ оценка аналогична, но делить надо на $e^{-\omega_1}$. Из (4.5), (4.6) следует, что отношение $B(\omega)$ равномерно ограничено при $|\omega| = \pi n$, $n \gg 100$ и $\arg \omega \in \left[\frac{1}{4}\pi - \frac{\delta}{2}, \frac{3}{4}\pi + \frac{\delta}{2} \right]$, т.е. при $|p| = R_n = \frac{a^2}{b^2} (\pi n)^2$, $n \gg 100$ и $\arg p \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{3}{2}\pi + \delta \right]$. Поэтому из (4.2) следует, что при указанных p

$$|\bar{u}(r, p)| \leq \frac{\text{const}}{|p|} B(\omega) \leq \frac{\text{const}}{R_n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом для функции $\bar{u}(r, p)$ все условия леммы Жордана выполнены и, значит,

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{u}(r, p) e^{pt} dp = \sum_{p, \text{Re } p < \gamma} \text{res} \left(\frac{u_0}{p} \frac{I_0(qr)}{I_0(qb)} e^{pt} \right). \quad (4.7)$$

п.4.2. Нам остается найти вычеты в (4.7).

Пусть $\Phi(p) = \frac{u_0}{p} \frac{I_0(qr)}{I_0(qb)} e^{pt}$. Первый полюс функции $\Phi(p)$ — это точка $p = 0$. Далее, поскольку $I_0(qb) = J_0(iqb)$ [1], то все остальные полюса $p = p_k$ функции $\Phi(p)$ находятся из равенства $J_0(iqb) = 0$, где $J_0(\rho)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Пусть μ_{0k} — нули функции $J_0(\rho)$. Тогда полюса p_k функции $\Phi(p)$ определяются равенством $iq_k b = \mu_{0k}$, где $q_k = \sqrt{p_k}/a$. Отсюда

$$p_k = -\frac{\mu_{0k}^2 a^2}{b^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Находим вычеты. При $p = 0$, очевидно, $\operatorname{res} \Phi(p) = u_0$, при $p = p_k$

$$\operatorname{res} \Phi(p) = \frac{e^{p_k t} I_0(q_k r) u_0}{p_k \frac{d}{dp} I_0(qb)_{p=p_k}}. \quad (4.8)$$

(Здесь мы используем тот факт, что нули функции $I_0(qb)$ не кратны — докажите это самостоятельно.) При $p = p_k$ имеем $p \frac{d}{dp} I_0(qb) = p \frac{d}{dp} J_0(iqb) = ip J_0'(iqb) b \frac{dq}{dp} = J_0'(\mu_{0k}) \frac{\mu_{0k}}{2} = -J_1(\mu_{0k}) \frac{\mu_{0k}}{2}$, $I_0(q_k r) = J_0\left(\frac{\mu_{0k}}{b} r\right)$.

Подставляя эти выражения в (4.8) и затем полученный результат в (4.7), мы получим решение задачи:

$$u(r, t) = u_0 \left(1 - \frac{2 \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\mu_{0k} \frac{r}{b}\right) e^{-\mu_{0k}^2 a^2 b^{-2} t}}{\mu_{0k} J_1(\mu_{0k})} \right).$$

§ 5. Распространение тепла в полубесконечном стержне (Задача 2)

п.5.1. Приведем еще один пример применения преобразования Лапласа для решения уравнения в частных производных. В рассматриваемой далее задаче нам надо будет найти прообраз функции, имеющей точку ветвления.

Задача 2. Найти температурный режим полубесконечного стержня, начальная температура которого равна нулю, а левый конец поддерживается при температуре u_0 , начиная с момента времени $t = 0 + 0$.

Решение. Выберем систему координат так, что ось $x > 0$ совпадает с положением стержня и точка $x = 0$ — с его левым концом. Пусть $u(x, t)$ — температура стержня в точке x в момент t .

Тогда математически Задача 2 формулируется так: найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (5.1)$$

при условии

$$\text{a) } u(x, 0) = 0, \quad \text{b) } u(0, t) = u_0 \quad \text{при } \forall t > 0. \quad (5.2)$$

Поскольку и t и x меняются от 0 до $+\infty$, то в принципе мы могли бы делать преобразование Лапласа как по x , так и по t . Однако при ИП Лапласа по x нам пришлось бы преобразовать $u_{xx}(x, t)$ и в результате такого преобразования в полученное уравнение в силу (2.3) вошла бы функция $u_x(0, t)$, которая нам не известна. В то же время при преобразовании по t нам надо находить образ $u_t(x, t)$, для чего в силу (2.2) достаточно знать функцию $u(x, 0)$, которая дана. Поэтому преобразование Лапласа по x не целесообразно, а по t «не имеет противопоказаний». Пусть $\bar{u}(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt$. Считаем, что порядки роста по t $\rho(u)$, $\rho(u_t)$ и $\rho(u_{xx})$ функций u , u_t , u_{xx} конечны. Берем $\text{Re } p > \gamma = \max\{\rho(u), \rho(u_t), \rho(u_{xx})\}$. Умножая уравнение (5.1) и граничное условие (5.2),b) на e^{-pt} и интегрируя по t от нуля до бесконечности, мы в силу (2.2) с учетом (5.2),a) получим уравнение

$$a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = p \bar{u}(x, p) \quad (5.3)$$

с начальным условием

$$\bar{u}(0, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u_0 dt = \frac{u_0}{p}. \quad (5.4)$$

Из (5.3) находим

$$\bar{u}(x, p) = d_1 e^{\frac{x}{a} \sqrt{p}} + d_2 e^{-\frac{x}{a} \sqrt{p}}, \quad (5.5)$$

где d_i — произвольные константы. Для определенности считаем здесь $\text{Re } \sqrt{p} > 0$. При $x \rightarrow +\infty$ первое слагаемое в (5.5) при $d_1 \neq 0$

по модулю стремится к $+\infty$, а, следовательно, и $|\bar{u}(x, p)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Однако это невозможно, ибо из физических соображений температура $u(x, t)$ равномерно ограничена и, значит, при $\operatorname{Re} p > 0$ имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\bar{u}(x, p)| < +\infty$. Следовательно, $d_1 = 0$.

Подставляя (5.5) в (5.4), находим $d_2 = \frac{u_0}{p}$. Таким образом, изображение $\bar{u}(x, p)$ решения нашей задачи есть

$$\bar{u}(x, p) = \frac{u_0}{p} e^{-\frac{x}{a} \sqrt{p}}$$

и по формуле обращения (3.1)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{u_0}{p} e^{-\frac{x}{a} \sqrt{p}} e^{pt} dp. \quad (5.6)$$

п.5.2. Для обрацаемой функции $\bar{u}(x, p)$, очевидно, выполняется условие $\sup_{p, |p|=R} |\bar{u}(x, p)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$ из леммы Жор-

дана. Тем не менее она не может быть применена, ибо функция $\bar{u}(x, p)$ имеет точку ветвления ($p = 0$). Именно этот факт определяет стратегию нахождения $u(x, t)$. Проведем в комплексной

плоскости p две окружности с центром в начале координат: одну C_ε^0 радиуса ε , вырезающую точку ветвления, и другую C_R^0 произвольного радиуса $R \gg 1$. Пусть $\Gamma_R = \{p \mid p \in C_R^0, \operatorname{Re} p \leq \gamma\}$ (рис. 2). В кольцевой области между окружностями сделаем разрез по отрезку вещественной оси от $-R$ до $-\varepsilon$. Обозначим концевые

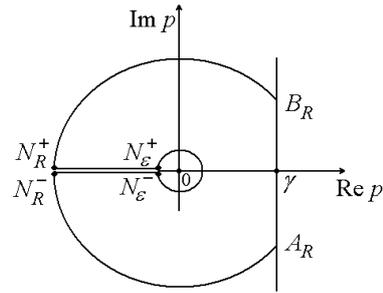


Рис. 2

точки на верхнем берегу разреза через N_R^+ , N_ε^+ , а на нижнем — через N_R^- , N_ε^- . Точки пересечения окружности Γ_R с прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$ обозначим через A_R и B_R , их координаты, очевидно,

будут $(\gamma, -a_R i)$ и $(\gamma, a_R i)$, где $a_R = \sqrt{R^2 - \gamma^2} > 0$. Пусть

$$\Gamma_{R,\varepsilon} = \smile B_R N_R^+ \cup [N_R^+, N_\varepsilon^+] \cup \dot{C}_\varepsilon^0 \cup [N_\varepsilon^- N_R^-] \cup \smile N_R^- A_R$$

и $\hat{\Gamma}_{R,\varepsilon} = \Gamma_{R,\varepsilon} \cup [A_R, B_R]$, где \dot{C}_ε^0 — окружность C_ε^0 с выколотой точкой $(-\varepsilon, 0)$. Далее поступаем так же, как при решении Задачи 1. Пусть $\Phi(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}} e^{pt}$. В силу (5.6)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{2\pi i} \int_{\gamma - ia_R}^{\gamma + ia_R} \Phi(p) dp = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_{R,\varepsilon}} \Phi(p) dp - \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \Phi(p) dp. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Так как в области, ограниченной кривой $\hat{\Gamma}_{R,\varepsilon}$, функция $\Phi(p)$ аналитическая и не имеет особых точек, то [4]

$$\int_{\hat{\Gamma}_{R,\varepsilon}} \Phi(p) dp = 0 \quad \text{при } \forall R \text{ и } \forall \varepsilon > 0.$$

Поэтому в силу (5.7)

$$u(x, t) = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \Phi(p) dp. \quad (5.8)$$

Так же, как при решении Задачи 1, устанавливается, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\smile B_R N_R^+} \Phi(p) dp = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\smile N_R^- A_R} \Phi(p) dp = 0.$$

Поэтому из (5.8) следует, что

$$u(x, t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} -\frac{u_0}{2\pi i} \left(\int_{N_R^+}^{N_\varepsilon^+} \Phi(p) dp + \int_{C_\varepsilon^0} \Phi(p) dp + \int_{N_\varepsilon^-}^{N_R^-} \Phi(p) dp \right), \quad (5.9)$$

где интегрирование по окружности C_ε^0 происходит по часовой стрелке (ибо обход всей кривой $\Gamma_{R,\varepsilon}$ проводится против часовой стрелки). Вычислим интегралы в (5.9). Пусть $\alpha = \operatorname{Re} p$. Интегрируя по α по верхнему и нижнему берегам разреза и делая потом замену $\alpha \rightarrow -\alpha$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{N_R^+}^{N_\varepsilon^+} \Phi(p) dp &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{\alpha t} e^{-\frac{x}{a} i \sqrt{-\alpha}}}{\alpha} d\alpha = - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} e^{-\frac{x}{a} i \sqrt{\alpha}}}{\alpha} d\alpha, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{N_R^-}^{N_\varepsilon^-} \Phi(p) dp &= \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{e^{\alpha t} e^{\frac{x}{a} i \sqrt{-\alpha}}}{\alpha} d\alpha = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} e^{\frac{x}{a} i \sqrt{\alpha}}}{\alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что для точек $p = p_1 + ip_2$, $p_1 = \alpha$, $p_2 = \pm 0$ верхнего (+) и нижнего (-) берегов разреза (т. е. для точек отрезков $N_R^+ N_\varepsilon^+$ и $N_R^- N_\varepsilon^-$) выполняется соответственно $\sqrt{p} = i\sqrt{-\alpha}$ и $\sqrt{p} = -i\sqrt{-\alpha}$. Подставим найденные выражения в (5.9) и перейдем там к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получим

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\pi i} \int_0^\infty (e^{-\alpha t} e^{-i \frac{x}{a} \sqrt{\alpha}} - e^{-\alpha t} e^{i \frac{x}{a} \sqrt{\alpha}}) \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{u_0}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^0} \Phi(p) dp. \quad (5.10)$$

Поскольку для малых $|p|$, очевидно, $\Phi(p) = \frac{1}{p} (1 + O(\sqrt{|p|}))$, то интеграл по окружности C_ε^0 от $\Phi(p)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к $-2\pi i$ (мы учли направление обхода окружности C_ε^0). Поэтому в силу (5.10)

$$u(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} \sin \frac{x}{a} \sqrt{\alpha}}{\alpha} d\alpha \right). \quad (5.11)$$

Выражение для $u(x, t)$ можно привести к виду [6, (2.5.36.6) и (1.3.3.1)]

$$u(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 \beta^2 t}}{\beta} \sin x \beta d\beta \right) = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi. \quad (5.12)$$

Это и есть решение задачи о тепловом режиме полубесконечного стержня. Забегая вперед, заметим, что рассмотренную задачу можно решить гораздо проще с помощью другого ИП, однако при более жестких ограничениях на отыскиваемую функцию $u(x, t)$.

§ 6. Синус- и косинус-преобразования

п.6.1. Рассмотрим ИП с ядрами $K(p, x) = \sin px$ и $K(p, x) = \cos px$, $a = 0$, $b = +\infty$ (см. §1) и назовем их соответственно синус- и косинус-преобразованиями. Пусть $\bar{f}_s(p)$ и $\bar{f}_c(p)$ — образы функции $f(x)$ при этих преобразованиях, т. е.

$$\bar{f}_s(p) = \int_0^{+\infty} f(x) \sin px dx, \quad \bar{f}_c(p) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos px dx. \quad (6.1)$$

Для конечности интегралов в (6.1) достаточно интегрируемости $|f(x)|$ на оси $[0, +\infty)$, т. е. условия $f(x) \in L_1 := L_1[0, \infty)$. Формулы обращения для этих преобразований (см. Приложение, § П2)

$$\text{а) } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{f}_s(p) \sin px dp, \quad \text{б) } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{f}_c(p) \cos px dp. \quad (6.2)$$

Как и в случае преобразования Лапласа, достаточным условием справедливости формул обращения является требование $f(x) \in C^1$. В последнее время преобладает симметричная форма за-

писи самих преобразований и формул обращения:

$$\bar{f}_s(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin px \, dx, \quad \bar{f}_c(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos px \, dx,$$

и, соответственно,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}_s(p) \sin px \, dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}_c(p) \cos px \, dx.$$

Однако мы в дальнейшем будем придерживаться формул (6.1), (6.2).

п.6.2. Найдем изображения первой и второй производных при синус- и косинус-преобразованиях.

Пусть $f(x) \in L_1$ и или $f'(x)$, $f''(x) \in L_1$ или выполняется (1.10). Применяя формулы (1.5), (1.8), имеем

$$\int_0^{+\infty} f'(x) \sin px \, dx = -p \int_0^{+\infty} f(x) \cos px \, dx = -p \bar{f}_c(p), \quad (6.3)$$

$$\int_0^{+\infty} f''(x) \sin px \, dx = pf(0) - p^2 \bar{f}_s(p), \quad (6.4)$$

$$\int_0^{+\infty} f'(x) \cos px \, dx = -f(0) + p \bar{f}_s(p), \quad (6.5)$$

$$\int_0^{+\infty} f''(x) \cos px \, dx = -f'(0) - p^2 \bar{f}_c(p). \quad (6.6)$$

Равенство (6.3) показывает, что изображение первой производной при синус-преобразовании не выражается через изображение исходной функции при этом же преобразовании. Следовательно, применение данного преобразования при наличии первых производных по той переменной, по которой делается преобразование, не позволяет получить уравнение, куда бы входили

только синус-изображение решения и его производные. Именно поэтому в рассмотренной ситуации синус-преобразование не применяется, Аналогичная ситуация имеет быть и с косинус-преобразованием (см. (6.5)).

В то же время из формул (6.4), (6.6) видно, что изображение вторых производных как при синус-преобразовании, так и при косинус-преобразовании выражается через изображение оригинала при *этом* же преобразовании. Поэтому каждое из рассматриваемых преобразований целесообразно применять по тем переменным, по которым в решаемом уравнении есть только производные второго порядка. При этом, как следует из (6.4), (6.6) для применения синус-преобразования необходимо знать в начальной точке значение оригинала, а для косинус-преобразования — значение производной от оригинала.

Замечание. В случае уравнения k -го порядка при $k > 2$ синус- и косинус-преобразования эффективны при отсутствии в уравнении производных нечетного порядка по переменной, по которой делается преобразование.

Задание. Выразить изображение $f^{IV}(x)$ при косинус-преобразовании через изображение $f(x)$.

п.6.3. Приведем пример применения синус-преобразования. Рассмотрим Задачу 2, которую мы решили в § 5 с помощью преобразования Лапласа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.7)$$

$$\text{а) } u(x, 0) = 0, \quad \text{б) } u(0, t) = u_0, \quad \forall t > 0. \quad (6.8)$$

Воспользуемся синус-преобразованием по x , предполагая, что при любом фиксированном t функции $u(x, t)$, $u_t(x, t) \in L_1$ и или $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t) \in L_1$ или выполняется (1.10) с $f(x) = u(x, t)$. Положим

$$\bar{u}(p, t) = \int_0^{+\infty} u(x, t) \sin px \, dx.$$

Умножая (6.7) и (6.8),а) на $\sin px$ и интегрируя по x от 0 до $+\infty$, мы в силу (6.4), (6.8),b) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(p, t) = -a^2 p^2 \bar{u}(p, t) + a^2 p u_0, \quad (6.9)$$

$$\bar{u}(p, 0) = 0. \quad (6.10)$$

Общее решение уравнения (6.9) есть

$$\bar{u}(p, t) = d e^{-a^2 p^2 t} + \frac{u_0}{p},$$

откуда в силу (6.10) $d = -\frac{u_0}{p}$. Таким образом

$$\bar{u}(p, t) = \frac{u_0}{p} (1 - e^{-a^2 p^2 t}).$$

По формуле (6.2)

$$u(x, t) = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - e^{-p^2 a^2 t} \right) \sin xp \, dp.$$

Но

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xp}{p} \, dp = \frac{\pi}{2}$$

и, значит,

$$u(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-p^2 a^2 t} \sin xp}{p} \, dp \right). \quad (6.11)$$

Решение (6.11), естественно, совпадает с решением (5.12) Задачи 2, полученным с помощью преобразования Лапласа. Сравнивая применение преобразования Лапласа и синус-преобразования для решения рассмотренной задачи, мы видим, что использование синус-преобразования приводит к значительно более простым вычислениям, чем преобразование Лапласа. В то же

время следует помнить, что в общем случае синус-преобразование применимо только для отыскания решений из L_1 , в то время как преобразование Лапласа позволяет находить не только такие решения, но даже решения растущие (!) на бесконечности — при конечном порядке роста.

п.6.4. Рассмотрим пример применения косинус-преобразования.

Задача 3. Найти решение уравнения, описывающего свободные колебания однородной полубесконечной струны. Левый конец — свободен, профиль струны в начальный момент и начальная скорость — заданы.

Пусть положительная полуось x совпадает с положением струны в состоянии равновесия и $u(x, t)$ — отклонение точки x струны в момент времени t . Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.12)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad (6.13)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

где (6.13) — граничное условие для свободного конца струны, (6.14) — начальные условия. Далее считаем, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1$ и при любом фиксированном t функции $u(x, t)$, $u_{tt}(x, t) \in L_1$ и или $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t) \in L_1$ или выполняется (1.10) с $f(x) = u(x, t)$. Сделаем косинус-преобразование по x уравнения (6.12) и начальных условий (6.14). Пусть

$$\bar{u}(p, t) = \int_0^{+\infty} u(x, t) \cos px \, dx.$$

Умножая (6.12), (6.14) на $\cos px$ и интегрируя по x от 0 до $+\infty$, получим с учетом (6.6) и (6.13)

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = -a^2 p^2 \bar{u}, \quad (6.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(p, 0) = \bar{\varphi}(p) &= \int_0^{+\infty} \varphi(x) \cos px \, dx, \\ \bar{u}_t(p, 0) = \bar{\psi}(p) &= \int_0^{+\infty} \psi(x) \cos px \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Общее решение уравнения (6.15) есть

$$\bar{u}(p, t) = d_1 \sin apt + d_2 \cos apt,$$

где d_i — произвольные константы. Находим их из (6.16) и получаем, что

$$\bar{u}(p, t) = \bar{u}_1(p, t) + \bar{u}_2(p, t),$$

где

$$\bar{u}_1(p, t) = \bar{\varphi}(p) \cos apt, \quad \bar{u}_2(p, t) = \bar{\psi}(p)(ap)^{-1} \sin apt, \quad (6.17)$$

Из (6.17) в силу формул обращения

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (6.18)$$

где

$$u_i(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{u}_i(p, t) \cos px \, dp. \quad (6.19)$$

п.6.5. Найдем сначала $u_1(x, t)$. Очевидно,

$$\bar{u}_1(p, t) \cos px = \frac{\bar{\varphi}(p) \cos p(x + at)}{2} + \frac{\bar{\varphi}(p) \cos p(x - at)}{2}.$$

Поэтому

$$u_1(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\varphi}(p) \cos p(x + at)}{2} dp + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\varphi}(p) \cos p(x - at)}{2} dp. \quad (6.20)$$

В силу формулы обращения (6.2),b) первый интеграл в (6.20) равен $\varphi(x+at)/2$. Для вычисления второго интеграла заменим там $(x-at)$ на $|x-at|$ (что не меняет значения интеграла) и после этого, снова используя (6.2),b), получим, что он равен $\varphi(|x-at|)/2$. Таким образом

$$u_1(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(|x-at|)}{2}. \quad (6.21)$$

Подчеркнем, что без замены $x-at$ на $|x-at|$ мы могли бы пользоваться формулой обращения

$$\varphi(x-at) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{\varphi}(p) \cos p(x-at) dp$$

для нахождения второго интеграла в (6.20) только при $x-at \geq 0$, в то время как разность $x-at$ принимает и отрицательные значения. Далее найдем

$$u_2(x, t) = \frac{2}{\pi a} \int_0^{+\infty} \bar{\psi}(p) p^{-1} \sin apt \cos px dp.$$

Считая возможным дифференцирование по t под знаком интеграла, имеем

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{\psi}(p) \cos apt \cos px dp. \quad (6.22)$$

Правая часть (6.22) вычисляется так же, как $u_1(x, t)$. В результате получим, что

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} [\psi(x+at) + \psi(|x-at|)],$$

откуда

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(|s|) ds + d,$$

где константа $d = 0$, ибо в силу (6.14), (6.18) и (6.21) $u_2(x, 0) = u(x, 0) - u_1(x, 0) = 0$. Подставляя найденные выражения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ в (6.18) получаем

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(|x - at|)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(|s|) ds. \quad (6.23)$$

п.6.6. Формула (6.23) получена нами при весьма жестких ограничениях на начальные условия φ и ψ , а также на само решение u и его производные. Однако эти ограничения связаны только с методом решения данной задачи. Другой подход к решению — метод характеристик с четным продолжением начальных условий — приводит к той же самой формуле (6.23) (формуле Даламбера для полубесконечной струны со свободным концом) только при условиях $\psi(x) \in C^1$, $\varphi \in C^2$ [1]. Прямая подстановка функции $u(x, t)$ из (6.23) в уравнение (6.12) показывает, что при такой гладкости функций φ и ψ уравнение (6.12) удовлетворяется независимо от выполнения или не выполнения ограничений на функции φ , ψ , u , u_x , u_{xx} , u_{tt} , при которых мы получили (6.22). Таким образом, рассмотренная задача является собой пример, в котором математически некорректный для многих начальных условий метод решения приводит к правильному результату. Именно об этом мы говорили в конце Введения.

§ 7. Преобразование Фурье

п.7.1. Преобразование Фурье — это интегральное преобразование (1.1) с ядром $K(p, x) = e^{-ipx}$, $a = -\infty$, $b = +\infty$, то есть при ИП Фурье образ $\bar{f}(p)$ функции $f(x)$ дается равенством

$$\bar{f}(p) = \int f(x)e^{-ipx} dx, \quad p \text{ — вещественно.} \quad (7.1)$$

Здесь и далее интегралы без указания пределов интегрирования — это интегралы от $-\infty$ до $+\infty$.

Для применимости преобразования Фурье достаточно, чтобы $f(x) \in L_1 := (-\infty, +\infty)$. Формула обращения для преобразования Фурье (см. Приложение, § П2):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{f}(p) e^{ipx} dp. \quad (7.2)$$

Достаточное условие справедливости равенства (7.2): $f(x) \in C^1$. Последнее время преобразование Фурье и формулу обращения записывают симметрично, помещая перед интегралом множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ в (7.1) и в (7.2) (в (7.2) — вместо $\frac{1}{2\pi}$), но мы будем придерживаться формул (7.1), (7.2). Если $f(x), f'(x), f''(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ или выполняется (1.10), то в силу (1.9) и с учетом задания в конце § 1 имеем

$$\int f'(x) e^{-ipx} dx = ip \bar{f}(p), \quad \int f''(x) e^{-ipx} dx = -p^2 \bar{f}(p). \quad (7.3)$$

Мы видим, что изображение первой и второй производной от функции $f(x)$ выражается через изображение самой функции и в этом смысле преобразование Фурье похоже на преобразование Лапласа, но последнее в отличие от ИП Фурье можно применять и к функциям, не принадлежащим L_1 .

п.7.2. Приведем пример решения задачи с помощью преобразования Фурье.

Задача 4. Построить функцию Грина для уравнения, описывающего распространение тепла в бесконечном однородном стержне, и с её помощью найти температурный режим стержня при отсутствии внешних источников.

Решение. Выбираем координатную систему так, чтобы ось x совпала с положением стержня. Пусть $u(x, t)$ — температура стержня в точке x в момент t . Тогда функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.4)$$

Как известно, для стержня конечной длины задача отыскания функции Грина сводится к решению уравнения (7.4) с заданными однородными граничными условиями и начальным условием в виде δ -функции. Попробуем и для бесконечного стержня найти решение $u_0(x, t)$ уравнения (7.4), для которого $u_0(x, 0) = \delta(\xi - x)$ и покажем, что оно обладает свойствами, аналогичными свойствам функции Грина в задаче о тепловом режиме стержня конечной длины. Однако, чтобы оставаться в рамках математической строгости, не прибегая к теории обобщенных функций, мы возьмем начальное условие в виде δ -последовательности $\delta_n(\xi, x)^*$, найдем отвечающее $\delta_n(\xi, x)$ решение $u_n(x, t)$ и потом перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$.

п.7.3. Итак, пусть

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad (7.5)$$

$$u_n(x, 0) = \delta_n(\xi, x), \quad (7.6)$$

где ξ — произвольное число, $\delta_n(\xi, x) \in C(-\infty, +\infty)$, $\delta_n(\xi, x) = \delta_n(x, \xi)$,

$$\delta_n(\xi, x) = \begin{cases} 0, & |x - \xi| \geq \frac{1}{n}, \\ \geq 0, & |x - \xi| < \frac{1}{n}, \end{cases} \quad \int \delta_n(\xi, x) dx = 1. \quad (7.7)$$

Задание. Докажите, что последовательность (7.7) есть δ -последовательность в классе $K = C(-\infty, +\infty)$, т. е. что для $\forall \varphi(x)$, $\varphi \in C(-\infty, +\infty)$ выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \delta_n(\xi, x) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x).$$

*) Последовательность непрерывных функций $\delta_n(\xi, x) = \delta_n(x, \xi)$ называется δ -последовательностью в классе $K \subseteq C(-\infty, +\infty)$, если для любой функции $\varphi(x) \in K$ выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \delta_n(\xi, x) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x)$.

Предполагая, что при любом фиксированном t функции u_n , $\frac{\partial u_n}{\partial t} \in L_1$ и или $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \in L_1$ или выполняется (1.10) с $f(x) = u_n(x, t)$, сделаем в (7.5), (7.6) преобразование Фурье. Пусть

$$\bar{u}_n(p, t) = \int u_n(x, t) e^{-ipx} dx.$$

Умножая (7.5), (7.6) на e^{-ipx} и интегрируя по x , получим в силу (7.3)

$$\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} = -a^2 p^2 \bar{u}_n, \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(p, 0) &= \int \delta_n(\xi, x) e^{-ipx} dx = \int_{\xi - \frac{1}{n}}^{\xi + \frac{1}{n}} \delta_n(\xi, x) e^{-ipx} dx = \\ &= \int_{\xi - \frac{1}{n}}^{\xi + \frac{1}{n}} \delta_n(\xi, x) (\cos px - i \sin px) dx. \end{aligned}$$

Применим теорему о среднем [7] к каждому интегралу правой части этого равенства. Тогда в силу (7.7) мы получим, что для некоторых $x'_n, x''_n \in \left[\xi - \frac{1}{n}, \xi + \frac{1}{n} \right]$, зависящих от p ,

$$\bar{u}_n(p, 0) = \cos px'_n - i \sin px''_n.$$

Поэтому решение уравнения (7.8) с начальным условием $\bar{u}_n(p, 0)$ есть

$$\bar{u}_n(p, t) = \bar{u}_n(p, 0) e^{-a^2 p^2 t} = (\cos px'_n - i \sin px''_n) e^{-a^2 p^2 t} \quad (7.9)$$

и в силу (7.2)

$$u_n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-p^2 a^2 t} e^{ipx} (\cos px'_n - i \sin px''_n) dp.$$

п.7.4. Покажем, что предел $u_0(x, t)$ последовательности функций $u_n(x, t)$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. при $x'_n \rightarrow \xi$, $x''_n \rightarrow \xi$, есть

$$u_0(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) := \frac{1}{2\pi} \int e^{-a^2 p^2 t} e^{ipx} e^{-ip\xi} dp. \quad (7.10)$$

Пусть $t > 0$ фиксировано, $\varepsilon > 0$ произвольно и $N = N(\varepsilon)$ таково, что

$$\int_{|p| \geq N} e^{-a^2 p^2 t} dp \leq \varepsilon.$$

При фиксированном N можно указать $n_0 > 0$, так, что при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |u_n(x, t) - u_0(x, t)| &\leq \frac{2}{\pi} \int_{|p| \geq N} e^{-p^2 a^2 t} dp + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{|p| \leq N} e^{-a^2 p^2 t} (|\cos px'_n - \cos p\xi| + |\sin px''_n - \sin p\xi|) dp \leq C_1 \varepsilon, \end{aligned}$$

где константа C_1 не зависит от n_0 и ε . Из полученных оценок следует (7.10). Вычислим интеграл в правой части (7.10). Имеем

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 p^2 t + ip(x-\xi) + \left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right)^2} e^{-\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right)^2} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i ap\sqrt{t} + \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} p} dp. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Сделаем в интеграле (7.11) замену переменных $y = ap\sqrt{t} + i(\xi - x)/2a\sqrt{t}$. Тогда

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \int_{-\infty + i\alpha}^{+\infty + i\alpha} e^{-y^2} dy, \quad (7.12)$$

где $\alpha = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$. Интегрирование в (7.12) проводится в комплексной плоскости по прямой, проходящей параллельно вещественной оси через точку $(0, i\alpha)$.

п.7.5. Покажем, что

$$\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy. \quad (7.13)$$

Очевидно

$$\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} e^{-y^2} dy = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{-\beta+i\alpha}^{\beta+i\alpha} e^{-y^2} dy. \quad (7.14)$$

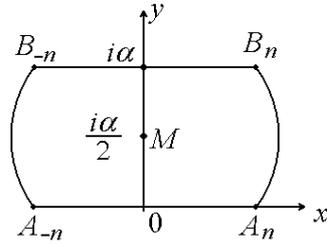


Рис. 3

Пусть далее C_n^M — окружность радиуса n с центром в точке $M(0, i\frac{\alpha}{2})$. Обозначим через A_{-n}, A_n и B_{-n}, B_n точки пересечения этой окружности соответственно с прямыми $y = 0$ и $y = i\alpha$ и положим $\tau_n = [B_{-n}B_n] \cup \cup (\smile B_nA_n) \cup [A_nA_{-n}] \cup (\smile A_{-n}B_{-n})$ (рис. 3). Тогда

$$\int_{\tau_n} e^{-y^2} dy = 0, \quad (7.15)$$

ибо функция e^{-y^2} аналитична и не имеет особенностей внутри контура τ_n . Далее

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\smile A_{-n}B_{-n}} e^{-y^2} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\smile A_nB_n} e^{-y^2} dy = 0,$$

ибо на дугах $\smile A_nB_n$ и $\smile A_{-n}B_{-n}$ при $n \rightarrow +\infty$, очевидно, $\operatorname{Re} y^2 \rightarrow +\infty$, а длины этих дуг стремятся к $|\alpha|$. Поэтому и в силу (7.14), (7.15)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tau_n} e^{-y^2} dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{-n}}^{B_n} e^{-y^2} dy + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n}^{A_{-n}} e^{-y^2} dy = \\
&= \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} e^{-y^2} dy + \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-y^2} dy = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда и следует (7.13). Так как правая часть (7.13) равна $\sqrt{\pi}$ ([6, (2.3.15.11)]), то в силу (7.12)

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \quad (7.16)$$

п.7.6. Докажем, что построенная нами функция $G(x, \xi, t) := u_0(x, t)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам функции Грина для уравнения теплопроводности в случае стержня конечной длины. Непосредственная проверка показывает, что функция $G(x, \xi, t)$ при $t \neq 0$ и любом фиксированном ξ удовлетворяет уравнению (7.5). Покажем, что решение $G(x, \xi, t)$ уравнения (7.5) удовлетворяет начальному условию в виде δ -функции, т. е. что при $t \rightarrow 0$ последовательность значений $G(x, \xi, t)$ есть δ -последовательность для δ -функции $\delta(\xi - x)$ в классе непрерывных ограниченных на оси x функций. Иначе говоря, нам надо доказать, что для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, для которой $M := \sup_x |\varphi(x)| < +\infty$, выполняется

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x). \quad (7.17)$$

Отметим сначала, что

$$\int G(x, \xi, t) d\xi = 1 \quad \text{при } \forall x, \text{ и } \forall t > 0. \quad (7.18)$$

Действительно, делая в интеграле (7.18) замену переменных $y = \frac{x - \xi}{2a\sqrt{t}}$ мы получим, что

$$\int G(x, \xi, t) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-y^2} dy = 1.$$

Поэтому $\varphi(x) = \int G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$ и, следовательно,

$$u(x, t) - \varphi(x) = \int G(x, \xi, t) (\varphi(\xi) - \varphi(x)) d\xi. \quad (7.19)$$

Фиксируем x и по произвольному $\varepsilon > 0$ укажем $\delta > 0$ так, что

$$|\varphi(\xi) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } |x - \xi| \leq \delta \quad (7.20)$$

(это можно сделать, ибо функция $\varphi(x)$ непрерывна). Тогда в силу (7.18), (7.20)

$$\left| \int_{|x-\xi| \leq \delta} G(x, \xi, t) (\varphi(\xi) - \varphi(x)) d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.21)$$

Покажем далее, что

$$J(t) := \int_{|x-\xi| \geq \delta} G(x, \xi, t) |\varphi(\xi) - \varphi(x)| d\xi < \frac{\varepsilon}{2} \quad (7.22)$$

при достаточно малых значениях t . Действительно, т.к. $M := \sup_{\xi} |\varphi(\xi)| < +\infty$, то

$$J(t) \leq 2M \int_{|x-\xi| \geq \delta} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Делая замену переменных $y = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, мы получим, что

$$J(t) \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{|y| \geq \frac{\delta}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

при достаточно малых значениях t . Таким образом оценка (7.22) доказана. Из (7.21) и (7.22) следует справедливость (7.17).

п.7.7. Рассмотрим теперь задачу о нахождении температуры однородного бесконечного стержня без источников, т. е. задачу решения уравнения (7.4) при начальном условии $u(x, 0) = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная функция при $x \in (-\infty, +\infty)$ и $\sup_x |\varphi(x)| < +\infty$. Решением этой задачи является функция

$$u(x, t) = \int G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (7.23)$$

Действительно, т. к. $G(x, \xi, t)$ — решение уравнения (7.4) при любом фиксированном ξ , то функция $u(x, t)$ тоже удовлетворяет уравнению (7.4). А в силу (7.17) $u(x, 0) = \varphi(x)$. Таким образом построенная нами функция $G(x, \xi, t)$ позволяет получить решение уравнения (7.4) при любой непрерывной ограниченной на оси x начальной температуре $\varphi(x)$.

§ 8. Двумерное преобразование Фурье. Задача о распространении волн на плоскости

п.8.1. В рассмотренных нами ранее задачах применение ИП сводило уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (с параметром p). Такое было возможным, поскольку число независимых переменных равнялось двум. Однако при большем числе переменных для перехода от уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению приходится проводить два или более ИП или же делать двумерное или — в общем случае — m -мерное ИП с $m \geq 2$. В настоящем параграфе мы рассмотрим двумерное ИП Фурье и его применение. В § 9 будет показано, как применять два различных ИП в одной задаче.

Двумерное преобразование Фурье функции $g(x, y)$ есть по определению функция

$$\bar{g}(p, q) = \iint g(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy^* \quad (8.1)$$

*) Напоминаем, что интегралы без указания пределов интегрирования — это интегралы от $-\infty$ до $+\infty$.

Для применимости этого преобразования достаточно, чтобы функция $|g(x, y)|$ была суммируема на всей плоскости $XY = \{(x, y) \mid -\infty < x, y < +\infty\}$. Формула обращения для двумерного ИП Фурье (см. Приложение, § П5) дается равенством:

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{g}(p, q) e^{i(px+qy)} dp dq. \quad (8.2)$$

Условие её справедливости — это условие справедливости двух последовательно примененных одномерных формул обращения (см. § П5, равенства (П3.4) и (П3.5)), которые мы здесь не повторяем. Поскольку двумерное ИП Фурье можно рассматривать как произведение двух одномерных (по разным переменным), то для образов вторых производных $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ мы получим равенства:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} e^{-ipx} e^{-iqy} dx dy &= \int \left(\int \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} e^{-ipx} dx \right) e^{-iqy} dy = \\ &= -p^2 \int \bar{g}_1(p, y) e^{-iqy} dy = -p^2 \bar{g}(p, q), \end{aligned} \quad (8.3a)$$

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} e^{-ipx} e^{-iqy} dx dy &= \int \left(\int \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} e^{-iqy} dy \right) e^{-ipx} dx = \\ &= -q^2 \int \bar{g}_2(x, q) e^{-ipx} dx = -q^2 \bar{g}(p, q), \end{aligned} \quad (8.3b)$$

где

$$\bar{g}_1(p, y) = \int g(x, y) e^{-ipx} dx, \quad \bar{g}_2(x, q) = \int g(x, y) e^{-iqy} dy,$$

и мы предполагаем, что $g_{xx}, g_{yy} \in L_1(XY)$, $g, g'_x, g''_{xx} \in L_1(-\infty, +\infty)$ при любом фиксированном y и $g, g'_y, g''_{yy} \in L_1(-\infty, +\infty)$ при любом фиксированном x .

п.8.2. Задача 5. Рассмотрим задачу о распространении волн на плоскости. Обозначим через $u(x, y, t)$ возмущение в точке (x, y) в момент t . Тогда, как известно [1], функция $u(x, y, t)$

должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (8.4)$$

Пусть начальное возмущение и начальная скорость распространения возмущений суть функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, т. е.

$$\text{а) } u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \text{б) } u_t(x, y, 0) = \psi(x, y). \quad (8.5)$$

Делаем двойное преобразование Фурье, умножая (8.4), (8.5) на $e^{-ipx-iqy}$ и интегрируя по x и по y от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда в силу (8.1), (8.3a), (8.3b) получим

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = -a^2(p^2 + q^2) \bar{u}, \quad (8.6)$$

$$\text{а) } \bar{u}(p, q, 0) = \bar{\varphi}(p, q), \quad \text{б) } \bar{u}_t(p, q, 0) = \bar{\psi}(p, q), \quad (8.7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(p, q) &= \iint \varphi(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy, \\ \bar{\psi}(p, q) &= \iint \psi(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy. \end{aligned}$$

Из (8.6) получаем, что

$$\bar{u}(p, q, t) = d_1 \sin a\rho t + d_2 \cos a\rho t, \quad \text{где } \rho = \sqrt{p^2 + q^2},$$

откуда в силу начальных условий (8.7) имеем

$$\bar{u}(p, q, t) = \bar{\varphi}(p, q) \cos a\rho t + \bar{\psi}(p, q) \frac{\sin a\rho t}{a\rho}. \quad (8.8)$$

Далее в конкретной задаче, подставив в (8.8) значения $\bar{\varphi}(p, q)$ и $\bar{\psi}(p, q)$ и воспользовавшись формулой обращения (8.2), получим

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint [\bar{\varphi}(p, q) \cos a\rho t + \bar{\psi}(p, q) \sin a\rho t \cdot \rho^{-1} a^{-1}] \times \\ &\times \exp(i(px + qy)) dp dq. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Однако зависимость решения $u(x, y, t)$ от начальных условий можно получить и не находя $\bar{\varphi}(p, q)$, $\bar{\psi}(p, q)$. Для этого надо воспользоваться формулой свертки для двумерного ИП Фурье и рассуждениями § П4 (п4.3). Сделаем это.

п.8.3. В силу (8.9)

$$u(x, y, t) = A_1(x, y, t) + A_2(x, y, t), \quad (8.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1(x, y, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{\varphi}(p, q) \cos a\rho t e^{i(px+qy)} dp dq, \\ A_2(x, y, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{\psi}(p, q) \sin a\rho t \cdot \rho^{-1} a^{-1} e^{i(px+qy)} dp dq. \end{aligned} \right\} (8.11)$$

Для вычисления интегралов $A_i(x, y, t)$ применим формулу свертки для двумерного преобразования Фурье (см. Приложение, (П4.3)). Согласно этой формуле, если для функций $g_0(p, q)$ и $h_0(p, q)$ существуют прообразы $g(x, y)$ и $h(x, y)$ при двумерном ИП Фурье, то

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint g_0(p, q) h_0(p, q) e^{i(px+qy)} dp dq = \iint g(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta) d\xi, d\eta. \quad (8.12)$$

Однако напрямую эта формула здесь не применима. Действительно, если в $A_1(x, y, t)$ положить $g_0(p, q) = \varphi(p, q)$, $h_0(p, q) = \cos a\rho t$ или в $A_2(x, y, t)$ — $g_0(p, q) = \bar{\psi}(p, q)$, $h_0(p, q) = \sin a\rho t \times (a\rho)^{-1}$, то мы видим, что в обоих случаях

$$h_0(p, q) \notin L_1(PQ) := \left\{ f(p, q) \mid \iint |f(p, q)| dp dq < +\infty \right\}.$$

Поэтому далее воспользуемся приемом, рекомендованным в § П4.

п.8.4. Пусть $\rho = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\omega_n(\rho) = 1$ при $\rho \leq n$, $\omega_n(\rho) = 0$ при $\rho > n$. Положим

$$B_1(n) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{\varphi}(p, q) \cos a\rho t e^{i(px+qy)} \omega_n(\rho) dp dq,$$

$$B_2(n) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{\psi}(p, q) \sin a\rho t \cdot (a\rho)^{-1} e^{i(px+qy)} \omega_n(\rho) dp dq.$$

Если $\bar{\varphi}(p, q)$ и $\bar{\psi}(p, q) \in L_1(PQ)$, то, очевидно, $B_i(n) \rightarrow A_i(x, y, t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $\forall x, y, t, i = 1, 2$. Займемся сначала вычислением $B_2(n)$. Всюду далее x, y, t — фиксированы. Положим $\bar{h}_n(p, q) = \sin a\rho t \cdot (a\rho)^{-1} \omega_n(\rho)$ и найдем прообраз $h_n(x, y)$ функции $\bar{h}_n(p, q)$:

$$h_n(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{h}_n(p, q) e^{i(px+qy)} dp dq.$$

Тогда в силу (8.12)

$$B_2(n) = \iint \psi(\xi, \eta) h_n(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (8.13)$$

Для вычисления $h_n(x, y)$ введем в плоскости p, q полярные координаты: $\rho = \sqrt{p^2 + q^2}$ и угол θ , который отсчитывается против часовой стрелки от направления вектора $\vec{r} = (x, y)$. Пусть $r = |\vec{r}|$. Тогда

$$h_n(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^n \int_0^{2\pi} e^{ir\rho \cos \theta} \sin a\rho t \cdot (a\rho)^{-1} \rho d\rho d\theta. \quad (8.14)$$

Проведем здесь сначала интегрирование по θ . Имеем

$$\int_0^{2\pi} e^{ir\rho \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(r\rho \cos \theta) d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin(r\rho \cos \theta) d\theta. \quad (8.15)$$

Второй интеграл в (8.15) равен нулю, ибо $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(r\rho \cos \theta) d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(r\rho \cos \theta) d\theta$ и $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} \sin(r\rho \cos \theta) d\theta = -\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin(r\rho \cos \theta) d\theta$.

Первый интеграл в (8.15) — табличный (см. [8, 3.715.(18)]) и равен $2\pi J_0(r\rho)$, где $J_0(r\rho)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Подставляя в (8.14) найденное значение (8.15) внутреннего интеграла, получим

$$h_n(x, y) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^n \sin a\rho t J_0(r\rho) d\rho.$$

Положим

$$\hat{h}_0(x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x, y) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{+\infty} J_0(r\rho) \sin a\rho t d\rho, \quad (8.16)$$

где интеграл в правой части существует и в силу [8, 6.671(7)]

$$\begin{aligned} \hat{h}_0(x, y) &= 0 && \text{при } at < r, \\ \hat{h}_0(x, y) &= \left(2\pi a \sqrt{(at)^2 - r^2}\right)^{-1} && \text{при } at > r. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Пусть ξ, η — произвольные числа. Заменяя в $h_n(x, y)$ аргументы x, y соответственно на $x - \xi$ и $y - \eta$ (т. е. $r^2 = x^2 + y^2$ на $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$), подставим $h_n(x - \xi, y - \eta)$ в (8.13) и перейдем там к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда, считая возможным предельный переход под знаком интеграла в (8.13), в силу (8.16), (8.17) мы получим, что

$$\begin{aligned} A_2(x, y, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} B_2(n) = \\ &= \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_{at}^{x,y}} \psi(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

где

$$K_{at}^{x,y} = \{(\xi, \eta) \mid (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < (at)^2\}.$$

Для нахождения $A_1(x, y, t)$ заметим, что если взять $\bar{\psi}(p, q) = \bar{\varphi}(p, q)$, то вследствие (8.11) выполняется $A_1(x, y, t) = \frac{d}{dt} A_2(x, y, t)$, где возможность дифференцирования под зна-

ком интеграла элементарно проверяется при $\bar{\psi}(p, q) \equiv \bar{\varphi}(p, q) \in L_1(PQ)$. Поэтому в силу (8.18)

$$A_1(x, y, t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_{at}^{x,y}} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}. \quad (8.19)$$

Подставляя (8.18) и (8.19) в (8.10) получим решение задачи — так называемую формулу Кирхгофа.

п.8.5. Вывод формулы Кирхгофа, то есть выражений для $A_1(x, y, t)$ и $A_2(x, y, t)$ был проведен при достаточно жестких ограничениях на $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и без обоснования предельного перехода в (8.13). Однако сейчас об этом можно забыть, ибо функции $A_j(x, y, t)$ удовлетворяют (8.4) при $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$ без каких-либо иных условий (см. [1]).

В то же время мы хотим призвать читателя к максимальной осторожности при применении описанного подхода. И чтобы наш призыв не был голословным, покажем, как на этом пути могут появиться ошибки даже в солидных руководствах [9]. В п.8.6 мы следуем [9, с. 148].

п.8.6. Мы решаем ту же Задачу 5, что в п.8.2. Повторяем рассуждения пп.8.2, 8.3 дословно; отличия начинаются с п.8.4. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Положим (см. Замечание 2 в § П4, п.4.3)

$$C_1(\varepsilon) = C_1(\varepsilon, x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{\varphi}(p, q) \cos apt e^{i(px+qy)} e^{-\varepsilon a\rho} dp dq$$

$$C_2(\varepsilon) = C_2(\varepsilon, x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{\psi}(p, q) \frac{\sin apt}{a\rho} e^{i(px+qy)} e^{-\varepsilon a\rho} dp dq,$$

где $\rho = \sqrt{p^2 + q^2}$. При $\bar{\varphi}(p, q)$, $\bar{\psi}(p, q) \in L_1(PQ)$, очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_j(\varepsilon) = C_j(0) = A_j(x, y, t) \quad (8.20)$$

(интегралы $A_j(x, y, t)$ определены в (8.11)). Найдем $C_1(\varepsilon)$. Пусть далее x, y, t — фиксированы. Положим $\bar{h}_\varepsilon(p, q) = \cos apt e^{-\varepsilon a\rho}$ и найдем прообраз $h_\varepsilon(x, y)$ функции $\bar{h}_\varepsilon(p, q)$:

$$h_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \cos apt e^{-\varepsilon a\rho} e^{i(px+qy)} dp dq.$$

Зная $h_\varepsilon(x, y)$, далее мы по формуле свертки получим, что

$$C_1(\varepsilon) = \iint \varphi(\xi, \eta) h_\varepsilon(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (8.21)$$

и затем сможем найти $A_1(x, y, t)$ согласно (8.20). Для нахождения функции $h_\varepsilon(x, y)$ введем в плоскости p, q те же полярные координаты ρ и θ , что в п.8.4. Тогда

$$h_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{ir\rho \cos \theta - \varepsilon\rho a} \cos a\rho t \rho d\rho d\theta, \quad (8.22)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Заменяя $\cos a\rho t$ на $(e^{ia\rho t} + e^{-ia\rho t})/2$, проведем в (8.22) сначала интегрирование по ρ . Тогда после однократного интегрирования по частям мы получим

$$h_\varepsilon(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{[-\varepsilon a + i(r \cos \theta + at)]^2} + \frac{1}{[-\varepsilon a + i(r \cos \theta - at)]^2} \right\} d\theta. \quad (8.23)$$

п.8.7. После этого в [9, с. 149] делается переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и сказано, что получается равенство

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{(r \cos \theta + at)^2} + \frac{1}{(r \cos \theta - at)^2} \right] d\theta = \frac{at}{(a^2 t^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (8.24)$$

Здесь допущены сразу две ошибки. Первая: переход к пределу под знаком интеграла в (8.23) возможен лишь при $r < at$, а при $r > at$ в левой части (8.24) получаются расходящиеся интегралы. Действительно, пусть θ_1 таково, что $\cos \theta_1 = -\frac{at}{r}$. Тогда в малой окрестности точки θ_1 по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} r \cos \theta + at &= r \left[\cos \theta_1 - \sin \theta_1(\theta - \theta_1) + O(\theta - \theta_1) + \frac{at}{r} \right] = \\ &= -r \sin \theta_1(\theta - \theta_1) + O(\theta - \theta_1) \end{aligned}$$

и интеграл от первого слагаемого в левой части (8.23) будет расходиться из-за не интегрируемой особенности в точке $\theta = \theta_1$. Аналогично, интеграл от второго слагаемого будет расходящимся из-за особенности в точке $\theta = \theta_2$, где θ_2 такое, что $\cos \theta_2 = \frac{at}{r}$.

Вторая ошибка (не имеющая отношения к теме пособия, но тоже поучительная) состоит в том, что равенство (8.24) используется в [9] для любых r, t , в том числе и для $r > at$. Но равенство (8.24) верно лишь при $r < at$. При $r > at$ левая часть (8.24) вещественна и равна $+\infty$, а правая — чисто мнимая и конечна. Аналогичные ошибки допущены в [9] и при нахождении $C_2(\varepsilon)$.

Безошибочное решение рассматриваемой задачи на данном пути — это нахождение из (8.22) функции $h_\varepsilon(x, y)$, потом подстановка функции $h_\varepsilon(x - \xi, y - \eta)$ в (8.20) и только после этого переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. нахождение $A_1(x, y, t)$. Аналогично можно найти $A_2(x, y, t)$. Однако данный путь намного сложнее, чем реализованный нами в пп. 8.3, 8.4, и мы не будем приводить соответствующие выкладки.

§ 9. Применение двух различных интегральных преобразований в одной задаче

п.9.1. Задача 6. Найти температурный режим бесконечного цилиндра радиуса R , начальная температура которого равна нулю, боковая поверхность поддерживается при температуре ноль, кроме пояса ширины $2c$, температура которого равна u_0 при $\forall t > 0$.

Выберем систему координат так, чтобы ось z совпадала с осью цилиндра, а плоскость XU проходила через середину пояса с температурой u_0 (рис. 4). Пусть

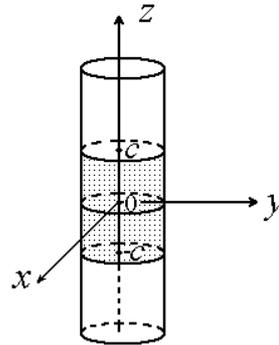


Рис. 4

$u(M, t)$ — температура цилиндра в точке $M(x, y, z)$ в момент t . Тогда функция $u(M, t)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad (9.1)$$

граничными условиями

$$u(M, t)|_{x^2+y^2=R^2} = \begin{cases} 0, & |z| > c, \\ u_0, & |z| \leq c, \end{cases} \quad t > 0 \quad (9.2)$$

и начальным условием

$$u(M, 0) = 0. \quad (9.3)$$

Введем цилиндрические координаты r, α, z . Тогда

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z.$$

Из физических соображений следует, что температура $u(x, y, z, t)$ не должна зависеть от угловой переменной α . Поэтому для функции $v(r, z, t) = u(x, y, z, t)$ мы получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (9.4)$$

Очевидно, что $v(r, z, t) = v(r, -z, t)$. Поэтому уравнение (9.4) мы можем решать только при $z > 0$. Кроме того из четности функции $v(r, z, t)$ по z вытекает, что $\frac{\partial v}{\partial z}(r, 0, t) = 0$. Следовательно, для функции $v(r, z, t)$ будут выполняться следующие граничные условия

$$\begin{aligned} \text{a) } v(R, z, t) &= \begin{cases} 0, & z > c, \\ u_0, & 0 \leq z \leq c, \end{cases} \quad t > 0, \\ \text{b) } \frac{\partial v}{\partial z}(r, z, t)|_{z=0} &= 0, \quad 0 \leq r \leq R, \end{aligned} \quad (9.5)$$

и начальное условие

$$v(r, z, 0) = 0. \quad (9.6)$$

п.9.2. Решение задачи (9.4)–(9.6) начинаем с косинус-преобразования по z . Предполагаем, что при любых фиксированных r, t функции $v, v_t, v_{rr}, v_r \in L_1 := L_1[0, +\infty)$ и или $v_z, v_{zz} \in L_1$ или выполняется (1.10) с z вместо x и $f(z) = v(r, z, t)$. Пусть

$$\bar{v}_c(r, p, t) = \int_0^{\infty} v(r, z, t) \cos zp \, dz.$$

Умножая (9.4), (9.5),а) и (9.6) на $\cos pz$ и интегрируя по z , мы в силу (6.6) и (9.5),b) получим:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_c}{\partial r} - p^2 \bar{v}_c = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \bar{v}_c}{\partial t}, \quad (9.7)$$

$$\text{а) } \bar{v}_c(r, p, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad \text{б) } v(R, p, t) = \frac{\sin pc}{p} u_0. \quad (9.8)$$

Таким образом мы перешли от уравнения в частных производных с тремя независимыми переменными к уравнению с двумя независимыми переменными. Чтобы получить обыкновенное дифференциальное уравнение сделаем еще одно ИП — ИП Лапласа по t . Мы считаем порядки роста по t функций $\bar{v}_c, \frac{\partial \bar{v}_c}{\partial t}, \frac{\partial \bar{v}_c}{\partial r}, \frac{\partial^2 \bar{v}_c}{\partial r^2}$ конечными и выбираем число γ больше максимального из них для $\forall r$. Положим

$$\bar{v}_L(r, p, p') = \int_0^{+\infty} \bar{v}_c(r, p, t) e^{-p't} dt,$$

где $\text{Re } p' > \gamma$. Умножим (9.7) и (9.8),b) на $e^{-p't}$ и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. Тогда в силу (2.2) и (9.8),а) мы получим

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_L}{\partial r} - p^2 \bar{v}_L = \frac{p'}{a^2} \bar{v}_L, \quad (9.9)$$

$$\bar{v}_L(R, p, p') = \frac{\sin pc}{pp'} u_0. \quad (9.10)$$

Перенесем в (9.9) член $p'a^{-2}\bar{v}_L$ в левую часть, положим $q = \sqrt{p^2 + p'a^{-2}}$ и сделаем в полученном уравнении замену переменных, полагая $\rho = qr$. Тогда для функции $\bar{v}(\rho, p, p') = \bar{v}_L(r, p, p')$ мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} - \bar{v} = 0. \quad (9.11)$$

Как мы уже говорили в § 2 (см. (2.10)), общее решение уравнения (9.11) есть

$$\bar{v}(\rho) = d_1 I_0(\rho) + d_2 K_0(\rho), \quad (9.12)$$

где $I_0(\rho)$ и $K_0(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя. Поскольку $|K_0(0)| = +\infty$, то $d_2 = 0$. В силу (9.10), (9.12)

$$d_1 I_0(qR) = \frac{\sin pc}{pp'} u_0,$$

откуда

$$d_1 = \frac{u_0 \sin pc}{pp' I_0(qR)}$$

и, значит,

$$\bar{v}(\rho) = \bar{v}_L(r, p, p') = \frac{u_0 \sin pc}{pp'} \frac{I_0(qr)}{I_0(qR)}.$$

Таким образом мы нашли образ решения после двух ИП — косинус-преобразования и преобразования Лапласа.

п.9.3. Переходим к нахождению оригиналов. В силу формулы обращения для преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} \bar{v}_c(r, p, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{u_0 \sin pc}{pp'} \frac{I_0(qr)}{I_0(qR)} e^{p't} dp' = \\ &= \frac{u_0 \sin pc}{2\pi i p} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{I_0(qr)}{p' I_0(qR)} e^{p't} dp'. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Интеграл вида (9.13) изучался в §4 с той однако разницей, что там $q = \sqrt{\frac{p}{a^2}}$ (p — комплексное), а здесь $q = \sqrt{\frac{p'}{a^2} + p^2}$, где p — вещественное, $p' \equiv p'_1 + ip'_2$ — комплексное. Тем не менее, так же, как там, показывается, что функция

$$\beta(p') = \frac{I_0(qr)}{I_0(qR)}$$

в области $\operatorname{Re} p' < \gamma$ аналитическая, не имеет точек ветвления и

$$\sup_{k, k \gg 1} \sup_{p', |q| = \frac{k\pi}{R}} |\beta(p')| < +\infty,$$

где

$$\left. \begin{aligned} |q|^4 &= \left(\frac{p'_1}{a^2} + p^2\right)^2 + \frac{p'^2_2}{a^4} = \left(\frac{k\pi}{R}\right)^4, \\ \arg q &\in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}, \frac{3}{4}\pi + \frac{\delta}{2}\right], \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

и $\delta > 0$ — некоторое малое число. В силу (9.14)

$$\arg\left(\frac{p'}{a^2} + p^2\right) = 2 \arg q \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{3}{2}\pi + \delta\right]. \quad (9.15)$$

При фиксированном p и больших k значения аргументов точек $p' = p'_1 + ip'_2$ на дуге (9.15) окружности (9.14) попадут в интервал $\left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{3}{2}\pi + \delta\right]$. Из приведенных рассуждений следует, что на этой дуге комплексной плоскости p' для функции $\beta(p')/p'$ выполнены все условия леммы Жордана. Применяя её для вычисления интеграла (9.13) получим

$$\bar{v}_c(r, p, t) = \frac{u_0 \sin pc}{p} \sum_{p', \operatorname{Re} p' < \gamma} \operatorname{res} \left(\frac{I_0(qr)}{p' I_0(qR)} e^{p't} \right). \quad (9.16)$$

Положим

$$\Phi(p') = I_0(qr) I_0(qR)^{-1} p'^{-1} e^{p't}$$

и найдем сначала полюса функции $\Phi(p')$. Поскольку $I_0(qR) = J_0(iqR)$ (см. § 4), то эти полюса p'_k (кроме очевидного $p'_0 = 0$) определяются из равенства $iq_k R = \mu_{0k}$, $k = 1, 2, \dots$, где $q_k = \sqrt{\frac{p'_k}{a^2} + p^2}$, μ_{0k} — нули функции $J_0(\rho)$. Отсюда $q_k^2 = -\frac{\mu_{0k}^2}{R^2}$, т. е. $\frac{p'_k}{a^2} + p^2 = -\frac{\mu_{0k}^2}{R^2}$, и, значит, полюса p'_k функции $\Phi(p')$ суть точки

$$p'_k = -\frac{\mu_{0k}^2 a^2}{R^2} - p^2 a^2, \quad k = 1, 2, \dots; \quad p'_0 = 0.$$

Теперь находим вычеты. Имеем

$$\operatorname{res} \Phi(p') \Big|_{p'=p'_0} = \frac{I_0(pr)}{I_0(pR)}, \quad \operatorname{res} \Phi(p') \Big|_{p'=p'_k} = \frac{I_0(q_k r) e^{p'_k t}}{p'_k \frac{d}{dp'} I_0(qR) \Big|_{p'=p'_k}},$$

где $k \geq 1$, $I_0(q_k r) = J_0(iq_k r) = J_0\left(\mu_{0k} \frac{r}{R}\right)$ и при $p' = p_k$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp'} I_0(qR) &= \frac{d}{dp'} J_0(iqR) = -J_1(iqR) iR \frac{dq}{dp'} = \\ &= -J_1(\mu_{0k}) iR \frac{1}{2q_k a^2} = -J_1(\mu_{0k}) iR \frac{R}{2a^2(-\mu_{0k})i} = \\ &= J_1(\mu_{0k}) R^2 (2a^2 \mu_{0k})^{-1} \end{aligned}$$

и, значит, при $p' = p'_k$

$$\operatorname{res} \Phi(p) = -\frac{2J_0\left(\frac{\mu_{0k}}{R} r\right) \mu_{0k} e^{-(\mu_{0k}^2 + p^2 R^2) a^2 R^{-2} t}}{(\mu_{0k}^2 + p^2 R^2) J_1(\mu_{0k})}.$$

Подставляя полученные значения вычетов функции $\Phi(p')$ в (9.16) мы получим

$$\bar{v}_c(r, p, t) = \frac{u_0 \sin pc}{p} \left(\frac{I_0(pr)}{I_0(pR)} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(\mu_{0k}^2 + p^2 R^2) a^2 R^{-2} t} J_0\left(\frac{\mu_{0k}}{R} r\right) \mu_{0k}}{(\mu_{0k}^2 + p^2 R^2) J_1(\mu_{0k})} \right).$$

Таким образом мы нашли изображение решения $v(r, z, t)$ при косинус-преобразовании и для нахождения оригинала нам остается только применить формулу обращения (6.2),b). Имеем

$$v(r, z, t) = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_0(pr)}{I_0(pR)} \frac{\sin pc}{p} \cos pz dp -$$

$$- u_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_{0k} r}{R}\right) \frac{\mu_{0k} \exp(-\mu_{0k}^2 a^2 R^{-2} t)}{J_1(\mu_{0k})} \times$$

$$\times \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin pc}{p} \frac{\exp(-p^2 a^2 t)}{(\mu_{0k}^2 + p^2 R^2)} \cos pz dp.$$

Это и есть решение задачи.

§ 10. Преобразование Ханкеля

п.10.1 Преобразование Ханкеля (которое иногда называют преобразованием Бесселя) — это ИП с ядром $J_n(px)x$, $a = 0$, $b = +\infty$ (см. § 1), т. е. оно определяется равенством

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(x) J_n(px)x dx, \quad p > 0, \quad (10.1)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n -го порядка. Для применимости преобразования достаточно, чтобы

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| (|x|^{\frac{1}{2}} + 1) dx < +\infty, \quad (10.2)$$

поскольку для $px \gg 1$ выполняется $|J_n(px)| \leq \text{const} |px|^{-\frac{1}{2}}$ [1]. Далее при применении преобразования Ханкеля к любой функ-

ции $f(x)$ мы всегда считаем выполненным для неё неравенство (10.2), не оговаривая этот факт каждый раз особо. Формула обращения для преобразования Ханкеля аналогична формуле (10.1):

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \bar{f}(p) J_n(px) p dp. \quad (10.3)$$

Достаточное условие справедливости (10.3) — гладкость функции $f(x)$: $f(x) \in C^1$ (см. Приложение, § ПЗ).

Преобразование Ханкеля используется для работы с дифференциальными операторами

$$A_n(r)f := \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{n^2}{r^2} f = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r f') - \frac{n^2}{r^2} f. \quad (10.4)$$

Эти операторы при $n \neq 0$ возникают после разделения переменных при записи двумерного оператора Лапласа в полярных координатах или трехмерного — в цилиндрических координатах, а при $n = 0$ оператор $A(r)f$ — это просто выражение Δf на функциях, зависящих только от r .

Пусть $\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(x)x J_n(xp) dx$. Главное «рабочее» свойство преобразования Ханкеля описывается равенством

$$\int_0^{+\infty} A_n(r)f(r) \cdot J_n(pr)r dr = -p^2 \bar{f}(p). \quad (10.5)$$

Формула (10.5) аналогична формуле преобразования второй производной, например, при ИП Фурье. Докажем (10.5). Как известно [1], функция $J_n(r)$ удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 J_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_n}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$A_n(r)J_n(r) = -J_n(r). \quad (10.6)$$

Уравнение (10.6) верно при любом r и, следовательно, в нем можно заменить r на pr при $p > 0$. Поэтому $A_n(pr)J_n(pr) = -J_n(pr)$. Но $A_n(r) = p^2 A_n(pr)$ и, значит,

$$A_n(r)J_n(pr) = p^2 A_n(pr)J_n(pr) = -p^2 J_n(pr). \quad (10.7)$$

Докажем далее, что

$$\int_0^{+\infty} A_n(r)f(r) \cdot J_n(pr)r \, dr = \int_0^{+\infty} f(r)r A_n(r)J_n(pr) \, dr. \quad (10.8)$$

Тогда из (10.7) и (10.8) будет следовать (10.5).

Пусть $B(r)f = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rf')$. Тогда $A_n(r)f = B(r)f - \frac{n^2}{r} f$. Поскольку, очевидно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2}{r^2} f(r) J_n(pr) r \, dr = \int_0^{+\infty} rf(r) \frac{n^2}{r^2} J_n(pr) \, dr, \quad (10.9)$$

то для справедливости (10.8) остается доказать, что

$$\int_0^{+\infty} B(r)f(r) \cdot J_n(pr)r \, dr = \int_0^{+\infty} f(r)rB(r)J_n(pr) \, dr. \quad (10.10)$$

Дважды интегрируя по частям в левой части (10.10), получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} B(r)f(r) \cdot J_n(pr) \, dr &= rf'(r)J_n(pr) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} r f'(r)J'_n(pr) \, dr = \\ &= F(r) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f(r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rJ'_n(pr)) r \, dr, \end{aligned} \quad (10.11)$$

где $F(r) = rf'(r)J_n(pr) - f(r)rJ_n'(pr)$. Очевидно, $F(0) = 0$. При некоторых условиях на функции $f(r)$, $f'(r)$ и $f''(r)$ можно показать, что $F(+\infty) = 0$ и поэтому из (10.11) вытекает справедливость равенства (10.10).

Задание. Действуя аналогично § 1 найти условия, при которых $F(+\infty) = 0$.

п.10.2. Приведем примеры использования ИП Ханкеля для решения уравнений в частных производных. Рассмотрим сначала более простой случай, когда $A_n(r) = A_0(r)$.

Задача 7. Найти поле наэлектризованного тонкого диска радиуса R , потенциал которого равен v_0 .

Решение. Выберем систему координат так, чтобы диск лежал в плоскости XU и чтобы начало координат находилось в центре диска. Пусть $u(x, y, z)$ — потенциал диска в точке $M(x, y, z)$. Введем цилиндрические координаты ρ, α, z , связанные с декартовыми координатами равенствами $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \sin \alpha$, $z = z$. Из физических соображений следует, что функция $v(\rho, \alpha, z) = u(x, y, z)$ не зависит от угловой переменной α и что $v(\rho, \alpha, -z) = v(\rho, \alpha, z)$. Поэтому далее мы можем считать, что потенциал $v = v(\rho, z)$ зависит лишь от ρ и z и искать функцию $v(\rho, z)$ только в области $z \geq 0$. Функция v должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (10.12)$$

и граничному условию

$$v(\rho, 0) = v_0 \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq R. \quad (10.13a)$$

Кроме того, в силу четности функции $v(\rho, z)$ по z и её гладкости для $\rho > R$ появляется еще одно граничное условие при $z = 0$ и $\rho > R$:

$$\frac{\partial v}{\partial z}(\rho, 0) = 0 \quad \text{при } \rho > R. \quad (10.13b)$$

Сделаем масштабную замену переменных $\rho = Rr$, $z = Rz'$ и положим $v_1(r, z') = v(\rho, z)$. Очевидно уравнение (10.12) и гра-

ничные условия (10.13a), (10.13b) примут вид

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z'^2} = 0, \quad (10.14)$$

$$v_1(r, 0) = v_0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (10.15a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z'}(r, 0) = 0, \quad 1 < r. \quad (10.15b)$$

Положим $\bar{v}_1(\rho, z') = \int_0^{+\infty} v_1(r, z') J_0(\rho r) r dr$ и сделаем в (10.14) преобразование Ханкеля, умножив (10.14) на $r J_0(\rho r)$ и интегрируя по r от 0 до ∞ . Тогда в силу (10.5) с $n = 0$ получим

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial z'^2} - \rho^2 \bar{v}_1 = 0,$$

откуда

$$\bar{v}_1(\rho, z) = d_1 e^{\rho z'} + d_2 e^{-\rho z'}. \quad (10.16)$$

При $d_1 \neq 0$ и $z' \rightarrow +\infty$ в силу (10.16) $|\bar{v}_1(\rho, z')| \rightarrow +\infty$. Однако поскольку из физических соображений для любого r $|v_1(r, z')| \geq |v_1(r, z'')|$ при $0 \leq z' \leq z''$, то

$$\sup_{z'} \int_0^{+\infty} |v_1(r, z')| |J_0(\rho r)| r dr < +\infty$$

и, значит, $\sup_{z'} |\bar{v}_1(\rho, z')| < +\infty$. Следовательно, в (10.16) $d_1 = 0$ и

$\bar{v}_1(\rho, z') = d_2 e^{-\rho z'}$. По формуле обращения

$$v_1(\rho, z') = \int_0^{+\infty} d_2(\rho) e^{-\rho z'} \rho J_0(\rho r) d\rho.$$

В силу граничных условий (10.15a), (10.15b)

$$v_1(r, 0) = \int_0^{+\infty} d_2(\rho) \rho J_0(\rho r) d\rho = v_0 \quad \text{при } 0 \leq r \leq 1,$$

$$\frac{dv_1}{dz'}(r, 0) = - \int_0^{+\infty} d_2(\rho) \rho^2 J_0(\rho r) d\rho = 0 \quad \text{при } 1 < r.$$

Используя табличные интегралы [8, (6.671.1) и (6.693.6)]

$$\int_0^{+\infty} p^{-1} J_0(rp) \sin p \, dp = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r < 1,$$

$$\int_0^{+\infty} J_0(rp) \sin p \, dp = 0, \quad r > 1,$$

закключаем, что $d_2 = \frac{2 \sin p}{p^2} \frac{v_0}{\pi}$. Таким образом

$$v_1(r, z') = \frac{2v_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin p}{p} J_0(pr) e^{-pz'} \, dp$$

и

$$v(\rho, z) = \frac{2v_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin p}{p} J_0\left(p \frac{\rho}{R}\right) e^{-pzR^{-1}} \, dp.$$

Заканчивая решение данной задачи, заметим, что здесь оказалось удобнее не делать ИП граничных условий, а использовать их в исходной форме.

п.10.3. Рассмотрим теперь задачу, в которой требуется делать ИП Ханкеля функций $A_n(r)f$ при $n = 0, 1, 2 \dots$

Задача 8. Найти стационарное положение бесконечной однородной мембраны, на которую действует распределенная стационарная сила с плотностью $\Phi(x, y)$ на единицу площади. Сила действует перпендикулярно плоскости мембраны в положении равновесия.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы плоскость XU совпала с положением мембраны в состоянии равновесия. Пусть $u(x, y)$ — смещение точки x, y мембраны под действием силы Φ . Функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = -\frac{\Phi}{\mu}, \quad (10.17)$$

где μ — модуль упругости мембраны.

Введем полярные координаты r, α , полагая $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$ и положим $v(r, \alpha) = u(x, y)$, $F(r, \alpha) = -\Phi/\mu$. Тогда функция $v(r, \alpha)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = F(r, \alpha). \quad (10.18)$$

Поскольку функция $v(r, \alpha)$ периодическая по α , то в силу теоремы Стеклова её можно искать в виде ряда по собственным функциям оператора $\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}$ с условием периодичности. В п.10.4 будет показано, что эти собственные функции $h_{ni}(\alpha)$ с условием нормировки $\int_0^{2\pi} h_{ni}^2(\alpha) d\alpha = 1$ суть $h_{n1}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\alpha$, $h_{n2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\alpha$, $n \geq 1$, $h_{02} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. При фиксированном r разложим искомую функцию $v(r, \alpha)$ и функцию $F(r, \alpha)$ по функциям $h_{ni}(\alpha)$. Получим

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } v(r, \alpha) &= v_{02}(r)h_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^2 v_{ns}(r) h_{ns}(\alpha), \\ \text{b) } F(r, \alpha) &= F_{02}(r)h_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^2 F_{ns}(r) h_{ns}(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

где функции $F_{ns}(r) = \int_0^{2\pi} F(r, \alpha) h_{ns}(\alpha) d\alpha$ известны, а $v_{ns}(r)$ подлежат определению. Подставляя разложение функций $v(r, \alpha)$ и $F(r, \alpha)$ в (10.18) и приравнявая коэффициенты перед $h_{ns}(\alpha)$ в обеих частях полученного равенства, имеем

$$A_n(r) v_{ns} \equiv \frac{\partial^2 v_{ns}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{ns}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} v_{ns} = F_{ns}. \quad (10.20)$$

Предполагая выполненными условия применения ИП Ханкеля, умножим (10.20) на $rJ_n(pr)$ и проинтегрируем по r от 0 до $+\infty$. Тогда в силу (10.5) получим

$$-p^2 \bar{v}_{ns}(p) = \bar{F}_{ns}(p), \quad (10.21)$$

где $\bar{v}_{ns}(p)$ и $\bar{F}_{ns}(p)$ — образы функций $v_{ns}(r)$ и $F_{ns}(r)$ при преобразовании Ханкеля:

$$\bar{v}_{ns}(p) = \int_0^{+\infty} v_{ns}(r) J_n(pr) r dr, \quad \bar{F}_{ns}(p) = \int_0^{+\infty} F_{ns}(r) J_n(pr) r dr.$$

Из (10.21) получаем, что $\bar{v}_{ns}(p) = -\bar{F}_{ns}(p) p^{-2}$ и по формуле обращения

$$v_{ns}(r) = - \int_0^{+\infty} \bar{F}_{ns}(p) J_n(pr) p^{-1} dp. \quad (10.22)$$

Подставив найденные функции $v_{ns}(r)$ в (10.19),а) мы получим решение задачи. Однако оно не всегда существует. Дело в том, что если в (10.22) для каких-то n и s функция $\bar{F}_{ns}(p) J_n(pr)$ не стремится к нулю при $p \rightarrow 0$, то интеграл в (10.22) будет расходиться и соответствующая функция $v_{ns}(r)$ не существует. Поскольку $J_n(0) = 0$ при $n \geq 1$, то надо рассмотреть лишь случай $n = 0$, $s = 2$. В этом случае

$$\begin{aligned} \bar{F}_{02}(0) J_0(0) &= \bar{F}_{02}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(r, \alpha) r dr d\alpha = \\ &= -\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (10.23)$$

В правой части равенства (10.23) записана с точностью до множителя) равнодействующая внешних сил, действующих на мембрану. Если она не равна нулю, то мембрана при отсутствии закрепления границы будет под действием этой силы двигаться и поэтому найти стационарное решение — которое мы отыскиваем — в этой ситуации невозможно. Разумеется, требование $\bar{F}_{02}(0) = 0$ является лишь необходимым и для конкретных функций $\Phi(x, y)$ надо проверять сходимость ряда (10.19),а) и возможность почленного применения оператора A_n .

п.10.4. Мы использовали в п.10.3 тот факт, что собственные функции оператора $\frac{d^2}{d\alpha^2}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ с условием периодичности суть $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, $n = 1, 2, \dots$ и константа. Докажем это. Пусть

$$\text{а) } \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} = \lambda f(\alpha), \quad \text{б) } f(0) = f(2\pi), \quad f'(0) = f'(2\pi). \quad (10.24)$$

В силу (10.24),б)

$$\int_0^{2\pi} f'' \bar{f} d\alpha = - \int_0^{2\pi} |f'|^2 d\alpha.$$

Поэтому умножая (10.24),а) на $\bar{f}(\alpha)$ и интегрируя от 0 до 2π мы получим, что

$$- \int_0^{2\pi} |f'|^2 d\alpha = \lambda \int_0^{2\pi} |f|^2 d\alpha.$$

Значит λ — вещественно и не положительно. Если $\lambda = 0$, то отсюда следует, что $f'(\alpha) \equiv 0$ и, следовательно, $f(\alpha) = \text{const}$. Если $\lambda < 0$, то общее решение уравнения (10.24),а) есть $f_\nu(\alpha) = b_{\nu 1} \sin \nu\alpha + b_{\nu 2} \cos \nu\alpha$, где $\nu = \sqrt{-\lambda}$. Запишем $f_\nu(\alpha)$ в виде $f_\nu(\alpha) = d_\nu \sin(\nu\alpha + \delta)$, где $d_\nu = \sqrt{b_{\nu 1}^2 + b_{\nu 2}^2}$, $\cos \delta = \frac{b_{\nu 1}}{d_\nu}$, $\sin \delta = \frac{b_{\nu 2}}{d_\nu}$. В силу (10.24),б)

$$\sin \delta = \sin(2\pi\nu + \delta), \quad \cos \delta = \cos(2\pi\nu + \delta),$$

откуда мы получаем для собственного значения ν уравнения

$$\sin \nu\pi \cos(\nu\pi + \delta) = 0, \quad \sin \nu\pi \sin(\nu\pi + \delta) = 0.$$

Возведя эти равенства в квадрат и сложив результаты, мы получим, что $\sin^2 \nu\pi = 0$, т. е. $\nu = 1, 2, \dots$. Поэтому общее решение уравнения (10.24),а) с граничными условиями (10.24),б) есть

$$f_n(\alpha) = b_{n1} \sin n\alpha + b_{n2} \cos n\alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Приложение. Формулы обращения и свертки интегральных преобразований

Если ты не любопытен —
оставайся в дураках.
Ты не сделаешь открытий,
не прославишься в веках!
В. Шефнер

§ П1. Двойной интеграл Фурье

п1.1. Формулами обращения интегральных преобразований называются формулы, выражающие для рассматриваемого ИП оригинал через изображение (т. е. прообраз через образ).

В основе вывода всех формул обращения лежит следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$, $f(x)$ — кусочно-непрерывна и имеет на каждом конечном интервале не более чем конечное число экстремумов и не более чем конечное число точек разрыва и все они типа конечного скачка. Тогда в каждой точке x , в которой существует производная $f'(x)$, выполняется равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x) dt. \quad (\text{П1.1})$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и

$$J(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x) dt. \quad (\text{П1.2})$$

Здесь и далее интегралы без указания пределов интегрирования — это интегралы от $-\infty$ до $+\infty$.

Докажем эквивалентное (П1.1) равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} J(\alpha) = f(x). \quad (\text{П1.3})$$

п1.2. Так как функция $f(t) \cos y(t-x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ по переменной t , то мы можем поменять порядок интегрирования в (П1.2). Сделав это, получим

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int f(t) \int_0^\alpha \cos y(t-x) dy dt = \frac{1}{\pi} \int f(t) \frac{\sin \alpha(t-x)}{t-x} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int f(t+x) \frac{\sin \alpha t}{t} dt. \end{aligned}$$

Определим функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x-1 \leq t \leq x+1, \\ 0 & \text{при } t \notin [x-1, x+1] \end{cases}, \quad f_0(t) = f(t) - \varphi(t).$$

Тогда интеграл $J(\alpha)$ запишется в виде

$$J(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int f_0(t+x) \frac{\sin \alpha t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int \varphi(t+x) \frac{\sin \alpha t}{t} dt. \quad (\text{П1.4})$$

Пусть

$$J_1(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int f_0(t+x) \frac{\sin \alpha t}{t} dt, \quad J_2(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int \varphi(t+x) \frac{\sin \alpha t}{t} dt.$$

Покажем, что

$$\text{а) } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} J_1(\alpha) = 0, \quad \text{б) } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} J_2(\alpha) = f(x). \quad (\text{П1.5})$$

Тогда из (П1.2)–(П1.5) будет следовать утверждение Теоремы. Доказательство (П1.5),б) очевидно. Действительно,

$$J_2(\alpha) = f(x) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin t}{t} dt$$

и при $\alpha \rightarrow +\infty$

$$J_2(\alpha) \rightarrow f(x) \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin t}{t} dt = f(x) \quad (\text{П1.6})$$

ибо $\int \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ [8, 3.721.1]. Установим (П1.5),а). Так как в точке x производная $f'_0(x)$ существует (и конечна), то по $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ так, что при $|t| \leq \delta$

$$\left| \frac{f_0(t+x) - f_0(x)}{t} - f'_0(x) \right| \leq \varepsilon,$$

но $f_0(x) = f(x) - \varphi(x) = 0$ и значит при $|t| \leq \delta$

$$\left| \frac{f_0(t+x)}{t} \right| < C$$

для некоторой константы C . При $|t| > \delta$, очевидно, $\left| \frac{f_0(t+x)}{t} \right| \leq \frac{|f_0(t+x)|}{\delta}$. Следовательно, функция $g(t) := \frac{f_0(t+x)}{\pi t} \in L_1(-\infty, +\infty)$.

Оценим $J_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \alpha t dt$. Так как $g \in L_1(-\infty, +\infty)$, то по $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ такое, что

$$\int_{|t|>N} |g(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{П1.7})$$

Далее, функция $g(t)$ кусочно-непрерывна, ибо функция $f(t)$ кусочно-непрерывна. Обозначим через $t_j, j = 1, 2, \dots, m$, — точки

разрыва функции $g(t)$, попавшие на интервал $(-N, +N)$, и выберем около каждой точки такой малый отрезок γ_i , что $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и

$$\int_{\gamma_i} |g(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3m}. \quad (\text{П1.8})$$

В силу (П1.7), (П1.8) нам остается оценить интеграл от $g(t) \sin \alpha t$ только по области $E(N) = (-N, +N) \setminus \bigcup_{j=1}^m \gamma_j$. Очевидно $E(N)$ состоит из каких-то интервалов (a_i, b_i) , $i = 1, 2, \dots, m+1$, на каждом из которых функция $g(t)$ непрерывна и имеет не более конечного числа экстремумов. Аппроксимируем $g(t)$ кусочно-линейной на каждом интервале (a_i, b_i) функцией $g_\varepsilon(t)$ так, что

$$|g(t) - g_\varepsilon(t)| \leq \frac{\varepsilon}{6N}, \quad t \in E(N).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{E(N)} g(t) \sin \alpha t dt \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^{m+1} \int_{a_i}^{b_i} (g(t) - g_\varepsilon(t)) \sin \alpha t dt \right| + \\ &+ \sum_{i=1}^{m+1} \left| \int_{a_i}^{b_i} g_\varepsilon(t) \sin \alpha t dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{m+1} \left| \int_{a_i}^{b_i} g_\varepsilon(t) \sin \alpha t dt \right|. \end{aligned} \quad (\text{П1.9})$$

Так как функция $g_\varepsilon(t)$ — кусочно-линейна на отрезке $[a_i, b_i]$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{a_i}^{b_i} g_\varepsilon(t) \sin \alpha t dt = 0 \quad (\text{П1.10})$$

(проверить самостоятельно). Поэтому из (П1.9) и (П1.10) следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left| \int_{E(N)} g(t) \sin \alpha t dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{П1.11})$$

Из (П1.7), (П1.8) и (П1.11) вытекает неравенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \alpha t dt \right| \leq \varepsilon,$$

т. е. (П1.5), а) доказано и тем самым доказана Теорема 1.

§ П2. Формулы обращения для ИП Фурье, Лапласа и синус- косинус-преобразований

п2.1. Поскольку все формулы обращения используют Теорему 1 (§ П1), то мы всюду далее считаем, что для функции $f(x)$ её условия выполняются. Вывод формул обращения начинаем с ИП Фурье. В формуле (П1.1) заменим $\cos y(t-x)$ на сумму $\cos yt \cos yx + \sin yt \sin yx$ и положим

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int f(t) \cos yt dt, \quad b(y) = \frac{1}{\pi} \int f(t) \sin yt dt, \quad y \geq 0.$$

Тогда в силу (П1.1)

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(y) \cos yx + b(y) \sin yx) dy. \quad (\text{П2.1})$$

Пусть

$$c(y) = \frac{a(y) - ib(y)}{2}. \quad (\text{П2.2})$$

Тогда $c(-y) = \frac{a(y) + ib(y)}{2} = \overline{c(y)}$ и

$$a(y) \cos yx + b(y) \sin yx = c(y) e^{iyx} + c(-y) e^{-ixy}.$$

Поскольку для $\forall l > 0$

$$\int_0^l c(-y) e^{-ixy} dy = \int_{-l}^0 c(y) e^{ixy} dy,$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^l [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy &= \int_0^l c(y) e^{ixy} dy + \int_{-l}^0 c(y) e^{ixy} dy = \\ &= \int_{-l}^{+l} c(y) e^{ixy} dy, \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

где вследствие (П2.2) при $y > 0$

$$c(y) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) (\cos yt - i \sin yt) dt = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-iyt} dt. \quad (\text{П2.4})$$

Так как $c(-y) = \overline{c(y)}$, то (П2.4) верно и при $y < 0$. Перейдем в (П2.3) к пределу при $l \rightarrow \infty$. Тогда в силу (П2.1) и (П2.4) получим

$$f(x) = \int c(y) e^{ixy} dy, \quad (\text{П2.5})$$

где $c(y)$ задается формулой (П2.4). Заменяя в (П2.4) и (П2.5) переменную y на p , видим, что

$$c(p) = \frac{1}{2\pi} \bar{f}(p),$$

где $\bar{f}(p)$ — образ функции $f(x)$ при ИП Фурье. Вследствие (П2.5)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{f}(p) e^{ixp} dp. \quad (\text{П2.6})$$

Таким образом мы получили формулу обращения для ИП Фурье.

п2.2. Для получения формул обращения косинус- и синус-преобразований применим равенство (П2.6) для четных и нечетных функций $f(x)$. Но прежде всего заметим, что если функция $f(x)$ четная (нечетная), то её образ по Фурье — функция $\bar{f}(p)$ — также четная (нечетная) функция. Действительно, в силу (П2.6)

$$\bar{f}(-p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ipx} dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x) e^{-ixp} d(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{-ixp} dx$$

и, значит,

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \bar{f}(-p) = \bar{f}(p), \quad \text{если } f(-x) = f(x), \\ \text{b) } \bar{f}(-p) = -\bar{f}(p), \quad \text{если } f(-x) = -f(x). \end{array} \right\} \quad (\text{П2.7})$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \bar{f}(p) e^{ixp} dp &= \int_{+\infty}^0 \bar{f}(-p) e^{-ixp} d(-p) = \\ &= \int_0^{+\infty} \bar{f}(-p) e^{-ixp} dp = \pm \int_0^{+\infty} \bar{f}(p) e^{-ixp} dp, \end{aligned} \quad (\text{П2.8})$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ipx} dx &= \int_{+\infty}^0 f(-x) e^{ipx} d(-x) = \\ &= \int_0^{\infty} f(-x) e^{ipx} dx = \pm \int_0^{\infty} f(x) e^{ipx} dx, \end{aligned} \quad (\text{П2.9})$$

где знаки (+) и (-) отвечают соответственно четным и нечетным функциям $f(x)$.

Переходим теперь непосредственно к выводу формул обращения для синус- и косинус-преобразования. Пусть

$$\bar{f}_c(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cos px dx, \quad \bar{f}_s(p) = \int_0^{\infty} f(x) \sin px dx. \quad (\text{П2.10})$$

Если $f(x)$ — четная функция, то в силу (П2.8) и (П2.9)

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx + \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ipx} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) (e^{-ipx} + e^{ipx}) dx = 2\bar{f}_c(p). \end{aligned} \quad (\text{П2.11})$$

С другой стороны в силу (П2.6) и (П2.8)

$$\begin{aligned} 2\pi f(x) &= \int_0^{\infty} \bar{f}(p) e^{ipx} dp + \int_{-\infty}^0 \bar{f}(p) e^{ipx} dp = \\ &= \int_0^{\infty} \bar{f}(p) (e^{ixp} + e^{-ixp}) dp = 2 \int_0^{\infty} \bar{f}(p) \cos px dp. \end{aligned} \quad (\text{П2.12})$$

Подставляя в (П2.12) выражение $\bar{f}(p)$ из (П2.11) получаем, что для четных функций

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}_c(p) \cos px dp. \quad (\text{П2.13})$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то снова используя (П2.8) и (П2.9) получим

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx + \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ipx} dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(x) (e^{-ipx} - e^{ipx}) dx = -2i \bar{f}_s(p). \end{aligned} \quad (\text{П2.14})$$

Аналогично (П2.12) в силу (П2.6), (П2.8)

$$\begin{aligned} 2\pi f(x) &= \int_0^{\infty} \bar{f}(p) e^{ipx} dp + \int_{-\infty}^0 \bar{f}(p) e^{ipx} dp = \\ &= \int_0^{\infty} \bar{f}(p) (e^{ipx} - e^{-ixp}) dp = 2i \int_0^{\infty} \bar{f}(p) \sin px dp. \end{aligned} \quad (\text{П2.15})$$

Из (П2.14), (П2.15) получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}_s(p) \sin px dx. \quad (\text{П2.16})$$

Таким образом для четных и нечетных функций формула обращения (П2.6) ИП Фурье принимает соответственно вид (П2.13) и (П2.16). Пусть теперь функция $f(x)$ задана только на положительной оси. Продлив её на отрицательную полуось четным или нечетным образом, мы получим функции, для которых при $x > 0$ будут верны соответственно формулы (П2.13) и (П2.16). Поэтому (П2.13) и (П2.16) являются искомыми формулами обращения для косинус- и синус-преобразований.

п2.3. Получим формулу обращения для преобразования Лапласа. Докажем, что если

$$\bar{f}_L(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx,$$

то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}_L(p) e^{px} dp, \quad (\text{П2.17})$$

где $p = p_1 + ip_2$, $p_1 = \operatorname{Re} p > \rho(f(x))$, $\rho(f(x))$ — порядок роста функции $f(x)$ (см. § 1) и $f(x)$ дифференцируема в точке x . Положим $g(x) = f(x) e^{-p_1 x}$ при $x \geq 0$, $g(x) \equiv 0$ при $x < 0$, и обозначим через $\bar{g}_F(p_2)$ образ функции $g(x)$ при ИП Фурье. Тогда

$$\bar{g}_F(p_2) = \int g(x) e^{-ip_2 x} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-(p_1+ip_2)x} dx = \bar{f}_L(p_1 + ip_2).$$

Применяя формулу обращения (2.6) для ИП Фурье имеем

$$e^{-p_1 x} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{f}_L(p_1 + ip_2) e^{ip_2 x} dp_2,$$

откуда при $p_1 = \gamma$ следует, что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{f}_L(p) e^{(p_1+ip_2)x} dp_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}_L(p) e^{px} dp,$$

т. е. формула обращения (П2.17) для ИП Лапласа доказана.

§ ПЗ. Формулы обращения для двумерного ИП Фурье и для ИП Ханкеля

пЗ.1. Мы начинаем с вывода формулы обращения для двумерного ИП Фурье, т. е. мы хотим выразить функцию $g(x, y)$ через её образ

$$\bar{g}(p, q) = \iint g(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy. \quad (\text{ПЗ.1})$$

Пусть $XY = \{(x, y) \mid -\infty < x, y < +\infty\}$ — плоскость x, y , $L_1 = L_1(XY)$, $g(x, y) \in L_1$ и кроме того, $g(x, y) \in L_1(-\infty, +\infty)$ по $x \{y\}$ при любом фиксированном значении $y \{x\}$. Положим

$$\bar{g}_1(p, y) = \int g(x, y) e^{-ipx} dx. \quad (\text{ПЗ.2})$$

Тогда

$$\bar{g}(p, q) = \int \bar{g}_1(p, y) e^{-iqy} dy. \quad (\text{ПЗ.3})$$

Применяя формулы обращения для одномерного ИП Фурье сначала к (ПЗ.3) при фиксированном y , а потом и к (ПЗ.2) при фиксированном p , имеем

$$\bar{g}_1(p, y) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{g}(p, q) e^{iqy} dq, \quad (\text{ПЗ.4})$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{g}_1(p, y) e^{ipx} dp. \quad (\text{ПЗ.5})$$

Подставляя (ПЗ.4) в (ПЗ.5), получаем искомую формулу обращения:

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{g}(p, q) e^{i(px+qy)} dp dq. \quad (\text{ПЗ.6})$$

Достаточным условием справедливости формулы (ПЗ.6) кроме требований суммируемости, описанных в начале пЗ.1, является выполнение условий справедливости формул обращения

(ПЗ.4), (ПЗ.5). А именно достаточно выполнения условия Теоремы 1 (§ П1) для функции $g(x, y)$ по x при любом фиксированном y и для функции $\bar{g}_1(p, y)$ по y при любом фиксированном p .

п3.2. Переходим к выводу формулы обращения для преобразования Ханкеля. Введем полярные координаты в плоскостях (x, y) и (p, q) : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $p = \rho \cos \alpha$, $q = \rho \sin \alpha$ и положим $f(r, \theta) = g(x, y)$, $f(p, \alpha) = \bar{g}(p, q)$, где $g(x, y)$ и $\bar{g}(p, q)$ — те же, что в п.3.1. Тогда формулы (ПЗ.1) и (ПЗ.6) перепишутся в виде

$$\bar{f}(\rho, \alpha) = \int_0^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-i\rho r \cos(\theta-\alpha)} d\theta, \quad (\text{ПЗ.7})$$

$$f(r, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \bar{f}(\rho, \alpha) e^{i\rho r \cos(\theta-\alpha)} d\alpha. \quad (\text{ПЗ.8})$$

Возьмем в качестве $f(r, \theta)$ функцию $e^{-in\theta} f(r)$, где $f(r) r \in L_1(0, +\infty)$ (это требование вытекает из условия, что $f(r, \theta) = g(x, y) \in L_1$). Тогда (ПЗ.7) примет вид

$$\bar{f}(\rho, \alpha) = \int_0^{+\infty} f(r) r dr \int_0^{2\pi} \exp i[-n\theta - \rho r \cos(\theta - \alpha)] d\theta. \quad (\text{ПЗ.9})$$

Обозначим в (ПЗ.9) внутренний интеграл (по θ) через $B(r, \rho, \alpha)$ и сделаем в нем замену переменных полагая $\theta = \varphi + \omega$, где $\omega = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} B(r, \rho, \alpha) &= \exp(-in\omega) \int_{-\omega}^{2\pi-\omega} \exp[i(-n\varphi + \rho r \sin \varphi)] d\varphi = \\ &= \exp(-in\omega) \int_{-\pi}^{+\pi} \exp[i(-n\varphi + \rho r \sin \varphi)] d\varphi = \\ &= \exp(-in\omega) 2\pi J_n(\rho r). \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.10})$$

Здесь мы воспользовались интегральным представлением функции Бесселя [8, 8.411 (1)], а предварительно учли, что функция $\exp i(-n\varphi + \rho r \sin \varphi)$ периодична по φ с периодом 2π и поэтому выбор начальной точки при интегрировании по всему периоду не влияет на значение интеграла. Подставив значения $B(r, \rho, \alpha)$ из (ПЗ.10) в (ПЗ.9) получим

$$\bar{f}(\rho, \alpha) = \exp(-in\omega) 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) r J_n(\rho r) dr = 2\pi \exp(-in\omega) \bar{f}(\rho), \quad (\text{ПЗ.11})$$

где $\bar{f}(\rho)$ — образ функции $f(r)$ при преобразовании Ханкеля. Подставим выражения $f(r, \theta) = e^{-in\theta} f(r)$ и $\bar{f}(\rho, \alpha)$ из (ПЗ.11) в (ПЗ.8). Имеем

$$e^{-in\theta} f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho \bar{f}(\rho) d\rho \int_0^{2\pi} \exp i \left[r\rho \cos(\theta - \alpha) - n\alpha - \frac{n\pi}{2} \right] d\alpha. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Обозначим в (ПЗ.12) внутренний интеграл (по α) через $B_1(r, \rho, \theta)$. Сделав в нем замену переменных $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} + \varphi$, получаем

$$B_1(r, \rho, \theta) = e^{-in\theta} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp i[-n\varphi + r\rho \sin \varphi] d\varphi = e^{-in\theta} 2\pi J_n(\rho r). \quad (\text{ПЗ.13})$$

Здесь мы снова воспользовались периодичностью функции $\exp i(-n\varphi + \rho r \sin \varphi)$ по φ с периодом 2π и тем же интегральным представлением функции Бесселя, что и ранее. Подставляя (ПЗ.13) в (ПЗ.12) и сокращая на $e^{-in\theta}$, мы получаем формулу обращения для ИП Ханкеля:

$$f(r) = \int_0^{+\infty} \bar{f}(p) p J_n(r, p) dp. \quad (\text{ПЗ.14})$$

§ П4. Формулы свертки

п4.1. При применении формул обращения для различных ИП часто возникает задача нахождения прообраза для произведения функций. Покажем, как эта задача может быть решена. Пусть $g(x)$ и $h(x)$ — прообразы функций $g_0(p)$ и $h_0(p)$ при некотором ИП. Найдем прообраз $f(x)$ произведения $f_0(p) := g_0(p) h_0(p)$. Рассмотрим сначала случай ИП Фурье. В силу (П2.6) имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int h_0(p) g_0(p) e^{ipx} dp = \frac{1}{2\pi} \int h_0(p) \int g(t) e^{-ipt} dt e^{ipx} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int g(t) \int h_0(p) e^{ip(x-t)} dp = \int g(t) h(x-t) dt, \quad (\text{П4.1}) \end{aligned}$$

где, разумеется, мы предполагаем справедливость формул обращения во всех (или почти всех) точках для функций $g(x)$ и $h(x)$ и возможность изменения порядка интегрирования в правой части равенства (П4.1). Выражение $\int g(t) h(x-t) dt$ называется сверткой функций $g(x)$ и $h(x)$ и обозначается $(g * h)(x)$.

В случае косинус-преобразования получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} h_0(p) g_0(p) \cos px dp = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} h_0(p) \int_0^{+\infty} g(t) \cos pt \cos px dt dp = \\ &= \int_0^{+\infty} g(t) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} h_0(p) (\cos p(t-x) + \cos p(t+x)) \frac{1}{2} dp dt = \\ &= \int_0^{+\infty} g(t) [h(|x-t|) + h(x+t)] dt \frac{1}{2}. \quad (\text{П4.2}) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь двойное преобразование Фурье. Пусть $g_0(p, q)$ и $h_0(p, q)$ — суть образы функций $g(x, y)$ и $h(x, y)$ при

двойном ИП Фурье. В силу (П3.6) прообраз $f(x, y)$ произведения $f_0(p, q) := g_0(p, q) h_0(p, q)$ есть

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint g_0(p, q) h_0(p, q) e^{i(px+qy)} dp dq = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint h_0(p, q) \iint g(s, t) e^{-i(ps+qt)} ds dt e^{i(px+qy)} dp dq = \\
 &= \iint g(s, t) \frac{1}{4\pi^2} \iint h_0(p, q) e^{i[p(x-s)+q(y-t)]} dp dq ds dt = \\
 &= \iint g(s, t) h(x-s, y-t) ds dt. \tag{П4.3}
 \end{aligned}$$

Аналогично можно получить формулы свертки для других ИП.

Задание. Получить формулы свертки для ИП Лапласа и Ханкеля.

п4.2. Подход п4.1 позволяет находить не только прообраз произведения функций (что бывает нужно на заключительном этапе решения уравнений методом ИП), но и получать изображение произведения функций (что иногда требуется на начальном этапе применения ИП). Пусть функции $h_0(p)$, $g_0(p)$, $h(x)$, $g(x)$ — те же, что в п4.1. Тогда в случае ИП Фурье образ $f_0(p)$ произведения $f(x) := g(x) h(x)$ есть

$$\begin{aligned}
 f_0(p) &= \int f(x) e^{-ipx} dx = \int g(x) h(x) e^{-ipx} dx = \\
 &= \int h(x) \frac{1}{2\pi} \int g_0(s) e^{isx} e^{-ipx} ds dx = \\
 &= \int g_0(s) \frac{1}{2\pi} \int h(x) e^{-i(p-s)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int g_0(s) h_0(p-s) ds.
 \end{aligned}$$

Для косинус-преобразования образ $f_0(p)$ произведения $f(x) := g(x) h(x)$ находится аналогично:

$$f_0(p) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos px dx = \int_0^{+\infty} g(x) h(x) \cos px dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} h(x) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g_0(s) \cos sx \cos px \, ds \, dx = \\
&= \int_0^{+\infty} g_0(s) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} h(x) \frac{\cos x(s+p) + \cos x(s-p)}{2} \, dx = \\
&= \int_0^{+\infty} g_0(s) [h_0(s+p) + h_0(|p-s|)] \frac{1}{\pi} \, ds.
\end{aligned}$$

На этом же пути можно получить образы произведения $g(x)h(x)$ для других ИП.

п4.3. Возвратимся теперь к п4.1 и рассмотрим для определенности ИП Фурье (разумеется, описанный далее подход применим и для других ИП). Пусть функции $g_0(p)$ и $g(x)$ те же, что и в п4.1, а $h_0(p)$ — некоторая функция, не лежащая в $L_1 = L_1(-\infty, +\infty)$. В то же время пусть для произведения $f_0(p) := h_0(p)g_0(p)$ прообраз $f(x)$ существует. Как найти $f(x)$, используя знание оригинала $g(x)$ для функции $g_0(p)$? Формула свертки здесь напрямую не применима, ибо $h_0(p) \notin L_1$. В данной ситуации к результату иногда может привести следующий прием. Выбираем последовательность функций $\omega_n(p)$ со следующими свойствами: прообраз $f_n(x)$ функции $f_0(p)\omega_n(p)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к прообразу $f(x)$ функции $f_0(p)$, т. е.

$$\begin{aligned}
\text{(A)} \quad f_n(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int f_0(p) \omega_n(p) e^{ipx} \, dp \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int f_0(p) e^{ipx} \, dx = f(x) \text{ при } n \rightarrow \infty;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(B)} \quad \text{прообразы } \tilde{h}_n(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int h_0(p) \omega_n(p) e^{ipx} \, dp \\
\text{произведений } \tilde{h}_n(p) &:= h_0(p) \omega_n(p), \quad n = 1, 2, \dots \text{ существуют.}
\end{aligned}$$

Тогда в силу (А), (В) и (П4.1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int f_0(p) \omega_n(p) e^{ipx} dp &= \frac{1}{2\pi} \int g_0(p) h_0(p) \omega_n(p) e^{ipx} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int g_0(p) \tilde{h}_n(p) e^{ipx} dp = \int g(s) \tilde{h}_n(x-s) ds \rightarrow f(x) \quad (\text{П4.4}) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Попытки найти предел $\tilde{h}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}_n(x)$ и записать (П4.4) в виде

$$\int g(s) \tilde{h}(x-s) ds = f(x)$$

конечно допустимы (см. п.8.4), однако они часто могут кончиться ничем, ибо этот предел может вообще не существовать (см. п4.4), или ошибкой (см. пп.8.6, 8.7). Поэтому, как правило, переходить к пределу надо только в (П4.4), не находя $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}_n(x)$.

Замечание 2. Вместо последовательности $\omega_n(p)$ при $n \rightarrow \infty$ можно взять последовательность $\gamma_\varepsilon(p)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ с теми же свойствами (А), (В), где вместо $\omega_n(p)$ подставлена функция $\gamma_\varepsilon(p)$, индекс n заменен на ε и вместо $n \rightarrow \infty$ берется $\varepsilon \rightarrow 0$. Выбор функций $\omega_n(p)$, $\{\gamma_\varepsilon(p)\}$, осуществляется таким образом, чтобы облегчить нахождение прообразов произведений $h_0(p) \omega_n(p)$ $\{h_n(p) \gamma_\varepsilon(p)\}$ и последующий переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ {при $\varepsilon \rightarrow 0$ }. Так, если $h_0(p) \in L_1[ab]$ при $\forall a, b, |a| + |b| < +\infty$, то можно взять, например, $\omega_n(p) \equiv 1$ при $|p| \leq n$, $\omega_n(p) \equiv 0$ при $|p| > n$; или $\gamma_\varepsilon(p) = e^{-\varepsilon|p|}$ при условии $e^{-|p|\varepsilon} h_0(p) \in L_1$.

п4.4. Приведем пример, в котором результат очевиден и подход п4.3 применяется только для иллюстрации его использования. Пусть в ситуации п4.3 $h_0(p) \equiv 1$, а функция $g(x)$ дифференцируема в точке x и удовлетворяет условиям Теоремы 1 (§ П1). Тогда, очевидно, $f_0(p) := g_0(p) h_0(p) \equiv g_0(p)$ и прообраз $f(x)$ функции $f_0(p)$ есть $g(x)$. Попробуем теперь найти $f(x)$ с помощью подхода п4.3. Определим $\omega_n(p)$, полагая $\omega_n(p) \equiv 1$ при $|p| \leq n$, $\omega_n(p) \equiv 0$ при $|p| > n$, $n = 1, 2, \dots$

Пусть $h_n(p) = h_0(p) \omega_n = \omega_n(p)$, $f_n(p) = g_0(p) h_n(p)$,

$$f_n(x) := \frac{1}{2\pi} \int g_0(p) h_n(p) e^{ipx} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n g_0(p) e^{ipx} dp.$$

Очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int g_0(p) e^{ipx} dp = g(x) = f(x),$$

то есть условие (А) п4.3 выполнено. Теперь попытаемся найти $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, используя формулу свертки для функций $g_0(p)$ и $h_n(p)$. Очевидно прообраз функции $h_n(p)$ есть

$$h_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{ipx} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} \cos px dp = \frac{\sin nx}{\pi x}$$

и поэтому в силу (П4.1)

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int g(s) h_n(x-s) ds = \int g(s) \frac{\sin n(s-x)}{\pi(s-x)} ds = \\ &= \int g(x+t) \frac{\sin nt}{\pi t} dt. \end{aligned}$$

Так как $\int \frac{\sin nt}{\pi t} dt = 1$ при $\forall n > 0$, то

$$f_n(x) - g(x) = \int \frac{g(x+t) - g(x)}{\pi t} \sin nt dt. \quad (\text{П4.5})$$

Поскольку производная $g'(x)$ существует и конечна, то по произвольному $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{|g(x+t) - g(x)|}{\pi t} dt < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{П4.6})$$

Далее

$$g(x) \int_{|t| \geq \delta} \frac{\sin nt}{t} dt = g(x) \int_{|s| \geq n\delta} \frac{\sin s}{s} ds \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

и, значит, при $n > N = N(\varepsilon)$

$$\left| g(x) \int_{|t| > \delta} \frac{\sin nt}{\pi t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{П4.7})$$

Наконец, функция $g_1(t) := \frac{g(x+t)}{t}$ при $|t| > \delta$, $g_1(t) := 0$ при $|t| < \delta$, очевидно лежит в L_1 . Поэтому рассуждая в точности так же, как при оценке интеграла $J_1(\alpha)$ (при $\alpha = n$ в § П1, п1.2) мы убеждаемся, что при больших n

$$\left| \int_{|t| > \delta} \frac{g(x+t)}{\pi t} \sin nt dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{П4.8})$$

Из (П4.5)–(П4.8) следует, что при больших n $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ и значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x) = f(x),$$

как это и должно было быть.

Замечание. Из вида $h_n(x)$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$ не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
2. Трантер К. Д. Интегральные преобразования в математической физике. — М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
4. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, физматгиз, 1984.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1948.
8. Градштейн И. С., Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье. — М.: Изд-во ин. лит-ры, 1955.

Оглавление

Введение	3
§ 1. Определения. Преобразование производных	4
§ 2. Преобразование Лапласа. Температурный режим бесконечного цилиндра (Задача 1)	9
§ 3. Формула обращения для преобразования Лапласа. Лемма Жордана	13
§ 4. Задача 1 (Окончание)	18
§ 5. Распространение тепла в полубесконечном стержне (Задача 2)	21
§ 6. Синус- и косинус-преобразования	26
§ 7. Преобразование Фурье	33
§ 8. Двумерное преобразование Фурье. Задача о распространении волн на плоскости	41
§ 9. Применение двух различных интегральных преобразований в одной задаче	49
§ 10. Преобразование Ханкеля	55
Приложение. Формулы обращения и свертки интегральных преобразований	
§ П1. Двойной интеграл Фурье	64
§ П2. Формулы обращения для ИП Фурье, Лапласа и синус- косинус-преобразований	68
§ П3. Формулы обращения для двумерного ИП Фурье и для ИП Ханкеля	73
§ П4. Формулы свертки	76
Список литературы	82
Оглавление	83