Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный инновационный комплекс
«Модели, методы и программные средства»

Основная образовательная программа
010100.62 «Математика», общий профиль, квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Эллиптические и параболические дифференциальные уравнения»

Основная образовательная программа
010100.68 «Математика», общий профиль, квалификация (степень) магистр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Современные проблемы математической физики»

А.А. Жидков, А.В. Калинин, А.А. Тюхтина

Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород
2012

Жидков А.А., Калинин А.В., Тюхтина А.А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными: Электронное учебно-методическое пособие. –Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. –82 с.

В учебно-методическом пособии изучаются вопросы современной теории краевых задач для уравнений математической физики. Вводится понятие обобщённого решения задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Обсуждаются свойства функциональных пространств, связанных с дифференциальными операциями векторного анализа, используемых при изучении задач механики, гидродинамики, электромагнитной теории.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 010100.62 «Математика», изучающих курс «Эллиптические и параболические дифференциальные уравнения», и по направлению подготовки магистров 010100.68 «Математика», изучающих курс «Современные проблемы математической физики».

Оглавление

Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных находят применение в различных разделах фундаментальной и прикладной науки, например, гидродинамики, электродинамики сплошных сред, для описания процессов теории теплопроводности, диффузии частиц, волновых явлений.

Предметом классической теории дифференциальных уравнений долгое время были операторы трёх типов: эллиптического, параболического и гиперболического. Типичными простейшими представителями этих классов являются операторы Лапласа, теплопроводности и волновой. Изучение этих операторов и их обобщений, начатое ещё в начале XIX века, позволило накопить и проанализировать большое число интереснейших фактов и связей, стимулировать развитие теории функций, функционального анализа и других областей математики. Начиная с середины XX века был получен ряд глубоких результатов, касающихся уравнений и систем, не принадлежащих к трём классическим типам, что позволяет сегодня говорить о теории общих дифференциальных операторов.

Известно, что линейные дифференциальные уравнения могут иметь бесконечное множество решений. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о дополнительных условиях, выделяющих из всей совокупности решений единственное. Для уравнений математической физики с этой целью ставятся различные краевые, начальные и смешанные (начально-краевые) задачи. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений традиционно рассматриваются одноточечные (задача Коши) и многоточечные задачи.

Классическое решение краевых задач предполагает определённую гладкость входных данных (коэффициентов, правых частей), что обычно не выполнено для большинства задач, имеющих практический интерес. Поэтому основное значение имеет переход к обобщённым постановкам краевых задач, предполагающим расширение дифференциальных операторов с пространств гладких функций на классы функций, обладающих обобщёнными производными.

В учебно-методическом пособии различные задачи математической физики в гильбертовых пространствах рассматриваются с помощью единого подхода, основанного на одной из базовых теорем функционального анализа — теореме Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

1. Элементы теории гильбертовых пространств

Векторное пространство H над полем действительных чисел называется *пространством со скалярным произведением*, если определено отображение

$$(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(u, v)_H = (v, u)_H$;
2. $(u_1 + u_2, v)_H = (u_1, v)_H + (u_2, v)_H$;
3. $(\lambda u, v)_H = \lambda(u, v)_H$;
4. $(u, u)_H \geq 0$, причем $(u, u)_H = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$

при всех $u, v \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В пространстве со скалярным произведением может быть определена норма элемента по формуле

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}. \tag{1.1}$$

Норма обладает следующими свойствами:

1. $\|u\|_H \geq 0$ при всех $u \in H$, причем $\|u\|_H = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$;
2. $\|\lambda u\|_H = |\lambda| \cdot \|u\|_H$ при всех $u \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|u + v\|_H \leq \|u\|_H + \|v\|_H$ при всех $u, v \in H$.

Первые два свойства следуют из свойств скалярного произведения, а третье — из следующего неравенства, называемого неравенством Шварца или Коши–Буняковского:

Лемма 1.1. $|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H$.

Доказательство: Пусть $u, v \in H$, $v \neq 0$ (в противном случае неравенство очевидно). Рассмотрим функцию $f(\lambda) = (u+\lambda v, u+\lambda v)_H = \|u\|_H^2 + 2\lambda(u, v)_H + \lambda^2 \|v\|_H^2$. По свойству 4 скалярного произведения $f(\lambda) \geq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, что возможно только при условии $(u, v)_H^2 - \|u\|_H^2 \|v\|_H^2 \leq 0$. Отсюда и следует доказываемое неравенство. $\square$

В пространстве со скалярным произведением определим расстояние между любыми двумя элементами $u, v \in H$ по формуле

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_H = (u - v, u - v)_H^{1/2}. \tag{1.2}$$

Введенная таким образом функция расстояния (метрика) $\rho : H \times H \to \mathbb{R}$ обладает свойствами:

1. $\rho(u, v) \geq 0$ при всех $u, v \in H$, причем $\rho(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;
2. $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ при всех $u, v \in H$;
3. $\rho(u, w) \leq \rho(u, v) + \rho(v, w)$ для любых $u, v, w \in H$.

Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in H$, называется *фундаментальной* (последовательностью Коши; последовательностью, сходящейся в себе), если $\rho(u_n, u_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$, то есть для любого $\epsilon > 0$ найдется такое натуральное $N(\epsilon)$, что $\rho(u_n, u_m) < \epsilon$ при $n, m > N(\epsilon)$.

Пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$ называется *гильбертовым*, если оно является полным метрическим пространством с метрикой, определенной равенством (1.2). Это означает, что любая фундаментальная последовательность в H имеет предел.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.2. *Любая фундаментальная последовательность ограничена (то есть существует $M > 0$ такое, что $\|u_n\|_H \le M$ при всех натуральных n).*

Лемма 1.3. *Пусть последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in H$, сходится к элементу $u \in H$. Тогда последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна.*

Пример 1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение задается формулой

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$

где $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\vec{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Это пространство – пример конечномерного гильбертова пространства.

Для скалярного произведения и нормы в $\mathbb{R}^n$ будут использоваться обозначения

$$\vec{x} \cdot \vec{y},\ |\vec{x}| = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2}.$$

Пример 2. Пусть $C([a, b])$ – множество непрерывных на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ функций. Для $u, v \in C([a, b])$ положим

$$(u, v) = \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx.$$

Легко убедиться, что выполняются все аксиомы скалярного произведения, однако это пространство не является гильбертовым. Пусть, например, $[a, b] = [0, 2]$. Определим последовательность функций по формуле

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 - 1/n, \\ nx - n + 1, & 1 - 1/n \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

Последовательность таких функций фундаментальна, но ни одна непрерывная функция не является её пределом.

Аналогичный результат имеет место и в более общем случае. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\bar{\Omega}$ – его замыкание, через $C(\bar{\Omega})$ обозначено множество непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций. Скалярное произведение в $C(\bar{\Omega})$ можно ввести соотношением

$$(u, v) = \int_\Omega u(\vec{x}) \cdot v(\vec{x}) d\vec{x},\ u, v \in C(\bar{\Omega}) \tag{1.3}$$

где $d\vec{x} = dx_1 dx_2 ... dx_n$ – элемент объема в $\mathbb{R}^n$, но получившееся пространство не будет гильбертовым.

Множество $M \subset H$ называется *всюду плотным*, если его замыкание $\bar{M}$ совпадает с H. Пространство H *сепарабельно*, если в нем существует счетное плотное множество.

Пусть X - метрическое пространство, не являющееся полным. Полное метрическое пространство X' называется пополнением пространства X, если X - всюду плотное подпространство в X'.

Теорема 1.1. *Каждое метрическое пространство имеет пополнение.*

Пополнением пространства $C(\bar{\Omega})$ по метрике, порожденной скалярным произведением (1.3) является пространство, обозначаемое $L_2(\Omega)$. Его свойства будут рассмотрены в следующей главе.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства (в частности, пространства со скалярным произведением), $D(A)$ – некоторое линейное множество из X, а $R(A)$ – линейное множество из Y. Пусть каждому элементу $x \in D(A)$ соответствует единственный элемент $Ax \in R(A)$. Тогда говорят, что задан оператор A с областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A)$, действующий из X в Y, т. е. $A : X \to Y$.

Оператор $A : X \to Y$, определенный в окрестности точки $x_0 \in X$, называется *непрерывным в точке* x_0, если $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$.

Оператор A с областью определения $D(A) \subset X$ и областью значений $R(A) \subset Y$ называется *ограниченным*, если переводит любое ограниченное множество из $D(A)$ в множество, ограниченное в пространстве Y.

Оператор $A : X \to Y$ с областью определения $D(A) \subset X$ называется линейным, если $D(A)$ — линейное многообразие в X и для любых x_1, $x_2 \in D(A)$ и любых a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^1$ выполняется равенство $A(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1Ax_1 + a_2Ax_2$.

Множество $K(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ называется множеством нулей или ядром оператора A.

Теорема 1.2. *Линейный оператор $A : X \to Y$, заданный на всем X и непрерывный в точке $0 \in X$, непрерывен в любой точке $x \in X$.*

Теорема 1.3. *Линейный оператор $A : X \to Y$ с $D(A) = X$ ограничен тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \le c\|x\|$.*

Теорема 1.4. *Линейный оператор $A : X \to Y$ с $D(A) = X$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Нормой ограниченного линейного оператора $A : X \to Y$ с $D(A) = X$ называется число

$$\|A\| = \sup_{x \in X : \|x\| \le 1} \|Ax\|.$$

Пусть A_1, $A_2 : X \to Y$ – операторы с областями определения $D(A_1)$, $D(A_2)$. Если $D(A_1) \subset D(A_2)$ и $A_1(x) = A_2(x)$ для всех $x \in D(A_1)$, то оператор A_2 называется *распространением* (или продолжением) оператора A_1.

Теорема 1.5. *Пусть X, Y – нормированные пространства, причем Y полное. Всякий линейный непрерывный оператор $A_0 : X \to Y$ с областью определения $D(A)$ допускает единственное линейное непрерывное продолжение A на замыкание $\overline{D(A)}$ множества $D(A)$, при этом $\|A\| = \|A_0\|$.*

Частным случаем линейных операторов являются линейные функционалы - линейные операторы, отображающие множество $M \subset X$ в $\mathbb{R}^1$.

Пусть H - гильбертово пространство, рассмотрим линейные функционалы $l : H \to \mathbb{R}^1$, определенные на H.

В соответствии с общим определением, линейный функционал l называется *непрерывным в точке* $u \in H$, если для любой последовательности $\{u_n\}$ из H такой, что $u_n \to u$ при $n \to \infty$, $l(u_n) \to l(u)$. Если функционал l непрерывен в каждой точке $u \in M \subset H$, то говорят, что l непрерывен на M

Линейный функционал $l : H \to \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если для любого $u \in H$ выполнено

$$|l(u)| \leq M\|u\|_H, \tag{1.4}$$

где $M > 0$ не зависит от выбора u.

Справедлива

Теорема 1.6. *Для того, чтобы линейный функционал был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Пространство линейных непрерывных функционалов на H называется *сопряженным к* H и обозначается H^*.

Лемма 1.4. *Пространство, сопряженное к полному нормированному пространству H, является полным с нормой*

$$\|l\| = \sup_{x:\|x\|_H=1} l(x).$$

Последовательность $\{x_n\}$ элементов H слабо сходится к $x_0 \in H$, если $l(x_n) \to l(x_0)$ для всех $l \in H^*$.

Теорема 1.7. (Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала) *Для любого непрерывного линейного функционала f в гильбертовом пространстве H существует однозначно определяемый функционалом f элемент $y \in H$ такой, что при всех $x \in H$ $f(x) = (y, x)_H$. При этом $\|f\| = \|y\|_H$.*

Отображение $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ называется *билинейной формой*, если для любых λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $w, u, v \in H$ выполнено

$$\begin{aligned} a(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda a(u, w) + \mu a(v, w), \\ a(w, \lambda u + \mu v) &= \lambda a(w, u) + \mu a(w, v). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Билинейная форма $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ называется *симметричной*, если для любых $u, v \in H$ выполнено

$$a(u, v) = a(v, u). \tag{1.6}$$

Билинейная форма $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если для любых $u, v \in H$ выполнено

$$|a(u, v)| \leq \alpha^* \|u\|_H \|v\|_H \tag{1.7}$$

для некоторого $\alpha^* > 0$, не зависящего от выбора u и v.

Билинейная форма $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ называется *коэрцитивной* (или H-положительно определенной, или H-эллиптичной), если для любого $u \in H$ справедливо неравенство

$$|a(u,u)| \geq \alpha_* \|u\|^2 \tag{1.8}$$

для некоторого $\alpha_* > 0$, не зависящего от выбора u.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.8. (Лакс, Мильграм) *Пусть $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ – билинейная симметричная коэрцитивная ограниченная форма, $l : H \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда существует единственный элемент $u \in H$, удовлетворяющий равенству*

$$a(u,v) = l(v) \tag{1.9}$$

для любых $v \in H$.

Доказательство: Введем в H новое скалярное произведение

$$(u,v)_a = a(u,v),\ u,v \in H.$$

В силу свойств билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ все аксиомы скалярного произведения для $(\cdot,\cdot)_a : H\times H \to \mathbb{R}$ выполнены. Векторное пространство H с новым скалярным произведением будем обозначать H_a,

$$\|u\|_a = (u,u)_a^{1/2}. \tag{1.10}$$

Покажем, что H_a – гильбертово пространство.

Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в H_a. Тогда

$$\|u_n - u_m\|_a \to 0 \text{ при } n,m \to \infty. \tag{1.11}$$

Из (1.8), (1.11) следует, что

$$\|u_n - u_m\|_H \leq \alpha_*^{-1/2} \|u_n - u_m\|_a$$

и

$$\|u_n - u_m\|_H \to 0 \text{ при } n,m \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в H, и поэтому существует элемент $u_\infty \in H$ такой, что

$$\|u_n - u_\infty\|_H \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Из (1.7) следует, что

$$\|u_n - u_\infty\|_a \leq (\alpha^*)^{1/2} \|u_n - u_\infty\|_H,$$

то есть
$$\|u_n - u_\infty\|_a \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, любая фундаментальная последовательность в H_a имеет предел и H_a – гильбертово пространство.

Далее, в силу (1.8),
$$|l(u)| \le M\|u\|_H \le M\alpha_*^{-1/2}\|u\|_a,$$
что доказывает ограниченность линейного функционала $l : H_a \to \mathbb{R}$.

По теореме Рисса о представлении линейного ограниченного функционала заключаем, что существует единственный элемент $u \in H_a$, удовлетворяющий (1.9) при всех $v \in H$, что и следовало доказать. □

Пусть $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ – билинейная форма, $l : H \to \mathbb{R}$ – линейный функционал.

Рассмотрим следующие две задачи.

Задача А. Определить элемент $u \in H$, удовлетворяющий равенству
$$a(u, v) = l(v) \tag{1.12}$$
при всех $v \in H$.

Задача В. Определить элемент $u \in H$, являющийся решением вариационной задачи
$$I(u) \to \min,\ u \in H, \tag{1.13}$$
$$I(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - l(u). \tag{1.14}$$

Справедлива

Теорема 1.9. *Пусть $a(\cdot,\cdot)$ – билинейная симметричная форма, удовлетворяющая условию неотрицательной определенности*
$$a(u, u) \ge 0 \text{ при всех } u \in H. \tag{1.15}$$
Тогда задачи А и В эквивалентны.

Доказательство: Пусть $u_0 \in H$ – решение вариационной задачи В. Тогда
$$I(u_0) \le I(u_0 + \lambda v) \tag{1.16}$$
при всех $v \in H$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Используя конкретный вид функционала (1.14), билинейность и симметричность формы $a(\cdot,\cdot)$ и линейность функционала l, легко получить эквивалентное (1.16) неравенство
$$\frac{\lambda^2}{2}a(u_0, v) + \lambda(a(u_0, v) - l(v)) \ge 0. \tag{1.17}$$

Это неравенство будет справедливо при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ только в том случае, когда

$$a(u_0, v) - l(v) = 0. \tag{1.18}$$

Таким образом, в силу произвольности выбора $v \in H$, заключаем, что u_0 – решение задачи A.

Обратно, если u_0 удовлетворяет (1.18) при всех $v \in H$, то u_0 удовлетворяет (1.17) при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in H$ (так как $a(v, v) \geq 0$), что эквивалентно (1.16). $\square$

Из теорем 1.8, 1.9 следует

Теорема 1.10. *Пусть $a(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ – билинейная симметричная коэрцитивная ограниченная форма, $l : H \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда вариационная задача B* (1.13), (1.14) *имеет единственное решение.*

Элементы u, v пространства со скалярным произведением H называются *ортогональными* в H, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(u, v) = 0.$$

Ортогональность обозначается записью $u \perp v$.

Два подпространства F_1 и F_2 в H называются *ортогональными*, если каждый элемент из F_1 ортогонален к каждому элементу из F_2. Совокупность всех элементов из H, ортогональных к данному подпространству F называется его *ортогональным дополнением.*

Теорема 1.11. *Пусть M — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве H. Тогда его ортогональное дополнение $M^{\perp}$ также является замкнутым подпространством и каждый элемент $x \in H$ допускает единственное разложение вида $x = y + z$, где $y \in M$, $z \in M^{\perp}$. Элемент y называется проекцией x на M, элемент z – проекцией x на $M^{\perp}$ и $\rho(x, M) = \|x - y\|_H = \inf_{v \in M} \|x - v\|_H$.*

Система (последовательность) φ_1, φ_2,... элементов гильбертова пространства называется *полной* в этом пространстве, если множество всевозможных линейных комбинаций ее элементов плотно в H, т. е. если для любого элемента $u \in H$ и любого $\epsilon > 0$ можно найти положительное целое число n и числа a_1, ..., a_n такие, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i - u \right\|_H < \epsilon$$

Если, более того, система линейно независима в H, то говорят, что она образует базис в H.

Теорема 1.12. *Для того, чтобы система элементов была полной в пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы не существовало отличного от нуля элемента, ортогонального каждому элементу системы.*

Элемент $u \in H$ называется *нормированным*, если $\|u\|_H = 1$.

Система элементов φ_1, φ_2,... из H называется *ортогональной*, если любые два различных элемента системы ортогональны. Ортогональная система называется *ортонормированной*, если её элементы нормированы, то есть

$$(\varphi_n, \varphi_m)_H = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Любая система, ортонормированная в H, линейно независима. Обратно, справедлива следующая

Теорема 1.13. *Пусть ψ_1, ψ_2, ... – линейно независимая система элементов H. Тогда в H существует такая ортогональная система элементов φ_1, φ_2, ..., что*

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{k} a_{kj}\psi_j,\ a_{kj} \in \mathbb{R}^1,\ a_{kk} \neq 0,\ k = 1, 2, ...,$$

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{k} b_{kj}\varphi_j,\ b_{kj} \in \mathbb{R}^1,\ b_{kk} \neq 0.$$

Построение ортогональной системы по заданной линейно независимой системе называется ортогонализацией. Процесс ортогонализации Гильберта–Шмидта:

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|},\ \varphi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1\|}, ...,$$

$$\varphi_k = \frac{\psi_k - (\psi_k, \varphi_{k-1})\varphi_{k-1} - ... - (\psi_k, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_k - (\psi_k, \varphi_{k-1})\varphi_{k-1} - ... - (\psi_k, \varphi_1)\varphi_1\|}, ...$$

Теорема 1.14. *Ортонормированная система сепарабельного гильбертова пространства не более чем счётна.*

Теорема 1.15. *Если сепарабельное гильбертово пространство бесконечномерно, то в нем существует полная счетная ортонормированная система.*

Пусть φ_1, φ_2,... — ортонормированная система в H и пусть $u \in H$. Числа $c_i = (u, \varphi_i)_H$ называются коэффициентами Фурье элемента u относительно системы φ_1, φ_2,.... Ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i$$

называется *рядом Фурье* (относительно системы $\{\varphi_i\}$), соответствующим u.

Ряд Фурье дает наилучшую среди всех рядов вида аппроксимацию элемента u в H в следующем смысле.

Теорема 1.16. *Пусть $\{\varphi_i\}$ – ортонормированная система в H, и пусть $u \in H$ – произвольный элемент. Пусть n – произвольное, но фиксированное целое положительное число. Обозначим через $S_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$ n-ю частичную сумму ряда Фурье, соответствующего u. Тогда*

$$\|S_n - u\|_H \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i - u \right\|_H,$$

где a_i, $i = 1, ..., n$ – произвольные вещественные числа. Неравенство является строгим, если хотя бы для одного значения индекса $i = 1, ..., n$ $a_i \neq c_i$.

Теорема 1.17. *Ряд, составленный из квадратов коэффициентов Фурье произвольного элемента $u \in H$, является сходящимся в H, и справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq \|u\|_H^2.$$

Теорема 1.18. *Пусть $\{\varphi_i\}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, и пусть $u \in H$ – произвольный элемент. Тогда ряд Фурье $\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i$, соответствующий u, сходится в H.*

Необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд Фурье сходился именно к элементу u, является выполнение так называемого равенства Парсеваля (также называемого условием полноты)

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \|u\|_H^2. \tag{1.19}$$

Ортонормированная система $\{\varphi_i\}$ называется *замкнутой* в гильбертовом пространстве H, если для любого $u \in H$ соответствующий ряд Фурье сходится в H к элементу u, т. е. для любого $u \in H$ выполняется равенство (1.19).

Теорема 1.19. *Ортонормированная система является полной в гильбертовом пространстве в том и только том случае, когда она замкнута в этом пространстве.*

Полная ортогональная система называется *ортогональным базисом* пространства H.

Следовательно, базис в сепарабельном пространстве H образуется не более чем счетной линейно независимой полной системой. Если, кроме того, система ортонормирована, она называется ортонормированным базисом в пространстве H.

2. Пространства интегрируемых функций

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество с границей $\partial\Omega$, $\bar{\Omega}$ – его замыкание. Через $mes(\Omega)$ обозначается лебегова мера множества Ω.

Обозначим через $C^k(\Omega)$ – класс функций из $C(\Omega)$ таких, что все их частные производные до порядка k включительно непрерывны, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$, $C^k(\bar{\Omega})$, $k = 0, 1, ...$ – класс функций из $C^k(\Omega)$, допускающих вместе со всеми частными производными до k-го порядка включительно непрерывное продолжение на $\bar{\Omega}$, $C^\infty(\Omega) = \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций.

Для каждой функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ определен её носитель – замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества тех $\vec{x} \in \Omega$, при которых $u(\vec{x}) \neq 0$:

$$\mathrm{supp}(u) = \overline{\{\vec{x} \in \Omega : u(\vec{x}) \neq 0\}}.$$

Через $C_0(\Omega)$ обозначим класс функций $u \in C(\Omega)$, имеющих компактный в $\mathbb{R}^n$ носитель, целиком содержащийся в Ω. Такие функции будем называть *финитными*.

Классом пробных функций называют множество $\mathcal{D}(\Omega) = C_0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Через $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ обозначается класс функций из $C^\infty(\Omega)$, допускающих непрерывное продолжение до функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2.1. $\mathcal{D}(\Omega)$ *– векторное пространство над полем действительных чисел.*

Лемма 2.2. (Неравенства Минковского) *Пусть $p \geq 1$. Для числовых последовательностей $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$ справедливо неравенство*

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right\}^{1/p} \leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right\}^{1/p}.$$

Пусть u, v – измеримые на Ω функции. Тогда

$$\left\{\int_\Omega |u+v|^p d\vec{x}\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_\Omega |u|^p d\vec{x}\right\}^{1/p} + \left\{\int_\Omega |v|^p d\vec{x}\right\}^{1/p}.$$

Лемма 2.3. (Обратные неравенства Минковского) *Пусть $p \geq 1$. Для числовых последовательностей $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$ справедливо неравенство*

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^{1/p}\right\}^{p} \geq \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{1/p}\right\}^{p} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^{1/p}\right\}^{p}.$$

Если u, v – измеримые на Ω функции, то

$$\left\{\int_\Omega |u+v|^{1/p} d\vec{x}\right\}^{p} \leq \left\{\int_\Omega |u|^{1/p} d\vec{x}\right\}^{p} + \left\{\int_\Omega |v|^{1/p} d\vec{x}\right\}^{p}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_2(\Omega)$ – пространство измеримых по Лебегу функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, суммируемых с квадратом:

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} < \infty.$$

Пространство $\mathcal{L}_2(\Omega)$ – векторное пространство над полем действительных чисел, так как для любых $u, v \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\left\{\int_\Omega (u(\vec{x}) + v(\vec{x}))^2 d\vec{x}\right\}^{1/2} \le \left\{\int_\Omega u(\vec{x})^2 d\vec{x}\right\}^{1/2} + \left\{\int_\Omega v(\vec{x})^2 d\vec{x}\right\}^{1/2} < \infty,$$

(частный случай неравенства Минковского),

$$\int_\Omega (\lambda u(\vec{x}))^2 d\vec{x} = \lambda^2 \int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} < \infty.$$

Определим отображение $(\cdot,\cdot)_L : \mathcal{L}_2(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega) \to \mathbb{R}^1$ по формуле

$$(u, v)_L = \int_\Omega u(\vec{x}) \cdot v(\vec{x})d\vec{x}. \tag{2.1}$$

Очевидно, что отображение $(\cdot,\cdot)_L$ удовлетворяет первым трем аксиомам скалярного произведения и поэтому, вследствие неравенства Коши-Буняковского, определено для всех $u, v \in \mathcal{L}_2(\Omega)$:

$$|(u, v)_L| \le \left|\int_\Omega u(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x}\right| \le \left(\int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x}\right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega v^2(\vec{x})d\vec{x}\right)^{1/2} < \infty \tag{2.2}$$

Однако свойство 4 из данного определения не выполнено, и поэтому $(\cdot,\cdot)_L$ не является скалярным произведением.

Действительно,

$$(u, u)_L = \int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} \ge 0$$

при всех $u \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, но из равенства

$$(u, u)_L = \int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} = 0$$

следует лишь, что $u(\vec{x}) = 0$ при почти всех $\vec{x} \in \Omega$ (то есть $u(\vec{x})$ может и не быть тождественно равной нулю в Ω).

Обозначим через $N(\Omega) \subset \mathcal{L}_2(\Omega)$ подпространство функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, равных нулю при почти всех $\vec{x} \in \Omega$. Будем говорить, что функции $u, v \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ эквивалентны ($u \sim v$), если $u - v \in N(\Omega)$. Через $L_2(\Omega)$ обозначим множество, элементами которого являются классы эквивалентных функций. $L_2(\Omega)$ – векторное пространство над полем действительных чисел ($L_2(\Omega) = \mathcal{L}_2(\Omega)/N(\Omega)$ – фактор-пространство с нулевым элементом $0 = \{N(\Omega)\}$).

При этом над элементами из $L_2(\Omega)$ могут выполняться те же действия, что и над индивидуальными функциями из $\mathcal{L}_2(\Omega)$, если результат этих действий не зависит от выбора конкретных представителей из соответствующих классов эквивалентностей. Например, интеграл Лебега не изменится, если подынтегральную функцию изменить на множестве нулевой меры.

В частности, для любых $u, v \in L_2(\Omega)$ может быть однозначно определено отображение $(\cdot,\cdot)_{2,\Omega} : L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \to \mathbb{R}^1$ по формуле (2.1), где в качестве функций $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ в правой части можно взять любые конкретные функции из классов эквивалентностей u и v.

Формула (2.1) определяет скалярное произведение, удовлетворяющее всем аксиомам.

Последовательность элементов u_n, $n = 1, 2, ...$ из $L_2(\Omega)$ называется сходящейся к $u \in L_2(\Omega)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ (или в среднем в $L_2(\Omega)$, если $\|u_n - u\|_{2,\Omega} \to 0$ при $n \to \infty$; при этом пишут $u_n \to u$ при $n \to \infty$ в $L_2(\Omega)$.

Важнейшим свойством пространства $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением (2.1) является его полнота.

Теорема 2.1. (Рисс, Фишер) *Если последовательность функций u_n, $n = 1, 2, ...$ из $\mathcal{L}_2(\Omega)$ сходится в себе в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, т.е. $\|u_n - u_m\|_{2,\Omega} \to 0$ при $n, m \to \infty$, то существует функция $u \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ такая, что $\|u_n - u\|_{2,\Omega} \to 0$ при $n \to \infty$; при этом функция u единственна с точностью до значений меры нуль.*

Теорема 2.2. $L_2(\Omega)$ – *гильбертово пространство.*

В дальнейшем элементы $L_2(\Omega)$ будут называться функциями (сумируемыми с квадратом по Лебегу), как это обычно и делается в литературе.

Пусть $1 \le p < \infty$. Обозначим через $L_p(\Omega)$ пространство классов эквивалентных функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^1$ таких, что $\int_\Omega |u|^p d\vec{x} < \infty$. $L_p(\Omega)$ – полное пространство с нормой

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p d\vec{x}\right)^{1/p}.$$

Для любого $\epsilon > 0$ можно построить функцию $\rho_\epsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(\vec{x}) d\vec{x} = 1,\ \rho_\epsilon \ge 0,\ \mathrm{supp}\rho_\epsilon = \{\vec{\vec{x}} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| \le \epsilon\}.$$

Пусть u – локально интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ функция. Построим свертку

$$u_\epsilon(\vec{x}) = u * \rho_\epsilon(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\vec{x} - \vec{y})\rho_\epsilon(\vec{y}) d\vec{y} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\vec{y})\rho_\epsilon(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y}.$$

Теорема 2.3. *Пусть функция $u \in L_p(\Omega)$, $1 \le p$, имеет компактный носитель в Ω. Тогда при достаточно малых $\epsilon > 0$ функции $u_\epsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ и при $\epsilon \to 0$ сходятся к u в $L_p(\Omega)$.*

Следствие. *Множество $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в пространстве $L_p(\Omega)$ при $1 \le p$.*

Лемма 2.4. (Неравенство Гёльдера) *Пусть $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$. Если $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$, то $uv \in L_1(\Omega)$ и справедливо неравенство*

$$\int_\Omega |uv| d\vec{x} \le \|u\|_{p,\Omega} \|v\|_{q,\Omega}.$$

Замечание. При $p = 2$ неравенство Гёльдера является неравенством Коши–Буняковского для $L_2(\Omega)$.

Согласно общему определению для гильбертовых пространств, система функций $\{\varphi_k\}$ из $L_2(\Omega)$ называется *ортонормальной*, если $(\varphi_k, \varphi_l) = \int_\Omega (\varphi_k, \varphi_l) d\vec{x} = \delta_{kl}$. Всякая ортонормальная в $L_2(\Omega)$ система $\{\varphi_k\}$ состоит из линейно независимых функций.

Важным примером ортогональной системы в $L_2(a, b)$ является система тригонометрических функций

$$1,\ \cos\frac{2\pi(t-a)}{b-a},\ \sin\frac{2\pi(t-a)}{b-a},\ ...,\ \cos\frac{2\pi n(t-a)}{b-a},\ \sin\frac{2\pi n(t-a)}{b-a},\ ...$$

Последовательность функций

$$1,\ x,\ x^2,\ ...,x^n,... \tag{2.3}$$

– пример полной, но не ортогональной системы в $L_2(a, b)$. Аналогично, если $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, система функций

$$1,\ x_1,\ x_2,\ x_1^2,\ x_1 x_2,\ x_2^2, ...$$

полна в $L_2(\Omega)$.

Применяя процесс ортогонализации к системе (2.3) в пространстве $L_2(-1, 1)$, получаем полную ортонормированную систему

$$\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1), ...$$

3. Пространства Соболева

Почти все свойства рассматриваемых далее функциональных пространств в области Ω требуют некоторой регулярности границы $\partial\Omega$.

Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Говорят, что его граница $\partial\Omega$ *непрерывна* (соответственно, *липшицева*, принадлежит классу C^m при некотором целом $m > 0$), если для каждой точки $\vec{x} \in \partial\Omega$ существует окрестность $\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^n$ и новые ортогональные координаты $\vec{z} = (z_1, z_n)$ такие, что пересечение $\mathcal{O} \cap \partial\Omega$ представимо в виде гиперповерхности $z_n = \omega(z_1, ..., z_{n-1})$, где функция ω непрерывна (соответственно, липшицева, класса C^m). При этом $\partial\Omega$ разделяет $\mathcal{O}$ на два множества - внешнее и внутреннее.

По существу, это определение означает, что локально Ω – подграфик некоторой функции ω, $\partial\Omega$ – график ω и регулярность $\partial\Omega$ определяется регулярностью ω. Согласно этому определению область с непрерывной границей лежит по одну сторону от $\partial\Omega$ для любой точки из $\partial\Omega$. Самым простым примером области с липшицевой границей является ограниченный многогранник в $\mathbb{R}^3$ или ограниченный многоугольник в $\mathbb{R}^2$.

Для краткости, говорим, что Ω – липшицева, если она имеет липшицеву границу. На липшицевых границах почти всюду определен единичный вектор нормали $\vec{\nu}$.

Для функций $\vec{u} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{u} = (u_1, ..., u_n)$, используются обозначения

$$u_\nu(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}),\ \vec{u}_\nu(\vec{x}) = u_\nu(\vec{x})\vec{\nu}(\vec{x}),\ \vec{u}_\tau(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}_\nu(\vec{x}),\ \vec{x} \in \partial\Omega.$$

Поскольку при $n = 2, 3$ $\vec{u} \times \vec{\nu} = \vec{u}_\tau \vec{\nu}$, $\vec{u}_\tau = \vec{\nu} \times [\vec{u} \times \vec{\nu}]$, то $\vec{u}_\tau(\vec{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{u}(\vec{x}) \times \vec{\nu}(\vec{x})$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in Z_+^n$ – мультииндекс. Введем оператор дифференцирования

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ – порядок производной, Z_+ – множество неотрицательных целых чисел. Обозначаем также $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Для дифференцируемых функций $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ($\vec{u} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $u_i \in C^1(\Omega)$), $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^1$ основные дифференциальные операции записываются в виде

$$\operatorname{div} \vec{u} = \partial_1 u_1 + ... + \partial_n u_n, \quad \operatorname{grad} \varphi = (\partial_1 \varphi, ..., \partial_n \varphi).$$

Пусть область Ω имеет липшицеву границу.

Для гладких функций $\vec{u}$ справедлива формула Гаусса- Остроградского (Стокса)

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{u} d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) d\gamma. \tag{3.1}$$

Для дифференцируемых функций f справедлива также следующая формула интегрирования по частям – частный случай формулы Стокса:

$$\int_\Omega \partial_i f d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} f \nu_i d\gamma.$$

Отсюда следует, что для любых $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega v \partial_i u d\vec{x} = -\int_\Omega u \partial_i v d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i d\gamma,$$

в частности, если $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \varphi \partial_i u d\vec{x} = -\int_\Omega u \partial_i \varphi d\vec{x}.$$

Пусть $u \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$, тогда применяя предыдущую формулу $|\alpha|$ раз, получим

$$\int_\Omega \varphi \partial^\alpha u d\vec{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi d\vec{x}.$$

Правая часть последнего равенства определена для всех локально суммируемых функций u.

Локально суммируемую на Ω функцию ω_α назовем *обобщенной производной* функции $u \in L_{loc}(\Omega)$ порядка $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, α_i – целые неотрицательные, $i = 1, ..., n$, если для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi d\vec{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \omega_\alpha \varphi d\vec{x}. \tag{3.2}$$

В дальнейшем будем обозначать $\omega_\alpha = \partial^\alpha u$.

Рассмотрим некоторые свойства обобщенных производных. Равенство (3.2) ставит в соответствие суммируемой функции единственную обобщенную производную порядка α, что вытекает из следующей леммы:

Лемма 3.1. (дю Буа, Реймонд) *Для того чтобы локально суммируемая функция f была равна нулю почти всюду в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ выполнялось*

$$\int_\Omega f \varphi d\vec{x} = 0.$$

Теорема 3.1. *Пусть f_n — последовательность локально суммируемых на Ω функций. Если существуют такие ω_0, $\omega_\alpha \in L_{loc}(\Omega)$, что для любых функций $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ выполняются равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \varphi d\vec{x} = \int_\Omega \omega_0 \varphi d\vec{x},$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \partial^\alpha \varphi d\vec{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \omega_\alpha \varphi d\vec{x},$$

то локально суммируемая функция ω_α является обобщенной производной порядка α функции ω_0.

Следствие. *Пусть последовательность $f_n \in L_2(\Omega)$ такова, что $\partial^\alpha f_n \in L_2(\Omega)$, $\int_\Omega f_n g \, d\vec{x} \to \int_\Omega f g \, d\vec{x}$ и $\int_\Omega \partial^\alpha f_n g \, d\vec{x} \to \int_\Omega \omega_\alpha g \, d\vec{x}$ для любой функции $g \in L_2(\Omega)$*

и некоторых $f \in L_2(\Omega)$, $\omega_\alpha \in L_2(\Omega)$ при $n \to \infty$. Тогда f имеет обобщенную производную порядка α и $\partial^\alpha f = \omega_\alpha$.

Таким образом, обобщенные производные по Соболеву можно рассматривать как предельные элементы сходящихся в $L_2(\Omega)$ последовательностей производных от гладких функций.

Если функция $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, то все её обобщенные производные являются производными в обычном смысле.

Для каждого целого $m \geq 0$ и действительного p, $1 \leq p < \infty$, определены пространства Соболева $W_p^m(\Omega)$ как множество функций $f \in L_p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\partial^\alpha v \in L_p(\Omega)$ для всех α таких, что $|\alpha| \leq m$:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L_p(\Omega); \partial^\alpha v \in L_p(\Omega)\, \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Впервые пространства $W_p^m(\Omega)$ были введены и изучены С. Л. Соболевым [26]. $W_p^m(\Omega)$ банахово относительно нормы

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(\vec{x})|^p d\vec{x} \right)^{1/p}, \quad p < \infty \tag{3.3}$$

Пространство $W_p^m(\Omega)$ сепарабельно при $1 \leq p < \infty$ и рефлексивно при $1 < p < \infty$. При $p = 2$ пространство $W_2^m(\Omega)$ обычно обозначается через $H^m(\Omega)$. $H^m(\Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{m,2,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u(\vec{x}) \partial^\alpha v(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{3.4}$$

Так как $\mathcal{D}(\Omega) \subset W_p^m(\Omega)$, определим пространства $W_0^{m,p}(\Omega)$ – замыкания $\mathcal{D}(\Omega)$ по норме $\|.\|_{m,p,\Omega}$. Если $m \geq 1$ и Ω – собственое подмножество $\mathbb{R}^n$, то, вообще говоря, $W_0^{m,p}(\Omega)$ – собственное подпространство $W_p^m(\Omega)$.

Следующая теорема показывает, что гладкие функции плотны в $W_p^m(\Omega)$.

Теорема 3.2. *Пусть Ω – открытое липшицево подмножество в $\mathbb{R}^n$.*

1) Пространство $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ плотно в $W_p^m(\Omega)$ при всех целых $m \geq 1$ и действительных $1 \leq p < \infty$.

2) Пусть $u \in W_p^m(\Omega)$ и $\tilde{u}$ – её продолжение нулем вне Ω. Если $\tilde{u} \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$, то $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

3) Если, кроме того, $\partial\Omega$ ограничена и $m \geq 1$, то существует непрерывный линейный оператор продолжения P из $W_p^m(\Omega)$ в $W_p^m(\mathbb{R}^n)$:

$$Pu|_\Omega = u\, \forall u \in W_p^m(\Omega).$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная липшицевая область. Можно естественным образом определить $(n-1)$-мерную лебегову поверхностную меру $d\gamma$. Через $L_p(\Omega)$,

$1 \le p < \infty$, обозначается множество классов эквивалентных относительно $(n-1)$-мерной лебеговой поверхностной меры функций $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}^1$, для которых $\int_{\partial\Omega} |u(\vec{x})|^p d\gamma < \infty$.

Легко можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.2. *Для любой функции $u \in C_0(\Omega)$ найдется $\epsilon > 0$ такое, что $u(x) \equiv 0$ при всех $x \in \Gamma_\epsilon \cap \Omega$, где $\Gamma_\epsilon = \cup_{x\in\partial\Omega} B_\epsilon(x)$, $B_\epsilon(x)$ – открытый шар радиуса $\epsilon > 0$ с центром в точке x.*

Для всех функций $u \in C(\bar{\Omega})$ определено их значение на границе области. Функция $u|_{\partial\Omega}$ непрерывна на $\partial\Omega$ и называется следом функции u на $\partial\Omega$. Следующая теорема позволяет обобщить понятие следа для функций из пространств Соболева.

Теорема 3.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная липшицевая область, $p > 1$. Тогда существует линейный непрерывный оператор $\gamma_0 : W_p^1(\Omega) \to L_p(\partial\Omega)$ (оператор следа) такой, что $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ для всех $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Ядро оператора γ_0 совпадает с пространством $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Теорема 3.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ есть ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$.*

1. Если $p > 1$, то существует постоянная C такая, что

$$\|u\|_{L_p(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \ \forall u \in C^1(\bar{(\Omega)}).$$

2. Если $n < kp$, $\lambda < k - n/p$, то существует C такая, что

$$\|u\|_{C^\lambda(\Omega)} \le C\|u\|_{W_p^k(\Omega)} \ \forall u \in W_p^k(\Omega).$$

3. Если $u \in W_p^k(\Omega)$ и $\partial^\alpha u = 0$ на $\partial\Omega$ для $|\alpha| \le k-1$, то $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$.

Теорема 3.5. (неравенство Фридрихса) *Если Ω – связное и ограниченное по крайней мере в одном направлении множество, то для каждого целого $m \ge 0$ существует константа $K = K(m,\Omega) > 0$ такая, что*

$$\|u\|_{m,2,\Omega} \le K \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |\partial^\alpha| u(\vec{x})|^2 d\vec{x} \right)^{1/2} \quad \forall u \in H_0^m(\Omega). \tag{3.5}$$

Для всех $u \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega u^2(\vec{x}) d\vec{x} \le K \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} u(\vec{x})|^2 d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} u^2(\vec{x}) d\gamma \right). \tag{3.6}$$

Доказательство: Согласно теореме 3.2 достаточно установить справедливость неравенства для гладких функций. Докажем (3.6) для случая $n = 1$, оно примет вид

$$\int_a^b uvc^2(x) dx \le K \left(\int_a^b (u'(x))^2 dx + u^2(b) \right). \tag{3.7}$$

Пусть $u \in C^1[a,b]$. Положим $g(x) = \cos\frac{\pi(x-a)}{4(b-a)}$, $v = u/g$. Тогда

$$u'^2 = g^2 v'^2 + g'^2 v^2 + 2vgv'u' = g^2 v'^2 + (v^2 gg')' - v^2 gg'',$$

так что

$$(v^2 gg')' - v^2 gg'' \le u'^2. \tag{3.8}$$

Проинтегрируем (3.8) от a до b, учитывая, что $g - -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}g$, $v^2 gg' = u^2 g'/g$:

$$v^2 gg'|_a^b - \int_a^b v^2 gg'' dx = -\frac{\pi}{4(b-a)} u^2(b) dx + \frac{\pi^2}{16(b-a)^2}\int_a^b u^2 dx \le \int_a^b u'^2 dx,$$

откуда следует (3.7).

Неравенство (3.5) в одномерном случае можно получить следующим образом, используя неравенство Шварца:

$$u^2(x) = \left(\int_a^x u'(t)dt\right)^2 \le (x-a)\int_a^b u'2(t)dt.$$

Интегрируя это неравенство от a до b получаем (3.5), где $K = (1 + (b-a)^2/2)^{1/2}$. □

Через $H^{-m}(\Omega)$ обозначим сопряженное к $H_0^m(\Omega)$ пространство с нормой

$$\|f\|_{-m,2,\Omega} = \sup_{v \in H_0^m(\Omega), v \ne 0} \frac{f(v)}{\|v\|_{m,2,\Omega}}$$

Лемма 3.3. *Функционал f принадлежит $H^{-m}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда для $|\alpha| \le m$ существуют функции $f_\alpha \in L_2(\Omega)$ такие, что*

$$f = \sum_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha f_\alpha.$$

Теорема 3.6. (Неравенство Пуанкаре) *Пусть Ω – открытая ограниченная область с липшицевой границей. Тогда существует положительная постоянная $T(\Omega) > 0$, зависящая только от области Ω, такая что при всех $u \in H^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega u^2 d\vec{x} \le T(\Omega)\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 d\vec{x} + \frac{1}{mes(\Omega)}\left(\int_\Omega u d\vec{x}\right)^2, \tag{3.9}$$

где $mes(\Omega)$ – лебегова мера множества Ω.

Лемма 3.4. (Обобшенное неравенство Пуанкаре) *Пусть Ω – открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию Липшица. Тогда существует такая положительная постоянная $T(p,\Omega) > 0$, зависящая только от области Ω и p, что при каждом $u \in L_p(\Omega)$ найдется такая постоянная C_u, что*

$$\|u - C_u\|_{p,\Omega} \leq T(p,\Omega)\, \|\mathrm{grad}\, u\|_{\Omega}\,. \tag{3.10}$$

При $p = 2$ в качестве C_u можно взять минимизирующее левую часть неравенства число $1/mes(\Omega)\int_{\Omega} ud\vec{x}$. Тогда придем к неравенству (3.9).

Доказательство: Приведем доказательство неравенства Пуанкаре для случая $n = 1$, то есть

$$\int_a^b (u - C_u)^2(x)dx \leq T \int_a^b |u'(x)|^2 dx. \tag{3.11}$$

Пусть $u \in C^1[a,b]$, x_1, $x_2 \in [a,b]$. Тогда, используя неравенство Шварца, получаем

$$(u(x_1) - u(x_2))^2 = \left(\int_{x_1}^{x_2} u'(x)dx\right)^2 \leq |x_2 - x_1| \int_{x_1}^{x_2} u'2(x)dx,$$

то есть

$$u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2u(x_1)u(x_2) \leq (b-a) \int_a^b u'2(x)dx.$$

Интегрируя это неравенство сначала по x_1, затем по x_2 и обозначая переменную интегрирования через x, получаем

$$2(b-a)\int_a^b u^2(x)dx - 2\left(\int_a^b u(x)dx\right)^2 \leq (b-a)^3 \int_a^b u'2(x)dx,$$

откуда следует (3.11), где $T = (b-a)^2/2$, $C_u = 1/(b-a)\int_a^b u(x)dx$. $\square$

4. Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Оператор Лапласа определяется выражением

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Однородное уравнение $\Delta u = 0$ называется *уравнением Лапласа*, уравнение

$$-\Delta u = f, \tag{4.1}$$

где f – известная функция, называется *уравнением Пуассона.*

Уравнения Лапласа и Пуассона обычно используются для описания стационарного (то есть не меняющегося со временем) состояния тех или иных объектов. Например, стационарное распределение температуры в однородной среде и установившаяся форма натянутой мембраны удовлетворяют уравнению Лапласа, а аналогичное распределение температуры при наличии источников тепла (с плотностью, не меняющейся во времени) и форма мембраны при наличии стационарных внешних сил удовлетворяют уравнению Пуассона.

Классическим решением уравнения (4.1) называется функция $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющая равенству (4.1) в обычном смысле. Очевидно, классическое решение существует только если $f \in C(\Omega)$.

Умножая (4.1) на $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и интегрируя по частям, получаем

$$-\int_\Omega u\Delta\varphi d\vec{x} = \int_\Omega f\varphi d\vec{x}. \tag{4.2}$$

Равенство (4.2) имеет смысл при $f \in L_2(\Omega)$ и $u \in L_2(\Omega)$.

Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Обобщенным решением уравнения (4.1) называется функция $u \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая (4.2) при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Таким образом, если $f \in C(\Omega)$, классическое решение уравнения является его обобщенным решением. Обратно, если обобщенное решение уравнения (4.1) – функция $u \in C^2(\Omega)$, то опять применяя интегрирование по частям в равенстве (4.2), получаем, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi(\Delta u + f)d\vec{x} = 0,$$

то есть, ввиду плотности $\mathcal{D}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, справедливо равенство (4.1). Однако обобщенное решение может и не быть дважды непрерывно дифференцируемой функцией, а если f не является непрерывной функцией, то классического решения не существует. Таким образом, понятие обобщенное решения действительно является более общим, чем понятие классического решения.

Для того, чтобы выделить единственное решение дифференциального уравнения, например, описывающее реальный физический процесс, используются различные дополнительные условия. В задачах математической физики может быть задано начальное состояние процесса (начальные условия) или режим на границе области (граничные условия). Уравнение, снабженное краевыми (начальными и граничными) условиями, называется *краевой задачей.*

Уравнения Лапласа и Пуассона рассматриваются при трех типах граничных условий: условии Дирихле (условии первого рода)

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}),\ \vec{x} \in \partial\Omega,$$

условии Неймана (условии второго рода)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}),\ \vec{x} \in \partial\Omega$$

либо при краевом условии третьго рода

$$(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u)(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}),\ \vec{x} \in \partial\Omega,$$

где γ, φ – заданные функции на $\partial\Omega$.

Получим обобщенную поставку однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \tag{4.3}$$

$$u(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega. \tag{4.4}$$

Если $f \in C(\bar{\Omega})$, классическим решением задачи называется функция $u \in C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая равенствам (4.3), (4.4).

Пусть u – решение задачи (4.3), (4.4). Умножим обе части равенства (4.3) на $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ и проинтегрируем по частям. Получаем

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} d\vec{x} = \int_\Omega f v d\vec{x}, \tag{4.5}$$

или

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} = \int_\Omega f v d\vec{x}.$$

По непрерывности (4.5) справедливо для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$.

Если $u \in H^1(\Omega)$ и удовлетворяет граничному условию (4.4), то $u \in H_0^1(\Omega)$ и равенство (4.5) имеет смысл для $f \in L_2(\Omega)$.

Величина $\int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x}$ называется интегралом Дирихле.

Решение задачи (4.5) называется *обобщенным* или *слабым* решением задачи (4.3), (4.4).

Таким образом, задача (4.3), (4.4) допускает следующую обобщенную постановку: при заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ найти функцию $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую (4.5) при всех $v \in H_0^1(\Omega)$.

Любое классическое решение является обобщенным. Обратно, из равенства (4.5) следует (4.2), поэтому любое обобщенное решение задачи из класса $C^2(\bar{\Omega})$ удовлетворяет равенству (4.3) и, следовательно, является классическим решением.

Теорема 4.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $f \in L_2(\Omega)$. Тогда обобщенное решение задачи (4.3), (4.4) существует и единственно.*

Доказательство: Определим билинейную форму $a(u,v) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x}$ и линейный функционал $l(v) = \int_\Omega f v d\vec{x}$ на $H_0^1(\Omega)$. Из неравенства Гёльдера вытекает непрерывность функционала и формы:

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} \le \int_\Omega |\operatorname{grad} u| \cdot |\operatorname{grad} v| d\vec{x} \le$$

$$\le \left\{ \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\vec{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega (\operatorname{grad} v)^2 d\vec{x} \right\}^{1/2} \le \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\int_\Omega f v \, d\vec{x} \le \|f\|_{2,\Omega} \|v\|_{2,\Omega} \le \|f\|_{2,\Omega} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Форма $a(\cdot,\cdot)$ коэрцитивна ввиду неравенства Фридрихса:

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 d\vec{x} \ge \frac{1}{K} \int_\Omega u^2 d\vec{x},$$

$$a(u,u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\vec{x} \ge \left(1 + \frac{1}{K}\right) \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Таким образом, выполнены условия леммы Лакса–Мильграма, из которой следует утверждение теоремы. $\square$

Однородная задача Неймана для уравнения Пуассона имеет вид

$$-\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega. \tag{4.7}$$

Пусть Ω – ограниченная область с гладкой границей, $f \in C(\bar{\Omega})$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ – решение задачи (4.6), (4.7). Умножим (4.6) на $v \in C^1(\bar{\Omega})$ и проинтегрируем по частям, используя формулу Грина:

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\gamma = \int_\Omega f v d\vec{x},$$

то есть, в силу (4.7), справедливо равенство (4.5). По непрерывности (4.5) выполнено для всех $v \in H^1(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (4.6), (4.7) называется функция $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая (4.5) при всех $v \in H^1(\Omega)$. Так как $\mathcal{D}(\Omega)$

Таким образом, задача допускает следующую обобщенную постановку: при заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ найти функцию $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству (4.5) при всех $v \in H^1(\Omega)$.

Если u_1, u_2 – обобщенные решения задачи (4.6), (4.7), то $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет равенству $\int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} = 0$ при всех $v \in H^1(\Omega)$, в частности,

$\int_\Omega (\mathrm{grad}\, u)^2 d\vec{x} = 0$, то есть обобщенное решение определяется с точностью до аддитивной константы.

Взяв в (4.5) $v = 1$, получим необходимое условие существования решения задачи (4.6), (4.7):

$$\int_\Omega f(\vec{x}) d\vec{x} = 0. \tag{4.8}$$

Теорема 4.2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченная область,* $f \in L_2(\Omega)$ *удовлетворяет условию* (4.8). *Тогда существует единственное обобщенное решение задачи* (4.3), (4.4) *такое, что* $\int_\Omega u d\vec{x} = 0$.

Доказательство: Положим $H = \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v d\vec{x} = 0\}$. Так как H – замкнутое подпространство в $H^1(\Omega)$, оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(u, v)_H = (u, v)_{H^1(\Omega)}$. Определим билинейную форму и линейный функционал на H также, как в теореме 4.1, они непрерывны согласно неравенству Гёльдера. Коэрцитивность формы вытекает из неравенства Пуанкаре. Таким образом, утверждение теоремы следует из леммы Лакса–Мильграма. $\square$

Пусть H – гильбертово пространство. Линейный оператор $A : H \to H$, определенный на плотном в H линейном многообразии $D(A)$, называется симметричным, если для любых $u, v \in D(A)$

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H.$$

Симметричный оператор называется положительным в $D(A)$, если для всех $u \in D(A)$

$$(Au, u)_H \geq 0,\ (Au, u)_H = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Если, кроме того, существует постоянная $\alpha > 0$, что для всех $u \in D(A)$

$$(Au, u)_H \geq \alpha \|u\|_H^2,$$

то оператор A называется положительно определенным в $D(A)$. Любой положительно определенный оператор положителен в $D(A)$. Обратное неверно.

Пусть $f \in H$ – некоторый фиксированный элемент. Рассмотрим уравнение

$$Au = f. \tag{4.9}$$

Теорема 4.3. *Если* A *– положительный оператор в* $D(A)$*, то уравнение* (4.9) *где* $f \in H$*, имеет не более одного решения* $u \in D(A)$ *в* H.

Доказательство: Пусть u_1, $u_2 \in D(A)$ – решения уравнения. Тогда $u = u_1 - u_2 \in D(A)$ удовлетворяет равенству $Au = 0$, откуда, в силу положительности оператора следует, что $u = 0$. $\square$

Пусть $u \in D(A)$ – решение уравнения (4.9). Тогда при всех $v \in D(A)$

$$(Au, v)_H = (f, v)_H. \tag{4.10}$$

Если A – положительный оператор, то $a(u, v) \equiv (Au, v)_H$ – симметричная билинейная форма, определенная на $D(A)$, она называется энергией элемента u по отношению к A. Пусть V – пополнение $D(A)$ по норме $\|u\| = (Au, u)^{1/2}$. По построению, V – гильбертово пространство, часто его называют энергетическим пространством.

Например, интеграл Дирихле, в силу неравенства Фридрихса, порождает в $H_0^1(\Omega)$ норму, эквивалентную (3.3).

Обобщенным решением уравнения (4.9) называется элемент $u \in V$, удовлетворяющий (4.10) при всех $v \in V$.

Таким образом, обобщенная постановка задачи (4.9) принимает вид (1.12), где $l(v) = (f, v)_H$ – линейный функционал на V. Согласно теореме 1.9 эта задача эквивалентна вариационной задаче

$$\frac{1}{2}(Au, u)_H - (f, u)_H \to \inf,\ u \in V.$$

Пусть A – положительно определенный оператор, тогда для всех $u \in D(A)$

$$\|u\|_H \le \alpha^{-1/2}(Au, u)_H^{1/2} = \alpha^{-1/2}\|u\|_V. \tag{4.11}$$

Отсюда получаем, что любая последовательность u_n элементов из $D(A)$ фундаментальна в H, следовательно, существует $u \in H$ такой, что $u_n \to u$ в H при $n \to \infty$. В силу единственности предела, $V \subset H$ и неравенство (4.11) справедливо для $u \in V$.

Из оценки (4.11) вытекает, что функционал l непрерывен в V:

$$|l(v)| = |(f, v)|_H \le \|f\|_H \|v\|_H \le \alpha^{-1/2}\|f\|_H \|v\|_V,\ v \in V.$$

Так как $a(u, v) = (u, v)_V$ и $a(u, u) = \|u\|_V^2$, форма $a(\cdot, \cdot)$ коэрцитивна и непрерывна.

Таким образом, если A – положительно определенный оператор, для любого $f \in H$ существует единственное обобщенное решение задачи (4.9).

Пусть $u_1 \in V$ – обобщенное решение задачи (4.9) с правой частью $f_1 \in H$, а $u_2 \in V$ – обобщенное решение задачи (4.9) с правой частью $f_2 \in H$, то $u = u_1 - u_2 \in V$ – обобщенное решение (4.9) с правой частью $f_1 - f_2$, следовательно,

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_H.$$

Таким образом,

$$\|u_1 - u_2\|_V \le \alpha^{-1/2}\|f_1 - f_2\|_H,$$

что означает непрерывную зависимость обобщенного решения задачи (4.9) от начальных данных.

Если обобщенное решение лежит в $D(A)$, то ввиду плотности $D(A)$ в H, справедливо равенство (4.9). В силу единственности обобщенного решения, если оно не является элементом $D(A)$, уравнение (4.9) классических решений не имеет.

На элементы из $D(A)$ часто накладываются те или иные граничные условия. Те из них, которым удовлетворяют также все элементы V, называются главными. Граничные условия, которым удовлетворяют элементы $D(A)$, но могут не удовлетворять элементы V, называются естественными.

Например, при изучении краевых задач для уравнения Пуассона в качестве области определения оператора Лапласа можно рассматривать подпространства гладких функций, удовлетворяющих соответствующему однородному граничному условию. При этом граничные условия Дирихле являются главными, втрое и третье краевые условия – естественные.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка m

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\vec{x}) \partial^\alpha, \ \sum_{|\alpha| = m} |a_\alpha| \neq 0 \tag{4.12}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и соответствующее уравнение

$$P(\partial) u(\vec{x}) = f(\vec{x}). \tag{4.13}$$

Классическим решением дифференциального уравнения называется функция $u \in C^m(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая уравнению в каждой точке области Ω. Очевидно, что при этом предполагается определенная гладкость коэффициентов и правой части уравнения. Например, классического решения не существует, если f не является непрерывной функцией. Отказ от требований гладкости решения, приводящий к обобщенным постановкам задач, позволяет рассматривать, в частности, задачи, в которых $f \in L_2(\Omega)$.

Умножив уравнение на $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int_\Omega \varphi P(\partial) u d\vec{x} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \varphi a_\alpha \partial^\alpha u d\vec{x} = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha (a_\alpha \varphi) d\vec{x}.$$

Формально сопряженный дифференциальный оператор $P^*(\partial)$ определим выражением

$$P^*(\partial) v = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha v).$$

Обобщенным решением уравнения (4.13) называется функция $u \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ равенству

$$\int_\Omega u P^*(\partial) \varphi d\vec{x} = \int_\Omega f \varphi d\vec{x}. \tag{4.14}$$

Традиционно в математической физике выделяются три основных типа уравнений в частных производных – эллиптические, параболические и гиперболические.

Оператор (4.12) и соответствующее уравнение (4.13) называются эллиптическими в точке $\vec{x}$, если $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\vec{x})\xi^\alpha \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Если это выполнено при всех $\vec{x} \in \Omega$, то оператор и уравнение называются эллиптическими в области Ω.

Уравнение (4.13) называется однородно эллиптическим, если существует $c > 0$ такое, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и почти всех $\vec{x} \in \Omega$

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\vec{x})\xi^\alpha \geq c|\xi|^{2m}$$

Краевые задачи для эллиптических уравнений могут быть исследованы теми же методами, что и задачи для оператора Лапласа.

Линейное уравнение второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x})u = f(\vec{x}). \tag{4.15}$$

называется *однородно эллиптическим* в Ω, если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \Omega$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\xi_i\xi_j\right| \geq \delta|\xi|^2. \tag{4.16}$$

Уравнение второго порядка записано в дивергентной форме, если имеет вид

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu = f,\ a_{ij} = a_{ji}. \tag{4.17}$$

Если в Ω выполняется неравенство (4.16), уравнение является однородно эллиптическим.

Например, для оператора Лапласа $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, то есть уравнение Пуассона однородно эллиптическое в любой области.

Уравнение (4.17) можно записать в виде

$$-\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) + cu = f,$$

где A – матрица с элементами a_{ij}.

Предполагаем, что $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ при $i, j = 1, ..., n$, $c \in C(\bar{\Omega})$, $c(\vec{x}) \geq 0$, $\vec{x} \in \Omega$, $f \in L_2(\Omega)$.

Пусть $u \in C^2(\Omega)$ – решение уравнения (4.17). Умножим (4.17) на произвольную функцию $v \in C^1(\bar{\Omega})$ и проинтегрируем по Ω, используя формулу Стокса и тождество

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{\psi}) = \varphi \operatorname{div}\vec{\psi} + (\operatorname{grad}\varphi \cdot \vec{\psi}):$$

$$\int_\Omega (A \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} v(A \operatorname{grad} u \cdot \vec{\nu}) d\gamma + \int_\Omega cuv d\vec{x} = \int_\Omega fv d\vec{x}. \tag{4.18}$$

В частности, если $v \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega (A \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} + \int_\Omega cuv d\vec{x} = \int_\Omega fv d\vec{x}. \tag{4.19}$$

Левая часть равенства (4.19) определена при $\vec{u}$, $\vec{v}$ из $H^1(\Omega)$. Слабым решением уравнения (4.17) называется функция $\vec{u} \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая (4.19) при всех $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Эллиптическое уравнение (4.17) обычно расматривается при одном из следующих условий на границе области Ω, где φ – функция, определенная на $\partial\Omega$:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{4.20}$$

– граничное условие первого рода, или условие Дирихле,

$$(A \operatorname{grad} u)_\nu|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{4.21}$$

– граничное уловие второго рода, или условие Неймана,

$$(A \operatorname{grad} u)_\nu + \sigma u|_{\partial\Omega} = \varphi, \tag{4.22}$$

где σ – неотрицательная, определенная на $\partial\Omega$ функция – граничное условие третьего рода или условие Ньютона.

Выражение $(A \operatorname{grad} u)_\nu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_j \nu_i$ называется производной по направлению конормали.

Пусть $f \in L_2(\Omega)$, выполнено условие (4.16). Функционал $l(v) = \int_\Omega fv d\vec{x}$ непрерывен на $H^1(\Omega)$.

Рассмотрим обобщенные постановки соответствующих однородных (при $\varphi = 0$) краевых задач.

Функция $u \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет однородному граничному условию Дирихле, если $u \in H_0^1(\Omega)$. Если равенство (4.19) выполнено для всех $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, то по непрерывности оно выполнено и при всех $v \in H_0^1(\Omega)$. Таким образом, задача (4.17), (4.20) допускает следующую обобщенную постановку: найти функцию $u \in H_0^1(\Omega)$, такую, что при всех $v \in H_0^1(\Omega)$ справедливо равенство (4.19).

Определим симметричную билинейную форму на $H^1(\Omega)$ выражением

$$a(u,v) = \int_\Omega (A \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} + \int_\Omega cuv d\vec{x}.$$

Так как коэффициенты уравнения ограничены в Ω, форма $a(\cdot,\cdot)$ непрерывна. Коэрцитивность при $c \geq 0$ следует из неравенства Фридрихса и условия (4.16):

$$a(u,u) \geq \delta \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 d\vec{x} \geq \frac{\delta}{2}(1 + \frac{1}{K(\Omega)})\|u\|^2_{1,2,\Omega}.$$

Таким образом, существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле при всех $f \in L_2(\Omega)$ вытекает из теоремы Лакса–Мильграма.

Из теоремы 1.9 следует, что обобщенное решение задачи (4.17), (4.20) – точка минимума функционала

$$I(v) = \int_\Omega (A \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} + \int_\Omega c v^2 d\vec{x} - 2\int_\Omega f v d\vec{x} \tag{4.23}$$

на $H^1_0(\Omega)$.

Если $u \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет однородному граничному условию (4.22), равенство (4.18) примет вид

$$\int_\Omega (A \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \sigma u v d\gamma + \int_\Omega c u v d\vec{x} = \int_\Omega f v d\vec{x}. \tag{4.24}$$

Третья краевая задача допускает, таким образом, следующую обобщенную постановку: найти такую функцию $u \in H^1(\Omega)$, что при всех $v \in H^1(\Omega)$ справедливо равенство (4.24).

Пусть $\sigma(\vec{x}) \geq \sigma_0 > 0$ при $\vec{x} \in \partial\Omega$. Билинейная форма

$$a(u,v) = \int_\Omega (A \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \sigma u v d\gamma + \int_\Omega c u v d\vec{x}$$

непрерывна вследствии ограниченности оператора следа. Коэрцитивность при $c \geq 0$ вытекает из неравенства Фридрихса (3.6):

$$a(u,u) \geq \delta \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 d\vec{x} + \sigma_0 \int_{\partial\Omega} u^2 d\vec{x} \geq \min\{\delta, \sigma_0\} \left(1 + \frac{1}{K(\Omega)}\right) \|u\|^2_{1,2,\Omega}.$$

Таким образом, существует единственное обобщенное решение третьей кравевой задаче, которое, согласно теореме 1.9, минимизирует функционал

$$I(v) = \int_\Omega (A \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} + \int_\Omega c v^2 d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \sigma v^2 d\gamma - 2\int_\Omega f v d\vec{x},\ v \in H^1(\Omega).$$

Если гладкое решение u уравнения (4.17) удовлетворяет однородным условиям Неймана, интеграл по границе в (4.18) обращается в 0. Поэтому вторая краевая задача допускает следующую обобщенную постановку: найти функцию $u \in H^1(\Omega)$, такую, что при всех $v \in H^1(\Omega)$ справедливо равенство (4.19).

Если $c(\vec{x}) \geq c_0 > 0$, $\vec{x} \in \bar{\Omega}$, то коэрцитивность соответствующей билинейной формы вытекает из неравенства Фридрихса (3.6).

Таким образом, существует единственное обобщенное решение однородной задачи (4.17), (4.21). Это решение минимизирует функционал (4.23) в пространстве $H^1(\Omega)$.

В случае $c(\vec{x}) \equiv 0$ необходимым условием существования обобщенного решения является равенство

$$\int_\Omega f d\vec{x} = 0.$$

Если u_1, u_2 – решения задачи Неймана, то $\operatorname{grad}(u_1 - u_2) = 0$, то есть $u_1 - u_2$ – постоянная функция. Согласно неравенству Пуанкаре, билинейная форма $a(u, v) = \int_\Omega (A \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x}$ коэрцитивна на множестве $H = \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v d\vec{x} = 0$. Следовательно, по теореме Лакса–Мильграма, существует единственная функция $u \in H$, при всех $v \in H$ удовлетворяющая равенству

$$\int_\Omega (A \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x} = \int_\Omega f v d\vec{x}.$$

5. Пространства вектор-функций

Пусть L – некоторое пространство функций из Ω в $\mathbb{R}^1$. Через $\{L\}^n$ обозначается пространство вектор-функций $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\vec{u} = (u_1, ..., u_n)$, таких, что $u_i \in L$ при $i = 1, ..., n$.

Скалярное произведение и норма в $\{L\}^n$ определяются следующим образом:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_L, \ \|\vec{u}\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_L^2 \right\}^{1/2}.$$

Если L – полное пространство, то, очевидно, $\{L\}^n$ также полное. Пространство $\{L\}^n$ сепарабельное тогда и только тогда, когда L сеперабельное.

Для дифференцируемых функций $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} \vec{u} = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

Справедливы тождества

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{u}) = \varphi \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \varphi, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{div}[\vec{u} \times \vec{v}] = \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}, \tag{5.2}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \vec{u}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{u} + [\operatorname{grad} \varphi \times \vec{u}], \tag{5.3}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = 0. \tag{5.4}$$

Пространство $\{L_2(\Omega)\}^n$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{2,\Omega} = \int_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i v_i d\vec{x}.$$

Лемма 5.1. *Для всех $\vec{u}, \vec{v} \in \{L_2(\Omega)\}^n$, справедливо неравенство*

$$\left| \int_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{v} d\vec{x} \right| \leq \|\vec{u}\|_{2,\Omega} \|\vec{v}\|_{2,\Omega}.$$

Используя формулу Стокса и тождества (5.1), (5.2), получаем справедливость следующих формул для гладких $\vec{u}$, $\vec{w} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $w : \Omega \to \mathbb{R}^1$.

$$\int_{\partial\Omega} w(\vec{u} \cdot \nu) d\gamma = \int_\Omega (\vec{u} \cdot \operatorname{grad} w) d\vec{x} + \int_\Omega w \operatorname{div} \vec{u} d\vec{x}, \tag{5.5}$$

$$\int_{\partial\Omega} (\vec{u}_\tau \cdot \vec{w}) d\gamma = \int_\Omega (\vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{w})\, d\vec{x} - \int_\Omega (\vec{w} \cdot \operatorname{rot} \vec{u})\, d\vec{x}. \tag{5.6}$$

На основании этих равенств будем говорить, что для функции $\vec{u} \in \{L_1(\Omega)\}^n$ $\operatorname{div} \vec{u} = g \in L_p(\Omega)$, если

$$\int_\Omega g\varphi d\vec{x} = -\int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{u})\, d\vec{x} \text{ при всех } \varphi \in D(\Omega)\,,$$

для функции $\vec{u} \in \{L_1(\Omega)\}^3$ $(\Omega \subset R^3)$ $\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{h} \in \{L_p(\Omega)\}^3$, если

$$\int_\Omega \left(\vec{h} \cdot \vec{\psi}\right) d\vec{x} = \int_\Omega \left(\operatorname{rot} \vec{\psi} \cdot \vec{u}\right) d\vec{x} \text{ при всех } \vec{\psi} \in \{\mathrm{D}(\Omega)\}^3\,.$$

Аналогично, для любой $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^2$ полагаем, что $\operatorname{div} \vec{u}$ – элемент из $H^{-1}(\Omega)$, определенный соотношением

$$\langle \operatorname{div} \vec{u}, \varphi \rangle = -\int_\Omega (\vec{u} \cdot \operatorname{grad} \varphi) d\vec{x},\ \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

для $p \in L_2(\Omega)$ считаем, что $\operatorname{grad} p \in \{H^{-1}(\Omega)\}^3$,

$$\langle \operatorname{grad} p, \vec{\varphi} \rangle = -\int_\Omega p \operatorname{div} \vec{\varphi} d\vec{x},\ \ \vec{\varphi} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3.$$

Пусть $\Omega \subset R^n$ – некоторая область. Определим следующие пространства вектор-функций:

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \left\{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div} \vec{u} \in L_2(\Omega)\right\},$$

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \left\{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot} \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\right\},$$

Лемма 5.2. $H\left(\operatorname{div};\Omega\right)$, $H\left(\operatorname{rot};\Omega\right)$ *– гильбертовы пространства с соответствующими скалярными произведениями*

$$(\vec{u},\vec{v})_{\operatorname{div},\Omega} = (\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{div}\vec{u},\operatorname{div}\vec{v})_{2,\Omega}\,,$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{\operatorname{rot},\Omega} = (\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{rot}\vec{u},\operatorname{rot}\vec{v})_{2,\Omega}\,.$$

Доказательство: Аксиомы скалярного произведения, очевидно, выполняются. Проверим полноту пространств. Пусть $\{\vec{u}_k\}$ – фундаментальная последовательность в $H(\operatorname{div};\Omega)$. Тогда последовательности $\{\vec{u}_k\}$, $\{\operatorname{div}\vec{u}_k\}$ фундаментальны в $\{L_2(\Omega)\}^3$ и $L_2(\Omega)$ соответственно и, следовательно, сходятся к функциям $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $v \in L_2(\Omega)$. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega v\varphi d\vec{x} = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \varphi \operatorname{div}\vec{u}_k d\vec{x} = -\lim_{k\to\infty}(\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{u}_k)d\vec{x} = -\int_\Omega(\vec{u}\cdot\operatorname{grad}\varphi)d\vec{x},$$

то есть $v = \operatorname{div}\vec{u}$, что и требовалось доказать. Для пространства $H(\operatorname{rot};\Omega)$ доказательство аналогично. $\square$

Через $H_0\left(\operatorname{div};\Omega\right)$, $H_0\left(\operatorname{rot};\Omega\right)$ обозначаем замыкание множества $\{\mathcal{D}\left(\Omega\right)\}^n$ в $H\left(\operatorname{div};\Omega\right)$ и в $H\left(\operatorname{rot};\Omega\right)$ соответственно.

Теорема 5.1. ([11, 20]) *Пусть* $\Omega \subset R^3$ *– открытая, ограниченная, локально-звездная область. Тогда множество вектор-функций, принадлежащих* $\left\{\mathcal{D}\left(\bar{\Omega}\right)\right\}^3$*, плотно в пространстве* $H\left(\operatorname{div};\Omega\right)$ *и в* $H\left(\operatorname{rot};\Omega\right)$*.*

Лемма 5.3. *Пространства* $H\left(\operatorname{div};\Omega\right)$*,* $H\left(\operatorname{rot};\Omega\right)$ *сепарабельны.*

Доказательство: Пусть $D = \{\omega_k\}$ – множество, плотное в $\{H^1(\Omega)\}^3$, $\vec{u} \in H(\operatorname{div};\Omega)$, $\epsilon > 0$, элемент $\vec{\varphi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ таков, что $\|\vec{u}-\vec{\varphi}\|_{div,\Omega} < \epsilon$. Так как $\vec{\varphi} \in \{H^1(\Omega)\}^3$, найдется элемент $\vec{\omega}_k \in D$ такой, что

$$\|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|^2_{1,2,\Omega} = \|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|^2_{2,\Omega} + \sum_{i,j=1}^{3}\|\partial_i(\varphi_j-\omega_{kj})\|^2_{2,\Omega} < \epsilon^2.$$

Таким образом,

$$\|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|^2_{div,\Omega} = \|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|^2_{2,\Omega} + \sum_{i=1}^{3}\|\partial_i(\varphi_i-\omega_{ki})\|^2_{2,\Omega} < \epsilon^2,$$

$$\|\vec{u}-\vec{\omega}_k\|_{div,\Omega} \le \|\vec{u}-\vec{\varphi}\|_{div,\Omega} + \|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|_{div,\Omega} < 2\epsilon,$$

то есть D – плотное множество в $H(\operatorname{div};\Omega)$.

Сепарабельность пространства $H(\operatorname{rot};\Omega)$ доказывается аналогично. $\square$

Так как множество гладких функций всюду плотно в пространствах $H(\operatorname{div};\Omega)$, $H(\operatorname{rot};\Omega)$, используя равенства (5.5), (5.6) можно определить на границе области Ω нормальную компоненту функции из $H(\operatorname{div};\Omega)$ и тангенциальную – для функции из $H(\operatorname{rot};\Omega)$. Говорим, что в смысле теории следов

$$\vec{u}_\nu|_{\partial\Omega} = 0$$

для $\vec{u} \in H(\operatorname{div};\Omega)$, если при всех $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi \operatorname{div} \vec{u} d\vec{x} + \int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{u}) d\vec{x}, \tag{5.7}$$

$$\vec{u}_\tau|_{\partial\Omega} = 0$$

для $\vec{u} \in H(\operatorname{rot};\Omega)$, если при всех $\varphi \in \{H^1(\Omega)\}^3$

$$\int_\Omega (\vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{w})\, d\vec{x} - \int_\Omega (\vec{w} \cdot \operatorname{rot} \vec{u})\, d\vec{x} = 0. \tag{5.8}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 5.4. *Пусть Ω – открытая ограниченная область класса C^2. Функция $\vec{u} \in H(\operatorname{div};\Omega)$ лежит в $\vec{u} \in H_0(\operatorname{div};\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\vec{u}_\nu|_{\partial\Omega} = 0$ в смысле теории следов, то есть для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ справедливо* (5.7).

Лемма 5.5. *Пусть Ω – открытая ограниченная область класса C^2. Функция $\vec{u} \in H(\operatorname{rot};\Omega)$ лежит в $\vec{u} \in H_0(\operatorname{rot};\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\vec{u}_\tau|_{\partial\Omega} = 0$ в смысле теории следов.*

Лемма 5.6. *Для всех $\vec{u} \in H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $\vec{v} \in H(\operatorname{rot};\Omega)$*

$$\int_\Omega (\operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{v})\, d\vec{x} = \int_\Omega (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{u})\, d\vec{x}.$$

В пространствах $H(\operatorname{div};\Omega)$ и $H(\operatorname{rot};\Omega)$ рассмотрим множества функций

$$K(\operatorname{div},\Omega) = \left\{ \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \right\}$$

$$K(\operatorname{rot};\Omega) = \left\{ \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \right\}.$$

$K(\operatorname{div};\Omega)$, $K(\operatorname{rot};\Omega)$ – замкнутые подпространства в $H(\operatorname{div};\Omega)$, $H(\operatorname{rot};\Omega)$, соответственно, поэтому они являются гильбертовыми пространствами относительно скалярных произведений

$$(\vec{u},\vec{v})_{K(\operatorname{div},\Omega)} = (\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega}, \quad (\vec{u},\vec{v})_{K(\operatorname{rot},\Omega)} = (\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega}.$$

Через $K^\perp(\operatorname{div},\Omega)$ обозначаем ортогональное дополнение к $K(\operatorname{div},\Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^n$, через $K^\perp(\operatorname{rot},\Omega)$ – ортогональное дополнение к $K(\operatorname{rot},\Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^2$ или в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Лемма 5.7. *Функция* $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^n$ *лежит в* $K(\mathrm{div};\Omega)$ *тогда и только тогда, когда* $\int_\Omega (\vec{u} \cdot \mathrm{grad}\,\varphi)\, d\vec{x} = 0$ *при всех* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Лемма 5.8. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Функция* $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ *лежит в* $K(\mathrm{rot};\Omega)$ *тогда и только тогда, когда* $\int_\Omega (\vec{u} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v})\, d\vec{x} = 0$ *при всех* $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$.

Лемма 5.9. *Пусть* $\Omega \subset R^3$ *или* $\Omega \subset R^2$. *Для всех* $p \in H^1(\Omega)$ *справедливо включение* $\mathrm{grad}\,p \in K(\mathrm{rot},\Omega)$, *причем если* $p \in H_0^1(\Omega)$, *то* $\mathrm{grad}\,p \in K(\mathrm{rot},\Omega) \bigcap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$.

Лемма 5.10. *Пусть* $\Omega \subset R^3$. $K^\perp(\mathrm{rot};\Omega)$ *совпадает с замыканием в* $\{L_2(\Omega)\}^3$ *множества*

$$X = \left\{\mathrm{rot}\,\vec{\varphi} : \vec{\varphi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3\right\}.$$

Лемма 5.11. $K^\perp(\mathrm{div};\Omega)$ *совпадает с замыканием в* $\{L_2(\Omega)\}^n$ *множества*

$$Y = \{\mathrm{grad}\,\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

Лемма 5.12. *Замыкание в* $\{L_2(\Omega)\}^n$ *множества* $Y = \{\mathrm{grad}\,\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ *совпадает со множеством*

$$\left\{\mathrm{grad}\,\varphi : \varphi \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Лемма 5.13. *Если* $\vec{f} \in \{H^{-1}(\Omega)\}^n$ *удовлетворяет условию*

$$\langle \vec{f}, \vec{v} \rangle = 0 \ \forall \vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\mathrm{div};\Omega),$$

то найдется функция $p \in L_2(\Omega)$ *такая, что* $\vec{f} = \mathrm{grad}\,p$.

5.1. Представления векторных полей в трехмерных областях

Теорема 5.2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– открытое подмножество в* $\mathbb{R}^3$, *звездное относительно точки* $O \in \Omega$, $\vec{u} \in \{C^1(\Omega)\}^3$. *Тогда при всех* $x \in \Omega$ *справедливо представление*

$$\vec{u}(\vec{x}) = \mathrm{rot}\left(\int_0^1 \tau[\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}]d\tau\right) + \int_0^1 \tau^2 \vec{x}\,\mathrm{div}\,\vec{u}(\tau\vec{x})d\tau. \tag{5.9}$$

Доказательство: Для доказательства тождества (5.9) в покомпонентной форме рассмотрим преобразования

$$u_1(\vec{x}) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau}\left(\tau^2 u_1(\tau\vec{x})\right) d\tau = \int_0^1 2\tau u_1(\tau\vec{x})d\tau + \int_0^1 \tau^2 \frac{d}{d\tau}(u_1(\tau\vec{x}))d\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 2\tau u_1(\tau\vec{x})d\tau + \int\limits_0^1 \tau^2 \left(\frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)}x_1 + \frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_2)}x_2 + \frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_3)}x_3\right) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 \tau^2 x_1 \left(\frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)} + \frac{\partial u_2(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_2)} + \frac{\partial u_3(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_3)}x_3\right) d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^1 \tau \left[2u_1(\tau\vec{x}) + \tau \left(\frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_2)}x_2 - \frac{\partial u_2(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_2)}x_1\right) -\right.$$

$$\left.- \tau \left(\frac{\partial u_3(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_3)}x_1 - \frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_3)}x_3\right)\right] d\tau = \int\limits_0^1 \tau^2 x_1 \operatorname{div} \vec{u}(\tau\vec{x}) d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^1 \tau \left[2u_1(\tau\vec{x}) + \left(\frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_2)} \cdot \frac{\partial(\tau x_2)}{\partial x_2}x_2 - \frac{\partial u_2(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_2)} \cdot \frac{\partial(\tau x_2)}{\partial x_2}x_1\right)\right] d\tau -$$

$$- \int\limits_0^1 \tau \left(\frac{\partial u_3(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_3)} \cdot \frac{\partial(\tau x_3)}{\partial x_3}x_1 - \frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_3)} \cdot \frac{\partial(\tau x_3)}{\partial x_3}x_3\right) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 \tau^2 x_1 \operatorname{div} \vec{u}(\tau\vec{x}) d\tau + \int\limits_0^1 \tau \left[2u_1(\tau\vec{x}) + \left(\frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial x_2}x_2 - \frac{\partial u_2(\tau\vec{x})}{\partial x_2}x_1\right) d\tau -\right.$$

$$\left.- \left(\frac{\partial u_3(\tau\vec{x})}{\partial x_3}x_1 - \frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial x_3}x_3\right)\right] d\tau = \int\limits_0^1 \tau^2 x_1 \operatorname{div} \vec{u}(\tau\vec{x}) d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^1 \tau \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(u_1(\tau\vec{x})x_2 - u_2(\tau\vec{x})x_1\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(u_3(\tau\vec{x})x_1 - u_1(\tau\vec{x})x_3\right)\right] =$$

$$= \int\limits_0^1 \tau^2 x_1 \operatorname{div} \vec{u}(\tau\vec{x}) d\tau +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2} \int\limits_0^1 \tau \left([\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}] \cdot \vec{e}_3\right) d\tau - \frac{\partial}{\partial x_3} \int\limits_0^1 \tau \left([\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}] \cdot \vec{e}_2\right) d\tau,$$

или

$$u_1(\vec{x}) = \left(\vec{e}_1 \cdot \int\limits_0^1 \tau^2 \vec{x}\,\mathrm{div}\,\vec{u}(\tau\vec{x})d\tau\right) + \left(\vec{e}_1 \cdot \mathrm{rot}\left(\int\limits_0^1 \tau[\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}]d\tau\right)\right). \quad (5.10)$$

Аналогично доказывается, что

$$u_2(\vec{x}) = \left(\vec{e}_2 \cdot \int\limits_0^1 \tau^2 \vec{x}\,\mathrm{div}\,\vec{u}(\tau\vec{x})d\tau\right) + \left(\vec{e}_2 \cdot \mathrm{rot}\left(\int\limits_0^1 \tau[\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}]d\tau\right)\right), \quad (5.11)$$

$$u_3(\vec{x}) = \left(\vec{e}_3 \cdot \int\limits_0^1 \tau^2 \vec{x}\,\mathrm{div}\,\vec{u}(\tau\vec{x})d\tau\right) + \left(\vec{e}_3 \cdot \mathrm{rot}\left(\int\limits_0^1 \tau[\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}]d\tau\right)\right). \quad (5.12)$$

В (3.11)–(5.12) $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ – канонический базис евклидового пространства $\mathbb{R}^3$.

Поскольку равенства (3.11)–(5.12) являются покомпонентной записью (5.9), то тождество (5.9) справедливо. $\square$

Теорема 5.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытое подмножество в $\mathbb{R}^3$, звездное относительно точки $O \in \Omega$, $\vec{u} \in \{C^1(\Omega)\}^3$. Тогда при всех $x \in \Omega$ справедливо*

$$\vec{u}(\vec{x}) = \mathrm{grad}\left(\int\limits_0^1 (\vec{u}(\tau\vec{x}) \cdot \vec{x})d\tau\right) + \int\limits_0^1 \tau[\mathrm{rot}\,\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}]d\tau. \quad (5.13)$$

Доказательство: Для доказательства тождества (5.13) в покомпонентной форме рассмотрим преобразования

$$u_1(\vec{x}) = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau}(\tau u_1(\tau\vec{x}))d\tau = \int\limits_0^1 u_1(\tau\vec{x})d\tau + \int\limits_0^1 \tau \frac{d}{d\tau}(u_1(\tau\vec{x}))d\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 u_1(\tau\vec{x})d\tau + \int\limits_0^1 \tau \left(\frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)}x_1 + \frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_2)}x_2 + \frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_3)}x_3\right)d\tau +$$

$$= \int\limits_0^1 u_1(\tau\vec{x})d\tau + \int\limits_0^1 \tau \left(\frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)}x_1 + \frac{\partial u_2(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)}x_2 + \frac{\partial u_3(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)}x_3\right)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^1 \tau \left(\left(\frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_3)} - \frac{\partial u_3(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)}\right)x_3 - \left(\frac{\partial u_2(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)} - \frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_2)}\right)x_2\right)d\tau =$$

$$= \int_0^1 \left(u_1(\tau\vec{x}) + \frac{\partial u_1(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)} \cdot \frac{\partial(\tau x_1)}{\partial x_1} x_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_2(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)} \cdot \frac{\partial(\tau x_1)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial u_3(\tau\vec{x})}{\partial(\tau x_1)} \cdot \frac{\partial(\tau x_1)}{\partial x_1} x_3 \right) d\tau +$$

$$+ \int_0^1 \tau \left((\operatorname{rot} \vec{u}(\tau\vec{x}) \cdot \vec{e}_2)\, x_3 - (\operatorname{rot} \vec{u}(\tau\vec{x} \cdot \vec{e}_3))\, x_2 \right) d\tau =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_1(\tau\vec{x}) x_1 + u_2(\tau\vec{x}) x_2 + u_3(\tau\vec{x}) x_3 \right) d\tau + \int_0^1 \tau \left([\operatorname{rot} \vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}] \cdot \vec{e}_1 \right) d\tau,$$

или

$$u_1(\vec{x}) = \left(\vec{e}_1 \cdot \operatorname{grad} \int_0^1 (\vec{u}(\tau\vec{x}) \cdot \vec{x}) \right) d\tau + \left(\vec{e}_1 \cdot \int_0^1 \tau \left[\operatorname{rot} \vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x} \right] d\tau \right). \qquad (5.14)$$

Аналогично,

$$u_2(\vec{x}) = \left(\vec{e}_2 \cdot \operatorname{grad} \int_0^1 (\vec{u}(\tau\vec{x}) \cdot \vec{x}) \right) d\tau + \left(\vec{e}_2 \cdot \int_0^1 \tau \left[\operatorname{rot} \vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x} \right] d\tau \right), \qquad (5.15)$$

$$u_3(\vec{x}) = \left(\vec{e}_3 \cdot \operatorname{grad} \int_0^1 (\vec{u}(\tau\vec{x}) \cdot \vec{x}) \right) d\tau + \left(\vec{e}_3 \cdot \int_0^1 \tau \left[\operatorname{rot} \vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x} \right] d\tau \right). \qquad (5.16)$$

Поскольку равенства (5.14)–(5.16) являются покомпонентной записью (5.13), то тождество (5.13) доказано. $\square$

Очевидно, что допускается следующее обобщение утверждений теорем 5.2 и теоремы 5.3.

Теорема 5.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытое подмножество в $\mathbb{R}^3$, звездное относительно точки $y \in \Omega$, $\vec{u} \in \{C^1(\Omega)\}^3$. Тогда при всех $x \in \Omega$ справедливы представления*

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \int_0^1 \left(\vec{u}(\tau\vec{x} + (1-\tau)\vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \right) d\tau +$$

$$+ \int_0^1 \tau \left[\operatorname{rot} \vec{u}(\tau\vec{x} + (1-\tau)\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y}) \right] d\tau; \qquad (5.17)$$

$$\vec{u} = \operatorname{rot} \int\limits_0^1 \tau \left[\vec{u}(\tau \vec{x} + (1-\tau)\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y}) \right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^1 \tau^2 \operatorname{div} \vec{u}(\tau \vec{x} + (1-\tau)\vec{y})\, d\tau; \qquad (5.18)$$

или

$$\vec{u}\,(\vec{x}) = \operatorname{grad}_{\vec{x}} \left\{ \int_0^r \vec{u}\,(\vec{y} + \xi \vec{s}) \cdot \vec{s} d\xi \right\} + \frac{1}{r} \int_0^r \xi \left[\operatorname{rot} \vec{u}\,(\vec{y} + \xi \vec{s}) \times \vec{s} \right] d\xi \qquad (5.19)$$

$$\vec{u}\,(\vec{x}) = \operatorname{rot}_{\vec{x}} \left\{ \int_0^r \xi \left[\vec{u}\,(\vec{y} + \xi \vec{s}) \times \vec{s} \right] d\xi \right\} + \frac{\vec{s}}{r^2} \int_0^1 \xi^2 \operatorname{div} \vec{u}\,(\vec{y} + \xi \vec{s})\, d\xi, \qquad (5.20)$$

где $r = |\vec{x} - \vec{y}|$, $\xi = \tau r$, $\vec{s} = \frac{\vec{x} - \vec{y}}{r}$.

Определим для каждого $m \geq 0$ и для функций $\varphi \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, $\vec{\varphi} \in \left\{ C\left(\bar{\Omega}\right) \right\}^3$ функции $Q_m\left(\varphi\right) : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $\vec{Q}_m\left(\vec{\varphi}\right) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ соответственно соотношениями

$$\begin{array}{l} Q_m\left(\varphi\right)\left(\vec{x}\right) = r^{-m} \int_0^r \xi^m \varphi\left(\vec{y} + \xi \vec{s}\right) d\xi, \\ \vec{Q}_m\left(\vec{\varphi}\right)\left(\vec{x}\right) = r^{-m} \int_0^r \xi^m \vec{\varphi}\left(\vec{y} + \xi \vec{s}\right) d\xi. \end{array} \qquad (5.21)$$

С использованием обозначений (5.21) тождества (5.19), (5.20) примут соответственно вид

$$\vec{u}\,(\vec{x}) = \operatorname{grad} \left(\vec{Q}_0\left(\vec{u}\right) \cdot \vec{s} \right) (\vec{x}) + \left[\vec{Q}_1\left(\operatorname{rot} \vec{u}\right) \times \vec{s} \right] (\vec{x}), \qquad (5.22)$$

$$\vec{u}\,(\vec{x}) = \operatorname{rot} \left[\vec{Q}_1\left(\vec{u}\right) \times \vec{s} \right] (\vec{x}) + \vec{s} Q_2\left(\operatorname{div} \vec{u}\right) (\vec{x}), \qquad (5.23)$$

Справедлива

Лемма 5.14. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– открытое подмножество в* $\mathbb{R}^3$*, звездное относительно точки* $y \in \Omega$*. При всех* $m \geq 1$ *существует такая постоянная* $C_m\left(\Omega\right) > 0$*, зависящая только от* m *и области* Ω*, что для любых* $\varphi \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ *справедливо неравенство*

$$\left\| Q_m\left(\varphi\right) \right\|_{2,\Omega} \leq C_m\left(\Omega\right) \left\| \varphi \right\|_{2,\Omega}. \qquad (5.24)$$

Доказательство: Пусть

$$R_{\vec{s}}\left(\vec{y}\right) = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^1 : \vec{y} + r\vec{s} \in \Omega \right\}, R\left(\vec{y}\right) = \sup_{\vec{s} \in S} R_{\vec{s}}\left(\vec{y}\right),$$

(очевидно, $0 < R\left(\vec{y}\right) < d\left(\Omega\right)$), $d\vec{s}$ – элемент площади единичной сферы S.

Применяя неравенство Гельдера, видим, что

$$\begin{aligned}&\left|Q_m(\varphi)(\vec{x})\right| \leq r^{-m}\int_0^r \xi^m \left|\varphi(\vec{y}+\xi\vec{s})\right| d\xi = \\ &= r^{-m}\int_0^r \xi^{m-1}\xi \left|\varphi(\vec{y}+\xi\vec{s})\right| d\xi \leq\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2(m+1)-3}\right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{-1}{2}} \left\{\int_0^r \xi^2 \left|\varphi(\vec{y}+\xi\vec{s})\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $A=\left(\frac{1}{2(m+1)-3}\right)^{1/2}$. Тогда

$$\left\|Q_m(\varphi)\right\|^2_{2,\Omega} = \int_S d\vec{s}\int_0^{R_{\vec{s}}(\vec{y})} r^2 \left|Q_m(\varphi)(\vec{y}+r\vec{s})\right|^2 dr \leq$$

$$\leq A^2 \int_S d\vec{s}\int_0^{R_{\vec{s}}(\vec{y})} r\int_0^r \xi^2 \left|\varphi(\vec{y}+\xi\vec{s})\right|^2 d\xi dr \leq$$

$$\leq A^2\int_S d\vec{s}\frac{R^2_{\vec{s}}(\vec{y})}{2}\int_0^{R_{\vec{s}}(\vec{y})} \xi^2 \left|\varphi(\vec{y}+\xi\vec{s})\right|^2 d\xi \leq A^2\frac{R^2(\vec{y})}{2}\left\|\varphi\right\|^2_{2,\Omega}.$$

Обозначив $C_m(2,\Omega)=\left(\frac{1}{2(m+1)-3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{R(\vec{y})}{2^{1/2}}$, получим (5.24). $\square$

Для функции $\vec{\varphi}\in\left\{C\left(\bar{\Omega}\right)\right\}^3$ получаем, используя обратное неравенство Минковского [17]:

$$\left|Q_m(\varphi)(\vec{x})\right|^2 = r^{-2m}\sum_{i=1}^3\left(\int_0^r \xi^m\varphi_i(\vec{y}+\xi\vec{s})\,d\xi\right)^2 \leq$$

$$\leq r^{-2m}\sum_{i=1}^3\left(\int_0^r \xi^m\left|\varphi_i(\vec{y}+\xi\vec{s})\right| d\xi\right)^2 \leq$$

$$\leq r^{-2m}\left(\int_0^r\left(\sum_{i=1}^3 \xi^{2m}\left|\varphi_i(\vec{y}+\xi\vec{s})\right|^2\right)^{1/2} d\xi\right)^2 =$$

$$= r^{-2m}\left(\int_0^r \xi^m\left|\vec{\varphi}(\vec{y}+\xi\vec{s})\right| d\xi\right)^2 = \left|Q_m(|\vec{\varphi}|)\right|^2.$$

Применим лемму 5.14 к функции $|\varphi|\in C\left(\bar{\Omega}\right)$:

$$\left\|\vec{Q}_m(\vec{\varphi})\right\|_{2,\Omega} \leq \left\|Q_m(|\vec{\varphi}|)\right\|_{2,\Omega} \leq C_m(2,\Omega)\left\||\vec{\varphi}|\right\|_{2,\Omega} = C_m(2,\Omega)\left\|\vec{\varphi}\right\|_{2,\Omega}.$$

Установленные в лемме 5.14 неравенства показывают, что оператор Q_m, рассматриваемый как отображение из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ непрерывен на множестве $C\left(\bar{\Omega}\right)$, плотном в $L_2(\Omega)$. Следовательно, его можно продолжить до некоторого линейного ограниченного оператора, обозначаемого в дальнейшем также через Q_m, определенного на всем пространстве $L_2(\Omega)$. Оценка (5.24) остается справедливой и для этого оператора.

Оператор $\vec{Q}_m : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \{L_2(\Omega)\}^3$ продолжается по непрерывности на пространство $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Теорема 5.5. *Для всех* $\vec{u} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *справедливо тождество*

$$\vec{u} = \mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}) \times \vec{s}\right] + \vec{s}Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}). \tag{5.25}$$

Доказательство: Пусть $\vec{u} \in H(\mathrm{div};\Omega)$. Согласно теореме о плотности, найдется последовательность $\{\vec{u}_k\} \subset \left\{\mathcal{D}\left(\bar{\Omega}\right)\right\}^3$ такая, что $\vec{u}_k \to \vec{u}$ при $k \to \infty$ в пространстве $H(\mathrm{div};\Omega)$. Так как

$$\|\vec{u}_k - \vec{u}\|_{2,\Omega} \leq \|\vec{u}_k - \vec{u}\|_{\mathrm{div},\Omega},$$

то $\vec{u}_k \to \vec{u}$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Согласно оценке (5.24),

$$\|\vec{s}Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}_k) - \vec{s}Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u})\|_{2,\Omega} \leq \|Q_2(\mathrm{div}(\vec{u}_k - \vec{u}))\|_{2,\Omega} \leq$$
$$\leq C_2(p,\Omega)\,\|\mathrm{div}(\vec{u}_k - \vec{u})\|_{2,\Omega},$$

то есть $\vec{s}Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}_k) \to \vec{s}Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u})$ в $\{L_p(\Omega)\}^3$ при $k \to \infty$.

Из справедливого для всех $\vec{u}_k \in \left\{\mathcal{D}\left(\bar{\Omega}\right)\right\}^3$ тождества (5.23) и неравенства треугольника следует, что при $k, l \in N$

$$\left\|\mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right] - \mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_l) \times \vec{s}\right]\right\|_{p,\Omega} \leq$$
$$\leq \|\vec{u}_k - \vec{u}_l\|_{2,\Omega} + \|\vec{s}Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}_k) - \vec{s}Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}_l)\|_{2,\Omega},$$

значит, последовательность $\left\{\mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right]\right\}$ фундаментальна в $\{L_2(\Omega)\}^3$ и, таким образом, сходится к некоторому элементу $\vec{v} \in \{L_2(\Omega)\}^3$:

$$\left\|\mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right] - \vec{v}\right\|_{p,\Omega} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

С другой стороны, для любой функции $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$

$$\left|\left\langle \mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right] - \mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}) \times \vec{s}\right], \vec{\psi}\right\rangle\right| = \left|\left\langle \left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right], \mathrm{rot}\,\vec{\psi}\right\rangle\right| \leq$$

$$\leq \left\|\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k - \vec{u}) \times \vec{s}\right]\right\|_{2,\Omega} \left\|\mathrm{rot}\,\vec{\psi}\right\|_{2,\Omega} \leq C_1(p,\Omega)\,\|\vec{u}_k - \vec{u}\|_{2,\Omega} \left\|\mathrm{rot}\,\vec{\psi}\right\|_{2,\Omega},$$

то есть $\operatorname{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_n)\times\vec{s}\right]\to\operatorname{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u})\times\vec{s}\right]$.

В силу единственности предела $\operatorname{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u})\times\vec{s}\right]=\vec{v}\in\{L_2(\Omega)\}^3$ и утверждение теоремы получаем с помощью предельного перехода. $\square$

Теорема 5.6. *Для всех* $\vec{u}\in H(\operatorname{rot};\Omega)$ *найдется такая функция* $Q(\vec{u})\in L_2(\Omega)$, *что справедливо тождество*

$$\vec{u}=\operatorname{grad}Q(\vec{u})+\left[\vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{u})\times\vec{s}\right]. \tag{5.26}$$

Доказательство: Пусть $\vec{u}\in H(\operatorname{rot};\Omega)$. Согласно теореме о плотности (теорема 5.1), найдется последовательность $\{\vec{u}_k\}\subset\left\{\mathrm{D}\left(\bar{\Omega}\right)\right\}^3$ такая, что $\vec{u}_k\to\vec{u}$ при $k\to\infty$ в $H(\operatorname{rot};\Omega)$ и, следовательно, $\vec{u}_k\to\vec{u}$, $\operatorname{rot}\vec{u}_k\to\operatorname{rot}\vec{u}$ в $\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^3$.

Для всех $\vec{u}_k$ справедливо тождество (5.22).

По лемме 5.14, $\vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{u})\in\{L_2(\Omega)\}^3$ и

$$\left\|\left[\vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{u}_k)\times\vec{s}\right]-\left[\vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{u})\times\vec{s}\right]\right\|_{2,\Omega}\le C_1(2,\Omega)\left\|\operatorname{rot}\vec{u}_k-\operatorname{rot}\vec{u}\right\|_{p,\Omega},$$

то есть $\left[\vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{u}_k)\times\vec{s}\right]\to\left[\vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{u})\times\vec{s}\right]$ при $k\to\infty$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Последовательность $\left\{\operatorname{grad}\left(\vec{Q}_0(\vec{u}_k)\cdot\vec{s}\right)\right\}$, таким образом, фундаментальна в $\{L_2(\Omega)\}^3$ и, следовательно, сходится к некоторому элементу $\vec{v}\in\{L_2(\Omega)\}^3$:

$$\left\|\operatorname{grad}\left[\vec{Q}_0(\vec{u}_k)\times\vec{s}\right]-\vec{v}\right\|_{2,\Omega}\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Пусть $\vec{\psi}\in\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ такова, что $\operatorname{div}\vec{\psi}=0$. Тогда

$$\left\langle\vec{v},\vec{\psi}\right\rangle=\lim_{k\to\infty}\left\langle\operatorname{grad}\left(\vec{Q}_0(\vec{u}_k)\cdot\vec{s}\right),\vec{\psi}\right\rangle=0.$$

Применяя лемму 5.13 получим, что $\vec{v}=\operatorname{grad}Q(\vec{u})$, где функция $Q(\vec{u})$ определена с точностью до аддитивной константы и лежит в $L_2(\Omega)$ согласно неравенству Пуанкаре.

Равенство

$$\vec{u}=\operatorname{grad}Q(\vec{u})+\left[\vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{u})\times\vec{s}\right]$$

устанавливаем, переходя к пределу в

$$\vec{u}_k(\vec{x})=\operatorname{grad}\left(\vec{Q}_0(\vec{u}_k)\cdot\vec{s}\right)(\vec{x})+\left[\vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{u}_k)\times\vec{s}\right](\vec{x}).$$

$\square$

5.2. Основные неравенства для ограниченных областей

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытое ограниченное множество с диаметром $d(\Omega) > 0$, звездное относительно некоторой точки.

Справедлива

Теорема 5.7. *Существует такая постоянная $C_1 > 0$, зависящая только от области Ω, что для любых $\vec{v} \in H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $\vec{u} \in H_0(\mathrm{div}\,;\Omega)$, справедливо неравенство*

$$\left| \int_\Omega \left(\vec{u}\,(x) \cdot \vec{v}\,(x)\right) d\vec{x} \right| \leq$$
$$\leq C_1 \left(\|\,\vec{u}\,\|_{2,\Omega} \, \|\mathrm{rot}\ \vec{v}\|_{2,\Omega} + \|\vec{v}\|_{2,\Omega} \, \|\mathrm{div}\ \vec{u}\|_{2,\Omega} + \|\mathrm{div}\ \vec{u}\|_{2,\Omega} \, \|\mathrm{rot}\ \vec{v}\|_{2,\Omega} \right). \quad (5.27)$$

Доказательство: Согласно теореме о плотности неравенство достаточно доказать для гладких функций $\vec{u}$, $\vec{v}$. Пусть $\vec{v} \in \{C^1(\Omega)\}^3$, $\vec{u} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$.

Согласно (5.22),

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\left(\vec{Q}_0\,(\vec{v}) \cdot \vec{s}\right)(\vec{x}) + \left[\vec{Q}_1\,(\mathrm{rot}\,\vec{v}) \times \vec{s}\right](\vec{x}),$$

при этом, из леммы 3.4 следует, что найдется число C_Q такое, что

$$\left\| (\vec{Q}_0\,(\vec{v}) \cdot \vec{s}) - C_Q \right\|_{2,\Omega} \leq T(\Omega) \left\| \mathrm{grad}\,(\vec{Q}_0\,(\vec{v}) \cdot \vec{s}) \right\|_{2,\Omega}.$$

Получаем, следовательно,

$$\left\| (\vec{Q}_0\,(\vec{v}) \cdot \vec{s}) - C_Q \right\|_{2,\Omega} \leq T(\Omega) \left(\|\vec{v}\|_{2,\Omega} + \left\| \vec{Q}_1\,(\mathrm{rot}\ \vec{v}) \right\|_{2,\Omega} \right) \leq$$
$$\leq T(\Omega) \left(\|\vec{v}\|_{2,\Omega} + C_1(\Omega)\, \|\mathrm{rot}\ \vec{v}\|_{2,\Omega} \right).$$

Таким образом, применяя неравенство Гельдера с показателями 2 и оценки (5.24), имеем:

$$\left| \int_\Omega (\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}))\, d\vec{x} \right| = \left| \int_\Omega \left(\vec{u}(\vec{x}) \cdot \mathrm{grad}\ \left\{ (\vec{Q}_0\,(\vec{v}) \cdot \vec{s}) - C^* \right\} \right) d\vec{x} + \right.$$
$$\left. + \int_\Omega \left(\left[\vec{Q}_1\,(\mathrm{rot}\ \vec{v}(\vec{x})) \times\ \vec{s} \right] \cdot \vec{u}(\vec{x}) \right) d\vec{x} \right| \leq$$
$$\leq T(\Omega)\, \|\mathrm{div}\ \vec{u}\|_{2,\Omega} \left(\|\vec{v}\|_{2,\Omega} + C_1(\Omega)\, \|\mathrm{rot}\ \vec{v}\|_{2,\Omega} \right) + C_1(\Omega)\, \|\mathrm{rot}\ \vec{v}\|_{2,\Omega}\, \|\vec{u}\|_{q,\Omega}.$$

Положив

$$C_1 = \max\left\{ T(\Omega), C_1(\Omega), T(\Omega)\, C_1(\Omega) \right\},$$

получаем неравенство (5.27). $\square$

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 5.7, то для любых* $\vec{v} \in H\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ *и* $\vec{u} \in H_0\,(\mathrm{div}\,;\Omega)$ *таких, что* $\mathrm{div}\ \vec{u} = 0$*, справедливо неравенство*

$$\left|\int_\Omega (\vec{u}(x)\cdot\vec{v}(x))\,d\vec{x}\right| \le \frac{d\,(\Omega)}{2^{1/2}}\,\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\,\|\mathrm{rot}\ \vec{v}\|_{2,\Omega}\,. \tag{5.28}$$

Теорема 5.8. *Найдется такая положительная постоянная* C_2*, зависящая только от области* Ω*, что при любых* $\vec{v} \in H\,(\mathrm{div}\,;\Omega)$, $\vec{u} \in H^0\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$*, будет справедливо неравенство*

$$\left|\int_\Omega (\vec{u}(x)\cdot\vec{v}(x))\,d\vec{x}\right| \le C_2\left(\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\,\|\mathrm{div}\ \vec{v}\|_{2,\Omega} + (\|\,\mathrm{rot}\ \vec{u}\|_{2,\Omega}\,\|\vec{v}\|_{2,\Omega}\right). \tag{5.29}$$

Доказательство: Согласно теореме о плотности и по определению пространства $H^0\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, достаточно доказать неравенство для $\vec{u} \in \{\mathcal{D}\,(\Omega)\}^3$, $\vec{v} \in \{C^1(\Omega)\}^3$.

Согласно (5.23),

$$\vec{v} = \mathrm{rot}\ \left[\vec{Q}_1\,(\vec{v}) \times\ \vec{s}\right] + \vec{s}Q_2\,(\mathrm{div}\ \vec{v})\,,$$

то есть

$$\int_\Omega (\vec{v}(x)\cdot\vec{u}(x))\ d\vec{x} =$$

$$= \int_\Omega \Big(\left[\vec{Q}_1\,(\vec{v})\ (x) \times\ \vec{s}\right]\cdot \mathrm{rot}\ \ \vec{u}(x)\Big)\ d\vec{x}\ \ +\ \int_\Omega Q_2\,(\mathrm{div}\ \vec{v})\ (x)\ \ (\vec{s}\cdot\vec{u}(x))\ \ d\vec{x}.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями 2 и оценки (5.24), имеем

$$\left|\int_\Omega (\vec{v}(x)\cdot\vec{u}(x))\,d\vec{x}\right| \le \left\{\int_\Omega \left|\vec{Q}_1\,(\vec{v})\ (x)\right|^p d\vec{x}\right\}^{1/p}\left\{\int_\Omega |\mathrm{rot}\ \vec{u}(x)|^q\,d\vec{x}\right\}^{1/q} +$$

$$+\left\{\int_\Omega |Q_2\,(\mathrm{div}\ \vec{v})\ (x)|^2\,d\vec{x}\right\}^{1/2}\left\{\int_\Omega |\vec{u}(x)|^2\,d\vec{x}\right\}^{1/2} \le$$

$$\le C_1\,(\Omega)\,\|\vec{v}\|_{2,\Omega}\,\|\mathrm{rot}\ \vec{u}\|_{2,\Omega} + C_2\,(\Omega)\,\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\,\|\mathrm{div}\ \vec{v}\|_{2,\Omega}\,.$$

Положив

$$C_2 = C_1\,(\Omega) = \frac{R\,(\vec{y})}{2^{1/2}},$$

получаем оценку (5.29). $\square$

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 5.8, для любых* $\vec{v} \in H\,(\mathrm{div}\,;\Omega)$ *и* $\vec{u} \in H^0\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ *таких, что* $\mathrm{rot}\ \vec{u} = 0$*, справедливо неравенство*

$$\left|\int_\Omega (\vec{u}\,(\vec{x})\cdot\vec{v}(\vec{x}))\ d\vec{x}\right| \le\ \frac{d\,(\Omega)}{2^{1/2}}\ \|\vec{u}\|_{2,\Omega}\ \|\mathrm{div}\ \vec{v}\|_{2,\Omega}\,. \tag{5.30}$$

Поскольку неравенства (5.27), (5.29) оценивают скалярные произведения функций в $\{L_2(\Omega)\}^3$, из них следуют известные условия ортогональности соленоидальных и потенциальных векторных полей для звездных областей.

Лемма 5.15. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченная область, звездная относительно некоторой точки. Тогда*

$$K^{\perp}(\mathrm{div}\,;\Omega) = K(\mathrm{rot}\,,\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)\,.$$

Доказательство: Пусть $\vec{u} \in K^{\perp}(\mathrm{div}\,,\Omega)$. Согласно лемме 5.12, $\vec{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$, где $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. По лемме 5.9 тогда $\vec{u} \in K(\mathrm{rot}\,,\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$.

Обратно, пусть $\vec{u} \in K(\mathrm{rot}\,,\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $\vec{v}$ – произвольный элемент из $K(\mathrm{div}\,,\Omega)$. Из неравенства (5.29) следует, что

$$\int_{\Omega} (\vec{u}\cdot\vec{v})\,d\vec{x} = 0,$$

то есть $\vec{u} \in K^{\perp}(\mathrm{div}\,;\Omega)$. □

Лемма 5.16. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченная область, звездная относительно некоторой точки. Тогда*

$$K^{\perp}(\mathrm{rot}\,;\Omega) = K(\mathrm{div}\,,\Omega) \cap H_0(\mathrm{div}\,;\Omega)\,.$$

Доказательство: Пусть $\vec{u} \in K^{\perp}(\mathrm{rot}\,,\Omega)$. Согласно лемме 5.10, найдется последовательность $\{\vec{\varphi}_m\} \in \{\mathrm{D}(\Omega)\}^3$ такая, что $\|\,\vec{u} - \mathrm{rot}\;\vec{\varphi}_m\|_{2,\Omega} \to 0$ при $m \to \infty$. Так как при каждом m rot $\vec{\varphi}_m \in \{\mathrm{D}(\Omega)\}^3$ и div rot $\vec{\varphi}_m = 0$, то для всех $\psi \in \mathrm{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\vec{u}\cdot\mathrm{grad}\;\psi)\;d\vec{x} = \lim_{m\to\infty}\int_{\Omega}\Big(\mathrm{grad}\;\vec{\psi}\cdot\mathrm{rot}\;\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_m\Big)\,d\,\vec{x} = 0,$$

то есть, по определению, div $\vec{u} = 0$, последовательность $\{\mathrm{rot}\;\vec{\varphi}_m\}$ сходится к $\vec{u}$ в $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$. Таким образом, $\vec{u} \in H_0(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap K(\mathrm{div}\,;\Omega)$.

Обратно, пусть $\vec{u} \in K(\mathrm{div}\,,\Omega) \cap H_0(\mathrm{div}\,;\Omega)$, $\vec{v}$ – произвольный элемент из $K(\mathrm{rot}\,,\Omega)$. Тогда из неравенства (5.27) следует, что

$$\int_{\Omega} (\vec{u}\cdot\vec{v})\,d\vec{x} = 0,$$

то есть $\vec{u} \in K^{\perp}(\mathrm{rot}\,;\Omega)$. □

Следующий результат был установлен другими методами, например, в [].

Теорема 5.9. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченная область класса* C^2*, звездная относительно некоторой точки. Тогда пространство* $\{L_2(\Omega)\}^3$ *раскладывается в прямую сумму взаимно ортогональных пространств* H*,* H_1*,* H_2*, где*

$$H = \Big\{\,\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \mathrm{div}\;\vec{u} = 0, \gamma_\nu \vec{u} = 0\Big\}\,,$$

$$H_1 = \left\{ \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \vec{u} = \mathrm{grad}\ p, \Delta p = 0 \right\},$$

$$H_2 = \left\{ \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \vec{u} = \mathrm{grad}\ \varphi, \varphi \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Доказательство: Согласно лемме 5.16, $H = K(\mathrm{div}, \Omega) \cap H_0(\mathrm{div}; \Omega) = K^{\perp}(\mathrm{rot}, \Omega)$, по леммам 5.11 и 5.9 $H_2 = K(\mathrm{rot}\,, \Omega) \cap H_0(\mathrm{rot}\,; \Omega) = K^{\perp}(\mathrm{div}\,, \Omega)$. Так как, ввиду леммы 5.9 $H_1 = K(\mathrm{div}\,; \Omega) \cap K(\mathrm{rot}\,, \Omega)$, пространства H, H_1, H_2, взаимно ортогональны. Остается показать, что пространство $K(\mathrm{rot}\,; \Omega)$ раскладывается в прямую сумму H_1 и H_2. Если $\vec{u} \in K(\mathrm{rot}\,; \Omega)$, то, согласно лемме Лакса–Мильграма, найдется единственный элемент $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ такой, что при всех $\eta \in H_0^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \mathrm{grad}\ \eta)\ d\vec{x} = \int_{\Omega} (\mathrm{grad}\ \varphi \cdot \mathrm{grad}\ \eta)\ d\vec{x},$$

и, следовательно, $\vec{u} - \mathrm{grad}\ \varphi \in K(\mathrm{rot}\,; \Omega) \cap K(\mathrm{div}\,; \Omega) = H_1$. Так как $\mathrm{grad}\ \varphi \in H_1$, теорема доказана. □

Положив в неравенствах (5.27), (5.29) $\vec{u} = \vec{v}$, получим оценки нормы функции $\vec{u}$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$ через нормы ее ротора и дивергенции.

Теорема 5.10. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с регулярной границей, звездная относительно некоторой точки. Найдется такая постоянная $C_3 > 0$, зависящая только от области Ω, что для всех $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot}\,; \Omega) \cap H(\mathrm{div}\,; \Omega)$ справедлива оценка*

$$\|\,\vec{u}\|_{2,\Omega} \le C_3 \left(\|\,\mathrm{rot}\ \vec{u}\|_{2,\Omega} + \|\,\mathrm{div}\ \vec{u}\|_{2,\Omega} \right). \tag{5.31}$$

Доказательство: Положим в неравенстве (5.29) $\vec{v} = \vec{u}$.

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2 \le C_2 \left(\|\vec{u}\|_{2,\Omega} \|\mathrm{rot}\ \vec{u}\|_{2,\Omega} + \|\vec{u}\|_{2,\Omega} \|\mathrm{div}\ \vec{u}\|_{2,\Omega} \right). \tag{5.32}$$

Умножив последнее неравенство на $\|\,\vec{u}\|_{2,\Omega}^{-1}$, получим оценку (5.31), где $C_3 = C_2$. □

Теорема 5.11. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с регулярной границей, звездная относительно некоторой точки. Найдется такая постоянная $C_4 > 0$, зависящая только от области Ω, что для всех $\vec{u} \in H(\mathrm{rot}\,; \Omega) \cap H_0(\mathrm{div}\,; \Omega)$ справедлива оценка*

$$\|\,\vec{u}\,\|_{2,\Omega} \le C_4 \left(\|\,\mathrm{rot}\ \vec{u}\,\|_{2,\Omega} + \|\,\mathrm{div}\ \vec{u}\,\|_{2,\Omega} \right). \tag{5.33}$$

Доказательство: Положив в (5.27) $\vec{v} = \vec{u}$ и разрешая полученное неравенство относительно $\|\vec{u}\|_{2,\Omega}$, получим оценку (5.33), где $C_4 = C_1 + 1/4$. □

6. Задача Стокса

Уравнения Стокса – это линеаризованая стационарная форма уравнений Навье-Стокса – уранений движения вязкой жидкости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытая ограниченная область, $\vec{f} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ – заданная функция, $\nu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости. Скорость $\vec{u}$ и давление p жидкости удовлетворяют следующим уравнениям [20, 25]:

$$-\nu\Delta\vec{u}(\vec{x}) + \operatorname{grad} p(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \tag{6.1}$$

$$\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Omega. \tag{6.2}$$

Система будет рассматриваться при однородных краевых условиях

$$\vec{u}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega. \tag{6.3}$$

Если $\vec{f}$, $\vec{u}$ и p – гладкие функции, удовлетворяющие (6.1)-(6.3), то умножив (6.1) скалярно на $\vec{v} \in \{\mathcal{D}\}^3$, получим

$$-\nu\int_\Omega \sum_{i=1}^n v_i \Delta u_i d\vec{x} - \int_\Omega p \operatorname{div}\vec{v} d\vec{x} =$$

$$= \nu\int_\Omega \sum_{i=1}^n (\operatorname{grad} v_i \cdot \operatorname{grad} u_i) d\vec{x} - \int_\Omega p \operatorname{div}\vec{v} d\vec{x} = \int_\Omega (\vec{f}\cdot\vec{v}) d\vec{x}.$$

По непрерывности равенство имеет место для всех $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$. Таким образом, ввиду (6.2), (6.3), задача (6.1)–(6.3) допускает следующую обобщенную постановку: найти $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$ такую, что при всех $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$

$$\nu\int_\Omega \sum_{i=1}^n (\operatorname{grad} v_i \cdot \operatorname{grad} u_i) d\vec{x} = \int_\Omega (\vec{f}\cdot\vec{v}) d\vec{x}. \tag{6.4}$$

Теорема 6.1. *Пусть Ω – открытая ограниченная область класса C^2, пусть $\vec{f} \in \{L_2(\Omega)\}^3$. Тогда существует единственная функция $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$, удовлетворяющая (6.4) при всех $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$.*

Доказательство: Положим $H = \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$ – гильбертово пространство как замкнутое подпространство в $\{H_0^1(\Omega)\}^3$. Определим билинейную форму и линейный функционал на H соотношениями

$$a(\vec{v},\vec{w}) = \nu\int_\Omega \sum_{i=1}^n (\operatorname{grad} v_i \cdot \operatorname{grad} w_i) d\vec{x},\ \ l(\vec{v}) = \int_\Omega (\vec{f}\cdot\vec{v}) d\vec{x},\ \ \vec{v},\vec{w} \in H.$$

Непрерывность формы и функционала обосновывается применением неравенства Гёльдера, коэрцитивность билинейной формы – следствие неравенства Фридрихса. Таким образом, утверждение теоремы вытекает из леммы Лакса–Мильграма. $\square$

Эквивалентная (6.4) вариационная задача имеет вид

$$I(\vec{v}) \equiv \frac{\nu}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad} v_i)^2 d\vec{x} - \int_\Omega (\vec{f}\cdot\vec{v}) d\vec{x} \to \min,\ \ \vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega). \quad (6.5)$$

Согласно теореме 6.1 задача (6.5) имеет единственное решение $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$. Для него справедливо (6.2) в обобщенном смысле и, если граница области Ω достаточно гладкая, выполнено условие (6.3) в смысле теории следов.

Определим $\vec{g} \in \{H^{-1}(\Omega)\}^3$ соотношением

$$\vec{g} = -\nu\Delta\vec{u} - \vec{f},$$

$$\langle \vec{g}, \vec{\varphi}\rangle = \nu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\operatorname{grad} u_i \cdot \operatorname{grad} \varphi_i) d\vec{x} - \int_\Omega (\vec{f}\cdot\vec{\varphi}) d\vec{x},\ \ \vec{\varphi} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3.$$

Согласно (6.4), $\langle \vec{g}, \vec{\varphi}\rangle = 0$ для всех $\vec{\varphi} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$.

Таким образом, согласно лемме 5.13, найдется функция $p \in L_2(\Omega)$ такая, что $\vec{g} = -\operatorname{grad} p$ и равенство (6.1) выполнено в $\{H^{-1}(\Omega)\}^3$.

7. Линейные краевые задачи теории упругости

Рассмотрим основы линейной теории упругости, в которой соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций линейны и рассматриваются только малые деформации [11, 15, 21].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с липшицевой границей. Обозначим через $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ вектор перемещения, $\epsilon(\vec{u})$ – линеаризованный тензор деформации, компоненты которого определены соотношениями

$$\epsilon_{ik}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_i + \partial_i u_k\right).$$

Очевидно, $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ для всех $1 \le i, k \le 3$.

Тензор напряжений обозначим через σ. Соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций задаются обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl}\epsilon_{kl}(\vec{u}),$$

где a_{ijkl} – коэффициенты упругости, обладающие свойствами симметрии

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$$

и эллиптичности

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \geq \alpha_1 \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ij}^2.$$

В общем случае коэффициенты упругости являются функциями от $\vec{x}$. Ограничимся изучением однородных сред, в которых все a_{ijkl} постоянны.

Пусть $\vec{f}$ – вектор объемной плотности заданных сил. Тогда компоненты тензора напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sum_{k=1}^{3} \partial_k \sigma_{ik}(\vec{u}) + f_i = 0,\ i = 1, 2, 3. \tag{7.1}$$

Таким образом, определяя оператор A теории упругости выражением

$$(A\vec{u})_i = -\sum_{j=1}^{3} \partial_k \sigma_{ij}(\vec{u}) = -\sum_{j,k,l=1}^{3} \partial_k (a_{ijkl}\epsilon_{kl}(\vec{u})),$$

получаем, что стационарная система линейной упругости имеет вид

$$A\vec{u} = \vec{f}. \tag{7.2}$$

Для векторов перемещений $\vec{u}$, $\vec{v}$ положим

$$W(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\epsilon_{ij}(\vec{u})\epsilon_{kl}(\vec{v}).$$

Функция

$$W(\vec{u}) \equiv W(\vec{u}, \vec{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\epsilon_{ij}(\vec{u})\epsilon_{kl}(\vec{u})$$

называется упругим потенциалом единичного объема. Упругий потенциал тела Ω определяется как

$$\int_{\Omega} W(\vec{u}) d\vec{x},$$

а общая потенциальная энергия деформации тела равна

$$\int_{\Omega} W(\vec{u}) d\vec{x} - \int_{\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{u}) d\vec{x}. \tag{7.3}$$

Равенство (7.3) задает функционал энергии.

Рассмотрим уравнение (7.2) при одном из следующих граничных условий, определяющих, соответственно, первую, вторую и смешанную задачу теории упругости.

$$\vec{u}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega, \tag{7.4}$$

$$\vec{t}(\vec{u})(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega, \tag{7.5}$$

где $\vec{t}(\vec{u}) = \sigma(\vec{u})\vec{\nu}$,

$$\vec{u}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega_1,\ \vec{t}(\vec{u})(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega_2, \tag{7.6}$$

где $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ – открытые подмножества $\partial\Omega$, $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$, $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}_1 \cup \partial\bar{\Omega}_2$.

Условие (7.4) означает, что тело закреплено на границе, условие (7.5) – что тело свободно на границе (на границе задано нулевое напряжение).

Пусть $\vec{u}$, $\vec{v} \in \{C(\bar{\Omega})\}^3$. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (A\vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} = &- \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_\Omega \partial_j (a_{ijkl}\epsilon_{kl}(\vec{u})) v_i d\vec{x} = \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkl}\epsilon_{kl}(\vec{u}) \partial_j v_i d\vec{x} - \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_{\partial\Omega} a_{ijkl}\epsilon_{kl}(\vec{u}) v_i \nu_j d\gamma = \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkl}\epsilon_{kl}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) d\vec{x} - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) v_i \nu_j d\gamma = \\
&= 2\int_\Omega W(\vec{u}, \vec{v}) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} (\vec{t}(\vec{u}) \cdot \vec{v}) d\gamma.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Если функции $\vec{u}$, $\vec{v}$ удовлетворяют одному из граничных условий (7.4)–(7.6), интеграл по границе области в (7.7) равен нулю.

Положим

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = 2\int_\Omega W(\vec{u}, \vec{v}) d\vec{x}, \quad l(\vec{v}) = \int_\Omega (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x}.$$

Очевидно, $a(\cdot, \cdot)$ – симметричная билинейная форма в $\{H^1(\Omega)\}^3$, $l(\cdot)$ – непрерывный линейный функционал в $\{H^1(\Omega)\}^3$ при всех $\vec{f} \in \{L_2(\Omega)\}^3$.

Условие (7.4) для $\vec{u} \in \{H^1(\Omega)\}^3$ означает, что $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$. Таким образом, задача (7.2), (7.4) допускает следующую обобщенную постановку: найти функцию $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$ такую, что при всех $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$

$$2\int_\Omega W(\vec{u}, \vec{v}) d\vec{x} = \int_\Omega (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x}. \tag{7.8}$$

Ввиду эллиптичности коэффициентов

$$a(\vec{u},\vec{u}) = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkl}\epsilon_{ij}(\vec{u})\epsilon_{kl}(\vec{u}) \geq \alpha_1 \sum_{i,j} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{u})d\vec{x}.$$

Следовательно, обобщенная постановка эквивалента вариационной задаче

$$I(\vec{u}) \to \min,\ \vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3, \tag{7.9}$$

где

$$I(\vec{u}) \equiv \frac{1}{2}a(\vec{u},\vec{u}) - \int_\Omega (\vec{f}\cdot\vec{v})d\vec{x} = \int_\Omega W(\vec{u})d\vec{x} - \int_\Omega (\vec{f}\cdot\vec{u})d\vec{x}$$

– функционал энергии.

Доказательство коэрцитивности формы $a(\cdot,\cdot)$ основано на следующих оценках.
Теорема 7.1. (Неравенство Корна) *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченная область с регулярной границей. Найдется постоянная* $\mathrm{C} > 0$*, зависящая только от области* Ω*, что для всех* $\vec{v} \in \{H^1(\Omega)\}^3$

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x} + \int_\Omega (\vec{v})^2 d\vec{x} \geq C\|\vec{v}\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{7.10}$$

Из неравенства Корна вытекает
Лемма 7.1. *Для всех* $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x} \geq C \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (\operatorname{grad} v_i)^2 d\vec{x}. \tag{7.11}$$

Доказательство: Соотношение $(A\vec{v},\vec{v})_{2,\Omega} = 0$ означает, что $\epsilon_{ij}(\vec{v}) = 0$ для $i,j = 1,2,3$. Отсюда следует, что $\vec{v} \in M$, где

$$M = \{\vec{a} + \vec{b}\times\vec{x} : \vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^3\}.$$

M называется множеством жестких перемещений.

Если $\vec{v} \in M$ лежит в $\{H_0^1(\Omega)\}^3$, то, очевидно, $\vec{v} = 0$.

Из (7.10) следует, что

$$C\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (\operatorname{grad} v_i)^2 d\vec{x} \leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x} + \int_\Omega (\vec{v})^2 d\vec{x},$$

Поэтому для доказательства (7.11) достаточно установить, что найдется константа $c_0 > 0$ такая, что

$$\|\vec{v}\|^2_{2,\Omega} \leq c_0 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x}\,\forall\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$$

Пусть $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$. Без ограничения общности можно считать (заменяя $\vec{v}$ на $\vec{v}/\|\vec{v}\|_{2,\Omega}$), что $\|\vec{v}\|_{2,\Omega} = 1$. Покажем, что найдется $c_0 > 0$, что

$$c_0 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{v}) d\vec{x} \geq 1.$$

Если это не так, то найдется последовательность $\vec{v}_k \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$, $k = 1, 2, ...$, такая, что

$$\|\vec{v}_k\|_{2,\Omega} = 1, \ \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{v}_k) d\vec{x} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Так как, ввиду неравенства (7.10), последовательность $\{\vec{v}_k\}$ ограничена в $\{H_0^1(\Omega)\}^3$, найдется её подпоследовательность, слабо сходящаяся в $\{H_0^1(\Omega)\}^3$ к некоторому $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{v}) d\vec{x} \leq \liminf \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{v}_k) d\vec{x} = 0$$

и, следовательно, $\vec{v} \in M$, то есть $\vec{v} = 0$. Так как вложение $\{H_0^1(\Omega)\}^3 \subset \{L_2(\Omega)\}^3$ компактно, $\vec{v}_k \to 0$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, что противоречит предположению $\|\vec{v}_k\|_{2,\Omega} = 1$. $\square$

Из неравенства (7.11) получаем, что для всех $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$

$$a(\vec{u}, \vec{u}) \geq \alpha_1 \sum_{i,j} \int_\Omega \epsilon_{ij}^2(\vec{u}) d\vec{x} \geq \alpha_1 C \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (\operatorname{grad} u_i)^2 d\vec{x}$$

Из неравенства Фридрихса для функций $u_i \in H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$, вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (\operatorname{grad} u_i)^2 d\vec{x} \geq \frac{1}{K(\Omega)} \int_\Omega |\vec{u}|^2 d\vec{x},$$

то есть

$$a(\vec{u}, \vec{u}) \geq \frac{C\alpha_1}{2}(1 + \frac{1}{K(\Omega)}) \|\vec{u}\|_{H^1(\Omega)}^2. \tag{7.12}$$

Применяя теорему Лакса–Мильграма заключаем, что при любых $\vec{f} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ существует единственное обобщенное решение задачи (7.2), (7.4).

Рассмотрим задачу (7.2), (7.5). Очевидно, она имеет не более одного решения в классе $M^\perp$ – ортогональном дополнении к M в $\{L_2(\Omega)\}^3$, так как пространство $M^\perp$ изоморфно фактор-пространству $\{H^1(\Omega)\}^3$ по M.

Элементы $M^{\perp}$ характеризуются соотношениями

$$\int_{\Omega} \vec{v} d\vec{x} = 0, \int_{\Omega} \vec{x} \times \vec{v} d\vec{x} = 0.$$

Для существования решения необходимо, чтобы функционал $l(\vec{v}) = \int_{\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x}$ обращался в ноль на элементах из M, то есть объемные силы $\vec{f}$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\int_{\Omega} \vec{f} d\vec{x} = 0, \quad \int_{\Omega} \vec{x} \times \vec{f} d\vec{x} = 0. \tag{7.13}$$

Эти условия характеризуют статическое и моментное равновесие тела.

Согласно условию эллиптичности, для доказательства коэрцитивности билинейной формы $a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{kl}(\vec{v}) d\vec{x}$ достаточно показать, что для элементов $\vec{v} \in M^{\perp}$ справедлива оценка (7.11). Это будет заведомо выполнено, если найдется константа $c_1 > 0$ такая, что $\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \epsilon_{ij}^2(\vec{v}) d\vec{x} \geq c_1 \|\vec{v}\|_{2,\Omega}$ для всех $\vec{v} \in M^{\perp}$.

Пусть $\vec{w} \in \{H^1(\Omega)\}^3$, $\vec{w} = \vec{v} + \vec{g}$, где $\vec{v} \in M^{\perp}$, $\vec{g} \in M$. Заменяя $\vec{w}$ на $\vec{w}/\|v\|_{2,\Omega}$, придем к случаю $\|v\|_{2,\Omega} = 1$. Таким образом, нужно показать, что $\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \epsilon_{ij}^2(\vec{w}) d\vec{x} \geq c_1$.

Если это не выполнено, то найдется последовательность $\vec{w}_k \in \{H^1(\Omega)\}^3$, $k = 1, 2, ...$, такая, что $\|\vec{v}_k\|_{2,\Omega} = 1$, $\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \epsilon_{ij}^2(\vec{w}_k) d\vec{x} \to 0$ при $k \to \infty$. Так как, ввиду неравенства (7.10), последовательность $\{\vec{v}_k\}$ ограничена в $\{H^1(\Omega)\}^3$, найдется её подпоследовательность, слабо сходящаяся в $\{H^1(\Omega)\}^3$ к некоторому $\vec{v} \in \{H^1(\Omega)\}^3$. Тогда $\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \epsilon_{ij}^2(\vec{v}) d\vec{x} \leq \liminf \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \epsilon_{ij}^2(\vec{w}_k) d\vec{x} = 0$ и, следовательно, $\vec{v} \in M$. Так как $\vec{v}_n \in M^{\perp}$, то $\vec{v} \in M^{\perp}$, то есть $\vec{v} = 0$. Тогда $\vec{v}_k \to 0$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, что противоречит предположению $\|\vec{v}_k\|_{2,\Omega} = 1$.

Применяя теорему Лакса–Мильграма, получаем, что существует единственная функция $\vec{u} \in M^{\perp}$ такая, что для всех $\vec{v} \in M^{\perp}$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{kl}(\vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x}.$$

Таким образом, решение второй краевой задачи определяется с точностью до произвольного жесткого перемещения.

Аналогично можно доказать существование и единственность смешанной краевой задачи.

В каждом из рассматриваемых случаев обобщенное решение краевой задачи минимизирует функционал энергии, то есть выполнен принцип минимума потенциальной энергии.

В изотропных средах коэффициенты упругости равны

$$a_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl}),$$

где $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ – коэффициенты Ламе, и, следовательно,

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{kk}(\vec{u}) + 2\mu\epsilon_{ij}.$$

В однородных средах коэффициенты Ламе постоянны и связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Такимо образом, оператор A имеет вид

$$A\vec{u} \equiv -(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mu\Delta\vec{u}.$$

Рассмотрим первую краевую задачу. Пусть $\vec{u}$ – гладкая функция, удовлетворяющая уравнению (7.2). Умножим (7.2) скалярно на $\vec{v} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ и проинтегрируем по Ω, используя формулу Стокса. Получаем

$$(\lambda+\mu)\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{u}\,\mathrm{div}\,\vec{v}d\vec{x} + \mu\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega(\mathrm{grad}\,u_i\cdot\mathrm{grad}\,v_i)d\vec{x} = \int_\Omega(\vec{f}\cdot\vec{v})d\vec{x}. \qquad (7.14)$$

По непрерывности (7.14) справедливо для всех $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$.

Таким образом, задача (7.2), (7.4) допускает следующую обобщенную постановку: найти $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$ такую, что для всех $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$ справедливо равенство (7.14).

Существование и единственность решения этой задачи вытекает из теоремы Лакса–Мильграма, возможность применения которой доказывается с использованием неравенства Фридрихса.

8. Стационарные задачи электромагнитной теории

Пусть $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\vec{J}$ – объемная плотность тока, $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции, $\vec{D}$ – вектор электрической индукции, ρ – плотность электрических зарядов.

Стационарная система уравнений Максвелла записывается в гауссовой системе единиц в виде ([11, 19]):

$$\mathrm{rot}\ \ \vec{H}\,(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}\,(\vec{x})\,, \qquad (8.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}) = 0, \tag{8.2}$$

$$\operatorname{rot} \ \vec{E}(\vec{x}) = 0, \tag{8.3}$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x}), \tag{8.4}$$

где $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

При рассмотрении линейных сред справедливы материальные соотношения, связывающие между собой значения основных векторов электромагнитного поля

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \tag{8.5}$$

где μ – тензор магнитной проницаемости среды, ε – тензор диэлектрической проницаемости. Имеет место дифференциальная форма обобщенного закона Ома

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}}\right), \tag{8.6}$$

где σ – тензор проводимости, $\vec{E}^{\text{ст}}$– напряженность поля сторонних электродвижущих сил. С использованием обозначения $\vec{J}^{\text{ст}} = \sigma\vec{E}^{\text{ст}}$, (8.6) принимает вид

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}^{\text{ст}}. \tag{8.7}$$

В простейшем случае, когда область Ω заполняется однородной средой, ε и μ можно считать положительными постоянными (в частности, $\varepsilon = \mu = 1$ в вакууме и многих других средах). Коэффициент удельной проводимости σ можно считать положительной постоянной в однородной проводящей среде и равным нулю в непроводящей среде.

Пусть $\vec{E}^{\text{ст}} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ – заданная суммируемая с квадратом функция, $\vec{H} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{B} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{E} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{D} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{J} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ и $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^1$ – неизвестные функции, для которых справедливы соотношения (8.5) и (8.6).

Система дифференциальных уравнений (8.1)–(8.4) будет рассматриваться при однородных краевых условиях

$$\vec{H}_\tau(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \partial\Omega. \tag{8.8}$$

Будем искать решение задачи (8.1)–(8.8) в классах суммируемых с квадратом функций. Тогда, согласно лемме 5.5, (8.1) и (8.8) означают, что $\vec{H} \in H_0(\operatorname{rot};\Omega)$. Из (8.2) следует, что $\vec{B} \in K(\operatorname{div};\Omega)$, а из (8.3) – что $\vec{E} \in K(\operatorname{rot};\Omega)$.

Выполнение (8.4) означает, что $\rho \in H^{-1}(\Omega)$,

$$\langle \rho, \varphi \rangle = -\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \left(\vec{D} \cdot \operatorname{grad} \varphi\right) d\vec{x}, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{8.9}$$

Получим замкнутую формулировку задачи об определении напряженности магнитного поля $\vec{H}$, в которой исключена неизвестная функция напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Уравнения (8.1), (8.2) можно записать в виде

$$\frac{c}{4\pi\sigma}\,\mathrm{rot}\ \vec{H} = \vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}}, \tag{8.10}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0. \tag{8.11}$$

Домножая (8.10) скалярно на $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ ($\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$) и интегрируя по области Ω, получим

$$\frac{c}{4\pi\sigma}\int_\Omega \Big(\mathrm{rot}\ \vec{H}\cdot \mathrm{rot}\ \vec{v}\Big)\ d\vec{x} = \int_\Omega \Big(\vec{E}^{\text{ст}}\cdot \mathrm{rot}\ \vec{v}\Big)\ d\vec{x} + \int_\Omega \Big(\vec{E}\cdot \mathrm{rot}\ \vec{v}\Big)\ d\vec{x}. \tag{8.12}$$

По лемме 5.8 при всех $\vec{E} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$ и $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$

$$\int_\Omega \Big(\vec{E}\cdot \mathrm{rot}\ \vec{v}\Big)\ d\vec{x} = 0,$$

поэтому равенство (8.12) может быть записано в виде

$$\frac{c}{4\pi\sigma}\int_\Omega \Big(\mathrm{rot}\ \vec{H}\cdot \mathrm{rot}\ \vec{v}\Big)\ d\vec{x} = \int_\Omega \Big(\vec{E}^{\text{ст}}\cdot \mathrm{rot}\ \vec{v}\Big)\ d\vec{x}. \tag{8.13}$$

Рассмотрим задачу определения функции $\vec{H} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\mathrm{div};\Omega)$, удовлетворяющей (8.13) при всех $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\mathrm{div};\Omega)$.

Определим билинейную форму и линейный функционал в $H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\mathrm{div};\Omega)$ соотношениями

$$a\,(\vec{u},\vec{v}) = \frac{c}{4\pi\sigma}\ \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{v})\ d\vec{x},$$

$$l\,(\vec{v}) = \int_\Omega \Big(\vec{E}^{\text{ст}}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\Big)\ d\vec{x}.$$

Так как $a(\vec{u},\vec{v})$ – симметричная неотрицательно определенная форма в $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $l(\vec{v})$ – линейный функционал, задача (8.13) может быть сформулирована в виде эквивалентного вариационного принципа

$$I\,(\vec{u}) \to \inf,\quad \vec{u} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\mathrm{div};\Omega) \tag{8.14}$$

$$I\,(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{rot}\ \vec{u}\cdot \mathrm{rot}\ \vec{u})\ d\vec{x} - \frac{4\pi\sigma}{c}\int_\Omega \Big(\vec{E}^{\text{ст}}\cdot \mathrm{rot}\ \vec{u}\Big)\ d\vec{x}.$$

Покажем, что для доказательства разрешимости поставленной задачи можно применить теорему Лакса–Мильграма.

Пусть последовательность $\vec{u}_n \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$, $n = 1, 2, ...$ сходится в $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ к некоторому элементу $\vec{u}$. Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega (\vec{u} \cdot \mathrm{grad}\,\varphi) d\vec{x} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\vec{u}_n \cdot \mathrm{grad}\,\varphi) d\vec{x} = 0,$$

то есть $H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$ – замкнутое подпространство в $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ и, следовательно является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\vec{u}, \vec{v})_V = (\vec{u}, \vec{v})_{rot}$.

Пусть $\vec{u}$, $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$. Используя неравенство Гельдера, получаем:

$$|a(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{c}{4\pi\sigma} \left| \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u}, \mathrm{rot}\,\vec{v})\; d\vec{x} \right| \le \frac{c}{4\pi\sigma} \left\{ \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u})^2\, d\vec{x} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{v})^2\, d\vec{x} \right\} \le \frac{c}{4\pi\sigma} (\vec{u}, \vec{u})_V^{1/2} (\vec{v}, \vec{v})_V^{1/2},$$

то есть форма $a(\cdot,\cdot)$ и функционал l непрерывны.

С другой стороны, из неравенства (5.31) следует, что для всех $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$

$$\int_\Omega \vec{u}^2 d\vec{x} \le C_3(\Omega) \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u})^2\, d\vec{x},$$

то есть

$$a(\vec{u}, \vec{u}) = \frac{c}{4\pi\sigma} \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u})^2\, d\vec{x} \ge \frac{c}{8\pi\sigma}(1 + \frac{1}{C_3(\Omega)}) \left(\int_\Omega (\vec{u})^2 d\vec{x} + \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u})^2\, d\vec{x} \right), \tag{8.15}$$

форма $a(\cdot,\cdot)$, тем самым, коэрцитивна.

Таким образом, выполнены условия леммы Лакса–Мильграма. Следовательно, существует единственное решение $\vec{H} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$ интегрального равенства (8.13).

Определим остальные неизвестные функции из соотношений (8.5), (8.6), (8.1), (8.9) то есть $\vec{B} = \mu\vec{H}$,

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \mathrm{rot}\; \vec{H} - \vec{E}^{\text{ст}}, \tag{8.16}$$

$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}^{\text{ст}}$. При этом $\vec{H} \in H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $\vec{B} \in K(\mathrm{div}\,;\Omega)$ по определению пространства V^0, функции $\vec{J}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$ суммируемы с квадратом и остается проверить, что $\vec{E}$ лежит в пространстве $K(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, то есть выполнено (8.3).

Из (8.13) следует, что

$$\int_\Omega \left(\vec{E} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v} \right)\, d\vec{x} = 0 \tag{8.17}$$

при всех $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$.

Пусть $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Применяя лемму Лакса-Мильграма получаем, что существует единственный элемент $p \in H_0^1$, удовлетворяющий при всех $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ равенству

$$\int_\Omega (\mathrm{grad}\, p \cdot \mathrm{grad}\, \varphi) d\vec{x} = \int_\Omega (\vec{\psi} \cdot \mathrm{grad}\, \varphi) d\vec{x}.$$

Тогда $\vec{v} = \vec{\psi} - \mathrm{grad}\, p \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\mathrm{rot}\, \vec{v} = \mathrm{rot}\, \vec{\psi}$ и $\mathrm{div}\, \vec{v} = 0$, то есть $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$. Получаем,

$$\int_\Omega (\vec{E} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{\psi}) d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{E}, \mathrm{rot}\, \vec{v}\right) \, d\vec{x} = 0,$$

то есть справедливо (8.3).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 8.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная звездная область класса C^2, $\vec{E}^{cm} \in \left\{L_2\left(\Omega\right)\right\}^3$, ε, σ, μ – положительные постоянные. Тогда задача* (8.5), (8.6), (8.1)–(8.4), (8.8) *имеет единственное решение.*

Выше была рассмотрена задача об определении напряженности магнитного поля $\vec{H}$. При этом напряженность электрического поля $\vec{E}$ может быть определена как производная величина с помощью соотношения (8.16).

Существует возможность независимого определения вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Домножая (8.10) скалярно на $\vec{v}$ ($\vec{v} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$) и интегрируя по области Ω, получим

$$\int_\Omega \left(\vec{E} \cdot \vec{v}\right) \, d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{E}^{\text{ст}} \cdot \vec{v}\right) \, d\vec{x} + \frac{c}{4\pi\sigma} \int_\Omega \left(\vec{H} \cdot \vec{v}\right) \, d\vec{x}. \qquad (8.18)$$

По лемме 5.8 при всех $\vec{H} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ и $\vec{v} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$

$$\int_\Omega \left(\mathrm{rot}\, \vec{H} \cdot \vec{v}\right) \, d\vec{x} = 0,$$

поэтому равенство (8.18) может быть записано в виде

$$\int_\Omega \left(\vec{E} \cdot \vec{v}\right) \, d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{E}^{\text{ст}} \cdot \vec{v}\right) \, d\vec{x}. \qquad (8.19)$$

Поставим задачу определения функции $\vec{E} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$, удовлетворяющей (8.19) при всех $\vec{v} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$.

Задача (8.19) может быть сформулирована в виде эквивалентного вариационного принципа

$$I\left(\vec{u}\right) \equiv \frac{1}{2} \int_\Omega |\vec{u}|^2 d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{E}^{\text{ст}} \cdot \vec{u}\right) \, d\vec{x} \to \inf, \quad \vec{u} \in K\left(\mathrm{rot};\Omega\right). \qquad (8.20)$$

Сформулированный вариационный принцип (8.20) известен как *принцип минимизации джоулевых потерь* [19].

Доказательство теоремы о существовании и единственности решения этой задачи опирается на теорему Лакса–Мильграма, применение которой не вызывает затруднений, поскольку $\|\vec{u}\|_{K(\mathrm{rot};\Omega)} = \|\vec{u}\|_{2,\Omega}$ и $K\,(\mathrm{rot};\Omega)$ – замкнутое подпространство $\{L_2(\Omega)^3\}$.

Рассмотренная задача (8.5), (8.6), (8.1)–(8.4), (8.8) может быть поставлена также с использованием векторного магнитного потенциала $\vec{A}$ и скалярного электрического потенциала φ, которые, ввиду соотношений (8.2), (8.3), можно ввести по формулам

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\ \vec{A}, \quad \vec{E} = -\,\mathrm{grad}\ \varphi. \tag{8.21}$$

В этом случае уравнение (8.1) переписывается с учетом (8.5), (8.6) в виде

$$\mathrm{rot}\ \left(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\ \vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(-\sigma\,\mathrm{grad}\ \varphi + \vec{J}^{\text{ст}}\right). \tag{8.22}$$

Краевые условия для векторного потенциала $\vec{A}$, соответствующие краевым условиям (8.8), записываются в виде

$$\left(\mathrm{rot}\ \vec{A}\right)_\tau(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \partial\Omega. \tag{8.23}$$

Решением задачи (8.22), (8.23) называем функции $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\vec{A} \in H\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ такие, что $\mathrm{rot}\ \vec{A} \in H_0\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ и справедливо равенство (8.22).

Для корректной постановки задач об определении потенциалов $(\vec{A},\varphi)$ требуются дополнительные условия на векторный потенциал $\vec{A}$ (калибровочные соотношения). Рассмотрим два вида калибровочных соотношений:

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = 0, \left(\vec{A}\right)_\nu|_{\partial\Omega} = 0; \tag{8.24}$$

$$\varphi = -\kappa\,\mathrm{div}\ \vec{A}, \left(\vec{A}\right)_\nu|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8.25}$$

Будем искать решение задач определения векторного потенциала в классе $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Обозначим также $K_0(\mathrm{div};\Omega) = K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Лемма 8.1. $H(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *– гильбертово пространство со скалярным произведением*

$$(\vec{u},\vec{v})_W = \int_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{v})\,d\vec{x} + \int_\Omega (\mathrm{rot}\quad \vec{u}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v})\,d\vec{x} + \int_\Omega \mathrm{div}\ \vec{u}\,\mathrm{div}\ \vec{v} d\vec{x}.$$

Доказательство: Аксиомы скалярного произведения, очевидно, выполняются. Остается проверить полноту пространства по соответствующей норме. Пусть $\{\vec{u}_n\}$

– последовательность, фундаментальная в $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Для всех $n, m \in N$

$$\|\,\vec{u}_n - \vec{u}_m\|_W^2 = \|\,\vec{u}_n - \vec{u}_m\|_{2,\mathrm{rot}\,,\Omega}^2 + \|\,\mathrm{div}\ \vec{u}_n - \mathrm{div}\ \vec{u}_m\|_{2,\Omega}^2\,,$$

откуда и получаем сходимость последовательности $\{\vec{u}_n\}$ в пространствах $H(\mathrm{rot};\Omega)$ и в $H_0(\mathrm{div};\Omega)$. $\square$

Лемма 8.2. *Каждый элемент* $\vec{w} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *однозначно представим в виде* $\vec{w} = \vec{v} + \vec{g}$, *где* $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{g} \in K\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$.

Доказательство: Согласно лемме 5.16 элемент $\vec{w}$ однозначно представим в виде $\vec{w} = \vec{v} + \vec{g}$, где $\vec{g} \in K\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Поскольку $\vec{w}$, $\vec{g}$ лежат в $H(\mathrm{rot};\Omega)$, это же справедливо для $\vec{v}$. $\square$

Пусть $\vec{A}$, φ – классическое решение задачи (8.22), (8.23). Умножим равенство (8.22) скалярно на функцию $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ и проинтегрируем по Ω:

$$\int_\Omega \left(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\ \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v}\right)\,d\vec{x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\ \vec{v}d\vec{x} + \frac{4\pi}{c}\int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v}\right)\,d\vec{x}. \tag{8.26}$$

Калибровочные соотношения (8.24) означают, что $\vec{A} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$. Так как $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ – замкнутое подпространство в $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$, оно является гильбертовым пространством относительно индуцированного скалярного произведения

$$(\vec{u},\vec{v})_V = (\vec{u},\vec{v})_W = \int_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{v})\,d\vec{x} + \int_\Omega (\mathrm{rot}\ \vec{u}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v})\,d\vec{x} = (\vec{u},\vec{v})_{\mathrm{rot}}\,.$$

При калибровочных соотношениях (8.24), таким образом, задача (8.22), (8.23) сводится к следующей задаче определения векторного магнитного потенциала: найти функцию $\vec{A} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$, для которой при всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_\Omega \left(\mathrm{rot}\ \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v}\right)d\vec{x} = \frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}. \tag{8.27}$$

Эквивалентная вариационная задача для определения $\vec{A} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ записывается в виде

$$I\,(\vec{u}) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{rot}\ \vec{u})^2\ d\vec{x} - \frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{u}\right)\,d\vec{x} \to \inf,\ \ \vec{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega). \tag{8.28}$$

Теорема 8.2. *Существует единственное решение вариационной задачи* (8.28)

Доказательство: Положим для $\vec{u},\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$

$$a\,(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega (\mathrm{rot}\ \vec{u}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v})\,d\vec{x},\ l\,(\vec{v}) = \frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}$$

Видно, что l – линейный непрерывный функционал, $a\left(\cdot,\cdot\right)$ – симметричная билинейная форма на $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Используя неравенство Гельдера с показателем 2, получаем, что форма $a\left(\cdot,\cdot\right)$ непрерывна, применяя оценку (5.33) находим, что форма $a\left(\cdot,\cdot\right)$ коэрцитивна.

Утверждение теоремы следует тогда из теоремы Лакса–Мильграма. □

При использовании калибровочных соотношений (8.25) задача (8.22), (8.23) сводится к задаче определения векторного магнитного потенциала $\vec{A}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$, для которого при всех $\vec{v}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_\Omega\left(\mathrm{rot}\ \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v}\right)d\vec{x}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\kappa\int_\Omega\mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{v}d\vec{x}=\frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega\left(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}. \tag{8.29}$$

Эквивалентная вариационная задача для определения $\vec{A}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ записывается в виде

$$I\left(\vec{u}\right)\to\inf,\ \ \vec{u}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega) \tag{8.30}$$

$$I\left(\vec{u}\right)\equiv\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\mathrm{rot}\ \vec{u}\right)^2\,d\vec{x}+\frac{2\pi\mu\sigma}{c}\kappa\int_\Omega(\mathrm{div}\,\vec{u})^2d\vec{x}-\frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega\left(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{u}\right)\,d\vec{x}.$$

Теорема 8.3. *Существует единственное решение вариационной задачи* (8.30)
Доказательство: Определим билинейную форму и линейный функционал на $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ соотношениями

$$a\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\int_\Omega\left(\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\kappa\int_\Omega\mathrm{div}\,\vec{u}\,\mathrm{div}\,\vec{v}d\vec{x},\ l(\vec{v})=\frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega\left(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}.$$

Из неравенства Гельдера вытекает непрерывность формы $a(\cdot,\cdot)$ и функционала l. Коэрцитивность билинейной формы следует из оценки (5.33).

Таким образом, справедливость утвеждения теоремы вытекает из леммы Лакса-Мильграма. □

Следующие теоремы устанавливают связь между задачами в терминах векторного магнитного потенциала при различных калибровочных соотношениях.

Теорема 8.4. *Пусть* $\vec{A}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ *– решение задачи* (8.27), $\vec{A}_\kappa\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *– решение задачи* (8.30). *Тогда* $\vec{A}_\kappa\to\vec{A}$ *при* $\kappa\to\infty$ *в пространстве* $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Доказательство: Обозначим $\vec{a}=\vec{A}_\kappa-\vec{A}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Согласно лемме 5.7, $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$, где $\vec{A}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{a}_2\in K\left(\mathrm{rot}\,;\Omega\right)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Возьмем произвольные $\vec{v}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{g}\in K\left(\mathrm{rot}\,;\Omega\right)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Тогда $\vec{w}=\vec{v}+\vec{g}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Ввиду (8.27), (8.29) справедливы тождества

$$\int_\Omega\left(\mathrm{rot}\ \vec{A}_\kappa\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v}\right)d\vec{x}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\kappa\int_\Omega\mathrm{div}\ \vec{A}_\kappa\,\mathrm{div}\ \vec{g}d\vec{x}=\frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega\left(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{w}\right)d\vec{x},$$

$$\int_\Omega \left(\text{rot } \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{v}\right) d\vec{x} = \frac{4\pi\mu}{c} \int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x},$$

откуда следует, что

$$\int_\Omega (\text{rot } \vec{a}_1 \cdot \text{rot } \vec{v})\ d\vec{x} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\kappa \int_\Omega \text{div } \vec{a}_2 \, \text{div } \vec{g}\, d\vec{x} = \frac{4\pi\mu}{c} \int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{g}\right)\ d\vec{x}.$$

В частности, при всех $\vec{v} \in H(\text{rot}; \Omega) \cap K_0(\text{div}; \Omega)$

$$\int_\Omega (\text{rot } \vec{a}_1 \cdot \text{rot } \vec{v})\, d\vec{x} = 0,$$

то есть $\vec{a}_1 = 0$, $\vec{a} = \vec{a}_2 \in K\,(\text{rot}\,; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$, $\text{rot } \vec{A}_\kappa = \text{rot } \vec{A}$ и при всех $\vec{g} \in K\,(\text{rot}\,; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$

$$\int_\Omega \text{div } \vec{a}\, \text{div } \vec{g} d\vec{x} = \frac{1}{\sigma\kappa} \int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x}. \tag{8.31}$$

Применяя к $\vec{a}$ оценку (5.33) получим

$$\int_\Omega \vec{a}^2 d\vec{x} \le C_4 \int_\Omega (\text{div}\, \vec{a})^2\, d\vec{x}.$$

Положим в (8.31) $\vec{g} = \vec{a}$. Тогда, согласно неравенству Гельдера,

$$\int_\Omega (\text{div } \vec{a})^2\, d\vec{x} = \frac{1}{\sigma\kappa} \int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{a}\right) d\vec{x} \le \frac{1}{\sigma\kappa} \left\{\int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}}\right)^2 d\vec{x}\right\}^{1/2} \left\{\int_\Omega (\vec{a})^2\, d\vec{x}\right\}^{1/2}.$$

Получаем, таким образом,

$$\left\|\vec{A}_\kappa - \vec{A}\right\|_W = \|\vec{a}\|_W = \left\{\|\vec{a}\|^2_{2,\Omega} + \|\text{div}\, \vec{a}\|^2_{2,\Omega}\right\}^{1/2} \le \frac{1}{\kappa\sigma} (1 + C)^{1/2} \left\|\vec{J}^{\text{ст}}\right\|^2_{2,\Omega},$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

Изучим связь между постановками задач в терминах векторного магнитного потенциала и альтернативными постановкам для напряженности магнитного поля.

Теорема 8.5. *Пусть* $\vec{H} \in H_0(\text{rot}; \Omega) \cap K(\text{div}; \Omega)$ *– решение задачи* (8.13), $\vec{A} \in H(\text{rot}; \Omega) \cap K_0(\text{div}; \Omega)$ *и* $\vec{A} \in H(\text{rot}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$ *– решения задач* (8.28) *и* (8.30) *соответственно. Тогда*

$$\mu^{-1}\, \text{rot } \vec{A} = \mu^{-1}\, \text{rot } \vec{A}_\kappa = \vec{H}.$$

Доказательство: Так как $\mu\vec{H} \in K\,(\mathrm{div}\,;\Omega)$, найдется, по теореме 5.5, функция $\vec{q} \in H\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ такая, что $\mu\vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{q}$. Согласно лемме Лакса–Мильграма, существует элемент $\vec{z} \in K\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, удовлетворяющий при всех $\vec{h} \in K\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ равенству

$$\int_\Omega \left(\vec{z}\cdot\vec{h}\right) d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{q}\cdot\vec{h}\right) d\vec{x}.$$

Тогда, ввиду леммы 5.16, $(\vec{q}-\vec{z}) \in K^\perp\,(\mathrm{rot}\,;\Omega) = K\,(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H_0\,(\mathrm{div}\,;\Omega)$. Так как $\vec{z} \in K\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $\mathrm{rot}\ (\vec{q}-\vec{z}) = \mathrm{rot}\ \vec{q} \in \{L_2\,(\Omega)\}^3$. Таким образом,

$$\vec{a} = \vec{q}-\vec{z} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega),\ \mathrm{rot}\ \vec{a} = \mu\vec{H}.$$

Покажем, что $\vec{a}$ – решение задачи (8.28).

Согласно лемме 5.6, для всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$

$$\int_\Omega \left(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\ \vec{a}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v}\right) d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v}\right) d\vec{x} = \int_\Omega \left(\mathrm{rot}\ \vec{H}\cdot\vec{v}\right) d\vec{x}.$$

Далее, так как по лемме 5.16 $\vec{v} \in K^\perp\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, найдется, согласно лемме 5.10, последовательность $\left\{\vec{\psi}_n\right\} \in \{\mathcal{D}\,(\Omega)\}^3$ такая, что $\mathrm{rot}\ \vec{\psi}_n \to \vec{v}$ при $n\to\infty$ в $\{L_2\,(\Omega)\}^3$.

Согласно лемме Лакса–Мильграма, для каждой функции $\vec{\psi}_n$ найдется единственная функция $p_n \in H_0^1\,(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $\omega \in H_0^1\,(\Omega)$ равенству

$$\int_\Omega (\mathrm{grad}\ p_n\cdot\mathrm{grad}\ \omega)\, d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{\psi}_n\cdot\mathrm{grad}\ \omega\right) d\vec{x}.$$

Тогда $\vec{\omega}_n = \vec{\psi}_n - \mathrm{grad}\ p_n \in H_0\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $\mathrm{div}\ \vec{\omega}_n = 0$, и $\mathrm{rot}\ \vec{\omega}_n = \mathrm{rot}\ \vec{\psi}_n$. Используя тождество (8.13), получаем

$$\int_\Omega \left(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\ \vec{a}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v}\right) d\vec{x} = \int_\Omega \left(\mathrm{rot}\ \vec{H}\cdot\vec{v}\right) d\vec{x} = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(\mathrm{rot}\ \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{\psi}_n\right) d\vec{x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(\mathrm{rot}\ \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{\omega}_n\right) d\vec{x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(\vec{E}^{\text{ст}}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{\psi}_n\right) d\vec{x} = \frac{4\pi}{c}\int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v}\right) d\vec{x},$$

следовательно $\vec{a} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ удовлетворяет равенству (8.27) при всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ и, в силу единственности решения задачи (8.28), $\vec{a} = \vec{A}$, $\mathrm{rot}\ \vec{A} = \mu\vec{H}$ по построению.

Поскольку, как установлено в теореме 8.4, $\mathrm{rot}\ \vec{A}_\kappa = \mathrm{rot}\ \vec{A}$, теорема доказана. □

Следствие. *Пусть* $\vec{A} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *– решение задачи* (8.28) *или* (8.30). *Тогда функция* $\mathrm{rot}\ \vec{A} \in H_0\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, *то есть выполнено в смысле теории следов граничное условие* (8.30).

Лемма 8.3. *Пусть* $\vec{A}_\kappa \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *– решение задачи* (8.30), *функция* $\varphi \in L_2(\Omega)$ *определена соотношением*

$$\varphi = -\kappa \,\mathrm{div}\; \vec{A}_\kappa. \tag{8.32}$$

Тогда $\vec{A}_\kappa$, φ *– решение задачи* (8.22), (8.23).

Доказательство: Пусть $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Тогда $\vec{\psi} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ и, согласно лемме 5.16, $\vec{\psi} = \vec{v} + \vec{g}$, где $\vec{v} \in K_0(\mathrm{div}\,;\Omega)$, $\vec{g} \in K(\mathrm{rot}\,;\Omega)$. Поскольку $\mathrm{div}\;\vec{g} = \mathrm{div}\;\vec{\psi} \in L_2(\Omega)$, $\vec{g} \in H_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Согласно тождеству (8.16)

$$\int_\Omega \left(\sigma \vec{E} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} = \frac{c}{4\pi} \int_\Omega \left(\mathrm{rot}\;\vec{H} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} =$$

$$= \frac{c}{4\pi} \int_\Omega \left(\vec{H} \cdot \mathrm{rot}\;\vec{v}\right) d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} =$$

$$= \frac{c}{4\pi} \int_\Omega \left(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\;\vec{A}_\kappa \cdot \mathrm{rot}\;\vec{v}\right) d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} = 0.$$

Таким образом,

$$\int_\Omega \left(\sigma \vec{E} \cdot \vec{\psi}\right) d\vec{x} = \int_\Omega \left(\sigma \vec{E} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x} = \frac{c}{4\pi} \int_\Omega \left(\mathrm{rot}\;\vec{H} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x} =$$

$$= -\int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x}.$$

С другой стороны, $\int_\Omega \varphi \,\mathrm{div}\;\vec{\psi} d\vec{x} = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{div}\;\vec{g} d\vec{x}$. Так как

$$\varphi = -\kappa \,\mathrm{div}\left(\vec{A}_\kappa - \vec{A}\right),$$

где $\vec{A} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ – решение задачи (8.28), получаем из (8.30), что

$$\int_\Omega \sigma\varphi \,\mathrm{div}\;\vec{g} d\vec{x} = -\int_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x},$$

то есть для всех $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$

$$\int_\Omega \left(\vec{E} \cdot \vec{\psi}\right) d\vec{x} = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{div}\;\vec{\psi}\, d\vec{x}. \tag{8.33}$$

Подставляя в это равенство в качестве $\vec{\psi}$ функции $\vec{\psi}_i = \omega \vec{e}_i$, $i = 1,\ 2,\ 3$, где $\omega \in \mathcal{D}(\Omega)$, получаем утверждение леммы. $\square$

Положим $\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\;\vec{H} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\;\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\;\vec{A}_\kappa$, $\vec{B} = \mathrm{rot}\;\vec{A}$, $\vec{E} = \sigma^{-1}\left(\vec{J} - \vec{J}^{\text{ст}}\right)$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ и определим функционал $\rho \in H^{-1}(\Omega)$ формулой (8.9).

Следствие. *Функции* $\vec{H}$, $\vec{B}$, $\vec{J}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$, ρ *– решение задачи* (8.5), (8.6), (8.1)–(8.4), (8.8).

9. Общая теория корректных краевых задач

9.1. Обобщённые решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть $P(\partial)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha,$$

где $a_\alpha \in \mathbb{R}^1$.

Определим формально сопряженный дифференциальный оператор $P^*(\partial)$:

$$P^*(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое ограниченное множество.

Будем говорить, что $P(\partial)u \in L_2(\Omega)$ для $u \in L_2(\Omega)$, если существует функция $g \in L_2(\Omega)$ такая, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega g(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} = \int_\Omega u(\vec{x})P^*(\partial)\varphi(\vec{x})d\vec{x}, \tag{9.1}$$

при этом по определению считаем, что $P(\partial)u = g$.

Через $H(P(\partial);\Omega)$ обозначается пространство функций $u \in L_2(\Omega)$ таких, что $P(\partial)u \in L_2(\Omega)$.

Теорема 9.1. *Пространство $H(P(\partial);\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением*

$$(f,g)_H = \int_\Omega f(\vec{x})g(\vec{x})d\vec{x} + \int_\Omega P(\partial) f(\vec{x})\, P(\partial) g(\vec{x})d\vec{x}, \quad \forall f, g \in H(P(\partial);\Omega). \tag{9.2}$$

Доказательство: Пусть u, $v \in H(P(\partial);\Omega)$, λ, $\mu \in \mathbb{R}^1$. По определению, существуют функции g, $h \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$\int_\Omega uP^*(\partial)\varphi d\vec{x} = \int_\Omega g\varphi d\vec{x},$$

$$\int_\Omega vP^*(\partial)\varphi d\vec{x} = \int_\Omega h\varphi d\vec{x}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Умножив эти равенства на числа λ, μ соответственно и сложив их, получим

$$\int_\Omega (\lambda u + \mu v)P^*(\partial)\varphi d\vec{x} = \int_\Omega (\lambda g + \mu h)\varphi d\vec{x}.$$

Поэтому $\lambda u+\mu v \in H(P(\partial);\Omega)$, $P(\partial)(\lambda u+\mu v) = \lambda P(\partial)u+\mu P(\partial)v$. Таким образом, $H\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$ – векторное пространство.

Очевидно, что для (9.2) выполнены все аксиомы скалярного произведения. Покажем, что $H\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$ – полное пространство.

Так как

$$\|u\|_H^2 = \|u\|_{2,\Omega}^2 + \|P(\partial)u\|_{2,\Omega}^2,$$

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq \|u\|_H,\ \|P(\partial)u\|_{2,\Omega} \leq \|u\|_H.$$

Из этих неравенств следует, что если $\{u_k\}$ – фундаментальная последовательность в $H\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$, то эта последовательность и последовательность $P\left(\partial\right)u_k$ фундаментальны в $L_2(\Omega)$. Существуют, таким образом, элементы u^*, $g \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$\|u_k - u^*\|_{2,\Omega} \to 0,\ \|P(\partial)u_k - g\|_{2,\Omega} \to 0,\ k \to \infty.$$

Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega u^* P^*(\partial)\varphi d\vec{x} = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k P^*(\partial)\varphi d\vec{x} = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \varphi P(\partial)u_k d\vec{x} = \int_\Omega g\varphi d\vec{x},$$

то есть $u^* \in H\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$ и $P(\partial)u^* = g$.

При этом ясно, что $\|u_k - u^*\|_H \to 0$. Таким образом, существует элемент $u^* \in H\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$, являющийся пределом фундаментальной последовательности, то есть $H\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$ – полное пространство. $\square$

Через $\overset{\circ}{H}\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$ обозначается замыкание пространства пробных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ по норме пространства $H\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$. Очевидно, пространство $\overset{\circ}{H}\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением (9.2).

Аналогичным образом определяется гильбертово пространство $\overset{\circ}{H}\left(P^*\left(\partial\right);\Omega\right)$ с соответствующим скалярным произведением.

Лемма 9.1. (Неравенство Хёрмандера) *Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – непустое открытое ограниченное множество, $P\left(\partial\right)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Тогда существует положительная постоянная $c(P,\Omega) > 0$ такая, что для любых функций $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega \varphi^2(\vec{x})d\vec{x} \leq c(P,\Omega)\int_\Omega \left(P\left(\partial\right)\varphi(\vec{x})\right)^2 d\vec{x}. \tag{9.3}$$

Следствиями леммы 9.1 является леммы 9.2 и 9.3.

Лемма 9.2. *При том же самом значении постоянной $c(P,\Omega) > 0$ для любых функций $u \in \overset{\circ}{H}\left(P\left(\partial\right);\Omega\right)$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} \leq c(P,\Omega)\int_\Omega \left(P\left(\partial\right)u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x}. \tag{9.4}$$

Лемма 9.3. *Существует постоянная $c'(P,\Omega) > 0$ такая, что при всех $u \in \overset{\circ}{H}(P(\partial);\Omega)$ справедливо неравенство*

$$c'(P,\Omega)\,\|u\|_H^2 \le \|P(\partial)\,u\|_{2,\Omega}^2\,. \tag{9.5}$$

Соответствующие неравенства будут использоваться и для формально сопряженного дифференциального оператора $P^*(\partial)$ с соответствующими постоянными $c(P^*,\Omega) > 0$ и $c'(P^*,\Omega) > 0$.

Ядром оператора $P(\partial)$ называется класс функций $u \in L_2(\Omega)$ таких, что $P(\partial)u = 0$. В соответствии с (9.1) функция $u \in L_2(\Omega)$ принадлежит ядру тогда и только тогда, когда

$$\int_\Omega uP^*(\partial)\varphi d\vec{x} = 0 \tag{9.6}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

В дальнейшем ядро оператора $P(\partial)$ будет обозначаться через $\mathrm{Ker}\,(P(\partial);\Omega)$.

Через $\mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega)$ обозначается ортогональное дополнение к $\mathrm{Ker}\,(P(\partial);\Omega)$:

$$\mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega) = \left\{u \in L_2(\Omega):\ \int_\Omega uvd\vec{x} = 0,\ \forall v \in \mathrm{Ker}\,(P(\partial);\Omega)\right\}.$$

Легко можно убедиться в том, что $\mathrm{Ker}\,(P(\partial);\Omega)$ и $\mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega)$ являются замкнутыми подпространствами $L_2(\Omega)$.

Пусть $M = \{P^*(\partial)\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$, $\overline{M}$ – замыкание в $L_2(\Omega)$ пространства M. Справедливы следующие утверждения о характеризации ортогонального дополнения к ядру.

Лемма 9.4. *Ортогональное дополнение к ядру $\mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ совпадает с замыканием в $L_2(\Omega)$ класса функций $P^*(\partial)\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, т.е.*

$$\mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega) = \overline{M}. \tag{9.7}$$

Доказательство: Пусть $v \in M$, тогда $v = P^*(\partial)\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и для любого $w \in \mathrm{Ker}\,(P(\partial);\Omega)$

$$(v,w)_{2,\Omega} = (P^*(\partial)\varphi, w)_{2,\Omega} = (\varphi, P(\partial)w)_{2,\Omega} = 0.$$

Следовательно, $M \subset \mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega)$. Так как $\mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega)$ замкнуто в $L_2(\Omega)$, $\bar{M} \subset \mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega)$.

Покажем, что на самом деле справедливо равенство (9.7). Рассуждая от противного, заключаем, что $\overline{M}$ – собственное замкнутое подпространство $\mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega)$. Следовательно, должен существовать элемент $z \neq 0$ такой, что

$$z \in \mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega),\, (z,w)_{2,\Omega} = 0 \text{ для любых } w \in \overline{M}, \tag{9.8}$$

и, в частности,

$$\int_{\Omega} zP^*(\partial)\,\varphi d\vec{x} = 0 \text{ при всех } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

откуда следует, что $z \in \operatorname{Ker}(P(\partial);\Omega)$, и с учетом (9.8) $z = 0$. Противоречие. $\square$

Лемма 9.5. $\operatorname{Ker}^{\perp}(P(\partial);\Omega) = \{P^*(\partial)\,v,\ v \in \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)\}$.

Доказательство: Обозначим множество в правой части равенства через K. Докажем, что $K \subset \operatorname{Ker}^{\perp}(P(\partial);\Omega)$. Пусть $u \in K$, тогда существует функция $v \in \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$ такая, что $u = P^*(\partial)\,v$. Из определения $\overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$ следует, что существует последовательность пробных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, сходящаяся к v, т.е. $\|v - \varphi_n\|_{H(P^*)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Поскольку

$$\|v - \varphi_n\|^2_{H(P^*)} = \|v - \varphi_n\|^2_{2,\Omega} + \|P^*(\partial)\,v - P^*(\partial)\,\varphi_n\|^2_{2,\Omega},$$

то

$$\|u - P^*(\partial)\,\varphi_n\|^2_{2,\Omega} = \|P^*(\partial)\,v - P^*(\partial)\,\varphi_n\|^2_{2,\Omega} \le \|v - \varphi_n\|^2_{H(P^*)} \to 0,\ n \to \infty.$$

Учитывая, что $P^*(\partial)\,\varphi_n \in \operatorname{Ker}^{\perp}(\partial;\Omega)$ и что $\operatorname{Ker}^{\perp}(\partial;\Omega)$ замкнуто в $L_2(\Omega)$, заключаем, что $u \in \operatorname{Ker}^{\perp}(\partial,\Omega)$.

Докажем обратное включение. Пусть $u \in \operatorname{Ker}^{\perp}(\partial,\Omega)$. Тогда на основании леммы 9.4 существует последовательность пробных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ такая, что $P^*(\partial)\,\varphi_n \to u$ при $n \to \infty$ по норме $L_2(\Omega)$. Следовательно, последовательность $\{P^*(\partial)\,\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L_2(\Omega)$. В силу неравенства Хёрмандера

$$\|\,\varphi\,\|_{L_2} \le c(\Omega)\,\|P^*(\partial)\,\varphi\,\|_{2,\Omega} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

где $c(\Omega)$ не зависит от выбора φ, и, следовательно,

$$\|\varphi_n - \varphi_k\|_{2,\Omega} \le c(\Omega)\,\|P^*(\partial)\,\varphi_n - P^*(\partial)\,\varphi_k\|_{2,\Omega}$$

и

$$\|\varphi_n - \varphi_k\|^2_{H(P^*)} = \|\varphi_n - \varphi_k\|^2_{2,\Omega} + \|P^*(\partial)\,\varphi_n - P^*(\partial)\,\varphi_k\|^2_{2,\Omega} \le$$
$$\le \left(1 + c^2(\Omega)\right)\|P^*(\partial)\,\varphi_n - P^*(\partial)\,\varphi_k\|^2_{2,\Omega} \to 0,\ n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в гильбертовом пространстве $H(P^*(\partial);\Omega)$ и поэтому сходится к некоторому элементу $v \in \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$. Рассмотрим

$$\|\varphi_n - v\|^2_{H(P^*)} = \|\varphi_n - v\|^2_{2,\Omega} + \|P^*(\partial)\,\varphi_n - P^*(\partial)\,v\|^2_{2,\Omega} \ge \|P^*(\partial)\,\varphi_n - P^*(\partial)\,v\|^2_{2,\Omega}.$$

Таким образом, $\{P^*(\partial)\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, с одной стороны, сходится к $u \in L_2(\Omega)$ по норме $L_2(\Omega)$. С другой стороны, $\{P^*(\partial)\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $P^*(\partial)v \in L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому, в силу единственности предела в гильбертовом пространстве, $u = P^*(\partial)v \in K$. $\square$

Все аналогичные утверждения справедливы и для оператора $P^*(\partial)$.

Линейный оператор

$$P(\partial): \quad L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$$

с областью определения $D(P) = H(P(\partial);\Omega)$ будем называть *максимальным оператором*.

Известно [8, 9], что область определения $H(P(\partial);\Omega)$ всюду плотна в $L_2(\Omega)$, а множество значений максимального оператора совпадает с $L_2(\Omega)$ (максимальный оператор сюръективен).

Доказательство сюръективности этого оператора может быть проведено многими способами [8, 9]. В этой работе приводится доказательство в форме наиболее удобной для изложения вопросов, связанных с общей теорией корректных задач.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

Для любой $f \in L_2(\Omega)$ определить функцию $u \in \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$, удовлетворяющую при всех $v \in \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$ интегральному равенству

$$\int_\Omega P^*(\partial)\, uP^*(\partial)\, v d\vec{x} = \int_\Omega f v d\vec{x}. \tag{9.9}$$

Теорема 9.2. *Вспомогательная задача* (9.9) *имеет единственное решение* $u \in \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$.

Доказательство: Равенство (9.9) можно записать в виде

$$a(u, v) = l(v).$$

Покажем, что в этом случае справедливы все предположения теоремы Лакса–Мильграма. Очевидно, что $a(u, v)$ – билинейная симметричная форма, определенная на декартовом произведении гильбертовых пространств $\overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega) \times \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$.

Из определения скалярного произведения в пространстве $\overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$ следует, что эта билинейная форма ограничена:

$$|a(u, v)| = \left|(P^*(\partial)\, u,\ P^*(\partial)\, v)_{2,\Omega}\right| \le \|P^*(\partial)\, u\|_{2,\Omega} \cdot \|P^*(\partial)\, v\|_{2,\Omega} \le \|u\|_{H(P^*)} \cdot \|v\|_{H(P^*)}.$$

Коэрцитивность билинейной формы $a(u, v)$ следует из (9.5).

Докажем, что линейный функционал $l : \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega) \to \mathbb{R}^1$ ограничен. Действительно,

$$|l(v)| = |(f,v)_{2,\Omega}| \le \|f\|_{2,\Omega} \cdot \|v\|_{2,\Omega} \le \|f\|_{2,\Omega} \cdot \|v\|_{H(P^*)}.$$

Таким образом, по теореме Лакса–Мильграма вспомогательная задача (9.9) имеет единственное решение. $\square$

Рассмотрим вторую вспомогательную задачу

Определить элемент $u \in \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$, являющийся решением вариационной задачи

$$I(u) \to \inf, \quad u \in \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega), \tag{9.10}$$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (P^*(\partial)u)^2 d\vec{x} - \int_\Omega fud\vec{x}.$$

Теорема 9.3. *Решение вспомогательной задачи* (9.10) *существует и единственно и совпадает с решением задачи* (9.9).

Справедливость теоремы вытекает из теоремы 1.9.

Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$P(\partial)u = f. \tag{9.11}$$

Обобщенным решением уравнения (9.11) называется функция $u \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ равенству

$$\int_\Omega uP^*(\partial)\varphi d\vec{x} = \int_\Omega f\varphi d\vec{x}. \tag{9.12}$$

Если $u \in C^m(\Omega)$ – классическое решение уравнения (9.11), то умножая (9.11) на $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и интегрируя по частям, можно убедиться, что u является обобщенным решением уравнения (9.11).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.4. *При всех $f \in L_2(\Omega)$ существует и единственным образом определяется обобщенное решение задачи* (9.11)

$$u \in H(P(\partial);\Omega) \cap \mathrm{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega).$$

Доказательство: Как следует из определения, решение $u \in H(P(\partial);\Omega)$ определяется равенством (9.12), которое должно выполняться при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Из теоремы 9.2 следует, что существует единственная функция $w \in \overset{\circ}{H}(P^*(\partial);\Omega)$, удовлетворяющая равенству

$$\int_\Omega P^*(\partial)wP^*(\partial)vd\vec{x} = \int_\Omega fvd\vec{x} \tag{9.13}$$

при всех $v \in \overset{\circ}{H}\left(P^*(\partial);\Omega\right)$ и, следовательно, при всех $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, поэтому функция

$$u = P^*(\partial)\, w \tag{9.14}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ удовлетворяет равенству (9.12) и является решением уравнения (9.11). В силу леммы 9.5 найденное частное решение ортогонально ядру оператора $P(\partial)$.

Таким образом, задача о нахождении решения уравнения (9.11), ортогонального ядру дифференциального оператора $P(\partial)$, имеет единственное решение при любой $f \in L_2(\Omega)$. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что определен разрешающий оператор $T_\perp : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, ставящий в соответствие каждой $f \in L_2(\Omega)$ решение $u \in H\left(P(\partial);\Omega\right) \bigcap \mathrm{Ker}^\perp\left(P(\partial);\Omega\right)$.

Очевидно, что $T_\perp$ является линейным оператором. Докажем ограниченность оператора $T_\perp$. Положим в (9.13) $v = w$. С учетом (9.14) получаем

$$\int_\Omega u^2 d\vec{x} = \int_\Omega f w d\vec{x} \le \|f\|_{2,\Omega} \cdot \|w\|_{2,\Omega}.$$

Из (9.4) следует, что

$$\|w\|_{2,\Omega} \le \sqrt{c(P^*,\Omega)}\,\|P^*(\partial)\,w\|_{2,\Omega} \le \tilde{c}\,\|u\|_{2,\Omega}.$$

Поэтому

$$\|u\|^2_{2,\Omega} \le \tilde{c}\,\|\,u\,\|_{2,\Omega} \cdot \|f\|_{2,\Omega},$$

или

$$\|\,T_\perp f\,\|_{2,\Omega} \le \tilde{c} \cdot \|\,f\,\|_{2,\Omega}.$$

Из теоремы 9.4 следует также сюръективность максимального оператора.

9.2. Общие линейные корректные задачи

Известно, что линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами имеют бесконечное множество решений. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о дополнительных условиях, выделяющих из всей совокупности решений единственное. Для уравнений математической физики с этой целью ставятся различные краевые, начальные и смешанные (начально-краевые) задачи. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений традиционно рассматриваются одноточечные (задача Коши) и многоточечные задачи.

В случае однородных начальных и граничных условий подобные задачи могут быть записаны в следующем виде

$$P(\partial)u(x) = f(x), \tag{I}$$

$$Q([u]) = 0. \tag{II}$$

Здесь $P(\partial)$ – некоторый дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $u(x)$ – неизвестная в области Ω функция, $f(x)$ – заданная в области Ω функция.

Выражение (II) задает всю совокупность дополнительных условий (краевых, начальных и т.д.), при этом оператор Q линеен относительно u.

Постановка задачи (I),(II) может быть дана в следующем виде: для каждой функции $f \in B$ найти функцию $u \in A$, удовлетворяющую уравнению (I) и дополнительным условиям (II).

В постановке задачи (I),(II) A и B – вполне определенные функциональные классы, причем выражения, стоящие в левых частях (I) и (II), должны иметь смысл при все $u \in A$.

Принято говорить, что задача (I),(II) поставлена корректно (корректность по Адамару), если при всех $f \in B$ существует единственное решение $u \in A$ задачи (I), (II) и это решение непрерывно зависит от данных задачи.

Вообще говоря, к данным задачи могут быть отнесены коэффициенты дифференциального оператора $P(\partial)$, функция f, различные параметры, входящие в конкретную запись оператора Q, и сама область Ω. В пособии мы ограничиваемся обсуждением непрерывной зависимости решения лишь от правой части уравнения (I), то есть, от функции $f \in B$.

Если A и B – линейные нормированные пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_A$ и $\|\cdot\|_B$, то корректность по Адамару задачи (I), (II) означает, что определен линейный оператор $T : B \to A$, ставящий в соответствие каждой функции $f \in B$ решение $u \in A$ задачи (I), (II), удовлетворяющий условию ограниченности:

$$\|Tf\|_A \leq C\|f\|_B$$

где положительная постоянная C не зависит от выбора $f \in B$.

Таким образом, в постановке корректной по Адамару задачи для системы (I), (II) принципиальным моментом является выбор функциональных нормированных пространств A и B.

Рассмотрим общий вид корректных задач для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Сужение максимального оператора $P(\partial)$ на подмножество $M \subset H(P(\partial);\Omega)$ будем называть *корректным линейным сужением* и обозначать $P_M(\partial)$, если выполняются следующие условия:

1. область определения $D(P_M(\partial)) = M$ – линейное многообразие в $H(P(\partial);\Omega)$;
2. оператор $P_M(\partial) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ сюръективен и инъективен;
3. обратный оператор $P_M^{-1}(\partial) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ ограничен.

Пусть $M \subset H(P(\partial);\Omega)$ – линейное многообразие такое, что $P_M(\partial)$ – корректное линейное сужение максимального оператора. Тогда задача

$$P(\partial)\,u = f, u \in M \tag{9.15}$$

об определении u при $f \in L_2(\Omega)$ будет называться *линейной корректной задачей.*

Пусть (9.15) – линейная корректная задача. Тогда при всех $f \in L_2(\Omega)$

$$u = P_M^{-1}(\partial)\,f. \tag{9.16}$$

Пусть $\Pi_0 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – оператор проектирования на ядро $\operatorname{Ker}(P(\partial);\Omega)$ оператора $P(\partial)$. Тогда из (9.16) следует

$$\Pi_0 u = \Pi_0\left(P_M^{-1}(\partial)\,f\right).$$

Поскольку $\Pi_0 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $P_M^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – линейные ограниченные операторы, то оператор $L_M = \Pi_0\left(P_M^{-1}(\partial)\,f\right) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – линейный ограниченный оператор с областью значений

$$R(L_M) \subset \operatorname{Ker}(P(\partial);\Omega). \tag{9.17}$$

Таким образом, для каждой корректной задачи (9.16) определен линейный ограниченный оператор $L_M : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ с областью значений (9.17) такой, что

$$\Pi_0 u = L_M(f), f \in L_2(\Omega).$$

Теорема 9.5. *Любая корректная задача* (9.16) *может быть сформулирована в виде*

$$P(\partial)\,u = f, u \in H(P(\partial);\Omega), \tag{9.18}$$

$$\Pi_0 u = Lf, \tag{9.19}$$

где Π_0 *– оператор проектирования из* $L_2(\Omega)$ *на* $\operatorname{Ker}(P(\partial);\Omega)$*,* $L : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ *– линейный ограниченный оператор с областью значений*

$$R(L) \subset \operatorname{Ker}(P(\partial);\Omega). \tag{9.20}$$

Обратно, для любого линейного ограниченного оператора $L : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ *с областью значений* (9.20) *задача* (9.18), (9.19) *– линейная корректная задача, и ее решение записывается в виде*

$$u = T_\perp(f) + L(f), \tag{9.21}$$

где $T_\perp : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ *– оператор, определяющий решение* (9.18)*, ортогональное ядру* $\operatorname{Ker}(P(\partial);\Omega)$.

Доказательство: Достаточно доказать вторую часть теоремы. Так как $L(f) \in \operatorname{Ker}(P(\partial);\Omega)$ при всех $f \in L_2(\Omega)$, $T_\perp(f) \in H(P(\partial);\Omega)$ – решение уравнения (9.18), ортогональное ядру $\operatorname{Ker}(P(\partial);\Omega)$, то выражение (9.21) действительно определяет $u \in H(P(\partial);\Omega)$, удовлетворяющее (9.18),(9.21).

Определим линейное многообразие $M \subset H(P(\partial);\Omega)$ как множество значений оператора $T_\perp + L$:

$$M = R(T_\perp + L). \tag{9.22}$$

С учетом (9.21) заключаем, что $P_M(\partial)$ – линейный оператор, отображающий $M \subset H(P(\partial);\Omega)$ на $L_2(\Omega)$ (сюръективность).

Пусть $u_1, u_2 \in H(P(\partial);\Omega)$ – решение задачи (9.18) – (9.19) при некотором $f \in L_2(\Omega)$. Тогда $u = u_1 - u_2 \in H(P(\partial);\Omega)$ – решение задачи

$$P(\partial)u = 0, u \in H(P(\partial);\Omega), \tag{9.23}$$

$$\Pi_0 u = 0. \tag{9.24}$$

Из (9.24) следует, что $u \in H(P(\partial);\Omega) \cap \operatorname{Ker}^\perp(P(\partial);\Omega)$ и $u = T_\perp(0) = 0$. Следовательно, $P_M(\partial)$ инъективен и имеет обратный оператор (9.21), который, очевидно, ограничен.

Таким образом, каждому линейному ограниченному оператору $L : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ с областью значений (9.20) соответствует линейная корректная задача (9.15), где линейное многообразие M определяется (9.22). □

Замечание. Теорема 9.5 показывает, что множество всех корректных задач (9.16) изоморфно семейству линейных ограниченных операторов $L : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, удовлетворяющих (9.20).

Корректное линейное сужение $P_M(\partial)$ будем называть *правильным корректным сужением*, если $\mathcal{D}(\Omega) \subset M$.

Рассмотрим вопрос об описании произвольных расширений дифференциального оператора $P(\partial)$ с пространства пробных функций на некоторое подпространство $M \subset L_2(\Omega)$ в предположении, что включение M в $H(P(\partial);\Omega)$ ($M \subset H(P(\partial);\Omega)$) может и не выполняться, но при этом соответствующее расширение $\tilde{P}_M(\partial)$ обладает следующими свойствами:

1. область определения $M \subset L_2(\Omega)$ – линейное многообразие из $L_2(\Omega)$;
2. $\tilde{P}_M(\partial)$ – линейный оператор, определенный на M, со значениями в $L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega) \subset M$;
3. оператор $\tilde{P}_M(\partial) : \quad L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ сюръективен, инъективен и обратный оператор $\tilde{P}_M^{-1}(\partial)$ ограничен.

Лемма 9.6. *Произвольное расширение $\tilde{P}_M(\partial)$ оператора $P(\partial)$ на линейное многообразие M обладает следующим свойством: $\overset{\circ}{H}(P(\partial);\Omega)$ является подмножеством M.*

Доказательство: Возьмем любую функцию $u \in \overset{\circ}{H}(P(\partial);\Omega)$. Тогда существует последовательность пробных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, сходящаяся к u:

$$\|u - \varphi_n\|_{H(P)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Следовательно,

$$\|u - \varphi_n\|_{L_2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ и } \|P(\partial)u - P(\partial)\varphi_n\|_{L_2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Отсюда в силу ограниченности оператора $\tilde{P}_M^{-1}(\partial)$, следует, что

$$\tilde{P}_M^{-1}(\partial)P(\partial)\varphi_n \xrightarrow{L_2} \tilde{P}_M^{-1}(\partial)P(\partial)u.$$

Так как на пространстве пробных функций $\tilde{P}_M(\partial)\varphi = P(\partial)\varphi$, то

$$\tilde{P}_M^{-1}(\partial)P(\partial)\varphi_n = \varphi_n \xrightarrow{L_2} u.$$

Таким образом, в силу единственности предела в гильбертовом пространстве

$$\tilde{P}_M^{-1}(\partial)P(\partial)u = u.$$

Следовательно, $u \in M$. $\square$

Описание произвольных расширений дифференциальной операции $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ приведено в работе А.А. Дезина [8].

10. Аппроксимация гильбертовых пространств и численные методы решения дифференциальных уравнений

Подход к численному решению дифференциальных уравнений часто связан с получением так называемой вариационной постановки задачи на некотором гильбертовом пространстве V. Хорошо известен подход для аппроксимации таких задач – метод Галёркина – состоящий в переходе к набору дискретных задач на конечномерных подпространствам V_h пространства V. Важным аспектом при построении аппроксимации является вложение пространств V_h в некоторое пространство Соболева, например, $V_h \in H^1(\Omega)$ или $V_h \in H_0^1(\Omega)$.

10.1. Методы Галёркина и Ритца

Рассмотрим линейную вариационную задачу: найти $u \in V$, удовлетворяющее равенству

$$a(u,v) = f(v) \tag{10.1}$$

для любых $v \in V$. Предполагается, что V – гильбертово пространство; $a(u, v)$ – билинейная форма, $f(v)$ – линейный функционал, удовлетворяющие условиям леммы Лакса–Мильграма.

Метод Галёркина заключается в решении задачи (10.1) на конечномерных подпространствах пространства V. Рассмотрим $V_h \subset V$ – конечномерное подпространство. Дискретной задачей, соответствующей (10.1), будем называть задачу: найти $u_h \in V_h$, удовлетворяющее равенству

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \tag{10.2}$$

для любых $v_h \in V_h$. На основании леммы Лакса–Мильграма заключаем, что задача (10.2) имеет единственное решение.

Если $a(\cdot, \cdot)$ – симметричная форма, то решение задачи (10.2) можно трактовать как нахождение минимума функционала

$$J(v_h) \equiv \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - f(v_h) \to \inf, \quad v_h \in V_h. \tag{10.3}$$

В этом случае, $J(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} J(v_h)$. Такой метод называется методом Ритца.

Рассмотрим некоторый базис $u_1, \ldots, u_N$ конечномерного пространства V_h. Разложим функцию u_h по базису:

$$u_h = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n u_n.$$

Используя в соотношении (10.2) в качестве v_h базисные функции, получаем соотношения

$$a\Big(\sum_{n=1}^{N} \varphi_n u_n, u_k\Big) = f(u_k), \quad k = 1, \ldots, N.$$

На основании линейности формы $a(\cdot, \cdot)$ по каждому аргументу, получаем

$$\sum_{n=1}^{N} a(u_n, u_k) \varphi_n = f(u_k), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Таким образом, получаем систему линейных уравнений

$$Ax = F, \text{ где } A = \big(a(u_n, u_k)\big), \; F = \begin{pmatrix} f(u_1) \\ \vdots \\ f(u_N) \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}.$$

Приближённая задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица линейной системы невырожденна.

10.2. Сходимость семейства дискретных задач

Рассмотрим семейство конечномерных подпространств V_h пространства V. Будем считать, что

$$\lim_{h\to 0} V_h = V.$$

Соответствующее семейство дискретных задач (10.2) называется сходящимся, если

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_V = 0, \quad u \in V.$$

Справедливо следующее утверждение, дающее оценку ошибки для каждого h

Лемма 10.1. (Cea [18]) *Существует такая, не зависящая от подпространства V_h постоянная $C > 0$, что*

$$\|u - u_h\|_V \le C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \tag{10.4}$$

Доказательство: Рассмотрим некоторый элемент w_h пространства $V_h \subset V$. Подставляя его в качестве v или v_h в задачи (10.1) и (10.2), получаем

$$a(u - u_h, w_h) = 0. \tag{10.5}$$

Поскольку w_h – произвольный, тогда

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) = 0$$

для любого $v_h \in V_h$.

Тогда, используя коэрцитивность и ограниченности формы $a(\cdot,\cdot)$, получаем

$$\alpha_* \|u - u_h\|_V^2 \le a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \le \alpha^* \|u - u_h\|_V \cdot \|u - v_h\|_V.$$

Так как элемент $v_h \in V_h$ – произвольный, то неравенство (10.4) справедливо при $C = \alpha^*/\alpha_*$. $\square$

Замечание 1. Из доказанной леммы следует, что достаточным условием сходимости семейства дискретных задач является существование такого семейства $\{V_h\}$ подпространства V, что для любого $u \in V$

$$\lim_{h\to 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V = 0. \tag{10.6}$$

Замечание 2. В случае симметричности формы $a(\cdot,\cdot)$ равенство (10.6), справедливое для любого $w_h \in V_h$, означает, что u_h есть проекция на V_h точного решения $u \in V$ относительно скалярного произведения $a(\cdot,\cdot)$. То есть

$$a(u - u_h, u - u_h) = \inf_{v_h \in V_h} a(u - v_h, u - v_h).$$

используя коэрцитивность и ограниченность формы $a(\cdot,\cdot)$, получаем

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{\alpha^*}{\alpha_*}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Таким образом, неравенство (10.4) показывает, что оценка ошибки вычислений сводится к задаче аппроксимации, то есть задаче о вычислении расстояния

$$d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

между элементом $u \in V$ и подпространством $V_h \subset V$. Данный факт также позволяет судить о такой важной составляющей любого численного метода, как скорость его сходимости. В предположении достаточной гладкости функции u может быть показано, что расстояние $d(u, V_h)$ ограничено функцией $C(u)$, зависящей от нормы точного решения u и его производных до некоторого порядка и не зависящей от h. Тогда справедлива оценка

$$\|u - u_h\|_V \leq C(u) \cdot h^\beta,$$

где $\beta > 0$ – порядок сходимости численного метода.

Литература

[1] Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.

[2] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. 320 с.

[3] Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1952. – Т. 1. – С. 187–246.

[4] Гавриков А.И., Калинин А.В., Новоженов М.М. Элементы общей теории дифференциальных уравнений: учебно-методическое пособие. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.

[5] Гаврина И.В., Ильинский Д.И., Калинин А.В., Эгамов А.И. Элементы общей теории корректных задач: учебно-методическое пособие. – – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. – 33 с.

[6] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

[7] Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с.

[8] Дезин А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. – 2000. – Т. 229.

[9] Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980.

[10] Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976.

[11] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

[12] Калинин А.В. Оценки скалярных произведений векторных полей и их применение в математической физике: Учебное пособие. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. – 319 с.

[13] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.

[14] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. 372 с.

[15] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.:Мир, 1985. — 590 с.

[16] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979.

[17] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

[18] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980.

[19] Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

[20] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

[21] Фикера Г. Теорема существования в теории упругости. – М.: Мир, 1974. – 160 с.

[22] Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

[23] Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965.

[24] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. 400 с.

[25] Girault V., Raviart P.-A. Finite Element Approximation of the Navier–Stokes Equa- tions – Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1979. – 207 pp.

[26] Sobolev S.L. Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy les équations linéaires hyperboliques normales // Mat. sb. 1936. – Vol. 1 (43). – Pp. 39–72.